



**TUGAS AKHIR - SM141501**

**KONSTRUKSI DAN ANALISIS KESTABILAN MODEL  
POPULASI *PREY-PREDATOR* DENGAN MIGRASI  
*PREDATOR* PADA DUA WILAYAH (STUDI KASUS : IKAN  
TUNA DAN IKAN TERI PADA EKOSISTEM LAUT  
INDONESIA)**

**NIHAYA ALIVIA CORAIMA DEWI  
NRP 1212100068**

**Dosen Pembimbing :**

- 1. Dr. Hariyanto, M.Si**
- 2. Drs. Suharmadi, Dipl. Sc. M.Phil**

**JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2016**





**FINAL PROJECT- SM141501**

***CONSTRUCTION AND STABILITY ANALYSIS OF THE  
POPULATION PREY-PREDATOR MODEL WITH  
MIGRATION IN TWO ZONES (CASE STUDY : TUNA  
AND ANCHOVY IN MARINE ECOSYSTEMS INDONESIA)***

**NIHAYA ALIVIA CORAIMA DEWI  
NRP 1212100068**

**Supervisor :**

- 1. Dr. Hariyanto, M.Si**
- 2. Drs. Suharmadi, Dipl. Sc. M.Phil**

**DEPARTMENT OF MATHEMATIC  
Faculty of Mathematics and Natural Sciences  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2016**



**LEMBAR PENGESAHAN**

**KONSTRUKSI DAN ANALISIS KESTABILAN MODEL  
POPULASI PREY-PREDATOR DENGAN MIGRASI PREDATOR  
PADA DUA WILAYAH (STUDI KASUS : IKAN TUNA DAN  
IKAN TERI PADA EKOSISTEM LAUT INDONESIA)**

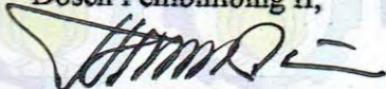
**CONSTRUCTION AND STABILITY ANALYSIS OF THE  
POPULATION PREY-PREDATOR MODEL WITH MIGRATION  
IN TWO ZONES (CASE STUDY : TUNA AND ANCHOVY IN  
MARINE ECOSYSTEMS INDONESIA)**

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
Pada Bidang Studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :  
**NIHAYA ALIVIA CORAIMA DEWI**  
**NRP. 1212 100 068**

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Drs. Suharmadi, Dipl. Sc. M.Phil

NIP. 19540625 198103 1 003

Dosen Pembimbing I,



Dr. Harivanto, M.Si

NIP. 19530414 198203 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 25 Juli 2016



**KONSTRUKSI DAN ANALISIS KESTABILAN MODEL  
POPULASI *PREY-PREDATOR* DENGAN MIGRASI  
*PREDATOR* PADA DUA WILAYAH  
(STUDI KASUS : IKAN TUNA DAN IKAN TERI PADA  
EKOSISTEM LAUT INDONESIA)**

Nama : Nihaya Alivia Coraima Dewi  
NRP : 1212100068  
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS  
Pembimbing : Dr. Hariyanto, M.Si  
Drs. Suharmadi, Dipl. Sc. M. Phil

**ABSTRAK**

Proses interaksi antar makhluk hidup dalam memenuhi kebutuhan makanan terjadi pada rantai makanan yang terdiri dari *predator* dan *prey*. Jika salah satu populasi *predator* dan *prey* punah maka keadaan ekosistem menjadi tidak stabil. Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan merubah fenomena yang ada kedalam bentuk model matematika. Model matematika *prey-predator* sebelumnya telah dikembangkan dengan adanya pemanenan *prey-predator* serta migrasi pada *predator* ke wilayah lain yang tidak diteliti. Pada penelitian ini dikonstruksi model matematika *prey-predator* untuk menggambarkan fenomena yang terjadi pada wilayah lain yang belum diteliti, sehingga menghasilkan model pada wilayah I dan model pada wilayah II. Model tersebut berupa persamaan diferensial nonlinear tingkat satu yang mempunyai kondisi awal dan kondisi batas. Pada masing-masing model diperoleh titik kesetimbangan yang bersifat stabil, serta berdasarkan hasil simulasi pada ikan tuna dan ikan teri menunjukkan bahwa sistem yang stabil terjadi

pada waktu 2,5 tahun untuk wilayah I dan 1,6 tahun untuk wilayah II.

***Kata kunci:*** *Konstruksi Model, Analisis Kestabilan, Migrasi.*

**CONSTRUCTION AND STABILITY ANALYSIS OF  
THE POPULATION PREY-PREDATOR MODEL  
WITH MIGRATION IN TWO ZONES  
(CASE STUDY : TUNA AND ANCHOVY IN MARINE  
ECOSYSTEMS INDONESIA)**

*Name* : Nihaya Alivia Coraima Dewi  
*NRP* : 1212100068  
*Department* : Mathematics of FMIPA-ITS  
*Supervisor* : Dr. Hariyanto, M.Si  
Drs. Suharmadi, Dipl. Sc. M.Phil

**ABSTRACT**

*Interaction between organisms in order to require their food known as food chain consists of both preys and predators. If one of populations of predator and prey extinct, then ecosystem condition becomes unstable. This problem can be resolved by changing the phenomenon into mathematical models. The mathematical models of prey-predator have been developed with the harvesting of predator and prey-predator migration to another area not covered in observation. In this observation, the mathematical models of prey-predator has been construction to describe the phenomenon happened in the non observation area, so that result in a model in area I and area II. These models are in the form of first level nonlinear differensial equations that has initial condition and boundary condition. Each models obtained a stable equilibrium point, and base on simulation with tuna and anchovy shows that a stable system occured in 2,5 years for area I and 1,6 for area II.*

**Keywords:** *Construction, Stability Analysis, Migration.*



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN JUDUL .....	iii
LEMBAR PENGESAHAN .....	v
ABSTRAK .....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	ix
KATA PENGANTAR .....	xi
DAFTAR ISI .....	xiii
DAFTAR GAMBAR .....	xv
DAFTAR TABEL .....	xvii
DAFTAR SIMBOL .....	xix
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan .....	4
1.5 Manfaat .....	4
1.6 Sistematika Penulisan .....	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	7
2.1 Penelitian Terdahulu .....	7
2.2 Model <i>Prey-Predator</i> .....	8
2.3 Sistem Dinamik .....	8
2.4 Titik Keseimbangan .....	9
2.5 Kestabilan Lokal pada Titik Keseimbangan .....	10
2.6 Metode Runge-Kutta .....	11
2.7 Ikan Tuna, Ikan Teri dan Perairan Indonesia .....	12
BAB III METODE PENELITIAN .....	15
3.1 Tahap Penelitian .....	15
3.2 Alur Penelitian .....	16
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN .....	19
4.1 Konstruksi Model <i>Prey-Predator</i> pada Dua Wilayah dengan Migrasi <i>Predator</i> .....	19

4.2	Penyelesaian Persamaan Diferensial.....	31
4.2.1	Penyelesaian Persamaan Diferensial Laju Perubahan Populasi <i>Prey</i> dan <i>Predator</i> pada Wilayah I .....	31
4.2.2	Penyelesaian Persamaan Diferensial Laju Perubahan Populasi <i>Prey</i> dan <i>Predator</i> pada Wilayah II.....	34
4.3	Titik Kesetimbangan.....	38
4.3.1	Titik Kesetimbangan <i>Prey</i> dan <i>Predator</i> di Wilayah I .....	39
4.3.2	Titik Kesetimbangan <i>Prey</i> dan <i>Predator</i> di Wilayah II .....	43
4.4	Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan ...	48
4.4.1	Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan pada Wilayah I.....	48
4.4.2	Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan pada Wilayah II.....	54
4.5	Simulasi Sistem.....	59
4.5.1	Penyelesaian Numerik Model.....	59
4.5.2	Impementasi Antarmuka.....	64
4.5.3	Flow Chart .....	67
4.5.4	Hasil Simulasi.....	68
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN .....		75
5.1	Kesimpulan .....	75
5.2	Saran .....	78
DAFTAR PUSTAKA .....		79
LAMPIRAN .....		81
BIODATA PENULIS .....		87

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b> Peta WPP-RI .....	13
<b>Gambar 3.1</b> Diagram Alur Metode Penelitian .....	17
<b>Gambar 4.1</b> Home GUIDE Simulasi .....	65
<b>Gambar 4.2</b> GUIDE Simulasi .....	66
<b>Gambar 4.3</b> Flow Chart Simulasi.....	67
<b>Gambar 4.5</b> Grafik Wilayah I Percobaan Pertama.....	69
<b>Gambar 4.6</b> Grafik Wilayah I Percobaan Kedua .....	69
<b>Gambar 4.7</b> Grafik Wilayah I Percobaan Ketiga .....	70
<b>Gambar 4.8</b> Grafik Wilayah II Percobaan Pertama .....	71
<b>Gambar 4.9</b> Grafik Wilayah II Percobaan Kedua .....	72
<b>Gambar 4.10</b> Grafik Wilayah II Percobaan Ketiga.....	72



## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 2.1</b> Penjelasan WPP-RI.....	14
<b>Tabel 4.1</b> Percobaan Simulasi Wilayah I.....	68
<b>Tabel 4.2</b> Percobaan Simulasi Wilayah II .....	71



## DAFTAR SIMBOL

$M_1$	Populasi <i>prey</i> pada wilayah I
$M_2$	Populasi <i>prey</i> pada wilayah II
$P_1$	Populasi <i>predator</i> pada wilayah I
$P_2$	Populasi <i>predator</i> pada wilayah II
$n_{M_1}$	Rate pertumbuhan alami <i>prey</i> di wilayah I
$n_{M_2}$	Rate pertumbuhan alami <i>prey</i> di wilayah II
$n_{P_1}$	Rate pertumbuhan alami <i>predator</i> di wilayah I
$n_{P_2}$	Rate pertumbuhan alami <i>predator</i> di wilayah II
$\gamma_{M_1}$	Rate pemanenan <i>prey</i> di wilayah I
$\gamma_{M_2}$	Rate pemanenan <i>prey</i> di wilayah II
$\gamma_{P_1}$	Rate pemanenan <i>predator</i> di wilayah I
$\gamma_{P_2}$	Rate pemanenan <i>predator</i> di wilayah II
$\alpha_{M_1}$	Rate penurunan jumlah populasi <i>prey</i> akibat kekurangan makanan di wilayah I
$\alpha_{M_2}$	Rate penurunan jumlah populasi <i>prey</i> akibat kekurangan makanan di wilayah II
$\alpha_{P_1}$	Rate penurunan jumlah populasi <i>predator</i> akibat kekurangan makanan di wilayah I
$\alpha_{P_2}$	Rate penurunan jumlah populasi <i>predator</i> akibat kekurangan makanan di wilayah II
$\beta_{M_1}$	Rate penurunan jumlah populasi <i>prey</i> akibat dimangsa oleh <i>predator</i> di wilayah I
$\beta_{M_2}$	Rate penurunan jumlah populasi <i>prey</i> akibat dimangsa oleh <i>predator</i> di wilayah II
$\beta_{P_1}$	Rate peningkatan jumlah populasi <i>predator</i> karena berhasil memangsa <i>prey</i> di wilayah I

- $\beta_{P_2}$  Rate peningkatan jumlah populasi *predator* karena berhasil memangsa *prey* di wilayah II
- $a$  Rate perubahan jumlah *prey* wilayah I saat *predator* wilayah I bermigrasi dari wilayah I menuju wilayah II
- $b$  Rate perubahan jumlah *prey* wilayah I saat *predator* wilayah II bermigrasi dari wilayah II menuju wilayah I
- $r$  Rate perubahan jumlah *predator* wilayah I saat *predator* wilayah I bermigrasi dari wilayah I menuju wilayah II
- $q$  Rate perubahan jumlah *predator* wilayah I saat *predator* wilayah II bermigrasi dari wilayah II menuju wilayah I
- $x$  Rate perubahan jumlah *prey* wilayah II saat *predator* wilayah I bermigrasi dari wilayah I menuju wilayah II
- $w$  Rate perubahan jumlah *prey* wilayah II saat *predator* wilayah II bermigrasi dari wilayah II menuju wilayah I
- $y$  Rate perubahan jumlah *predator* wilayah II saat *predator* wilayah I bermigrasi dari wilayah I menuju wilayah II
- $z$  Rate perubahan jumlah *predator* wilayah II saat *predator* wilayah II bermigrasi dari wilayah II menuju wilayah I
- $a_1$  Rate pertumbuhan *prey*
- $\alpha_{22}$  Rate kematian *predator*
- $\alpha_{21}$  Rate pertumbuhan *predator* akibat berhasil memangsa *prey*

$\alpha_{12}$	Rate kematian <i>prey</i> karena dimangsa <i>predator</i>
$N_1$	Populasi <i>prey</i>
$N_2$	Populasi <i>predator</i>
$a_1$	Rate pertumbuhan alami <i>prey</i>
$a_2$	Rate pertumbuhan alami <i>predator</i>
$k_1$	Rate pemanenan terhadap <i>prey</i>
$k_2$	Rate pemanenan terhadap <i>predator</i>
$k_3(t - s)$	Tingkat perubahan jumlah populasi <i>prey</i> selama masa migrasi pada waktu $s \leq t$
$k_4(t - s)$	Tingkat perubahan jumlah populasi <i>predator</i> selama masa migrasi pada waktu $s \leq t$
$\alpha_{11}$	Rate penurunan jumlah populasi <i>prey</i> akibat kekurangan makanan
$\alpha_{12}$	Rate penurunan jumlah populasi <i>prey</i> akibat dimangsa oleh <i>predator</i>
$\alpha_{21}$	Rate peningkatan jumlah populasi <i>predator</i> akibat berhasil memangsa <i>prey</i>
$\alpha_{22}$	Rate penurunan jumlah populasi <i>predator</i> akibat kekurangan sumber makanan tidak mencukupi



# BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang dibahas pada tugas akhir, rumusan masalah yang muncul akibat latar belakang, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan dari tugas akhir.

