TUGAS AKHIR – SM141501

PENDEKATAN METODE BAYESIAN UNTUK KAJIAN ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI LOG-NORMAL UNTUK NON-INFORMATIF PRIOR

EVI NOOR DIANA
NRP 1212 100 054

Dosen Pembimbing
Drs. Soehardjoepri, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

FINAL PROJECT – SM141501

A BAYESIAN APPROACH TO LOG-NORMAL PARAMETER ESTIMATION FOR NON-INFORMATIVE PRIOR

EVI NOOR DIANA
NRP 1212 100 054

Supervisors
Drs. Soehardjoepri, M.Si

DEPARTMEN OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Naturan Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

PENDEKATAN METODE BAYESIAN UNTUK KAJIAN ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI LOG-NORMAL UNTUK NON-INFORMATIF PRIOR

A BAYESIAN APPROACH TO LOG-NORMAL PARAMETER ESTIMATION FOR NON-INFORMATIVE PRIOR

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
EVI NOOR DIANA
NRP. 1212100054

Menyetujui,
DosenPembimbing,

Drs. Soehardjoepri, M.Si
NIP. 19620504 198701 1 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 26 Juli 2016

PENDEKATAN METODE BAYESIAN UNTUK KAJIAN ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI LOG-NORMAL UNTUK NON-INFORMATIF PRIOR

Nama	**: Evi Noor Diana**
NRP	**: 1212 100 054**
Jurusan	**: Matematika**
Dosen Pembimbing	**: Drs. Soehardjoepri, M.Si**

ABSTRAK

Distribusi Log-Normal merupakan salah satu dari beberapa distribusi kontinu. Distribusi Log-Normal tersebut memiliki parameter mean θ dan varians σ^2 yang bisa diestimasi. Penelitian dilakukan dengan metode Bayesian yaitu penggabungan fungsi likelihood dan distribusi prior, sehingga diperoleh distribusi posterior. Distribusi prior yang digunakan adalah non-informatif prior. Teknik penentuan dari non-informatif prior menggunakan metode Jeffrey's dari distribusi Log-Normal. Setelah didapatkan distribusi posterior, diperoleh distribusi marginal dari mean θ dan varians σ^2 dan langkah selanjutnya adalah mencari ekspektasi dari distribusi marginal. Hasil akhirnya mendapatkan estimasi titik untuk mean θ dan varians σ^2.

Kata Kunci **: Distribusi Log-Normal, Metode Bayesian, Non-Informatif Prior, Metode Jeffrey's, Distribusi Posterior.**

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

A BAYESIAN APPROACH TO LOG-NORMAL PARAMETER ESTIMATION FOR NON-INFORMATIVE PRIOR

Name of Student : Evi Noor Diana
NRP : 1212 100 054
Department : Mathematics
Supervisor : Drs. Soehardjoepri, M.Si

ABSTRACT

Log-Normal distribution is one of the few continuous distributions. Log-Normal distribution has parameters that must be estimated that the mean parameter θ and variance σ^2. The study was conducted by using a Bayesian approach, namely the incorporation of likelihood function and the prior distribution, in order to obtain the posterior distribution. Prior distribution used is non-informative prior. Mechanical determination of non-informative prior is used Jeffrey's method of distribution univariate Log-Normal. Having obtained the posterior distribution, marginal distribution obtained from the mean θ and variance σ^2 and the next step is to look for expectations of marginal distribution. The end result is getting the point estimate for the mean θ and variance σ^2.

Keyword : Log-Normal distribution, Bayesian method, Non-Informative Prior, Jeffrey's method, Posterior distribution.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR SIMBOL

θ	Mean
σ	Standart deviasi
σ^2	Varians
$f(x)$	Fungsi kepadatan peluang dari variabel acak x
π	Phi
$E(x)$	Nilai ekspektasi variabel acak x
$L(\theta)$	Likelihood
n	Parameter Beta
$f(\vartheta)$	Non-informatif prior
I	Informasi Fisher
Γ	Fungsi Gamma
J	Jacobian
m	Parameter Beta
c	Konstanta normal
c^{-1}	Invers konstanta normal
$f(\theta,\sigma^2\|x)$	Distribusi posterior
$f(\theta\|x)$	Distribusi marginal untuk θ
$f(\sigma^2\|x)$	Distribusi marginal untuk σ^2
θ^*	Estimasi posterior dari θ
${\sigma^2}^*$	Estimasi posterior dari σ^2
θ_1^*	Nilai estimasi mean θ
${\sigma^2}_1^*$	Nilai estimasi varians σ^2

" Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB I
PENDAHULUAN

Bab ini membahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup indentifikasi permasalahan yang kemudian dirumuskan menjadi permasalahan dan diberikan batasan-batasan untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Data populasi dalam suatu penelitian berguna untuk mengetahui karakteristik objek yang akan menghasilkan gambaran akurat mengenai karakteristik objek tersebut. Statistika inferensial digunakan untuk mengambil keputusan atau kesimpulan pada suatu populasi dengan berbagai keterbatasan dan kendala, suatu penelitian mengalami kesulitan untuk mengamati keseluruhan individu atau elemen yang menyusun populasi. Langkah alternatif yang dapat dilakukan yaitu penaksiran parameter populasi dengan menggunakan sampel yang diambil secara acak dari sebuah populasi atau yang biasa disebut estimasi[1].

Estimasi adalah suatu proses dengan menggunakan statistik sampel untuk menaksir parameter populasi. Pada statistika inferensial, estimasi yakni sebuah prosedur untuk mencari parameter dari sebuah model yang paling cocok pada suatu data pengamatan yang ada. Terdapat beberapa metode yang biasanya digunakan dalam estimasi parameter yakni *Ordinary Least Square* (OLS), *Generalize Least Square* (GLS), *Maximum Likelihood Estimator* (MLE), dan metode Bayesian[2].

Metode Bayesian merupakan suatu metode yang diperlukan untuk menaksir parameter yang akan diestimasi dengan memanfaatkan informasi awal (prior) dari suatu populasi. Informasi ini kemudian digabungkan dengan informasi dari sampel yang digunakan dalam mengestimasi parameter populasi. Pada metode Bayesian, peneliti harus menentukan distribusi prior dari parameter yang ditaksir. Distribusi ini dapat berasal dari data penelitian sebelumnya atau berdasarkan intuisi seorang peneliti. Setelah informasi dari data yang didapat dari pengambilan sampel digabungkan dengan informasi prior dari parameter, akan didapat distribusi posterior dari parameter[3].

Metode Bayesian adalah sebuah metode yang menggabungkan informasi dari data sampel dan informasi dari data sebelumnya (prior). Prior menurut sifatnya terbagi menjadi dua yaitu informatif prior dan non-informatif prior. Informatif prior adalah prior yang diketahui pola/frekuensi distribusi dari data sedangkan non informatif prior belum diketahui pola/frekuensi distribusi dari data. Menurut Bayes, parameter populasi berasal dari suatu distribusi, sehingga nilainya tidaklah tunggal dan merupakan variabel acak, sedangkan menurut metode lain parameter populasi diasumsikan tetap (konstan) walaupun nilainya tidak diketahui[4].