## **1.1 Latar Belakang**

Ekologi adalah ilmu yang mempelajari tentang lingkungan hidup yang terdiri dari unsur keanekaan dan proses interaksi. Keanekaan merupakan bagian penting lingkungan hidup, semakin tinggi keanekaan maka semakin stabil pula mutu ekosistem. Ekosistem adalah suatu sistem lingkungan hidup yang terbentuk oleh hubungan timbal balik tak terpisahkan antara makhluk hidup dengan lingkungannya, makhluk hidup yang ada di lingkungan pada hakikatnya mampu dan berpotensi untuk saling mempengaruhi dan dipengaruhi. Potensi yang dimiliki oleh makhluk hidup tersebut dapat menimbulkan adanya interaksi didalam lingkungan yang selanjutnya berfungsi sebagai mata rantai kehidupan [8]. Demi keberlangsungan mata rantai kehidupan setiap makhluk hidup membutuhkan makanan untuk memenuhi kebutuhan demi tetap bertahan hidup. Proses interaksi antara makhluk hidup dalam memenuhi kebutuhan makanan terjadi pada contoh proses rantai makanan yang berkaitan erat dengan *predator* dan *prey*. *Predator* mempunyai peran memangsa *prey*, apabila salah satu dari *predator* dan *prey* mengalami kepunahan maka keadaan ekosistem menjadi tidak stabil. Jika *predator* mengalami kepunahan maka jumlah *prey* meningkat tajam, begitu juga saat *prey* mengalami kepunahan maka *predator* mengalami kekurangan makanan dan jumlah

*predator* juga menurun akibat mengalami kematian. Sehingga perlu dilakukan penelitian lebih lanjut untuk memecahkan masalah-masalah ekologi tersebut. Salah satu proses pemecahan masalah tersebut dengan cara merubah permasalahan dari hasil penelitian berupa fenomena menjadi model matematika menggunakan penerapan ilmu matematika yaitu pemodelan matematika.

Model matematika dibentuk berdasarkan analogi dari fenomena-fenomena objek penelitian yang diperoleh dari hasil analogi masalah-masalah nyata lingkungan disekitar yang ditulis dalam bentuk matematika berupa persamaan diferensial [2]. Model matematika pada *prey-predator* telah diteliti oleh *A.J Lotka* dan *Vito Volterra* pada tahun 1920 [4] berupa penelitian pada laju perkembangan dan kepunahan suatu populasi *prey* yang di mangsa oleh *predator* dan telah dilakukan penelitian pula terkait interaksi *prey-predator* pada suatu ekosistem dengan adanya pemanenan pada kedua objek penelitian dan migrasi *predator* karena jumlah *prey* tidak mencukupi kebutuhan *predator* ke suatu wilayah yang tidak diteliti [6].

Kestabilan suatu ekosistem dipengaruhi oleh keanekaan spesies didalamnya [8], semakin tinggi keanekaan maka semakin baik pula mutu ekosistem. sehingga pada permasalahan *prey-predator* yang di maksud dengan kondisi stabil adalah saat kedua spesies tersebut tidak punah, sehingga proses interaksi antara *predator* dan *prey* tetap bisa berjalan. Kondisi stabil dalam permasalahan *prey-predator* tentunya dipengaruhi oleh parameter-parameter yang diperoleh dari fenomena yang ada, yaitu tingkat kelahiran *prey* dan *predator*, tingkat pemanenan *prey* dan *predator*, tingkat migrasi *predator*, serta tingkat kematian *prey* dan *predator* akibat jumlah ketersediaan makanan yang tidak memenuhi.

Pada tugas akhir ini dilakukan penelitian lebih lanjut dari penelitian yang telah dilakukan sebelumnya yaitu tentang konstruksi model populasi *prey-predator* dengan migrasi *predator* menuju wilayah kedua karena jumlah *prey* tidak mencukupi kebutuhan *predator* dan dilakukan analisis kestabilan beserta simulasi kestabilan menggunakan metode Runge Kutta dan *software* MATLAB R2010a. Kemudian dilakukan studi kasus sebagai contoh penerapan model pada makhluk hidup yang mempunyai fenomena yang sama seperti yang terjadi pada model penelitian, yaitu melakukan simulasi kestabilan pada ekosistem laut Indonesia dengan menggunakan objek penelitian ikan tuna (*Thunnus*) sebagai *predator*, ikan teri (*Stelephorus sp*) sebagai *prey*, dengan jalur migrasi ikan tuna pada zona ekonomi eksklusif (ZEE).

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah :

1. Bagaimana konstruksi dan analisis model matematika *prey* dan *predator* pada dua wilayah dengan adanya pemanenan pada *prey* dan *predator* serta migrasi *predator* akibat jumlah populasi *prey* menurun?
2. Bagaimana simulasi kestabilan model matematika *prey* dan *predator* pada dua wilayah dengan adanya pemanenan pada *prey* dan *predator* serta migrasi *predator* akibat jumlah populasi *prey* menurun dengan simulasi pada studi kasus ikan tuna dan ikan teri pada kondisi ekosistem stabil?

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah :

1. Tempat yang diamati adalah pada suatu ekosistem yang terdiri dari wilayah I dan wilayah II yang

mempunyai jarak antara keduanya, serta mempunyai fenomena yang sama pada kedua wilayah.

2. Objek yang diteliti adalah interaksi *prey* ( $M_1, M_2$ ) dan *predator* ( $P_1, P_2$ ) pada kedua wilayah.
3. Objek yang melakukan migrasi hanya populasi *predator* ( $P_1, P_2$ ).
4. Pemanenan terhadap *prey* ( $M_1, M_2$ ) dan *predator* ( $P_1, P_2$ ) terjadi pada kedua wilayah.
5. Laju perkembangbiakan *prey* ( $M_1, M_2$ ) lebih besar daripada *predator* ( $P_1, P_2$ ).
6. Menggunakan *software* MATLAB R2010a untuk simulasi numerik.

#### 1.4 Tujuan

Tujuan dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Mendapatkan hasil konstruksi dan analisis model matematika *prey* dan *predator* pada dua wilayah dengan adanya pemanenan pada *prey* dan *predator* serta migrasi *predator* akibat jumlah populasi *prey* menurun.
2. Mendapatkan hasil dari simulasi kestabilan model matematika *prey* dan *predator* pada dua wilayah dengan adanya pemanenan pada *prey* dan *predator* serta migrasi dari *predator* akibat jumlah populasi *prey* menurun dengan simulasi studi kasus ikan tuna dan ikan teri pada kondisi ekosistem stabil.

#### 1.5 Manfaat

Manfaat dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Menambah pengetahuan dan keilmuan mengenai penerapan dari ilmu matematika khususnya dalam pemodelan matematika.

2. Sebagai bahan referensi untuk mata kuliah bidang matematika terapan khususnya pada pemodelan matematika dan sebagai acuan dalam penelitian.
3. Sebagai bahan pertimbangan pihak terkait pengelolaan lingkungan hidup untuk mengatasi permasalahan kestabilan ekosistem ketika terdapat migrasi *predator* dan pemanenan pada *prey* dan *predator*.
4. Sebagai bahan pertimbangan pihak terkait pengelolaan ekosistem laut khususnya dalam pengelolaan sumber daya ikan tuna dan ikan teri untuk menjaga kestabilan ekosistem laut.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini sebagai berikut:

- BAB I Pendahuluan, menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan laporan tugas akhir.
- BAB II Tinjauan Pustaka, menjelaskan tentang model *prey-predator*, sistem dinamik, titik kesetimbangan, kestabilan lokal pada titik kesetimbangan, metode runge-kutta, serta penjelasan tentang simulasi pada ikan tuna dan ikan teri pada ekosistem laut Indonesia.
- BAB III Metode Penelitian, menjelaskan tentang studi litelatur, konstruksi model matematika, titik kesetimbangan, analisis kestabilan dan simulasi kestabilan sistem pada studi kasus ikan tuna dan ikan teri pada ekosistem laut Indonesia.
- BAB IV Pembahasan, menjelaskan tentang pembahasan secara keseluruhan konstruksi model *prey-predator*, penyelesaian persamaan diferensial, titik kesetimbangan, kestabilan pada titik

kesetimbangan serta simulasi pada studi kasus ikan tuna dan ikan teri pada ekosistem laut Indonesia.

**BAB V** Penutup, menjelaskan kesimpulan dan saran berdasarkan hasil model, analisis kestabilan, simulasi pada studi kasus ikan tuna dan ikan teri pada ekosistem laut Indonesia serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian mengenai model *prey-predator* telah diteliti sebelumnya oleh Narayan dan Ramacharyulu yang berjudul “*A Prey-Predator Model with an Alternative Food for the Predator, Harvesting of Both the Species and with A Gestation Period for Interaction*” tentang model *prey-predator* dimana model tersebut menggambarkan interaksi antara *predator* dan *prey* dengan adanya migrasi *predator* ke wilayah yang tidak diteliti, disertai adanya pemanenan pada kedua objek [6].

Model matematika pada dua wilayah dengan adanya migrasi pada dua wilayah telah dilakukan penelitian oleh Kusumayadi pada tesis yang berjudul “Analisis Sistem Dinamik Model Penyebaran Penyakit Menular Antar Dua Wilayah dan Kontrol Optimal pada Populasi *Infected*” diperoleh model penyebaran penyakit menular antar dua wilayah dengan dua kasus, yaitu model I dan II yang berupa sistem persamaan diferensial nonlinear [5].

Pada penelitian yang dilakukan oleh Hariyanto dkk yang berjudul “*The Construction of a Model of Precoalition between H1N1 – p and H5N1 Influenza Virus in Indonesia*” menjelaskan langkah-langkah untuk mengkonstruksi suatu model. Konstruksi model dari suatu model yang sudah ada terjadi akibat adanya pengaruh-pengaruh tertentu yang belum dibahas pada model yang sudah ada sehingga dapat diperoleh suatu model berupa persamaan diferensial dengan diberikan kondisi awal serta kondisi batasnya [4].

## 2.2 Model Prey-Predator

Berikut merupakan bentuk paling sederhana dari model *prey-predator* yang dirumuskan oleh Alfred James Lotka dan Vito Volterra pada tahun 1920 [10]

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(a_1 - \alpha_{12} N_2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(\alpha_{21} N_1 - \alpha_{22})$$

Berikut merupakan model *prey-predator* yang telah diteliti oleh Narayan dan Ramacharyulu [6]

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1 \left\{ a_1(1 - k_1) - \alpha_{11} N_1 - \alpha_{12} \int_{-\infty}^T k_4(t-s)N_2(s)ds \right\}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2 \left\{ a_2(1 - k_2) - \alpha_{22} N_2 + \alpha_{21} \int_{-\infty}^T k_3(t-s)N_1(s)ds \right\}$$

Dimana  $t - s = z$ , sehingga  $s = t - z$

Dengan kondisi batas  $k_3(z), k_4(z) \geq 0$ , sehingga waktu tunda menjadi  $\int_0^\infty k_3(z)dz = \int_0^\infty k_4(z)dz = 1$

## 2.3 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan sistem keadaan masa yang akan datang yang dapat ditentukan (setidaknya secara teoritis) karena sistem keadaan sekarang dan masa lampau telah diketahui. Secara matematis, sistem dinamik dideskripsikan oleh masalah nilai awal. Hal ini menunjukkan bahwa adanya pengaruh waktu, dimana keadaan pada suatu saat berkembang di waktu yang lain. Sistem dinamik menjadi dua yaitu sistem dinamik

deterministik dan stokastik. Sistem dinamik dikatakan deterministik jika hasilnya tunggal untuk setiap keadaan. Sistem dinamik dikatakan stokastik jika terdapat distribusi peluang dari hasil-hasil kemungkinan. Berdasarkan waktu, sistem dinamik terdapat dua yaitu sistem kontinu dan diskrit. Sistem dinamik deterministik dengan waktu kontinu didefinisikan oleh

$$x(t) = \varphi_t(x(0))$$

yang memberikan kondisi pada waktu  $t$ , mengingat bahwa kondisi  $x(0)$  pada waktu awal. Salah satu bentuk sistem dinamik yaitu berbentuk persamaan diferensial, sebagai berikut [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y); \quad x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y); \quad x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \end{aligned}$$

Sistem persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua jenis yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Metode penyelesaian persamaan diferensial biasa tingkat satu berdasarkan bentuknya salah satunya yaitu persamaan diferensial Bernoulli. Bentuk umum persamaan diferensial Bernoulli sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^nQ(x)$$

## 2.4 Titik Kesetimbangan

Pada persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y) \end{aligned}$$

Titik-titik  $(x^*, y^*)$  dikatakan titik kritis atau titik kestimbangan sistem jika memenuhi syarat yaitu  $f_1(x^*, y^*) = f_2(x^*, y^*) = 0$ . Jika titik  $(x^*, y^*)$  adalah titik kesetimbangan sistem *autonomous*, maka fungsi-fungsi konstan  $x(t) = x^*, y(t) = y^*$  merupakan solusi penyelesaian dari sistem *autonomous*. Artinya penyelesaian yang diperoleh memiliki hasil yang tetap seiring berubahnya waktu [3].

## 2.5 Kestabilan Lokal pada Titik Kesetimbangan

Misalkan  $A$  matriks berukuran  $n \times n$ , maka polinomial karakteristik dari matriks  $A$  diberikan oleh [9]

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$$

Akar-akar  $p(\lambda) = 0$  adalah  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) dinamakan nilai eigen dari  $A$ .

Teorema berikut memberikan syarat kestabilan dari persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax \\ \dot{x} &= Ax \end{aligned}$$

dimana matriks  $A$  mempunyai peranan penting khususnya nilai karakteristik dari matriks  $A$  yaitu bagian real dari  $\lambda$  dinotasikan oleh  $\text{Re}\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, k$ )

### **Teorema 2.1** [9]

Diberikan persamaan diferensial  $\dot{x} = Ax$  dengan matriks  $A$  berukuran  $n \times n$  dan mempunyai nilai karakteristik yang berbeda  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  ( $k \leq n$ )

- Titik kesetimbangan  $x^* = 0$  adalah stabil asimtotik bila dan hanya bila  $\text{Re}\lambda_i < 0$  untuk semua  $i = 1, \dots, k$ .
- Titik kesetimbangan  $x^* = 0$  adalah stabil bila dan hanya bila  $\text{Re}\lambda_i \leq 0$  untuk semua  $i = 1, \dots, k$  dan untuk semua  $\lambda_i$  dengan  $\text{Re}\lambda_i = 0$  multisiplisitas aljabar sama dengan multisiplisitas geometrinya.

- Titik kesetimbangan  $x^* = 0$  adalah takstabil bila dan hanya bila  $\text{Re}\lambda_i > 0$  untuk beberapa  $i = 1, \dots, k$  atau ada  $\lambda_i$  dengan  $\text{Re}\lambda_i = 0$  multisiplisitas aljabar lebih besar dari multisiplisitas geometrinya.

## 2.6 Metode Runge-Kutta

Simulasi kestabilan pada studi kasus ikan tuna dan ikan teri diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta, yaitu suatu pendekatan dengan menggunakan metode solusi numerik dari masalah nilai awal.

Diberikan sebagai berikut

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Rumus Runge-Kutta melibatkan bobot rata-rata dari nilai  $f(t, y)$  di titik yang berbeda pada interval  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ . Dan diberikan oleh

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right) \quad (2.1)$$

dimana

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n) \\ k_{n2} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right) \\ k_{n3} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right) \\ k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}) \end{aligned}$$

Formula pendekatan metode Runge-Kutta untuk solusi masalah nilai awal, sebagai berikut [3]

**Step 1** : didefinisikan  $f(t, y)$

**Step 2** : masukan nilai awal  $t_0$  dan  $y_0$

**Step 3** : masukan ukuran  $h$  dan jumlah iterasi  $n$

**Step 4** : keluaran  $t_0$  dan  $y_0$

**Step 5** : for  $j$  dari 1 sampai  $n$

**Step 6** : lakukan iterasi untuk

$$k1 = f(t, y)$$

$$k2 = f(t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k1)$$

$$\begin{aligned}
 k3 &= f(t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k2) \\
 k4 &= f(t + h, y + h * k3) \\
 y &= y + (h/6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) \\
 t &= t + h
 \end{aligned}$$

**Step 7** : hasil keluaran  $t$  dan  $y$

**Step 8** : *end*

jika  $f$  tidak bergantung pada  $y$ , maka

$$k_{n1} = f(t_n), \quad k_{n2} = k_{n3} = f(t_n + h/2), \quad k_{n4} = f(t_n + h)$$

Persamaan (2.1) menjadi

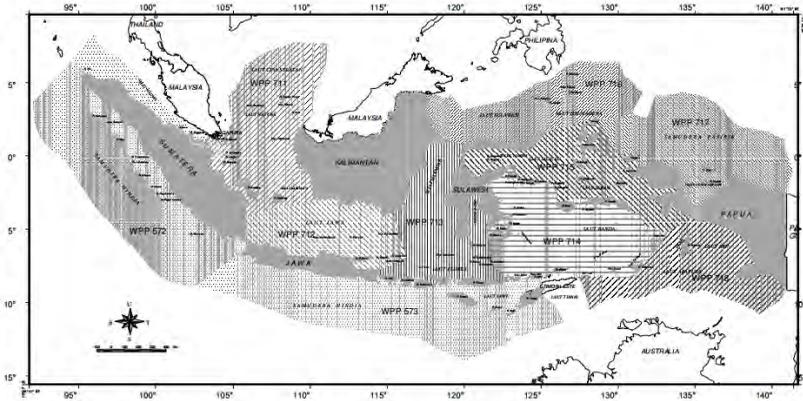
$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6} [f(t_n) + 4f(t_n + h/2) + f(t_n + h)] \quad (2.2)$$

## 2.7 Ikan Tuna, Ikan Teri dan Perairan Indonesia

Perairan Indonesia mempunyai luas 5,8 juta km<sup>2</sup> yang terdiri dari luas laut teritorial 0,3 juta km<sup>2</sup>, luas perairan kepulauan 2,95 juta km<sup>2</sup> dan luas Zona Ekonomi Eksekutif (ZEE) Indonesia 2,55 juta km<sup>2</sup>. Potensi lestari sumber daya ikan laut Indonesia diperkirakan sebesar 7,3 juta ton per tahun yang tersebar diperairan wilayah Indonesia dan perairan ZEE. Laut Indonesia memiliki sekitar 8.500 spesies ikan, 555 spesies rumput laut dan 950 spesies biota terumbu karang. Sumber daya ikan di laut meliputi 37% dari spesies ikan dunia, dimana beberapa jenis diantaranya mempunyai nilai ekonomis tinggi, seperti tuna, udang, lobster, ikan karang, berbagai jenis ikan hias, kekerangan, dan rumput laut [7]. Sehingga tuna menjadi target penangkapan nelayan karena mempunyai nilai ekonomis yang tinggi.

Rantai makanan pada ekosistem laut, hiu menduduki tingkat tertinggi *predator*, kemudian tuna menjadi *predator* kedua, selanjutnya ikan kecil seperti ikan teri dan rantai makanan selanjutnya diduduki oleh plankton. Pada sub bab ini dijelaskan mengenai objek dan wilayah yang menjadi studi kasus simulasi dalam penerapan hasil konstruksi model *Prey-Predator* yang telah di peroleh, berikut adalah pembagian wilayah perairan Indonesia berdasarkan Peraturan Menteri Kelautan dan Perikanan Republik Indonesia Nomor PER.01/MEN/2009 tentang Wilayah

## Pengelolaan Perikanan Republik Indonesia Menteri Kelautan dan Perikanan Republik Indonesia [1]



**Gambar 2.1** Peta WPP-RI

Dengan rincian penjelasan sebagai berikut

No	Nama WPP	Terdiri dari
1	WPP-RI 571	Selat Malaka dan Laut Andaman
2	WPP-RI 572	Samudera Hindia sebelah Barat Sumatera dan Selat Sunda
3	WPP-RI 573	Samudera Hindia sebelah Selatan Jawa hingga sebelah Selatan Nusa Tenggara, Laut Sawu, dan Laut Timor bagian Barat
4	WPP-RI 711	Selat Karimata, Laut Natuna, dan Laut China Selatan
5	WPP-RI 712	Laut Jawa
6	WPP-RI 713	Selat Makassar, Teluk Bone, Laut Flores, dan Laut Bali
7	WPP-RI 714	Teluk Tolo dan Laut Banda
8	WPP-RI 715	Teluk Tomini, Laut Maluku, Laut Halmahera, Laut Seram dan Teluk Berau

9	WPP-RI 716	Laut Sulawesi dan sebelah Utara Pulau Halmahera
10	WPP-RI 717	Teluk Cenderawasih dan Samudera Pasifik
11	WPP-RI 718	Laut Aru, Laut Arafuru, dan Laut Timor bagian Timur

**Tabel 2.1** Penjelasan WPP-RI

Simulasi dilakukan pada ekosistem laut Indonesia yaitu pada WPP-RI 713 sebagai wilayah I dan WPP-RI 714 sebagai wilayah II karena pada wilayah tersebut terdapat dua jenis ikan yang menjadi objek penelitian yaitu pada ikan tuna menjadi objek *predator* dan ikan teri menjadi objek *prey*. Pada objek penelitian ikan teri dan ikan tuna terdapat fenomena yang sesuai dengan model yang diteliti yaitu dengan adanya migrasi pada *predator* (tuna), pertumbuhan alami pada kedua objek penelitian, pemanenan pada kedua objek penelitian, dan kematian karena kekurangan makanan pada kedua objek penelitian.

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Metode penelitian yang digunakan dalam Tugas Akhir ini dibagi menjadi beberapa tahapan-tahapan penelitian dan diberikan diagram alur untuk mempermudah memahami tahapan-tahapan pengerjaan Tugas Akhir.

#### **3.1 Tahap Penelitian**

Berikut adalah tahap-tahap yang dilakukan pada pengerjaan Tugas Akhir ini.

##### a. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pengumpulan referensi berupa jurnal, buku dan lainnya yang mendukung selama penelitian. Kemudian mempelajari asumsi-asumsi yang digunakan pada jurnal utama, diantaranya *prey* dan *predator*, fenomena-fenomena yang terjadi, mempelajari fenomena-fenomena yang terjadi pada ikan Tuna dan ikan Teri. Serta mempelajari cara melakukan pemodelan matematika, analisis kestabilan dan melakukan simulasi numerik.

##### b. Konstruksi Model Matematika

Pada tahap ini akan dilakukan konstrukri model matematika pada bab 2.2.3 [6], berdasarkan penambahan fenomena-fenomena baru (pengamatan pada wilayah II) yang terjadi pada objek yang diamati (*prey* dan *predator*) sehingga dapat memperoleh suatu model *prey* dan *predator* pada dua wilayah dengan adanya migrasi *predator* pada wilayah I menuju wilayah II yang pada kedua wilayah terjadi pemanenan pada kedua objek pengamatan, kemudian menentukan kondisi awal dan kondisi batas dari persamaan diferensial pada model dan dilakukan validasi terhadap model dengan melakukan pembuktian bahwa model tersebut mempunyai penyelesaian dan positif.

##### c. Titik Keseimbangan dan Kestabilan

Pada tahap ini dicari titik keseimbangan dengan laju masing-masing populasi adalah nol. Kemudian dilakukan analisis

kestabilan yang sebelumnya dilakukan linearisasi pada model karena model yang diperoleh dari hasil konstruksi berbentuk persamaan diferensial tak linear, dan dari hasil linearisasi dilakukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan dengan mencari nilai eigen dari matriks jacobii pada setiap titik setimbang.

d. Simulasi

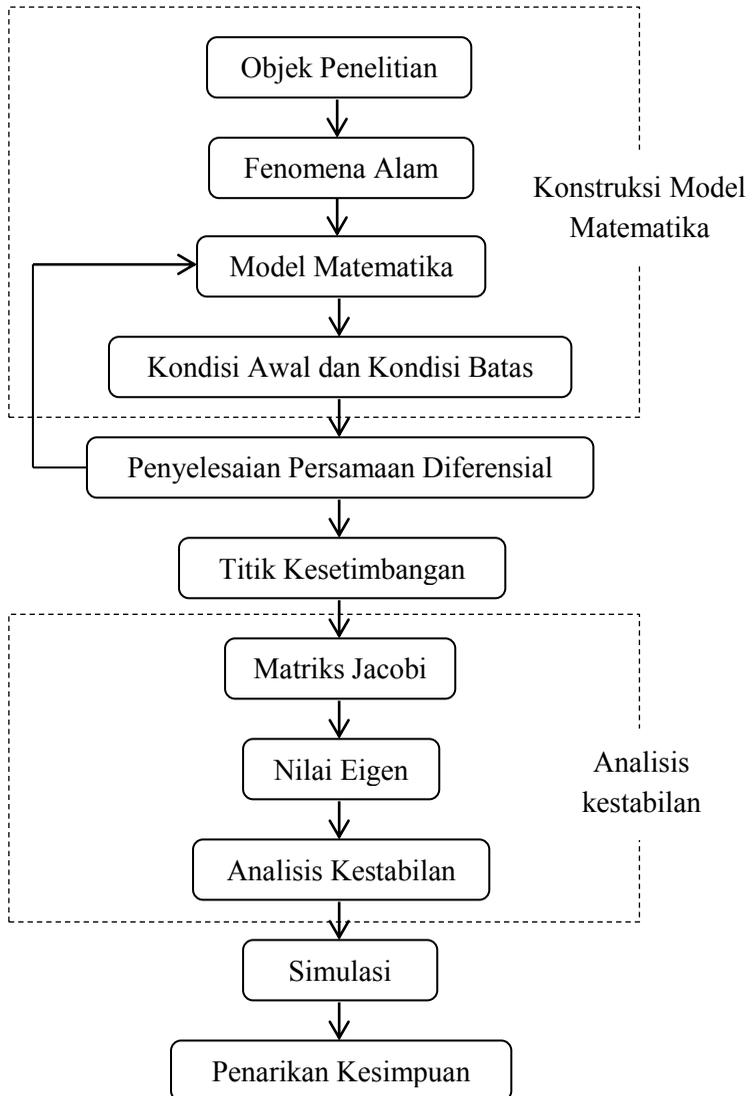
Tahap ini dilakukan simulasi numerik Runge-Kutta orde 4 dengan menggunakan *software* MATLAB R2010a untuk mengetahui grafik kestabilan dan penyelesaian numerik dari model *prey* dan *predator* serta untuk mendapatkan nilai parameter-parameter dari fenomena yang terjadi pada ikan tuna dan ikan teri supaya diperoleh kondisi ekosistem yang stabil.

e. Penarikan Kesimpulan dan Penulisan Laporan Tugas Akhir

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan pada seluruh tahap penelitian yang dilakukan terkait hasil konstruksi model matematika sehingga diperoleh suatu model *prey* dan *predator* pada dua wilayah dengan adanya migrasi *predator* pada wilayah I menuju wilayah II yang pada kedua wilayah terjadi pemanenan pada kedua objek pengamatan, analisis kestabilan sistem dari model *prey* dan *predator*, simulasi kestabilan sistem, serta penarikan kesimpulan hasil parameter-parameter yang diperoleh pada analisis kestabilan dan simulasi kestabilan saat kondisi ekosistem yang stabil pada studi kasus ikan tuna dan ikan teri serta dilakukan penulisan laporan Tugas Akhir.

### 3.2 Alur Penelitian

Berikut adalah alur penelitian dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.



**Gambar 3. 1 Diagram Alur Metode Penelitian**



## **BAB IV**

### **ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Pada bab ini dibahas model *prey-predator*, yaitu pada penelitian yang sebelumnya hanya membahas model *prey-predator* pada satu wilayah, oleh karena adanya perpindahan populasi *predator* ke wilayah lain maka di konstruksi model matematika pada dua wilayah. Pada model wilayah kedua (Wilayah II) mempunyai fenomena yang sama seperti yang terjadi pada wilayah pertama (Wilayah I), sehingga menghasilkan model pada wilayah II dan perubahan model pada wilayah I. Model pada kedua wilayah dicari penyelesaian persamaan diferensialnya terlebih dahulu untuk mengetahui nilai dari populasi adalah positif, kemudian dicari titik kesetimbangan, linearisasi, kestabilan pada titik kesetimbangan. Kemudian dilakukan simulasi kestabilan dengan menggunakan *software* Matlab dengan tujuan mengetahui kondisi stabil sistem pada studi kasus ikan tuna dan ikan teri di ekosistem laut Indonesia.