Informasi dari data sampel mempunyai sebaran data diskrit dan kontinu. Untuk sebaran data kontinu meliputi distribusi Normal, distribusi Gamma, distribusi Log-Normal, distribusi Eksponensial dan lain-lain. Distribusi Log-Normal merupakan distribusi dari suatu variabel acak yang logaritmanya berdistribusi Normal[5].

Distribusi Log-Normal merupakan distribusi miring. Distribusi yang miring dapat terjadi saat nilai mean rendah, variansi tinggi dan nilainya tidak ada yang negatif, dalam hal ini, sebagai contoh, distribusi sumber mineral dalam bumi, atau lamanya infeksi suatu penyakit berbahaya[6].

Salah satu contoh penelitian yang membahas masalah estimasi parameter distribusi diskrit dengan pendekatan metode Bayesian adalah penelitian yang dilakukan Indriyani. Penelitiannya menjelaskan tentang cara mengestimasi parameter distribusi Binomial Negatif untuk prior yang bersifat informatif. Prior dari distribusi Binomial Negatif adalah distribusi Beta. Selanjutnya, menggabungkan informasi dari data sampel dengan informasi prior dan diperoleh distribusi posterior[7].

Berdasarkan penelitian tersebut, Tugas Akhir ini membahas tentang estimasi parameter distribusi Log-Normal untuk non-informatif prior dengan menggunakan pendekatan metode Bayesian. Adapun judul Tugas Akhir ini adalah "**Pendekatan Metode Bayesian Untuk Kajian Estimasi Parameter Distribusi Log-Normal Untuk Non-Informatif Prior**". Pada tugas akhir ini, Metode Bayesian digunakan untuk mengestimasi parameter dari distribusi Log-Normal.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang maka permasalahan yang akan dibahas bagaimana mendapatkan estimasi parameter θ dan σ^2 dari distribusi Log-Normal?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, batasan masalah dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Pendekatan dari non-informatif prior adalah dengan menggunakan metode Jeffrey's.
2. Tidak membahas sifat-sifat estimasi yang baik, yakni tidak bias, konsisten, varian minimum, dan statistik cukup.

1.4 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah mengkaji estimasi parameter θ dan σ^2 distribusi Log-Normal menggunakan metode Bayesian untuk non-informatif prior.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan.

2. Memahami kajian estimasi parameter menggunakan metode Bayesian.
3. Sebagai literatur penunjang bagi mahasiswa yang menempuh jenjang sarjana.

1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Sistimatika penulisan dalam laporan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. BAB I : PENDAHULUAN
   Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan Tugas Akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistimatika penulisan laporan Tugas Akhir.

2. BAB II : DASAR TEORI
   Bab ini menjelaskan tentang parameter, distribusi Normal, distribusi Log-Normal, metode Jeffrey's, informasi Fisher, non-informatif prior, distribusi posterior, dan estimasi posterior.

3. BAB III : METODOLOGI
   Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

4. BAB IV : ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Bab ini menjelaskan tentang pembahasan secara keseleruhan dalam mengestimasi parameter yaitu dari penentuan non-informatif prior dan penentuan distribusi posterior.

5. BAB V : PENUTUP
   Bab ini menjelaskan tentang penarikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
DASAR TEORI

Bab ini dibahas mengenai estimator Bayes untuk parameter means dan varians dari distribusi Log-Normal. Tetapi sebelumnya bab ini diuraikan mengenai distribusi Normal, distribusi Log-Normal, fungsi Likelihood, estimasi parameter, metode Bayesian, metode Jeffrey's, informasi Fisher, non-informatif prior, dan distribusi Posterior.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian yang dilakukan Eva Natalia (2008) telah diperoleh nilai integral mean dan varian distribusi Log-Normal menggunakan Teorema Raoback Well dengan metode *Unbiased Maximum Varian Uniform Estimator* (UMVUE)[6]. Sedangkan pada penilitian yang dilakukan oleh Indriyani Fifin (2008) telah diperoleh estimasi p pada distribusi Binomial Negatif menggunakan metode pendekatan Bayesian[7]. Pada penelitian yang dilakukan oleh Sultan dan Ahmad (2013) telah diperoleh nilai varian terkecil dari metode *Maximum Likelihood Estimator* (MLE)[8].

2.2 Perameter dan Statistik

Terminologi dan notasi yang digunakan statistikawan dalam mengolah data statistik sepenuhnya bergantung pada apakah data tersebut merupakan populasi. Populasi adalah kumpulan dari keseluruhan pengukuran atau objek. Sedangkan sampel adalah sebagian atau subset (himpunan bagian) dari suatu populasi. Adapun definisi dari parameter sebagai berikut:

Definisi 2.1

Parameter adalah bilangan yang menggambarkan karakteristik suatu populasi[1]. ■

Adapun definisi dari statistik sebagai berikut:

Definisi 2.2
Statistik adalah bilangan yang menggambarkan karakteristik suatu sampel[1]. ■

2.3 Distribusi Normal

Distribusi Normal sering disebut juga dengan Distribusi Gauss. Distribusi Normal merupakan distribusi yang secara luas banyak digunakan dalam berbagai penerapan. Distribusi Normal merupakan salah satu distribusi kontinu. Distribusi Normal memiliki karakteristik yang penting, yaitu distribusi probabilitas datanya terpusat disekitar mean. Grafik fungsi kepadatannya berbentuk lonceng (*bell-shaped)*. Distribusi Normal adalah distribusi yang simetris[1]. Adapun definisi dari distribusi Normal sebagai berikut:

Definisi 2.3
Jika Y adalah suatu peubah acak berdistribusi normal dengan mean θ dan varians σ^2, dinotasikan $Y \sim N(\theta, \sigma^2)$ maka fungsi kepadatan probabilitas (pdf) sebagai berikut [1]:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\theta}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty \leq y \leq \infty$$

dimana

θ : mean

σ : standart deviasi ■

sehingga terdapat definisi lain dari distribusi normal yakni distribusi Normal baku,

Definisi 2.4
Disrtibusi Normal baku adalah distribusi peubah acak normal dengan mean 0 dan simpangan baku 1 yang dinotasikan $Y \sim N(0,1)$[1].

$$f(y; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right], \quad -\infty \leq y \leq \infty$$ ■

2.4 Distribusi Log-Normal

Distribusi Log-Normal dalam bentuk sederhana adalah fungsi densitas dari sebuah peubah acak yang logaritmanya mengikuti hukum distribusi Normal. Distribusi Log-Normal merupakan distribusi tidak simetri/ miring yang mana probabilitas data-data lainnya tersebar tidak secara merata. Grafik fungsi kepadatannya tidak berbentuk lonceng (*bell-shaped)* tidak seperti distribusi Normal. Distribusi Log-Normal termasuk distribusi jenis logaritmik. Adapun definisi dari distribusi Log-Normal sebagai berikut:

Definisi 2.5
Jika $Y \sim N(\theta, \sigma^2)$ maka $X = e^Y \sim LN(\theta, \sigma^2)$. Karena X dan Y dihubungkan oleh relasi $Y = \ln x$, pdfnya adalah sebagai berikut [1] :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x - \theta}{\sigma}\right)^2\right], & x > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases} \qquad (2.1)$$ ■