#### **4.1 Konstruksi Model *Prey-Predator* pada Dua Wilayah dengan Migrasi *Predator***

Model *prey-predator* pada dua wilayah dengan adanya migrasi *predator* merupakan hasil konstruksi dari model yang telah diteliti oleh Narayan dan Ramacharyulu [6] yang hanya membahas proses interaksi antara *prey predator* pada sebuah wilayah disertai adanya pemanenan dan migrasi *predator* ke wilayah lain yang tidak diteliti lebih lanjut. Sehingga pada Tugas Akhir ini dilakukan konstruksi model berupa penambahan wilayah penelitian yang mempunyai fenomena-fenomena yang sama seperti wilayah I.

Langkah-langkah konstruksi model diawali dengan melakukan penyusunan penjelasan fenomena sebagai berikut :

- a. Objek penelitian dibagi menjadi dua kelompok populasi, populasi adalah kumpulan individu sejenis yang berada pada

wilayah tertentu dan pada waktu tertentu pula, berikut pembagian populasi yang menjadi objek penelitian yaitu:

- $M$  adalah populasi *prey* (kumpulan dari mangsa yang dimangsa oleh *predator*) pada saat  $t$ .

Populasi *prey* dibagi menjadi dua kelompok berdasarkan letak wilayah yaitu:

- $M_1$  adalah populasi *prey* pada wilayah I.
- $M_2$  adalah populasi *prey* pada wilayah II.

- $P$  adalah populasi *predator* (kumpulan dari pemangsa yang memangsa *prey*) pada saat  $t$ .

Populasi *predator* dibagi menjadi dua kelompok berdasarkan letak wilayah yaitu:

- $P_1$  adalah populasi *predator* pada wilayah I
- $P_2$  adalah populasi *predator* pada wilayah II

dengan  $M_1, M_2, P_1, P_2 > 0$ .

- b.  $n$  adalah rate pertumbuhan alami setiap populasi pada kedua wilayah pada saat  $t$ , yaitu sebagai berikut:

- $n_M$  adalah rate pertumbuhan alami *prey*, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *prey* sebagai berikut

- $n_{M_1}$  adalah rate pertumbuhan alami *prey* di wilayah I.
- $n_{M_2}$  adalah rate pertumbuhan alami *prey* di wilayah II.

- $n_P$  adalah rate pertumbuhan alami *predator*, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *predator* sebagai berikut

- $n_{P_1}$  adalah rate pertumbuhan alami *predator* di wilayah I.
- $n_{P_2}$  adalah rate pertumbuhan alami *predator* di wilayah II.

dengan kondisi  $n_{M_1} > n_{P_1} > 0$  dan  $n_{M_2} > n_{P_2} > 0$ .

- c.  $\gamma$  adalah rate pemanenan setiap populasi pada kedua wilayah yaitu:

- $\gamma_M$  adalah rate pemanenan *prey*, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *prey* sebagai berikut

- $\gamma_{M_1}$  adalah rate pemanenan *prey* di wilayah I.
- $\gamma_{M_2}$  adalah rate pemanenan *prey* di wilayah II.

- $\gamma_P$  adalah rate pemanenan *predator*, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *predator* sebagai berikut
  - $\gamma_{P_1}$  adalah rate pemanenan *predator* di wilayah I.
  - $\gamma_{P_2}$  adalah rate pemanenan *predator* di wilayah II.
 dengan kondisi  $\gamma_{M_1} > 0, \gamma_{M_2} > 0$  dan  $\gamma_{P_1} > 0, \gamma_{P_2} > 0$ .
- d.  $\alpha$  adalah rate penurunan jumlah populasi akibat kekurangan makanan setiap populasi pada kedua wilayah yaitu:
  - $\alpha_M$  adalah rate penurunan jumlah populasi *prey* akibat kekurangan makanan, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *prey* sebagai berikut
    - $\alpha_{M_1}$  adalah rate penurunan jumlah populasi *prey* akibat kekurangan makanan di wilayah I.
    - $\alpha_{M_2}$  adalah rate penurunan jumlah populasi *prey* akibat kekurangan makanan di wilayah II.
  - $\alpha_P$  adalah rate penurunan jumlah populasi *predator* akibat kekurangan makanan, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *predator* sebagai berikut
    - $\alpha_{P_1}$  adalah rate penurunan jumlah populasi *predator* akibat kekurangan makanan di wilayah I.
    - $\alpha_{P_2}$  adalah rate penurunan jumlah populasi *predator* akibat kekurangan makanan di wilayah II.
 dengan kondisi  $\alpha_{M_1} > 0, \alpha_{M_2} > 0$ , dan  $\alpha_{P_1} > 0, \alpha_{P_2} > 0$ .
- e.  $\beta$  adalah rate perubahan jumlah populasi akibat adanya interaksi antara *prey* dan *predator* yaitu:
  - $\beta_M$  adalah rate penurunan jumlah populasi *prey* akibat dimangsa oleh *predator*, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *prey* sebagai berikut
    - $\beta_{M_1}$  adalah rate penurunan jumlah populasi *prey* akibat dimangsa oleh *predator* di wilayah I.
    - $\beta_{M_2}$  adalah rate penurunan jumlah populasi *prey* akibat dimangsa oleh *predator* di wilayah II.
  - $\beta_P$  adalah rate peningkatan jumlah populasi *predator* karena berhasil memangsa *prey*, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *predator* sebagai berikut

- $\beta_{P_1}$  adalah rate peningkatan jumlah populasi *predator* karena berhasil memangsa *prey* di wilayah I.
- $\beta_{P_2}$  adalah rate peningkatan jumlah populasi *predator* karena berhasil memangsa *prey* di wilayah II.

dengan  $\beta_{M_1} > 0, \beta_{M_2} > 0$  dan  $\beta_{P_1} > 0, \beta_{P_2} > 0$ .

f.  $k(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi saat migrasi selama masa penelitian  $t$ , sebagai berikut:

- $k_M(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *prey* saat migrasi *predator* selama masa penelitian  $t$ .

Fungsi bobot perubahan jumlah populasi *prey* selama masa migrasi pada waktu penelitian selama  $t$ , dibagi menjadi dua berdasarkan arah migrasi *predator* yaitu :

- $k_M^-(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *prey*, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *prey* sebagai berikut
  - $k_{M_1}^-(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *prey* di wilayah I saat *predator* wilayah I telah kembali melakukan migrasi dari wilayah II menuju wilayah I.
  - $k_{M_2}^-(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *prey* di wilayah II saat *predator* wilayah II telah kembali melakukan migrasi dari wilayah I menuju wilayah II.

sehingga terjadi penurunan *prey* karena terus menerus dimangsa oleh *predator* yang kembali dari migrasi.

- $k_M^+(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *prey*, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *prey* sebagai berikut
  - $k_{M_1}^+(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *prey* di wilayah I saat *predator* bermigrasi dari wilayah I menuju wilayah II.
  - $k_{M_2}^+(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *prey* di wilayah II saat *predator* bermigrasi dari wilayah II menuju wilayah I.

sehingga terjadi peningkatan *prey* karena populasi *predator* berkurang karena migrasi menuju wilayah yang lain.

- $k_p(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *predator* saat migrasi *predator* selama masa penelitian  $t$ . Fungsi bobot perubahan jumlah populasi *prey* saat migrasi *predator* selama masa penelitian  $t$  dibagi menjadi dua berdasarkan arah migrasi *predator* yaitu :

- $k_p^-(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *predator*, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *predator* sebagai berikut

- $k_{p_1}^-(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *predator* pada wilayah I saat *predator* bermigrasi menuju wilayah II.

- $k_{p_2}^-(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *predator* pada wilayah II saat *predator* bermigrasi menuju wilayah I.

sehingga jumlah perubahan *predator* semakin menurun.

- $k_p^+(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *predator*, dibagi menjadi dua berdasarkan letak wilayah *predator* sebagai berikut

- $k_{p_1}^+(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *predator* pada wilayah I saat *predator* wilayah I telah kembali melakukan migrasi dari wilayah II menuju wilayah I.

- $k_{p_2}^+(t)$  adalah fungsi bobot perubahan jumlah populasi *predator* wilayah II telah kembali melakukan migrasi dari wilayah I menuju wilayah II, sehingga jumlah perubahan *predator* semakin meningkat.

*Predator* mengalami masa migrasi dalam waktu penelitian  $t$ , masa migrasi dalam waktu  $t \in \Omega$  yang mempunyai domain terbatas dengan batas domain  $[0, T]$ , dengan  $T$  terbatas. Untuk

proses migrasi terlebih dahulu dari wilayah I menuju wilayah II kemudian wilayah II menuju wilayah I.

Berdasarkan penjelasan dari fenomena diatas diperoleh model *prey-predator* sebagai berikut:

1. Pada Wilayah I

a. Laju populasi *prey*

Besarnya laju populasi *prey* di wilayah I bertambah karena adanya pertumbuhan alami  $(n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1})M_1)$  dari populasi total yang sudah berkurang akibat adanya pemanenan, dan berkurang akibat populasi *prey* yang mengalami pemanenan  $(\gamma_{M_1}M_1)$ , berkurang karena kematian akibat kekurangan makanan dengan jumlah yang besar  $(\alpha_{M_1}M_1^2)$ , serta kematian akibat adanya interaksi antara *prey* dan *predator* sehingga *prey* dimangsa oleh *predator*  $(\beta_{M_1}M_1)$ , karena *predator* pada wilayah II bermigrasi menuju wilayah I akibat jumlah populasi *prey* tidak mencukupi kebutuhan *predator* pada wilayah II kemudian *predator* pada wilayah II mencari mangsa pada wilayah I sehingga jumlah *prey* dapat berkurang karena dimangsa oleh *predator* dari wilayah II yang bermigrasi menuju wilayah I akibat migrasi yang jumlahnya semakin meningkat pada wilayah I  $(\beta_{M_1}M_1 \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt)$ , dan berkurang akibat dimangsa *predator* pada wilayah I yang juga bermigrasi menuju wilayah II karena jumlah *prey* yang tidak dapat memenuhi kebutuhan *predator* pada wilayah I dengan jumlah *predator* yang semakin berkurang karena bermigrasi  $(\beta_{M_1}P_1M_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt)$  pada wilayah I. Sehingga berlaku persamaan sebagai berikut

$$\frac{dM_1}{dt} = M_1 \left\{ n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1} M_1 - \beta_{M_1} P_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t) dt - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t) P_2 dt \right\} \quad (4.1)$$

b. Laju Populasi *Predator*

Besarnya laju populasi *predator* di wilayah I bertambah karena adanya pertumbuhan alami ( $n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1})P_1$ ) dari populasi total yang sudah berkurang akibat adanya pemanenan, dan berkurang akibat adanya *predator* yang mengalami pemanenan ( $\gamma_{P_1}P_1$ ), berkurang akibat kematian karena kekurangan makanan dengan jumlah yang besar ( $\alpha_{P_1}P_1^2$ ), serta mengalami peningkatan jumlah akibat adanya interaksi antara *prey* dan *predator* sehingga *predator* bertambah karena berhasil memangsa *prey* ( $\beta_{P_1}P_1$ ) dengan jumlah *prey* pada wilayah I yang dimangsa semakin meningkat ( $\beta_{P_1}M_1P_1k_{M_1}^+(t)$ ) saat *predator* bermigrasi dari wilayah I menuju wilayah II yang diakibatkan karena jumlah *prey* pada wilayah I tidak mencukupi kebutuhan *predator* pada wilayah I sehingga *predator* bermigrasi menuju wilayah II dan jumlah *prey* semakin menurun ( $\beta_{P_1}M_1P_1k_{M_1}^-(t)$ ) saat *predator* bermigrasi dari wilayah II kembali menuju wilayah I ketika kondisi *prey* sudah bertumbuh banyak dan mencukupi kebutuhan *predator* di wilayah I, selain itu jumlah *predator* juga menurun karena terjadi migrasi dari wilayah I menuju wilayah II dengan kondisi semakin menurun ( $P_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t) dt$ ) pada wilayah I dan jumlah *predator* bertambah karena terjadi migrasi kembali pada *predator* yang berada di wilayah II menuju wilayah I dengan jumlah *predator* yang semakin

bertambah  $(P_1 \int_0^T k_{P_1}^+ P_2(t) dt)$  pada wilayah I. Sehingga berlaku persamaan sebagai berikut

$$\frac{dP_1}{dt} = P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1} P_1 \right. \\ \left. + \beta_{P_1} M_1 (k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)) - \int_0^T k_{P_1}^-(t) dt \right. \\ \left. + \int_0^T k_{P_1}^+(t) P_2 dt \right\} \quad (4.2)$$

## 2. Pada Wilayah II

### a. Laju Populasi *Prey*

Besarnya laju populasi *prey* pada wilayah II bertambah karena adanya pertumbuhan alami  $(n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2})M_2)$  dari populasi total *prey* yang sudah berkurang akibat adanya pemanenan, dan populasi *prey* berkurang karena terjadi pemanenan  $(\gamma_{M_2}M_2)$ , dan berkurang karena kematian akibat kekurangan makanan pada *prey* dengan jumlah yang besar  $(\alpha_{M_2}M_2^2)$ , serta kematian akibat adanya interaksi antara *prey* dan *predator* sehingga *prey* dimangsa oleh *predator*  $(\beta_{M_2}M_2)$ , karena *predator* pada wilayah I bermigrasi menuju wilayah II sehingga jumlah *prey* pada wilayah II dapat berkurang karena dimangsa oleh *predator* yang jumlahnya semakin meningkat pada wilayah II  $(\beta_{M_2}M_2 \int_0^T k_P^+(t)P_1 dt)$ , dan berkurang akibat dimangsa *predator* pada wilayah II yang juga bermigrasi menuju wilayah I dengan jumlah *predator* yang semakin berkurang karena bermigrasi menuju wilayah I  $(\beta_{M_2}P_2M_2 \int_0^T k_P^-(t)dt)$  pada wilayah II. Sehingga berlaku persamaan sebagai berikut

$$\frac{dM_2}{dt} = M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 - \beta_{M_2}P_2 \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\} \quad (4.3)$$

b. Laju Populasi *Predator*

Besarnya laju populasi *predator* di wilayah II bertambah karena adanya pertumbuhan alami  $(n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2})P_2)$  dari populasi total yang sudah berkurang akibat adanya pemanenan, dan berkurangnya populasi *predator* akibat adanya pemanenan  $(\gamma_{P_2}P_2)$ , berkurang akibat kematian karena kekurangan makanan dengan jumlah yang besar  $(\alpha_{P_2}P_2^2)$ , serta mengalami peningkatan jumlah akibat adanya interaksi antara *prey* dan *predator* sehingga *predator* bertambah karena berhasil memangsa *prey*  $(\beta_{P_2}P_2)$  dengan jumlah *prey* pada wilayah II yang dimangsa semakin meningkat  $(\beta_{P_2}P_2M_2k_{M_2}^+(t))$  saat *predator* bermigrasi dari wilayah II menuju wilayah I karena jumlah *prey* pada wilayah II tidak mencukupi kebutuhan *predator* wilayah II dan jumlah *prey* semakin menurun  $(\beta_{P_2}P_2M_2k_{M_2}^-(t))$  saat *predator* bermigrasi dari wilayah I kembali menuju wilayah II saat *prey* sudah bertumbuh banyak dan mencukupi kebutuhan *predator*, selain itu jumlah *predator* juga menurun karena terjadi migrasi dari wilayah II menuju wilayah I dengan kondisi semakin menurun  $(P_2 \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt)$  pada wilayah II dan jumlah *predator* bertambah karena terjadi migrasi kembali pada *predator* yang berada di wilayah I menuju wilayah II dengan jumlah *predator* yang semakin bertambah  $(P_2 \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1(t)dt)$  pada wilayah II. Sehingga berlaku persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dP_2}{dt} = P_2 \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2}P_2 \right. \\ \left. + \beta_{P_2}M_2(k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t)) - \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt \right. \\ \left. + \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\} \quad (4.4) \end{aligned}$$

Dari Persamaan (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) didapat laju perubahan populasi *prey*, *predator* di masing-masing wilayah

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} = M_1 \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt \right. \\ \left. - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} = P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 \right. \\ \left. + \beta_{P_1}M_1(k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)) - \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt \right. \\ \left. + \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_2}{dt} = M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 - \beta_{M_2}P_2 \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt \right. \\ \left. - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_2}{dt} = P_2 \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2}P_2 \right. \\ \left. + \beta_{P_2}M_2 \left( k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t) \right) - \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt \right. \\ \left. + \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

dimana

$M_1, M_2, P_1, P_2 > 0, n_{M_1} > n_{P_1} > 0, n_{M_2} > n_{P_2} > 0, \gamma_{M_1}, \gamma_{M_2},$   
 $\gamma_{P_1}, \gamma_{P_2}, \alpha_{M_1}, \alpha_{M_2}, \alpha_{P_1}, \alpha_{P_2}, \beta_{M_1}, \beta_{M_2}, \beta_{P_1}, \beta_{P_2} > 0$

dengan fungsi bobot yaitu suatu fungsi perubahan nilai populasi selama migrasi pada kedua wilayah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k_{M_1}^+(t) = e^{at}, \quad k_{M_1}^-(t) = e^{-bt}, \quad \int_0^T k_{P_1}^+(t)dt = \int_0^T e^{qt}(t)dt, \\ \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt = \int_0^T e^{-rt} dt \quad \text{dan} \quad k_{M_2}^+(t) = e^{wt}, \quad k_{M_2}^-(t) = e^{-xt}, \\ \int_0^T k_{P_2}^+(t)dt = \int_0^T e^{yt}dt, \quad \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt = \int_0^T e^{-zt}dt \end{aligned}$$

dengan  $a, b, r, q, w, x, y, z > 0$

Kemudian dilakukan substitusi fungsi bobot ke persamaan diferensial (4.5) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} = M_1 \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T e^{-rt} dt \right. \\ \left. - \beta_M \int_0^T e^{qt}P_2 dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1}{dt} &= P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 + \beta_{P_1}M_1(e^{aT} + e^{-bT}) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T e^{-rt} dt + \int_0^T e^{qt} P_2 dt \right\} \\
\frac{dM_2}{dt} &= M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 - \beta_{M_2}P_2 \int_0^T e^{-zt} dt \right. \\
&\quad \left. - \beta_{M_2} \int_0^T e^{yt} P_1 dt \right\} \\
\frac{dP_2}{dt} &= P_2 \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2}P_2 + \beta_{P_2}M_2(e^{wT} + e^{-xT}) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T e^{-zt} dt + \int_0^T e^{yt} P_1 dt \right\} \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Kondisi awal

$$M_1(0) = M_{10},$$

$$P_1(0) = P_{10},$$

$$M_2(0) = M_{20},$$

$$P_2(0) = P_{20}.$$

Kondisi batas

$$(M_1)_{min} \leq M_1 \leq (M_1)_{max}$$

$$(M_2)_{min} \leq M_2 \leq (M_2)_{max}$$

$$(P_1)_{min} < (M_1)_{max},$$

$$(P_1)_{max} \geq (M_1)_{max},$$

$$(P_2)_{min} < (M_2)_{max},$$

$$(P_2)_{max} \geq (M_2)_{max}.$$

## 4.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial

Pada sub bab ini dilakukan penyelesaian dari persamaan diferensial sistem yang sudah diperoleh dari hasil konstruksi pada sub bab 4.1 dan dilakukan pembuktian bahwa persamaan diferensial sistem mempunyai penyelesaian untuk nilai dari populasi *prey* dan *predator* positif.

### 4.2.1 Penyelesaian Persamaan Diferensial Laju Perubahan Populasi *Prey* dan *Predator* pada Wilayah I

Diberikan persamaan diferensial yang menyatakan laju perubahan populasi *prey* pada wilayah I sebagai berikut

$$\frac{dM_1}{dt} = M_1 \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\}$$

Karena persamaan diferensial diatas berbentuk Persamaan Diferensial Bernoulli maka dapat diperoleh bentuk umum persamaan diferensial sebagai berikut

$$\dot{M}_1 - \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\} M_1 = -\alpha_{M_1}M_1^2$$

Untuk menyederhanakan persamaan dilakukan permisalan sebagai berikut

$$A(t) = \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\}$$

Sehingga persamaan diferensial  $M_1$  mempunyai bentuk umum

$$\dot{M}_1 - A(t)M_1 = -\alpha_{M_1}M_1^2$$

Selanjutnya diberikan

$$B = M_1^{1-2} = M_1^{-1}, \dot{B} = -M_1^{-2} \cdot \dot{M}_1$$

Dilakukan substitusi  $\dot{M}_1$  sehingga persamaan diferensial menjadi

$$\dot{B} = -M_1^{-2} \cdot (A(t)M_1 - \alpha_{M_1}M_1^2)$$

$$\dot{B} = -A(t)B + \alpha_{M_1}$$

$$\dot{B} + A(t)B = \alpha_{M_1}$$

Kemudian dengan menggunakan Faktor Pengintegral  $e^{\int A(t)dt}$  didapatkan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$\begin{aligned} & B e^{\left(n_{M_1}(1-\gamma_{M_1})-\gamma_{M_1}-\beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt\right)t - \left(\beta_{M_1} \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt\right) \int P_1(t)dt} \\ &= \int \alpha_{M_1} e^{\left(n_{M_1}(1-\gamma_{M_1})-\gamma_{M_1}-\beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt\right)t - \left(\beta_{M_1} \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt\right) \int P_1(t)dt} dt \\ &+ c \end{aligned}$$

Misalkan

$$R = \left(n_{M_1}(1-\gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt\right)$$

$$S = \left(\beta_{M_1} \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt\right)$$

Sehingga

$$B e^{Rt-S \int P_1(t)dt} = \int \alpha_{M_1} e^{Rt-S \int P_1(t)dt} dt + c$$

$$\frac{1}{M_1} e^{Rt-S \int P_1(t)dt} = \int \alpha_{M_1} e^{Rt-S \int P_1(t)dt} dt + c$$

$$M_1 = \frac{e^{Rt-S \int P_1(t)dt}}{\int \alpha_{M_1} e^{Rt-S \int P_1(t)dt} dt + c}$$

Karena nilai  $(e^{Rt-S \int P_1(t)dt}) > 0$  dan  $(\int \alpha_{M_1} e^{Rt-S \int P_1(t)dt} dt + c) > 0$  maka  $M_1 > 0$ , Jadi laju perubahan populasi *prey* pada wilayah I mempunyai penyelesaian positif.

Dengan cara yang sama dapat pula diselesaikan untuk laju perubahan populasi *predator* pada wilayah I sebagai berikut

$$\frac{dP_1}{dt} = P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 + \beta_{P_1}M_1(k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)) - \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\}$$

Karena persamaan diferensial diatas berbentuk Persamaan Diferensial Bernoulli maka dapat diperoleh bentuk umum persamaan diferensial sebagai berikut

$$\dot{P}_1 - \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} + \beta_{P_1}M_1(k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)) - \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\} P_1 = -\alpha_{P_1}P_1^2$$

Berikut permisalan untuk penyederhanaan persamaan diatas

$$D(t) = \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} + \beta_{P_1}M_1(k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)) - \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\}$$

Sehingga persamaan diferensial  $P_1$  mempunyai bentuk umum menjadi

$$\dot{P}_1 - D(t)P_1 = -\alpha_{P_1}P_1^2$$

Selanjutnya diberikan

$$E = P_1^{1-2} = P_1^{-1}, \dot{E} = -P_1^{-2} \cdot \dot{P}_1$$

Dilakukan substitusi  $\dot{P}_1$  sehingga persamaan diferensial menjadi

$$\dot{E} = P_1^{-2} \cdot (D(t)P_1 - \alpha_{P_1}P_1^2)$$

$$\dot{E} = -D(t)E + \alpha_{P_1}$$

$$\dot{E} + D(t)E = \alpha_{P_1}$$

Kemudian dengan menggunakan Faktor Pengintegral  $e^{\int D(t)dt}$  didapatkan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$\begin{aligned}
& E e^{(n_{P_1}(1-\gamma_{P_1})-\gamma_{P_1}-\int_0^T k_{P_1}^-(t)dt+\int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2dt)t-(\beta_{P_1}(k_{M_1}^+(t)+k_{M_1}^-(t)))} \int M_1(t)dt \\
& = \int \alpha_{P_1} e^{(n_{P_1}(1-\gamma_{P_1})-\gamma_{P_1}-\int_0^T k_{P_1}^-(t)dt+\int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2dt)t-(\beta_{P_1}(k_{M_1}^+(t)+k_{M_1}^-(t)))} \int M_1(t)dt \\
& + c
\end{aligned}$$

Misalkan

$$V = \left( n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right)$$

$$W = \left( \beta_{P_1}(k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)) \right)$$

Sehingga

$$E e^{Vt-W \int M_1(t)dt} = \int \alpha_{P_1} e^{Vt-W \int M_1(t)dt} dt + c$$

$$\frac{1}{P_1} e^{Vt-W \int M_1(t)dt} = \int \alpha_{P_1} e^{Vt-W \int M_1(t)dt} dt + c$$

$$P_1 = \frac{e^{Vt-W \int M_1(t)dt}}{\int \alpha_{P_1} e^{Vt-W \int M_1(t)dt} dt + c}$$

Karena nilai  $(e^{Vt-W \int M_1(t)dt}) > 0$  dan  $(\int \alpha_{P_1} e^{Vt-W \int M_1(t)dt} dt + c) > 0$  maka  $P_1 > 0$ , Jadi laju perubahan populasi predator pada wilayah I mempunyai penyelesaian positif.

#### 4.2.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial Laju Perubahan Populasi Prey dan Predator pada Wilayah II

Diberikan persamaan diferensial yang menyatakan laju perubahan populasi prey pada wilayah II sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dM_2}{dt} = M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 - \beta_{M_2}P_2 \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt \right. \\
\left. - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\}
\end{aligned}$$

Karena persamaan diferensial diatas berbentuk Persamaan Diferensial Bernoulli maka dapat diperoleh bentuk umum

$$\dot{M}_2 - \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \beta_{M_2} P_2 \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right\} M_2 = -\alpha_{M_2} M_2^2$$

Untuk menyederhanakan persamaan dilakukan permisalan sebagai berikut

$$F(t) = \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \beta_{M_2} P_2 \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right\}$$

Sehingga persamaan diferensial  $M_2$  mempunyai bentuk umum menjadi

$$\dot{M}_2 - F(t)M_2 = -\alpha_{M_2} M_2^2$$

Selanjutnya diberikan

$$G = M_2^{1-2} = M_2^{-1}, \dot{G} = -M_2^{-2} \cdot \dot{M}_2$$

Dilakukan substitusi  $\dot{M}_2$  sehingga persamaan diferensial menjadi

$$\dot{G} = -M_2^2 \cdot (F(t)M_2 - \alpha_{M_2} M_2^2)$$

$$\dot{G} = -F(t)G + \alpha_{M_2}$$

$$\dot{G} + F(t)G = \alpha_{M_2}$$

Kemudian dengan menggunakan Faktor Pengintegral  $e^{\int F(t)dt}$  didapatkan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$\begin{aligned} G e^{(n_{M_2}(1-\gamma_{M_2})-\gamma_{M_2}-\beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt)t - (\beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt) \int P_2(t) dt} \\ = \int \alpha_{M_2} e^{(n_{M_2}(1-\gamma_{M_2})-\gamma_{M_2}-\beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt)t - (\beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt) \int P_2(t) dt} dt \\ + c \end{aligned}$$

Misalkan

$$W = \left( n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right)$$

$$X = \left( \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt \right)$$

Sehingga

$$G e^{Wt - X \int P_2(t) dt} = \int \alpha_{M_2} e^{Wt - X \int P_2(t) dt} dt + c$$

$$\frac{1}{M_2} e^{Wt-X \int P_2(t) dt} = \int \alpha_{M_2} e^{Wt-X \int P_2(t) dt} dt + c$$

$$M_2 = \frac{e^{Wt-X \int P_2(t) dt}}{\int \alpha_{M_2} e^{Wt-X \int P_2(t) dt} dt + c}$$

Karena nilai  $(e^{Wt-X \int P_2(t) dt}) > 0$  dan  $(\int \alpha_{M_2} e^{Wt-X \int P_2(t) dt} dt + c) > 0$  maka  $M_2 > 0$ , Jadi laju perubahan populasi *prey* pada wilayah II mempunyai penyelesaian positif.