Distribusi Log-Normal mempunyai mean dan varians, teorema berikut akan memberikan mean dan varians sebagai berikut:

Teorema 2.1
Variabel acak positif X yang berdistribusi Normal mempunyai mean $\exp\left(\theta+\frac{\sigma^2}{2}\right)$ dan varians $\exp[2\theta+\sigma^2](exp[\sigma^2]-1)$[1]. ■

Bukti :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} x\,f(x)dx + \int_{0}^{\infty} x\,f(x)dx$$

dari definisi 2.5, jika $x<0$ maka $\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)dx = 0$

$$E(X) = 0 + \int_{0}^{\infty} x\frac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}}\ exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln \mathrm{x} - \theta}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} x\frac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}}\ exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln \mathrm{x} - \theta}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

misalkan:

$$z = \frac{\ln \mathrm{x} - \theta}{\sigma} \rightarrow \ln x = \sigma z + \theta$$

$$x = \exp[\sigma z + \theta]$$

$$dz = \frac{1}{x\sigma}dx \rightarrow dx = \sigma \exp[\sigma z + \theta]\ dz$$

dengan perubahan batas dalam z:

$$x = 0 \rightarrow z = -\infty$$

$$x = \infty \rightarrow z = \infty$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]\sigma\ exp[\sigma z + \theta]dz$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left[-\frac{z^2}{2} + \sigma z + \theta)\right] dz$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left[-\frac{z^2}{2} + \sigma z + \theta + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2})\right] dz$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left[-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2 + \left(\theta + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] dz$$

$$E(X) = exp\left[\theta + \frac{\sigma^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left[-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2\right] dz \quad (2.2)$$

karena $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left[-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2\right] dz$ merupakan definisi 2.4 sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left[-\frac{1}{2}(z)^2\right] dz = 1 \quad (2.3)$$

selanjutnya dengan mensubtitusikan persamaaan (2.3) pada persamaan (2.2), maka diperoleh

$$E(X) = exp\left[\theta + \frac{\sigma^2}{2}\right].1 \quad (2.4)$$

jadi terbukti mean $= E(X) = exp\left[\theta + \frac{\sigma^2}{2}\right]$ ■

Sehingga untuk varians dari distribusi Log-Normal

$$\sigma^2 = E([X-\theta]^2) = E(X^2) - [E(X)^2] \quad (2.5)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x)^2 . f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x)^2 \frac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$E(X^2) = 0 + \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

misalkan:

$$z = \frac{\ln x - \theta}{\sigma} \rightarrow \ln x = \sigma z + \theta$$

$$x = \exp[\sigma z + \theta]$$

$$dz = \frac{1}{x\sigma} dx \rightarrow dx = \sigma \exp[\sigma z + \theta]\ dz$$

dengan perubahan batas dalam z:

$$x = 0 \rightarrow z = -\infty$$

$$x = \infty \rightarrow z = \infty$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\sigma z + \theta] \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \sigma \exp[\sigma z + \theta]\, dz$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\sigma z + \theta] \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \exp[\sigma z + \theta]\, dz$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\frac{z^2}{2} + 2\sigma z + 2\theta\right] dz$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\frac{z^2}{2} + 2\sigma z + 2\theta + 2\sigma^2 - 2\sigma^2\right] dz$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\frac{1}{2}(z - 2\sigma^2)^2 + 2\theta + 2\sigma^2\right] dz$$

$$E(X^2) = exp[2\theta + 2\sigma^2] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, exp\left[-\frac{1}{2}(z - 2\sigma^2)^2\right] dz$$

$$E(X^2) = exp[2\theta + 2\sigma^2] \tag{2.6}$$

Selanjtnya dengan mensubtitusikan persamaan (2.4) dan (2.6) pada persamaan (2.5), maka diperoleh

$$\sigma^2 = E([X - \theta]^2) = E(X^2) - [E(X)^2]$$

$$\sigma^2 = exp[2\theta + 2\sigma^2] - \left(exp\left[\theta + \frac{\sigma^2}{2}\right]\right)^2$$

$$\sigma^2 = exp[2\theta + 2\sigma^2] - exp[2\theta + \sigma^2]$$

$$\sigma^2 = exp[2\theta + \sigma^2](exp[\sigma^2] - 1) \tag{2.7}$$

jadi terbukti varians = $exp[2\theta + \sigma^2](exp[\sigma^2] - 1)$ ■

2.5 Fungsi Likelihood

Secara umum, untuk suatu variabel acak kontinu, fungsi likelihood bukan suatu peluang melainkan mencerminkan likelihood (kemungkinan) himpunan yang diamati dari data $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang akan terjadi. Adapun definisi fungsi likelihood sebagai berikut:

Definisi 2.6

Fungsi densitas bersama dari n variabel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$, dievaluasi pada $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bisa dikatakan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \theta)$ disebut sebagai fungsi likelihood. Untuk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ konstan, fungsi likelihood adalah sebuah fungsi dari θ dan dinotasikan dengan $L(\theta)$. Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menyatakan suatu sampel acak dari $f(x|\theta)$ maka [7]

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \ldots . f(x_n ; \theta)$$ ■

2.6 Pendekatan Metode Bayesian

Metode Bayesian adalah suatu pendekatan statistik yang berlandaskan pada ide-ide sebagai berikut:

1. Jika orang tak yakin akan nilai sebenarnya dari parameter θ, maka parameter θ dianggap sebagai variabel acak.
2. Aturan probabilitas digunakan secara langsung untuk melakukan inferensial tentang parameter θ.
3. Pernyataan probabilitas tentang parameter diinterpretasikan sebagai derajat kepercayaan. Distribusi prior bersifat subyektif. Setiap orang bisa memilih priornya sendiri, yang mengukur sejauh mana bisa diterima/dipercaya setiap parameter tersebut sebelum percobaan.

2.7 Distribusi Prior

Distribusi prior adalah distribusi awal yang harus ditentukan terlebih dahulu sebelum merumuskan distribusi posteriornya. Distribusi prior bersifat informatif dan non-informatif. Non-informatif prior mengindikasikan adanya kekurangan informasi[9].

Ada dua interpretasi dasar yang diberikan pada distribusi prior, yakni[9]

1. Dalam interpretasi populasi, disebut prior dapat mewakili nilai parameter yang mungkin dari populasi yang mana nilai sudah diketahui.
2. Dalam interpretasi ketentuan umum yang subjektif, prinsip yang mengarahkan harus menyatakan pengetahuan kita tentang parameter jika nilai parameter adalah variabel acak dari distribusi prior.