Dengan cara yang sama dapat pula diselesaikan untuk laju perubahan populasi *predator* pada wilayah II sebagai berikut

$$\frac{dP_2}{dt} = P_2 \left\{ n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2} P_2 \right.$$

$$\left. + \beta_{P_2} M_2 (k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t)) - \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt \right.$$

$$\left. + \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right\}$$

Karena persamaan diferensial diatas berbentuk Persamaan Diferensial Bernoulli maka dapat diperoleh bentuk umum persamaan diferensial sebagai berikut

$$\dot{P}_2 - \left\{ n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} + \beta_{P_2} M_2 (k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t)) \right.$$

$$\left. - \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt + \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right\} P_2 = -\alpha_{P_2} P_2^2$$

Untuk menyederhanakan persamaan dilakukan permisalan sebagai berikut

$$H(t) = \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} + \beta_{P_2} M_2 \left( k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t) \right) - \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt + \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right\}$$
 Sehingga persamaan diferensial  $P_2$  mempunyai bentuk umum menjadi

$$\dot{P}_2 - H(t)P_2 = -\alpha_{P_2} P_2^2$$

Selanjutnya diberikan

$$I = P_2^{1-2} = P_2^{-1}, \quad \dot{I} = -P_2^{-2} \cdot \dot{P}_2$$

Dilakukan substitusi  $\dot{P}_2$  sehingga persamaan diferensial menjadi

$$\dot{I} = P_2^{-2} \cdot (H(t)P_2 - \alpha_{P_2} P_2^2)$$

$$\dot{I} = -H(t)I + \alpha_{P_2}$$

$$\dot{I} + H(t)I = \alpha_{P_2}$$

Kemudian dengan menggunakan Faktor Pengintegral  $e^{\int H(t) dt}$  didapatkan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$\begin{aligned}
 I e^{\left( n_{P_2}(1-\gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt + \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right) t - \left( \beta_{P_2} \left( k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t) \right) \right) \int M_2(t) dt} \\
 = \int \alpha_{P_2} e^{\left( n_{P_2}(1-\gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt + \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right) t - \left( \beta_{P_2} \left( k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t) \right) \right) \int M_2(t) dt} \\
 + c
 \end{aligned}$$

Misalkan

$$Y = \left( n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt + \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right)$$

$$Z = \left( \beta_{P_2} \left( k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t) \right) \right)$$

Sehingga

$$I e^{Yt - Z \int M_2(t) dt} = \int \alpha_{P_2} e^{Yt - Z \int M_2(t) dt} dt + c$$

$$\frac{I}{P_2} e^{Yt - Z \int M_2(t) dt} = \int \alpha_{P_2} e^{Yt - Z \int M_2(t) dt} dt + c$$

$$P_2 = \frac{e^{Yt - Z \int M_2(t) dt}}{\int \alpha_{P_2} e^{Yt - Z \int M_2(t) dt} dt + c}$$

Karena nilai  $(e^{Yt - Z \int M_2(t) dt}) > 0$  dan  $(\int \alpha_{P_2} e^{Yt - Z \int M_2(t) dt} dt + c) > 0$  maka  $P_2 > 0$ , Jadi laju perubahan populasi predator pada wilayah II mempunyai penyelesaian positif.

### 4.3 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem (4.6) dapat diperoleh jika  $\frac{dM_1}{dt} = \frac{dM_2}{dt} = \frac{dP_1}{dt} = \frac{dP_2}{dt} = 0$ . Kedua wilayah mempunyai fenomena yang identik yaitu mempunyai kesamaan parameter yang diantaranya adalah rate kelahiran, rate pemanenan, rate kematian karena kekurangan makanan dan rate kematian *prey* karena dimangsa *predator* serta rate pertumbuhan *predator* karena berhasil memangsa *prey*.

Sebelum mencari titik kesetimbangan dilakukan terlebih dahulu penyelesaian dari bagian integral  $\int_0^T e^{-rt} dt$  dan  $\int_0^T e^{qt} P_2 dt$  pada persamaan diferensial  $\frac{dM_1}{dt}$  pada persamaan (4.6) dapat diselesaikan sebagai berikut

$$\int_0^T e^{-rt} dt = -\frac{1}{r} e^{-rt} \Big|_0^T = -\frac{1}{r} (e^{-rT} - 1)$$

Untuk  $\int_0^T e^{qt} P_2 dt$  dapat diselesaikan menggunakan integral parsial yaitu misalkan

$$u = P_2, \frac{du}{dt} = \frac{dP_2}{dt}, du = \frac{dP_2}{dt} dt$$

karena saat mencari titik kesetimbangan  $\frac{dP_2}{dt} = 0$ , maka  $du = 0$

$$dv = e^{qt} dt, v = \frac{1}{q} e^{qt}$$

Jadi diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{qt} P_2 dt &= P_2 \frac{1}{q} e^{qt} \Big|_0^T - \int \frac{1}{q} e^{qt} \cdot 0 dt \\ &= \frac{1}{q} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) \end{aligned}$$

Untuk integral di persamaan diferensial yang lain mempunyai penyelesaian yang sama dengan penyelesaian integral di atas, hanya mempunyai perbedaan pada parameter saja. Sehingga persamaan diferensial pada persamaan (4.6) dapat disederhanakan menjadi berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dM_1}{dt} &= M_1 \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 + \frac{1}{r}\beta_{M_1}P_1(e^{-rT} - 1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{q}\beta_{M_1}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} \\
\frac{dP_1}{dt} &= P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 + \beta_{P_1}M_1(e^{aT} + e^{-bT}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r}(e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} \\
\frac{dM_2}{dt} &= M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 + \frac{1}{z}\beta_{M_2}P_2(e^{-zT} - 1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{y}\beta_{M_2}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} \\
\frac{dP_2}{dt} &= P_2 \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2}P_2 + \beta_{P_2}M_2(e^{wT} + e^{-xT}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{z}(e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

### 4.3.1 Titik Kestimbangan *Prey* dan *Predator* di Wilayah I

Berdasarkan sub bab 2.4, pada persamaan (4.7) untuk laju perubahan  $M_1, P_1$  adalah:

$$\frac{dM_1}{dt} = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
M_1 \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 + \frac{1}{r}\beta_{M_1}P_1(e^{-rT} - 1) \right. \\
\left. - \frac{1}{q}\beta_{M_1}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} = 0
\end{aligned}$$

Dari persamaan tersebut diperoleh nilai  $M_1$  sebagai berikut, karena populasi  $M_1 \neq 0$  maka

$$\begin{aligned}
n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 + \frac{1}{r}\beta_{M_1}P_1(e^{-rT} - 1) \\
- \frac{1}{q}\beta_{M_1}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) = 0
\end{aligned}$$

$$M_1 = \frac{n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} + \frac{1}{r}\beta_{M_1}P_1(e^{-rT} - 1) - \frac{1}{q}\beta_{M_1}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0))}{\alpha_{M_1}} \quad (4.8)$$

Begitu pula pada persamaan *predator* pada wilayah I diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dP_1}{dt} = 0$$

$$P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 + \beta_{P_1}M_1(e^{aT} + e^{-bT}) + \frac{1}{r}(e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} = 0$$

Sehingga dari persamaan tersebut diperoleh nilai  $P_1$  sebagai berikut, karena populasi  $P_1 \neq 0$  maka

$$n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 + \beta_{P_1}M_1(e^{aT} + e^{-bT}) + \frac{1}{r}(e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) = 0$$

$$P_1 = \frac{n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} + \beta_{P_1}M_1(e^{aT} + e^{-bT}) + \frac{1}{r}(e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0))}{\alpha_{P_1}} \quad (4.9)$$

Kemudian substitusi Persamaan  $P_1$  (4.9) ke Persamaan  $M_1$  (4.8)

$$\alpha_{P_1}\alpha_{M_1}M_1 = \alpha_{P_1}n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \alpha_{P_1}\gamma_{M_1} + \frac{1}{r}\beta_{M_1} \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} + \beta_{P_1}M_1(e^{aT} + e^{-bT}) + \frac{1}{r}(e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} (e^{-rT} - 1) - \frac{1}{q}\alpha_{P_1}\beta_{M_1}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0))$$

Sehingga diperoleh nilai  $M_1^*$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 M_1^* &= \frac{\alpha_{P_1} n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) - \alpha_{P_1} \gamma_{M_1} + \frac{1}{r} \beta_{M_1} n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) (e^{-rT} - 1)}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1)} \\
 &+ \frac{\frac{1}{r} \beta_{M_1} (e^{-rT} - 1) (e^{-rT} - 1) - \frac{1}{q} \alpha_{P_1} \beta_{M_1} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0))}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1)} \\
 &+ \frac{\frac{1}{q} \beta_{M_1} (e^{-rT} - 1) (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \gamma_{P_1} (e^{-rT} - 1)}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1)} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Kemudian dianalisis syarat  $M_1^*$  positif sebagai berikut

- Diketahui  $\alpha_{P_1}, \alpha_{M_1}, \beta_{M_1}, \beta_{P_1}, a, b, r, T > 0$  sehingga  $\left( \alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1) \right) > 0$
- Diketahui  $\alpha_{P_1}, n_{M_1}, \gamma_{M_1}, \beta_{M_1}, n_{P_1}, \gamma_{P_1}, a, b, r, q, T, P_2(T), P_2(0) > 0$  jadi  $\alpha_{P_1} n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \gamma_{P_1} (e^{-rT} - 1) + \frac{1}{r} \beta_{M_1} (e^{-rT} - 1) (e^{-rT} - 1) > \alpha_{P_1} \gamma_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) (e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q} \alpha_{P_1} \beta_{M_1} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) - \frac{1}{q} \beta_{M_1} (e^{-rT} - 1) (P_2(T) e^{qT} - P_2(0))$ 
  - i.  $n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) > \gamma_{M_1} + \frac{1}{q} \beta_{M_1} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0))$
  - ii.  $n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) + \frac{1}{q} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) > \gamma_{P_1} - \frac{1}{r} (e^{-rT} - 1)$

Selanjutnya dicari titik kesetimbangan *predator* di wilayah I, dengan substitusi persamaan  $M_1$  (4.8) ke persamaan  $P_1$  (4.9)

$$\begin{aligned}
\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} P_1 &= \alpha_{M_1} n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) - \alpha_{M_1} \gamma_{P_1} \\
&\quad + \beta_{P_1} \left\{ n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} \right. \\
&\quad + \frac{1}{r} \beta_{M_1} P_1 (e^{-rT} - 1) \\
&\quad \left. - \frac{1}{q} \beta_{M_1} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) \right\} (e^{aT} + e^{-bT}) \\
&\quad + \frac{1}{r} \alpha_{M_1} (e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q} \alpha_{M_1} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0))
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai  $P_1^*$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
P_1^* &= \frac{\alpha_{M_1} n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) - \alpha_{M_1} \gamma_{P_1} + \beta_{P_1} n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) (e^{aT} + e^{-bT})}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1)} \\
&\quad - \frac{\frac{1}{q} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) + \beta_{P_1} \gamma_{M_1} (e^{aT} + e^{-bT})}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1)} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{r} \alpha_{M_1} (e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q} \alpha_{M_1} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0))}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1)} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Kemudian dilakukan analisis syarat  $P_1^*$  positif sebagai berikut

- Diketahui  $\alpha_{P_1}, \alpha_{M_1}, \beta_{M_1}, \beta_{P_1}, a, b, r, T > 0$  sehingga  $\left( \alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1) \right) > 0$
- Diketahui  $\alpha_{P_1}, \alpha_{M_1}, n_{M_1}, \gamma_{M_1}, \beta_{M_1}, \beta_{P_1}, n_{P_1}, \gamma_{P_1}, a, b, r, q, T, P_2(T), P_2(0) > 0$  jadi  $\alpha_{M_1} n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) + \beta_{P_1} n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) (e^{aT} + e^{-bT}) + \frac{1}{q} \alpha_{M_1} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) > \alpha_{M_1} \gamma_{P_1} + \frac{1}{q} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) + \beta_{P_1} \gamma_{M_1} (e^{aT} + e^{-bT}) - \frac{1}{r} \alpha_{M_1} (e^{-rT} - 1)$  sehingga diperoleh syarat
  - i.  $n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) > \frac{1}{q} \beta_{M_1} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) + \gamma_{M_1}$
  - ii.  $n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) + \frac{1}{q} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) > \gamma_{P_1} - \frac{1}{r} (e^{-rT} - 1)$

### 4.3.2 Titik Kesetimbangan *Prey* dan *Predator* di Wilayah II

Berdasarkan sub bab 2.4, pada persamaan (4.7) untuk laju perubahan  $M_2$ ,  $P_2$  adalah:

$$\frac{dM_2}{dt} = 0$$

Sehingga diperoleh

$$M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 + \frac{1}{z}\beta_{M_2}P_2(e^{-zT} - 1) - \frac{1}{y}\beta_{M_2}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} = 0$$

Sehingga dari persamaan tersebut diperoleh nilai  $M_2$  sebagai berikut, karena populasi  $M_2 \neq 0$  maka

$$n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 + \frac{1}{z}\beta_{M_2}P_2(e^{-zT} - 1) - \frac{1}{y}\beta_{M_2}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) = 0$$

$$M_2 = \frac{n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} + \frac{1}{z}\beta_{M_2}P_2(e^{-zT} - 1) - \frac{1}{y}\beta_{M_2}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0))}{\alpha_{M_2}} \quad (4.12)$$

Begitu pula pada persamaan *predator* pada wilayah II diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dP_2}{dt} = 0$$

$$P_2 \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2}P_2 + \beta_{P_2}M_2(e^{wT} + e^{-xT}) + \frac{1}{z}(e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} = 0$$

Sehingga dari persamaan tersebut diperoleh nilai  $P_2$  sebagai berikut, karena populasi  $P_2 \neq 0$  maka

$$n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2}P_2 + \beta_{P_2}M_2(e^{wT} + e^{-xT}) + \frac{1}{z}(e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) = 0$$

$$P_2 = \frac{n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} + \beta_{P_2}M_2(e^{wT} + e^{-xT}) + \frac{1}{z}(e^{-zT} - 1)}{\alpha_{P_2}} + \frac{\frac{1}{y}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0))}{\alpha_{P_2}} \quad (4.13)$$

Kemudian substitusi Persamaan  $P_2$  (4.13) ke Persamaan  $M_1$  (4.12)

$$\begin{aligned} \alpha_{P_2}\alpha_{M_2}M_2 &= \alpha_{P_2}n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \alpha_{P_2}\gamma_{M_2} \\ &+ \frac{1}{z}\beta_{M_2}\left\{n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2}\right. \\ &+ \beta_{P_2}M_2(e^{wT} + e^{-xT}) + \frac{1}{z}(e^{-zT} - 1) \\ &+ \left.\frac{1}{y}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0))\right\}(e^{-zT} - 1) \\ &- \frac{1}{y}\alpha_{P_2}\beta_{M_2}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai  $M_2^*$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} M_2^* &= \frac{\alpha_{P_2}n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \alpha_{P_2}\gamma_{M_2} + \frac{1}{z}\beta_{M_2}n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2})(e^{-zT} - 1)}{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})} \\ &+ \frac{\frac{1}{z}\frac{1}{z}\beta_{M_2}(e^{-zT} - 1)(e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y}\frac{1}{z}\beta_{M_2}(e^{-zT} - 1)(P_1(T)e^{yT} - P_1(0))}{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})} \\ &+ \frac{-\frac{1}{y}\alpha_{P_2}\beta_{M_2}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\gamma_{P_2}(e^{-zT} - 1)}{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})} \quad (4.14) \end{aligned}$$

Kemudian akan dianalisis syarat  $M_2^*$  positif sebagai berikut

- Diketahui  $\alpha_{P_2}, \alpha_{M_2}, \beta_{M_2}, \beta_{P_2}, z, w, x > 0$  sehingga  $\left(\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})\right) > 0$
- Diketahui  $\alpha_{P_2}, \alpha_{M_2}, \beta_{M_2}, \beta_{P_2}, \gamma_{M_2}, \gamma_{P_2}, z, w, x, n_{M_2}, n_{P_2} > 0$

Jadi  $\alpha_{P_2} n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \gamma_{P_2} (e^{-zT} - 1) + \frac{1}{z} \frac{1}{z} \beta_{M_2} (e^{-zT} - 1)(e^{-zT} - 1) > \alpha_{P_2} \gamma_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2})(e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y} \alpha_{P_2} \beta_{M_2} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) - \frac{1}{y} \frac{1}{z} \beta_{M_2} (e^{-zT} - 1)(P_1(T)e^{yT} - P_1(0))$  sehingga diperoleh syarat

- i.  $n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) > \gamma_{M_2} + \frac{1}{y} \beta_{M_2} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0))$
- ii.  $n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) + \frac{1}{y} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) > \gamma_{P_2} - \frac{1}{z} (e^{-zT} - 1)$

Selanjutnya dicari titik kesetimbangan *predator* di wilayah II, dengan substitusi Persamaan  $M_2$  (4.12) ke Persamaan  $P_2$  (4.13)

$$\begin{aligned} \alpha_{P_2} \alpha_{M_2} P_2 &= \alpha_{M_2} n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) - \alpha_{M_2} \gamma_{P_2} \\ &\quad + \beta_{P_2} \left\{ n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z} \beta_{M_2} P_2 (e^{-zT} - 1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{y} \beta_{M_2} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} (e^{wT} + e^{-xT}) \\ &\quad + \frac{1}{z} \alpha_{M_2} (e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y} \alpha_{M_2} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2^* &= \frac{\alpha_{M_2} n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) - \alpha_{M_2} \gamma_{P_2} + \beta_{P_2} n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) (e^{wT} + e^{-xT})}{\alpha_{P_2} \alpha_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{-zT} - 1) (e^{wT} + e^{-xT})} \\ &\quad - \frac{\frac{1}{y} \beta_{P_2} \beta_{M_2} (e^{wT} + e^{-xT}) (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) + \beta_{P_2} \gamma_{M_2} (e^{wT} + e^{-xT})}{\alpha_{P_2} \alpha_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{-zT} - 1) (e^{wT} + e^{-xT})} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{z} \alpha_{M_2} (e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y} \alpha_{M_2} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0))}{\alpha_{P_2} \alpha_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{-zT} - 1) (e^{wT} + e^{-xT})} \quad (4.15) \end{aligned}$$

Kemudian di lakukan analisis syarat  $P_2^*$  positif sebagai berikut

- Diketahui  $\alpha_{P_2}, \alpha_{M_2}, \beta_{M_2}, \beta_{P_2}, z, w, x > 0$  sehingga  $\left( \alpha_{P_2} \alpha_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT}) \right) > 0$
- Diketahui  $\alpha_{M_2}, n_{P_2}, \gamma_{P_2}, \beta_{M_2}, \beta_{P_2}, n_{M_2}, n_{P_2}, \gamma_{M_2}, w, y, x > 0$  jadi  $\alpha_{M_2} n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) + \beta_{P_2} n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2})(e^{wT} + e^{-xT}) + \frac{1}{y} \alpha_{M_2} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) > \alpha_{M_2} \gamma_{P_2} + \frac{1}{y} \beta_{P_2} \beta_{M_2} (e^{wT} + e^{-xT})(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) + \beta_{P_2} \gamma_{M_2} (e^{wT} + e^{-xT}) - \frac{1}{z} \alpha_{M_2} (e^{-zT} - 1)$  sehingga diperoleh syarat
  - $n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) > \frac{1}{y} \beta_{M_2} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) + \gamma_{M_2}$
  - $n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) + \frac{1}{y} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) > \gamma_{P_2} - \frac{1}{z} (e^{-zT} - 1)$

Dari persamaan (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), diperoleh titik kesetimbangan wilayah I ( $M_1^*, P_1^*$ ), titik kesetimbangan wilayah II ( $M_2^*, P_2^*$ ) dengan  $M_1^*, P_1^*, M_2^*, P_2^*$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 & M_1^* \\
 &= \frac{\alpha_{P_1} n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) - \alpha_{P_1} \gamma_{M_1}}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)} \\
 &+ \frac{\frac{1}{r} \beta_{M_1} \left( \frac{1}{r} (e^{-rT} - 1) + n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} \right) (e^{-rT} - 1)}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)} \\
 &+ \frac{\frac{1}{q} \beta_{M_1} \left( \frac{1}{r} (e^{-rT} - 1) - \alpha_{P_1} \right) (P_2(T)e^{qT} - P_2(0))}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_1^* \\
&= \frac{\alpha_{M_1} n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) - \alpha_{M_1} \gamma_{P_1} + \frac{1}{r} \alpha_{M_1} (e^{-rT} - 1)}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1)} \\
&+ \frac{\beta_{P_1} (n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1}) (e^{aT} + e^{-bT})}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1)} \\
&+ \frac{\frac{1}{q} (\alpha_{M_1} - \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT})) (P_2(T) e^{qT} - P_2(0))}{\alpha_{P_1} \alpha_{M_1} - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT}) (e^{-rT} - 1)} \\
& M_2^* \\
&= \frac{\alpha_{P_2} n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) - \alpha_{P_2} \gamma_{M_2}}{\alpha_{P_2} \alpha_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{-zT} - 1) (e^{wT} + e^{-xT})} \\
&+ \frac{\frac{1}{z} \beta_{M_2} \left( \frac{1}{z} (e^{-zT} - 1) + n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} \right) (e^{-zT} - 1)}{\alpha_{P_2} \alpha_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{-zT} - 1) (e^{wT} + e^{-xT})} \\
&+ \frac{\frac{1}{y} \beta_{M_2} \left( \frac{1}{z} (e^{-zT} - 1) - \alpha_{P_2} \right) (P_1(T) e^{yT} - P_1(0))}{\alpha_{P_2} \alpha_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{-zT} - 1) (e^{wT} + e^{-xT})} \\
& P_2^* \\
&= \frac{\alpha_{M_2} n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) - \alpha_{M_2} \gamma_{P_2} + \frac{1}{z} \alpha_{M_2} (e^{-zT} - 1)}{\alpha_{P_2} \alpha_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{-zT} - 1) (e^{wT} + e^{-xT})} \\
&+ \frac{\beta_{P_2} (n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2}) (e^{wT} + e^{-xT})}{\alpha_{P_2} \alpha_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{-zT} - 1) (e^{wT} + e^{-xT})} \\
&+ \frac{\frac{1}{y} (\alpha_{M_2} - \beta_{P_2} \beta_{M_2} (e^{wT} + e^{-xT})) (P_1(T) e^{yT} - P_1(0))}{\alpha_{P_2} \alpha_{M_2} - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{-zT} - 1) (e^{wT} + e^{-xT})}
\end{aligned}$$

Dengan syarat

- i.  $n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) > \frac{1}{q} \beta_{M_1} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) + \gamma_{M_1}$
- ii.  $n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) + \frac{1}{q} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) > \gamma_{P_1} - \frac{1}{r} (e^{-rT} - 1)$

- iii.  $n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) > \gamma_{M_2} + \frac{1}{y}\beta_{M_2}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0))$   
 iv.  $n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) + \frac{1}{y}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) > \gamma_{P_2} - \frac{1}{z}(e^{-zT} - 1)$

#### 4.4 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan

Pada sub bab ini dilakukan analisis kestabilan sistem *prey* dan *predator* pada titik kesetimbangan yang telah diperoleh pada sub bab 4.3 dengan cara melakukan analisis pada nilai eigen yang diperoleh dari terorema kestabilan.

##### 4.4.1 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan pada Wilayah I

Berdasarkan Persamaan (4.1) dan (4.2)

$$\frac{dM_1}{dt} = M_1 \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T e^{-rt} dt - \beta_M \int_0^T e^{qt} P_2 dt \right\}$$

$$\frac{dP_1}{dt} = P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 + \beta_{P_1}M_1(e^{aT} + e^{-bT}) - \int_0^T e^{-rt} dt + \int_0^T e^{qt} P_2 dt \right\}$$

Persamaan (4.1) dan (4.2) adalah persamaan non linear sehingga harus dilinearkan terlebih dahulu untuk mendapatkan bentuk sistem yang linear. Selanjutnya dicari pendekatan linear disekitar titik  $(M_1^*, P_1^*)$  yang merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (4.1) dan (4.2) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor disekitar titik  $(M_1^*, P_1^*)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{dt} &= f_1(M_1^*, P_1^*) + \frac{\partial f_1(M_1^*, P_1^*)}{\partial M_1} (M_1 - M_1^*) \\ &\quad + \frac{\partial f_1(M_1^*, P_1^*)}{\partial P_1} (P_1 - P_1^*) + O_1(M_1^*, P_1^*) \\ \frac{dP_1}{dt} &= f_2(M_1^*, P_1^*) + \frac{\partial f_2(M_1^*, P_1^*)}{\partial M_1} (M_1 - M_1^*) \\ &\quad + \frac{\partial f_2(M_1^*, P_1^*)}{\partial P_1} (P_1 - P_1^*) + O_2(M_1^*, P_1^*)\end{aligned}$$

Karena  $(M_1^*, P_1^*)$  adalah titik setimbang maka berlaku

$$f_1(M_1^*, P_1^*) = 0$$

$$f_2(M_1^*, P_1^*) = 0$$

sehingga persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{dt} &= \frac{\partial f_1(M_1^*, P_1^*)}{\partial M_1} (M_1 - M_1^*) + \frac{\partial f_1(M_1^*, P_1^*)}{\partial P_1} (P_1 - P_1^*) \\ &\quad + O_1(M_1^*, P_1^*) \\ \frac{dP_1}{dt} &= \frac{\partial f_2(M_1^*, P_1^*)}{\partial M_1} (M_1 - M_1^*) + \frac{\partial f_2(M_1^*, P_1^*)}{\partial P_1} (P_1 - P_1^*) \\ &\quad + O_2(M_1^*, P_1^*)\end{aligned}$$

Jika berlaku  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{O_i(M_1^*, P_1^*)}{r} = 0, i = 1, 2$

dengan

$$r = \sqrt{(M_1 - M_1^*)^2 + (P_1 - P_1^*)^2}$$

maka persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{dt} &= \frac{\partial f_1(M_1^*, P_1^*)}{\partial M_1} (M_1 - M_1^*) + \frac{\partial f_1(M_1^*, P_1^*)}{\partial P_1} (P_1 - P_1^*) \\ \frac{dP_1}{dt} &= \frac{\partial f_2(M_1^*, P_1^*)}{\partial M_1} (M_1 - M_1^*) + \frac{\partial f_2(M_1^*, P_1^*)}{\partial P_1} (P_1 - P_1^*)\end{aligned}$$

Bila dilakukan substitusi  $(M_1 - M_1^*) = x_1, (P_1 - P_1^*) = x_2$ , maka:

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \frac{dP_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt}$$

Sehingga diperoleh :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \frac{\partial f_1(M_1^*, P_1^*)}{\partial M_1} + x_2 \frac{\partial f_1(M_1^*, P_1^*)}{\partial P_1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \frac{\partial f_2(M_1^*, P_1^*)}{\partial M_1} + x_2 \frac{\partial f_2(M_1^*, P_1^*)}{\partial P_1}$$