2.7.1 Non-Informatif Prior

Distribusi prior dikatakan non-informatif jika prior relatif datar terhadap fungsi likelihood. Dengan demikian memiliki dampak minimal pada distribusi posteror. Salah satu bentuk pendekatan dari prior non-informatif adalah dengan menggunakan metode Jeffrey's. Adapun definisi dari metode Jeffrey's sebagai berikut:

■

Definisi 2.7
Metode Jeffrey's adalah distribusi prior untuk satu parameter θ berada disekitar non-informatif jika diambil proposional maka akar kuadrat dari informasi Fisher [9].

$$f(\theta) = [I(\theta)]^{\frac{1}{2}}$$

dimana $I(\theta)$ merupakan nilai harapan informasi Fisher

$$I(\theta) = -E_\theta\left[\frac{\partial^2 \log f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right]$$

2.7.2 Fungsi Gamma

Fungsi Gamma mempunyai peranan penting dibanyak cabang matematika terapan. Adapun definisi fungsi Gamma sebagai berikut:

Definisi 2.8
Fungsi Gamma didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx, \quad untuk\ n > 0$$ ■

adapun teorema dari fungsi Gamma sebagai berikut:

Teorema 2.2
Sifat-sifat penting dari fungsi Gamma adalah[6]

1. Untuk setiap $n > 1$ berlaku $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$
2. Untuk sebuah bilangan bulat positif n, $\Gamma(n) = \Gamma(n-1)!$
3. Nilai dari $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ■

Bukti :

1. Dari definisi 2.8 yang menyatakan suatu fungsi Gamma dengan

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

misalkan:

$u = x^{n-1} \Leftrightarrow du = (n-1)\, x^{n-2}\ dx$

$dv = e^{-x}\ dx \Leftrightarrow v = -e^{-x}$

Integral parsial untuk $\Gamma(n)$ dinyatakan dengan

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\Gamma(n) = \lim_{p\to\infty}\left(x^{n-1}(-e^{-x}) - \int_0^p (-e^{-x})(n-1)\, x^{n-2}\, dx\right)$$

$$\Gamma(n) = \lim_{p\to\infty}\left(\left(-x^{n-1}e^{-x}\big|_{n=0}^{p}\right) + (n-1)\int_0^p x^{n-2} e^{-x}\, dx\right)$$

$$\Gamma(n) = 0 + (n-1)\Gamma(n-1)$$

Jadi terbukti bahwa berlaku $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$, untuk setiap $n > 1$. ■

2. Dari hasil permbuktian (1) bahwa $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$,
untuk n $= (n+1)$ diperoleh persamaan $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$
dari definisi 2.8 menyatakan bahwa

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

Jika $n = 1$ maka diperoleh nilai $\Gamma(1)$ sebagai berikut:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

$$\Gamma(1) = \lim_{u\to\infty} \int_0^u e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma(1) = \lim_{u\to\infty} [-e^{-x}]_0^u$$

$$\Gamma(1) = \lim_{u\to\infty} (-e^{-x} + e^0)$$

$$\Gamma(1) = \left(-\frac{1}{e^\infty} + e^0\right)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

Jika diketahui bahwa $\Gamma(1) = 1$ maka subtitusi nilai $n = 1,2,3 ...$ pada persamaan $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ diperoleh

$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1.1 = 1$

$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2!$

$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$

.

.

.

$\Gamma(n) = (n-1)!$ ■

3. Menurut definisi 2.8 bahwa bentuk lain dari

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

Misalkan:

$x = y^2 \Leftrightarrow dx = 2\mathrm{y}\,\mathrm{dy}$

Batas:

$x = 0 \Rightarrow \mathrm{y} = 0$

$x = \infty \Rightarrow \mathrm{y} = \infty$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{2(n-1)} e^{-y^2} 2y\, dy$$

atau

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2}\, dy$$

Persamaan berikut disusun dengan memasukkan nilai $n = \frac{1}{2}$ pada bentuk lain dari fungsi Gamma untuk membuktikan bahwa nilai dari $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty y^0 e^{-y^2}\, dy$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \,.\, 2\int_0^\infty e^{-z^2}\, dz$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2+z^2)}\, dydz$$

Variabel y dan z pada persamaan diatas diubah kedalam bentuk koordinat polar dengan hubungan sebagai berikut:

$y = r\ \cos\theta$ dan $z = r\sin\theta$

Dengan $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ dan $\theta = arctg\ \frac{y}{z}$

Transformasi Jacobian dari koordinat (y,z) menjadi koordinat polar (r, θ) dinyatakan dengan

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\mathrm{r}\sin\theta \\ \sin\theta & \mathrm{r}\cos\theta \end{vmatrix}$$
$$J = r(cos^2\theta + sin^2\theta)$$
$$J = r$$

Batas:
$y = 0 \Rightarrow \mathrm{r} = 0$
$y = \infty \Rightarrow \mathrm{r} = \infty$
$z = 0 \Rightarrow \theta = 0$
$z = \infty \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

Elemen luas $dydz = r\ dr\ d\theta$, sehingga persamaan

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2+z^2)}\ dydz$$

menjadi,

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 4\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2}\ r\ dr\ d\theta$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \left(2\int_0^{\pi/2} d\theta\right).\left(2\int_0^\infty e^{-r^2}\ r\ dr\right)$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 2\left[\theta|_0^{\pi/2}\right].2\left(\int_0^\infty e^{-r^2}\ r\ dr\right)$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi.\ 2\left(\lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-r^2}\ r\ dr\right)$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi.\ 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \sqrt{\pi} \qquad \blacksquare$$

2.7.3 Fungsi Beta

Fungsi Beta diidentifikasi oleh dua parameter yaitu m dan n dan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.9

Untuk m >0, n >0, fungsi Beta $B(m,n)$ didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\,dx \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya akan diberikan teorema tentang hubungan fungsi Gamma dan fungsi Beta.

Teorema 2.3

Hubungan fungsi Gamma dan fungsi Beta adalah sebagai berikut:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad \blacksquare$$

Bukti :

dengan menggunakan bentuk fungsi Gamma yang lain

$$\Gamma(m) = 2\int_0^\infty y^{2m-1}\,e^{-y^2}dy$$

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty z^{2n-1}\,e^{-z^2}dz$$

sehingga,

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2m-1}\, e^{-y^2} dy\ \ 2\int_0^\infty z^{2n-1}\, e^{-z^2} dz$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty y^{2m-1} z^{2n-1}\, e^{-(y^2+z^2)} dy\ \ dz$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} ((r\ \cos\theta)^{2m-1}\, (r\sin\theta)^{2n-1}).$$

$$e^{-r^2} r dr\ d\theta$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} (r^{\ 2m-1} \cos^{2m-1}\theta\, r^{2n-1} \sin^{2n-1}\theta)\ .$$

$$e^{-r^2} r dr\ d\theta$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \left(r^{\ 2m+2n-2}\, e^{-r^2} \mathrm{r} \cos^{2m-1}\theta\, r^{2n-1} \sin^{2n-1}\theta\right).$$

$$e^{-r^2} dr\ d\theta$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 2\int_0^\infty -r^{\ 2(m+n-1)}\, e^{-r^2}\, \mathrm{d}(-r^2)\ \ .$$

$$2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta\ \ d\theta$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n)B(m,n)$$
$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

jadi terbukti bahwa hubungan antara fungsi Gamma dan Beta adalah

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad \blacksquare$$

2.8 Distribusi Posterior

Distribusi Posterior berkaitan dengan penentuan masing-masing parameter pada pola distribusi prior tersebut. Distribusi non-informatif prior didapat dengan menggunakan metode Jeffrey's. Pemberian nilai parameter pada distribusi prior ini akan sangat mempengaruhi bentuk distribusi posterior[6]. Adapun definisi distribusi posterior sebagai berikut:

Definisi 2.10

Distribusi posterior merupakan perkalian antara fungsi likelihood dengan distribusi prior[9].

$$posterior \propto likelihood\,.prior \qquad \blacksquare$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Tahapan Pelitian

Objek guna mencapai tujuan dari penulisan ini, akan dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mengkaji Estimasi Parameter

   Pada tahap ini mengkaji estimasi parameter θ dan σ^2 dari distribusi Log-Normal.

2. Distribusi Posterior

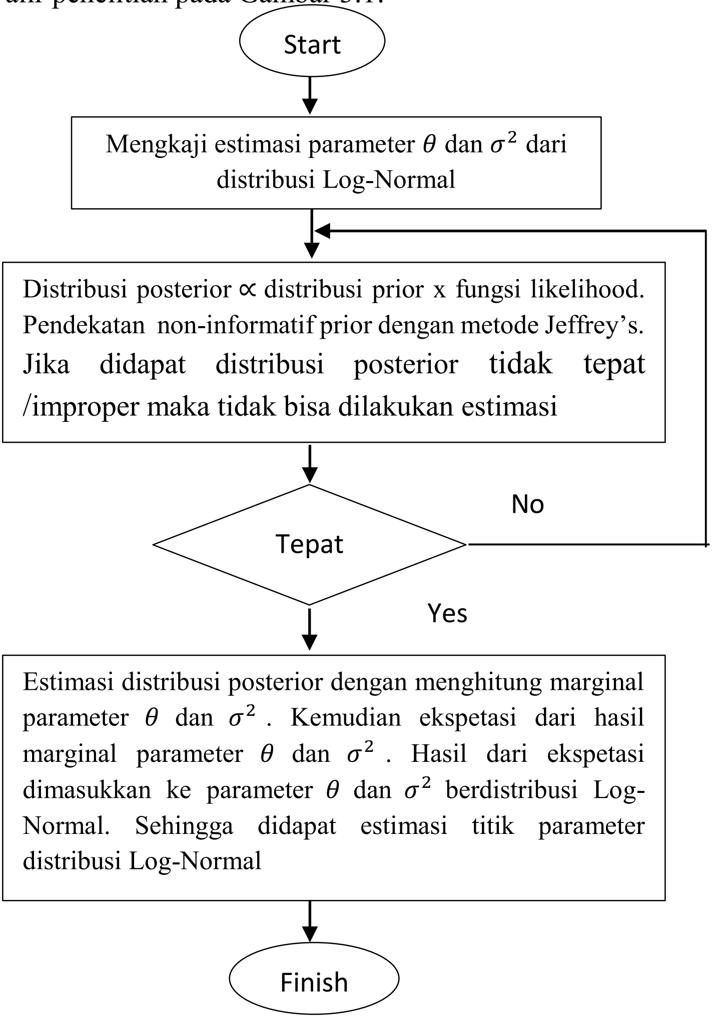
   Pada tahap ini mencari distribusi posterior yaitu mengkalikan distribusi prior dengan fungsi likelihood. Distribusi prior untuk non-informatif prior didapat dengan metode Jeffrey's yaitu akar kuadrat dari informasi Fisher. Kemudian menghitung fungsi likelihood dari distribusi Log-Normal. Langkah selanjutnya mengalikan fungsi likelihood dengan distribusi prior. Jika didapat distribusi posterior improper maka tidak bisa dilakukan tahap estimasi.

3. Estimasi Distribusi Posterior

   Pada tahap ini akan dilakukan estimasi distribusi posterior dengan menghitung marginal parameter θ dan σ^2. Kemudian ekspetasi dari hasil marginal parameter θ dan σ^2. Hasil dari ekspetasi dimasukkan ke parameter θ dan σ^2 berdistribusi Log-Normal. Sehingga didapat estimasi titik parameter distribusi Log-Normal.

3.2 Diagram Alir Metode Penelitian

Secara umum tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini ditampilkan dalam diagram alir penelitian pada Gambar 3.1:



Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Penelitian

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai analisis estimasi parameter mean θ dan varians σ^2 distibusi Log-Normal menggunakan metode Bayesian. Fungsi likelihood dan distribusi prior dibutuhkan untuk mendapatkan distribusi posterior. Setelah didapat distribusi posterior lalu marginal dari parameter mean θ dan varians σ^2 dibutuhkan untuk mendapatkan estimasi posterior berupa estimasi titik.

4.1 Fungsi Likelihood dari Distribusi Log-Normal

Jika $X_1, X_2, \ldots., X_n$ adalah sampel acak berdistribusi Log-Normal dengan densitas $f(x_1;\ \theta, \sigma^2)$ maka fungsi likelihoodnya didefinisikan dengan[2]:

$$L(\theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta, \sigma^2)$$

$$L(\theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i \sigma \sqrt{2\pi}}\, exp\left[\frac{-\,(\ln x_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$= (2\pi\,\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} (x_1)^{-1}\, exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x_1 - \theta)^2\right] \ldots$$

$$(2\pi\,\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\,(x_n)^{-n}\, exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x_n - \theta)^2\right]$$

$$L(\theta, \sigma^2) = (2\pi\,\sigma^2 {x_i}^2)^{-\frac{n}{2}}\, exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \theta)^2\right] \quad (4.1)$$

4.2 Non-Informatif Prior dari Distribusi Log-Normal

Distribusi non-informatif prior $f(\vartheta)$ dimana ϑ terdiri dari θ dan σ^2 dinotasikan $f(\vartheta) = f(\theta, \sigma^2)$, kemudian variabel acak θ dan σ^2 dikatakan bebas jika dan hanya jika $f(\theta, \sigma^2) = g(\theta).\,h(\sigma^2)$. Menentukan distribusi non-informatif prior untuk $h(\sigma^2)$ adalah sebagai berikut[3]:

$$f(x;\theta,\sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\ exp\left[\frac{-(\ln x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\log f(x;\theta,\sigma^2) = -\frac{1}{2}\log 2\pi\ - \frac{1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2}\log x^2 - \left(\frac{(\ln x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Jika $u = \sigma^2$ maka

$$\log f(x;\theta,u) = -\frac{1}{2}\log 2\pi\ - \frac{1}{2}\log u - \frac{1}{2}\log x^2 - \left(\frac{(\ln x-\theta)^2}{2u}\right)$$

$$\frac{d\ \log f(x;\theta,u)}{du} = -\ \frac{1}{2u} + \frac{(\ln x-\theta)^2}{2u^2}$$

$$\frac{d^2\ \log f(x;\theta,u)}{du^2} = \frac{1}{2u^2} - \frac{(\ln x-\theta)^2}{u^3}$$

$$\frac{d^2\ \log f(x;\theta,u)}{du^2} = \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(\ln x-\theta)^2}{\sigma^6}$$

$$I(\sigma^2) = -E\ \left[\frac{d^2\ \log f(x;\theta,u)}{du^2}\right]$$

$$I(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4}$$

$$h(\sigma^2) = \sqrt{I(\sigma^2)} = \sqrt{\frac{1}{2\sigma^4}} \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

Sedangkan nilai non-informatif prior untuk $g(\theta)$ = konstan[9] sehingga diperoleh nilai non-informatif prior

$$f(\vartheta) = f(\theta,\sigma^2) = g(\theta).h(\sigma^2) = c\ .\frac{1}{\sigma^2} \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

Jadi nilai non-informatif prior

$$f(\vartheta) = \frac{1}{\sigma^2} \qquad (4.2)$$

4.3 Distribusi Posterior

Setelah mencari fungsi likelihood dan menentukan distribusi prior dari distribusi Log-Normal dapat dicari distribusi posteriornya. Kepadatan posterior bersama dari θ dan σ^2 adalah diberikan

$posterior \; \propto prior. fungsi\ likelihood$

$f(\theta,\sigma^2|x) \propto \; f(\vartheta).L(\theta,\sigma^2)$

dari persamaan (4.1) dan (4.2) Kepadatan posterior bersama dari θ dan σ^2 adalah diberikan

$$f(\theta,\sigma^2|x) \propto \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi x_i}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\theta)^2\right]$$

$$f(\theta,\sigma^2|x) \propto \frac{c}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}} exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]. \exp\left[\frac{-n}{2\sigma^2}\left(\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right] \tag{4.3}$$

dimana

$$\beta = (n-1)\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2}{n}$$

dan c adalah konstanta normal. Box & Tiao (1973) menjelaskan jika $f(\vartheta)$ menjadi prior dan $L(\theta,\sigma^2)$ menjadi fungsi likelihood, fungsi padat peluang (pdf) posterior $f(\theta,\sigma^2|x)$ diberikan $f(\theta,\sigma^2|x) = c\, f(\vartheta)L(\theta,\sigma^2)$, dimana c adalah konstanta normal. Lalu nilai dari c diperoleh dari

$$c = \left[\iint f(\vartheta)L(\theta,\sigma^2)d\theta\, d\sigma^2\right]^{-1}$$

dimana c dapat menjadi

$$c^{-1} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta,\sigma^2|x)\, d\theta\, d\sigma^2$$

$$c^{-1} = \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right].$$
$$\exp\left[\frac{-n}{2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right] d\theta \, d\sigma^2$$

dimana:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-n}{2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right] d\theta = \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}$$

sehingga,

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}} \int_{0}^{\infty} \frac{exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}} \, d\sigma^2$$

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{0}^{\infty} \frac{exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \, d\sigma^2$$

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{0}^{\infty} (\sigma^2)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \, exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right] d\sigma^2$$

misal: $A = \sigma^2$

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{0}^{\infty} (A)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \, exp\left[-\frac{\beta}{2A}\right] dA$$

misal :

$$B = \frac{\beta}{2A} \rightarrow A = \frac{\beta}{2B} \rightarrow dA = -\frac{\beta}{2B^2} dB$$

batas berubah:

$$\lim_{A \to 0} B = \infty$$

$$B = \infty \to A = 0$$

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{B=\infty}^{0} \left(\frac{\beta}{2B}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left(-\frac{\beta}{2B^2}\right) exp[-B\ ]\ dB$$

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{B=\infty}^{0} \left(\frac{\beta}{2B}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left[\frac{\beta}{2B}\right]\left[-\frac{1}{B}\right] exp[-B\ ]\ dB$$

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{B=\infty}^{0} \left(\frac{\beta}{2B}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[-\frac{1}{B}\right] exp[-B\ ]dB$$

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{B=\infty}^{0} \left(\frac{1}{B}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[-\frac{1}{B}\right]\ exp\ [-B]\ dB$$

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{B=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[\frac{1}{B}\right] exp[-B\ ]\ dB$$

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{B=0}^{\infty} (B)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)-1}\ exp[-B\ ]dB \qquad (4.4)$$

karena $\int_{B=0}^{\infty}(B)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)-1}\ exp[-B\ ]dB$ pada persamaan (4.4) merupakan fungsi Gamma dengan $\frac{n-1}{2} > 0$ sehingga

$$\int_{B=0}^{\infty} (B)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)-1}\ exp[-B\ ]dB = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \qquad (4.5)$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan persamaan (4.5) pada persamaan (4.4), diperoleh

$$c^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$c = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{4.6}$$

setelah ditemukan c lalu subtitusikan ke persamaan (4.3) menjadi

$$f(\theta, \sigma^2|x) = \left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)(\sigma^2)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}} exp\left[\frac{-\beta}{2\sigma^2}\right]\right). \left(\exp\left[\frac{-n}{2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right]\right) \tag{4.7}$$

4.3.1 Distribusi Posterior Marginal dari θ dan σ^2

Distribusi posterior marginal dari θ adalah integral terhadap σ^2 dari persamaan (4.5) menjadi

$$f(\theta|x) = \int_{\sigma^2=0}^{\infty} f(\theta, \sigma^2|x)\, d\sigma^2$$

$$f(\theta|x) = c \int_{\sigma^2=0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}} exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]. \exp\left[\frac{-n}{2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right] d\sigma^2$$

$$f(\theta|x) = c \int_{\sigma^2=0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}} .$$
$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\beta + n\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right\}\right] d\sigma^2$$

misal : $A = \sigma^2$

$$B = \left[\beta + n\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right]$$

$$f(\theta|x) = c \int_{A=0}^{\infty} (A)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} exp\left[-\frac{1}{2A} B\right] dA$$

misal :

$$t = \frac{B}{2A} \rightarrow A = \frac{B}{2t} \rightarrow A^2 = \left(\frac{B}{2t}\right)^2$$

$$dt = -\frac{B}{2A^2} dA \rightarrow dA = -\frac{2A^2}{B} dt \rightarrow dA = -\frac{2\left(\frac{B}{2t}\right)^2}{B} dt$$

$$dA = -\frac{B}{2t^2} dt$$

batas berubah:

$A = 0 \rightarrow t = \infty$

$A = \infty \rightarrow t = 0$

$$f(\theta|x) = c \int_{A=\infty}^{0} \left(\frac{B}{2t}\right)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} exp[-t] \left(-\frac{B}{2t^2}\right) dt$$

$$f(\theta|x) = c \int_{A=\infty}^{0} \left(\frac{B}{2t}\right)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \left(\frac{B}{2t}\right)\left(-\frac{1}{t}\right) exp[-t]\, dt$$

$$= c \int_{A=\infty}^{0} \left(\frac{B}{2t}\right)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)+1} \left(-\frac{1}{t}\right) exp[-t]\, dt$$

$$= c\left(\frac{B}{2}\right)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)+1} \int_{A=\infty}^{0} \left(\frac{1}{t}\right)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)+1} \left(-\frac{1}{t}\right) exp[-t]\, dt$$

$$= c\left(\frac{B}{2}\right)^{-\left(\frac{n}{2}+1-1\right)} \int_{A=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)+1} \left(\frac{1}{t}\right) exp[-t]\, dt$$

$$= c\left(\frac{B}{2}\right)^{-\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{A=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)+1+1} exp[-t]\, dt$$

$$= c(B)^{-\left(\frac{n}{2}\right)}(2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{A=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)+2} exp[-t]\, dt$$

$$= c(B)^{-\left(\frac{n}{2}\right)}(2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{A=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{-\left(\frac{n+2-4}{2}\right)} exp[-t]\, dt$$

$$= c(B)^{-\left(\frac{n}{2}\right)}(2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{A=0}^{\infty} (t)^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} exp[-t]\, dt$$

$$= c(B)^{-\left(\frac{n}{2}\right)}(2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{A=0}^{\infty} (t)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} exp[-t]\, dt \qquad (4.8)$$

karena $\int_{A=0}^{\infty} (t)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} exp[-t]\, dt$ pada persamaan (4.8) merupakan fungsi Gamma dengan $\frac{n}{2} > 0$ sehingga

$$\int_{A=0}^{\infty} (t)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} exp[-t]\, dt = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (4.9)$$

selanjutnya subtitusikan persamaan (4.9) dan persamaan (4.6) pada persamaan (4.8), diperoleh

$$f(\theta|x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{\beta}{2\sigma^2}\right)^{-\left(\frac{n}{2}\right)} (2)^{\left(\frac{n}{2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$f(\theta|x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(B)^{-\left(\frac{n}{2}\right)}(2)^{\left(\frac{-n+1}{2}+\frac{n}{2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$f(\theta|x) = \left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}}(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right).$$

$$\left(\beta + n\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right)^{-\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$f(\theta|x) = \left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right).$$

$$(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\beta\left\{1 + \frac{n}{\beta}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right\}\right)^{-\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$f(\theta|x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\;\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

$$(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)-\left(\frac{n}{2}\right)}\left\{1 + \frac{n}{\beta}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right\}^{-\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$f(\theta|x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

$$(\beta)^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left\{1+\frac{n}{\beta}\left(\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right\}^{-\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$f(\theta|x) = \sqrt{\frac{n}{\beta}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{\left\{1+\frac{n}{\beta}\left(\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right\}^{\left(\frac{n}{2}\right)}}$$

dimana

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

sehingga

$$f(\theta|x) = \sqrt{\frac{n}{\beta}}\ \frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)\left[1+\frac{n}{\beta}\left(\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}} \quad (4.10)$$

Distrribusi posterior marginal dari σ^2adalah integral terhadap θ dari persamaan (4.7) menjadi

$$f(\sigma^2|x) = \int_{\theta=-\infty}^{\infty} f(\theta,\sigma^2|x)\,d\theta$$

$$= c\int_{\theta=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]\right).$$

$$\exp\left[\frac{-n}{2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right] d\theta$$

$$f(\sigma^2|x) = \frac{c}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}} exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]$$
$$\int_{\theta=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left[\frac{-n}{2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right]\right) \; d\theta$$

dimana :

$$\int_{\theta=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left[\frac{-n}{2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right]\right) \; d\theta = \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}$$

sehingga,

$$f(\sigma^2|x) = \frac{c}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}} exp\left[\frac{-\beta}{2\sigma^2}\right] \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}$$

$$f(\sigma^2|x) = \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} exp\left[\frac{-\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}(2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \qquad (4.11)$$

4.3.2 Estimasi Posterior dari θ dan σ^2

Hasil dari distribusi posterior marginal dari θ adalah diberikan pada persamaan (4.6). Sehingga estimasi posterior dari θ adalah sebagai berikut:

$\theta^* = E(\theta|x)$

$$= \sqrt{\frac{n}{\beta}} \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta \, d\theta}{\left[1 + \frac{n}{\beta}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}}$$

Menggunakan transformasi

$$t = \sqrt{\frac{n}{\beta}}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)\sqrt{n-1}$$

$$\frac{t}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{n}{\beta}}\theta - \sqrt{\frac{n}{\beta}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$$

$$\sqrt{\frac{n}{\beta}}\theta = \frac{t}{\sqrt{n-1}} + \sqrt{\frac{n}{\beta}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$$

$$\sqrt{\frac{n}{\beta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{dt}{\sqrt{n-1}} \to \mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{\beta}{n}}\frac{dt}{\sqrt{n-1}}$$

batas berubah menjadi

$\theta = -\infty \Rightarrow t = -\infty$

$\theta = \infty \quad \Rightarrow t = \infty$

$$E(\theta|x) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n-1}} + \sqrt{\frac{n}{\beta}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)\sqrt{\frac{\beta}{n}}\frac{dt}{\sqrt{n-1}}}{\left[1+\frac{t^2}{n-1}\right]^{\frac{n}{2}}}$$

$$E(\theta|x) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{\beta}{n}}\left(\frac{t}{n-1}\right) + \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n\sqrt{n-1}}\right)dt}{\left[1+\frac{t^2}{n-1}\right]^{\frac{n}{2}}}$$

$$E(\theta|x) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{\beta}{n}}\left(\frac{t}{n-1}\right)dt}{\left[1+\frac{t^2}{n-1}\right]^{\frac{n}{2}}} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n\sqrt{n-1}}\right)dt}{\left[1+\frac{t^2}{n-1}\right]^{\frac{n}{2}}}\right]$$

Karena yang dicari adalah nilai harapan θ dengan syarat x maka yang tidak mengandung unsur x di abaikan.

$$E(\theta|x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sqrt{n-1}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{\frac{n}{2}}}$$

$$E(\theta|x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sqrt{n-1}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \left[2 \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{\left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{\frac{n}{2}}}\right]$$

misal :

$$y = \frac{t^2}{n-1} \rightarrow t = \sqrt{y(n-1)} \rightarrow dt = \left(\frac{\sqrt{n-1}}{2}\, y^{-\frac{1}{2}}\right) dy$$

batas menjadi

$t = 0 \ \Rightarrow y = \ 0$

$t = \infty \quad \Rightarrow y = \ \infty$

sehingga

$$E(\theta|x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sqrt{n-1}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \left[2 \int_{0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{n-1}}{2}\, y^{-\frac{1}{2}}\right) dy}{[1+y]^{\frac{n}{2}}}\right]$$

$$E(\theta|x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sqrt{n-1}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \left[2\left(\frac{\sqrt{n-1}}{2}\right) \int_{0}^{\infty} \frac{\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) dy}{[1+y]^{\frac{n}{2}}}\right]$$

$$E(\theta|x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sqrt{n-1}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \left[\sqrt{n-1} \int_{0}^{\infty} \frac{\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) dy}{[1+y]^{\frac{n}{2}}}\right]$$

dimana

$$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}\, dy}{[1+y]^{(m+p)}}$$

$$m - 1 = -\frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$m + p = \frac{n}{2} \rightarrow \ \frac{1}{2} + p = \frac{n}{2} \ \rightarrow p = \frac{n-1}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) dy}{[1+y]^{\frac{n}{2}}} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$

sehingga

$$E(\theta|x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sqrt{n-1}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \left[\sqrt{n-1}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)\right]$$

$$E(\theta|x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}$$

$$\theta^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n} \tag{4.12}$$

Sehingga distribusi posterior marginal dari σ^2 adalah diberikan pada persamaan (4.7). Sehingga estimasi posterior dari σ^2 adalah sebagai berikut :

$$\sigma^{2*} = \int_0^\infty \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} exp\left[\frac{-\beta}{2\sigma^2}\right]\, \sigma^2}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} (2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} d\sigma^2$$

$$\sigma^{2*} = \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{(2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{exp\left[\frac{-\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}} d\sigma^2$$

$$\sigma^{2*} = \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{(2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{1}{(\sigma^2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}} exp\left[\frac{-\beta}{2\sigma^2}\right] d\sigma^2$$

$$\sigma^{2*} = \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{(2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty (\sigma^2)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} exp\left[\frac{-\beta}{2\sigma^2}\right] d\sigma^2$$

misal: $A = \sigma^2$

$$\sigma^{2*} = \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{(2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty (A)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} exp\left[\frac{-\beta}{2A}\right] dA$$

misal : $B = \frac{\beta}{2A} \rightarrow A = \frac{\beta}{2B} \rightarrow dA = -\frac{\beta}{2B^2} dB$

batas berubah :

$$\lim_{A \to 0} B = \infty$$

$$B = \infty \rightarrow A = 0$$

$$\sigma^{2*} = \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{(2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

$$\int_{B=\infty}^{0} \left(\frac{\beta}{2B}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{-\beta}{2B^2}\right) exp[-B\ ]\ dB$$

$$\sigma^{2*} = \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{(2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

$$\int_{B=\infty}^{0} \left(\frac{\beta}{2B}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[\frac{\beta}{2B}\right]\left[-\frac{1}{B}\right] exp[-B\ ]\ dB$$

$$\sigma^{2*} = \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{(2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{B=\infty}^{0} \left(\frac{\beta}{2B}\right)^{-\left(\frac{n-3}{2}\right)} \left[-\frac{1}{B}\right] exp[-B\ ]dB$$

$$\sigma^{2*} = \frac{(\beta)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{(2)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\left(\frac{n-3}{2}\right)}.$$

$$\int_{B=\infty}^{0} \left(\frac{1}{B}\right)^{-\left(\frac{n-3}{2}\right)} \left[-\frac{1}{B}\right]\ exp\ [-B]\ dB$$

$$\sigma^{2*} = \frac{\beta}{2\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{B=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B}\right)^{-\left(\frac{n-3}{2}\right)} \left[\frac{1}{B}\right] exp[-B\ ]\ dB$$

$$\sigma^{2*} = \frac{\beta}{2\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{B=0}^{\infty} (B)^{\left(\frac{n-3}{2}\right)-1}\ exp[-B\ ]dB$$

$$\sigma^{2*} = \frac{\beta}{2\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)$$

$$\sigma^{2*} = \frac{\beta}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$\sigma^{2*} = \frac{\beta}{2} \frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right) . \left(\frac{n-3}{2}\right)!}$$

$$\sigma^{2*} = \frac{\beta}{2} \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$\sigma^{2*} = \frac{\beta}{n-1} \tag{4.13}$$

selanjutnya persamaan (4.12) dan (4.13) disubtitusi ke persamaan (2.4) dan (2.7) menjadi

$$\theta_1^* = \exp\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n} + \frac{\beta}{2(n-1)}\right]$$

dan

$$\sigma_1^{2*} = \exp\left[2\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n} + \frac{\beta}{n-1}\right] \left(\exp\left[\frac{\beta}{n-1}\right] - 1\right)$$

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB V
PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa mengestimasi parameter θ dan σ^2 distribusi Log-Normal dengan menggunakan metode Bayes untuk non informatif prior didapat nilai estimasi titik. Nilai estimasi titik sebagai berikut,

1. Parameter mean θ

$$\theta_1^* = \exp\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right) + \left(\frac{\beta}{2(n-1)}\right)\right]$$

2. Parameter varians σ^2

$$\sigma_1^{2*} = \exp\left[2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right) + \left(\frac{\beta}{n-1}\right)\right]\left(\exp\left[\frac{\beta}{n-1}\right] - 1\right)$$

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk Tugas Akhir ini adalah menambahkan sifat-sifat estimasi yang baik meliputi tidak bias, konsisten, variansi minimum, dan statistika cukup.

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

DAFTAR PUSTAKA

[1] Harinaldi, 2005, "*Prinsip-Prinsip Statistika Untuk Teknik dan Sains*". Jakarta: Erlangga.

[2] Supranto, J., 2001, "*Statistika Teori dan Aplikasi Edisi ke-6*". Jakarta: Erlangga.

[3] Prahutama, A. Sugito dan Rusgiyono, A., 2012, "*Inferensi Statistik Dari Distribusi Normal Dengan Metode Bayes Untuk Non-Informatif Prior*". Media Statistik, (2012, Desember), 95-104.

[4] Hazhiah, T. I., Sugito dan Rahmawati, R. 2012. "*Estimasi Parameter Distribusi Weibull Dua Parameter Menggunakan Metode Bayes*"**.** Media Statistik, (2012, Juni), 95-104.

[5] Afnaria, 2011, "*Study tentang Distribusi Log-Normal*" . Seminar Nasional Matematika Terapan, (2011).

[6] Natalia, E., 2008, "*Estimasi Mean Dan Varians Distribusi Lognormal Dalam Bentuk Integral*". Tugas Akhir Jurusan Matematika. Surabaya, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[7] Bain, Lee J. dan Engelhardt, Max. 1992. "*Introduction to Probability and Mathematical Statistics*". Duxbury Press, California.

[8] Indriyani, F., 2008, "*Pendekatan Metode Bayesian Untuk Kajian Estimasi Parameter Distribusi Binomial Negatif* ". Tugas Akhir Jurusan Matematika. Surabaya, Fakultas

Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[9] George E. P. Box dan George C. Tiao. 1973. *“Bayesian Inference in Statistical Analysis”*. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[10] Sultan, R. dan Ahmad, S. P., 2013, “*Comparison of Parameters of Lognormal Distribution Based On the Classical and Posterior Estimates”*. Journal of Modern Applied Statistical Methods. <http://digitalcommons.wayne.edu/cgi/>. Diakses pada tanggal 04 Maret 2016 pada pukul 08.10

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama lengkap Evi Noor Diana. Dilahirkan di Surabaya pada tanggal 10 Juni 1994 dan merupakan anak ketiga dari 4 bersaudara. Pendidikan formal yang telah ditempuh yaitu SDN Dr. Sutomo IV No. 326, SMPN 42 Surabaya. Setelah menyelesaikan pendidikannya di SMAN 9 Surabaya, penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN Tulis pada tahun 2012. Pada masa perkuliahan penulis memilih Matematika Terapan sebagai bidang keahliannya.

Selama menjadi mahasiswa ITS, penulis aktif berwirausaha dalam berbagai event/ acara yang diselenggarakan ITS maupun universitas lainnya. Penulis juga pernah mengikuti acara PAMMITS (Pasar Malam Minggu ITS) di depan pintu masuk ITS. Penulis berjualan aneka variasi mulai dari es krim pot, takoyaki, onigiri, susu sari dele, pok-pok, dan lain-lain.

Selama penulisan Tugas Akhir ini, penulis tidak lepas dari kekurangan. Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke end.4209@gmail.com atau 0896-3056-0042.