Persamaan  $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}$  diatas merupakan hasil linearisasi dari pemotongan orde yang lebih besar dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial M_1} & \frac{\partial f_1}{\partial P_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial M_1} & \frac{\partial f_2}{\partial P_1} \end{bmatrix}_{(M_1^*, P_1^*)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = J_1^* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial M_1} &= n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - 2\alpha_{M_1}M_1 - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T e^{-rt} dt \\ &\quad - \beta_M \int_0^T e^{qt} P_2 dt \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial P_1} = -\beta_M M_1 \int_0^T e^{-rt} dt$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial M_1} = \beta_P P_1 (e^{aT} + e^{-bT})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial P_1} = n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - 2\alpha_{P_1}P_1 + \beta_{P_1}M_1(e^{aT} + e^{-bT}) - \int_0^T e^{-rt} dt + \int_0^T e^{qt} P_2 dt$$

selanjutnya dicari hasil matriks  $J_1^*$  disekitar titik setimbang  $(M_1^*, P_1^*)$  dengan substitusi  $(M_1^*, P_1^*)$ , sehingga diperoleh

$$J_1^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial M_1} & \frac{\partial f_1}{\partial P_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial M_1} & \frac{\partial f_2}{\partial P_1} \end{bmatrix}_{(M_1^*, P_1^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^*}{\partial M_1} & \frac{\partial f_1^*}{\partial P_1} \\ \frac{\partial f_2^*}{\partial M_1} & \frac{\partial f_2^*}{\partial P_1} \end{bmatrix}$$

dengan

$$c_{11} = \frac{\partial f_1^*}{\partial M_1} = n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - 2\alpha_{M_1}M_1^* + \frac{1}{r}\beta_{M_1}P_1^*(e^{-rT} - 1) - \frac{1}{q}\beta_{M_1}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) = -\alpha_{M_1}M_1^*$$

$$c_{12} = \frac{\partial f_1^*}{\partial P_1} = \frac{1}{r}\beta_{M_1}M_1^*(e^{-rT} - 1)$$

$$c_{21} = \frac{\partial f_2^*}{\partial M_1} = \beta_{P_1}P_1^*(e^{aT} + e^{-bT})$$

$$c_{22} = \frac{\partial f_2^*}{\partial P_1} = n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - 2\alpha_{P_1}P_1^* + \beta_{P_1}M_1^*(e^{aT} + e^{-bT}) + \frac{1}{r}(e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) = -\alpha_{P_1}P_1^*$$

Sehingga matriks  $J_1^*$  disekitar titik setimbang  $(M_1^*, P_1^*)$  diperoleh

$$J_1^* = \begin{bmatrix} -\alpha_{M_1}M_1^* & \frac{1}{r}\beta_{M_1}M_1^*(e^{-rT} - 1) \\ \beta_{P_1}P_1^*(e^{aT} + e^{-bT}) & -\alpha_{P_1}P_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Kemudian dianalisis kestabilan sistem sebagai berikut

$$\begin{aligned} |J_I^* - \lambda I| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda)(c_{22} - \lambda) - (c_{12})(c_{21}) &= 0 \\ \lambda^2 - (c_{11} + c_{22})\lambda + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) &= 0 \end{aligned}$$

Kemudian dicari nilai akar karakteristik dari persamaan karakteristik diatas sebagai berikut

$$\lambda_{1,2} = \frac{(c_{11} + c_{22}) \pm \sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}}{2}$$

dengan

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{22} &= -\alpha_{M_1} M_1^* - \alpha_{P_1} P_1^* \\ (c_{11} + c_{22})^2 &= \alpha_{M_1}^2 M_1^{*2} + 2\alpha_{M_1} \alpha_{P_1} M_1^* P_1^* + \alpha_{P_1}^2 P_1^{*2} \\ (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) &= \alpha_{M_1} \alpha_{P_1} M_1^* P_1^* \\ &\quad - \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} M_1^* P_1^* (e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1) \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} (c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) & \\ &= \alpha_{M_1}^2 M_1^{*2} - 2\alpha_{M_1} \alpha_{P_1} M_1^* P_1^* + \alpha_{P_1}^2 P_1^{*2} \\ &\quad + 4 \frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} M_1^* P_1^* (e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1) \end{aligned}$$

Jadi nilai  $\lambda_1$  diperoleh sebagai berikut

$$\lambda_1 = \frac{(c_{11} + c_{22}) + \sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}}{2}$$

Kemudian dilakukan analisis kestabilan pada  $\lambda_1$

- Diketahui  $\alpha_{M_1}, M_1^*, \alpha_{P_1}, P_1^* > 0$  sehingga  $(c_{11} + c_{22}) = (-\alpha_{M_1} M_1^* - \alpha_{P_1} P_1^*) < 0$
- Diketahui  $\beta_{M_1}, \beta_{P_1}, M_1^*, P_1^*, r, a, b, T > 0$  sehingga dianalisis nilai dari  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}$ , dengan

$$(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) = \alpha_{M_1}^2 M_1^{*2} - 2\alpha_{M_1}\alpha_{P_1}M_1^*P_1^* + \alpha_{P_1}^2 P_1^{*2} + 4\frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}M_1^*P_1^*(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)$$

i. Jika nilai  $(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) < 0$  maka  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}$  adalah imajiner, sehingga cukup memperhatikan nilai bagian real saja yang sudah dianalisis bahwa bernilai negatif  $\text{Re}\lambda_1 < 0$ .

ii. Jika nilai  $(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) > 0$  maka nilai  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}$  adalah positif, terdapat 3 kemungkinan yaitu

1. Jika  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})} = -(c_{11} + c_{22})$  maka  $\text{Re}\lambda_1 = 0$ .

dengan hasil analisis dari kemungkinan pertama sebagai berikut

$$\begin{aligned} \sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})} &= -(c_{11} + c_{22}) \\ (c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) &= (-(c_{11} + c_{22}))^2 \\ (c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) &= (c_{11} + c_{22})^2 \\ -4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) &= 0 \\ (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\alpha_{M_1}\alpha_{P_1}M_1^*P_1^* = -\frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}M_1^*P_1^*(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)$$

$$\alpha_{M_1}\alpha_{P_1} = -\frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)$$

2. Jika  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})} < -(c_{11} + c_{22})$  maka  $\text{Re}\lambda_1 < 0$ . Dengan hasil analisis sebagai berikut

$$\alpha_{M_1}\alpha_{P_1} < -\frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)$$

3. Jika  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})} > -(c_{11} + c_{22})$  maka  $\text{Re}\lambda_1 > 0$ .

$$\alpha_{M_1}\alpha_{P_1} > -\frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)$$

sehingga  $\lambda_1$  bernilai negatif dengan syarat bahwa nilai  $\alpha_{M_1} \alpha_{P_1} \leq -\frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)$

Selanjutnya untuk  $\lambda_2$  diperoleh

$$\lambda_2 = \frac{(c_{11} + c_{22}) - \sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}}{2}$$

- Diketahui  $\alpha_{M_1}, M_1^*, \alpha_{P_1}, P_1^* > 0$  sehingga  $(c_{11} + c_{22}) = (-\alpha_{M_1} M_1^* - \alpha_{P_1} P_1^*) < 0$
- Diketahui  $\beta_{M_1}, \beta_{P_1}, M_1^*, P_1^*, r, a, b, T > 0$  sehingga dianalisis nilai dari  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}$ , dengan  $(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) =$ 
  - i. Jika nilai  $(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) < 0$  maka  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}$  adalah imajiner, sehingga cukup memperhatikan nilai bagian real saja yang sudah dianalisis bahwa bernilai negatif  $\text{Re} \lambda_2 < 0$ .
  - ii. Jika nilai  $(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) > 0$  maka nilai  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}$  adalah positif, terdapat 3 kemungkinan yaitu
    1. Jika  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})} = -(c_{11} + c_{22})$  maka  $\text{Re} \lambda_2 < 0$ .
    2. Jika  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})} < -(c_{11} + c_{22})$  maka  $\text{Re} \lambda_2 < 0$ .
    3. Jika  $\sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})} > -(c_{11} + c_{22})$  maka  $\text{Re} \lambda_2 < 0$ .

Sehingga nilai  $\text{Re} \lambda_2 < 0$ .

Dari analisis diatas diperoleh bahwa  $\lambda_1$  bernilai negatif dengan syarat nilai  $\alpha_{M_1} \alpha_{P_1} \leq -\frac{1}{r} \beta_{M_1} \beta_{P_1} (e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)$ , dan  $\lambda_2$  juga bernilai negatif maka sistem *prey-predator* pada wilayah I bersifat stabil.

#### 4.4.2 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan pada Wilayah II

Berdasarkan Persamaan (4.3) dan (4.4)

$$f_3 = \frac{dM_2}{dt} = M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 \right. \\ \left. - \beta_{M_2}P_2 \int_0^T e^{-zT} dT - \beta_{M_2} \int_0^T e^{yT} P_1 dT \right\}$$

$$f_4 = \frac{dP_2}{dt} = P_2 \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2}P_2 + \beta_{P_2}M_2(e^{wT} + e^{-xT}) \right. \\ \left. - \int_0^T e^{-zt} dt + \int_0^T e^{yt} P_1 dt \right\}$$

dicari pendekatan linear disekitar titik  $(M_2^*, P_2^*)$  yang merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (4.3) dan (4.4) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor disekitar titik  $(M_2^*, P_2^*)$  seperti penyelesaian yang dilakukan pada persamaan diferensial pada wilayah I diperoleh

$$J_{II}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial M_2} & \frac{\partial f_3}{\partial P_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial M_2} & \frac{\partial f_4}{\partial P_2} \end{bmatrix}_{(M_2^*, P_2^*)}$$

selanjutnya dicari hasil matriks  $J_{II}^*$  disekitar titik setimbang  $(M_2^*, P_2^*)$  dengan substitusi  $(M_2^*, P_2^*)$ , sehingga diperoleh

$$J_{II}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3^*}{\partial M_2} & \frac{\partial f_3^*}{\partial P_2} \\ \frac{\partial f_4^*}{\partial M_2} & \frac{\partial f_4^*}{\partial P_2} \end{bmatrix}_{(M_2^*, P_2^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3^*}{\partial M_2} & \frac{\partial f_3^*}{\partial P_2} \\ \frac{\partial f_4^*}{\partial M_2} & \frac{\partial f_4^*}{\partial P_2} \end{bmatrix}$$

dengan

$$c_{31} = \frac{\partial f_3^*}{\partial M_2} = n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - 2\alpha_{M_2}M_2^* \\ + \frac{1}{z}\beta_{M_2}P_2^*(e^{-zT} - 1) \\ - \frac{1}{y}\beta_{M_2}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) = -\alpha_{M_2}M_2^*$$

$$c_{32} = \frac{\partial f_3^*}{\partial P_2} = \frac{1}{z}\beta_{M_2}M_2^*(e^{-zT} - 1)$$

$$c_{41} = \frac{\partial f_4^*}{\partial M_2} = \beta_{P_2}P_2^*(e^{wT} + e^{-xT})$$

$$c_{42} = \frac{\partial f_4^*}{\partial P_2} = n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - 2\alpha_{P_2}P_2^* + \beta_{P_2}M_2^*(e^{wT} + e^{-xT}) \\ + \frac{1}{z}(e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \\ = -\alpha_{P_2}P_2^*$$

Sehingga matriks Jacobian disekitar titik setimbang  $(M_2^*, P_2^*)$

$$J_{II}^* = \begin{bmatrix} -\alpha_{M_2}M_2^* & \frac{1}{z}\beta_{M_2}M_2^*(e^{-zT} - 1) \\ \beta_{P_2}P_2^*(e^{wT} + e^{-xT}) & -\alpha_{P_2}P_2^* \end{bmatrix}$$

Kemudian dilakukan analisis kestabilan dari sistem

$$|J_{II}^* - \lambda I| = 0 \\ \left| \begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \\ \begin{vmatrix} c_{31} - \lambda & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (c_{31} - \lambda)(c_{42} - \lambda) - (c_{32})(c_{41}) = 0 \\ \lambda^2 - (c_{31} + c_{42})\lambda + (c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) = 0$$

Kemudian dicari nilai akar karakteristik dari persamaan karakteristik diatas sebagai berikut

$$\lambda_{3,4}$$

$$= \frac{-(-(c_{31} + c_{42})) \pm \sqrt{(-(c_{31} + c_{42}))^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}}{2}$$

$$= \frac{(c_{31} + c_{42}) \pm \sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}}{2}$$

dengan

$$\begin{aligned} c_{31} + c_{42} &= -\alpha_{M_2} M_2^* - \alpha_{P_2} P_2^* \\ (c_{31} + c_{42})^2 &= \alpha_{M_2}^2 M_2^{*2} + 2\alpha_{M_2} \alpha_{P_2} M_2^* P_2^* + \alpha_{P_2}^2 P_2^{*2} \\ (c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) &= \alpha_{M_2} \alpha_{P_2} M_2^* P_2^* \\ &\quad - \frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} M_2^* P_2^* (e^{wT} + e^{-xT})(e^{-zT} - 1) \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} (c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) &= \alpha_{M_2}^2 M_2^{*2} - 2\alpha_{M_2} \alpha_{P_2} M_2^* P_2^* + \alpha_{P_2}^2 P_2^{*2} \\ &\quad + 4\frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} M_2^* P_2^* (e^{wT} + e^{-xT})(e^{-zT} - 1) \end{aligned}$$

Jadi nilai  $\lambda_3$  diperoleh sebagai berikut

$$\lambda_3 = \frac{(c_{31} + c_{42}) + \sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}}{2}$$

Kemudian dilakukan analisis kestabilan pada  $\lambda_3$

- Diketahui  $\alpha_{M_2}, M_2^*, \alpha_{P_2}, P_2^* > 0$  sehingga  $(c_{31} + c_{42}) = (-\alpha_{M_2} M_2^* - \alpha_{P_2} P_2^*) < 0$
- Diketahui  $\beta_{M_2}, \beta_{P_2}, M_2^*, P_2^*, w, x, z, T > 0$  sehingga dianalisis nilai dari  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}$ , dengan  $(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) = \alpha_{M_2}^2 M_2^{*2} - 2\alpha_{M_2} \alpha_{P_2} M_2^* P_2^* + \alpha_{P_2}^2 P_2^{*2} + 4\frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} M_2^* P_2^* (e^{wT} + e^{-xT})(e^{-zT} - 1)$ 
  - i. Jika nilai  $(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) < 0$  maka  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}$  adalah imajiner, sehingga cukup memperhatikan nilai bagian real saja yang sudah dianalisis bahwa bernilai negatif  $\text{Re}\lambda_3 < 0$ .
  - ii. Jika nilai  $(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) > 0$  maka nilai  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}$  adalah positif, terdapat 3 kemungkinan yaitu

1. Jika  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})} = -(c_{31} + c_{42})$  maka  $\text{Re}\lambda_3 = 0$  sehingga sistem stabil.  
dengan hasil analisis dari kemungkinan pertama adalah

$$c_{11}c_{22} = c_{12}c_{21}$$

$$\alpha_{M_2}\alpha_{P_2} = \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{wT} + e^{-xT})(e^{-zT} - 1)$$

2. Jika  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})} < -(c_{31} + c_{42})$  maka  $\text{Re}\lambda_3 < 0$ . Dengan hasil analisis sebagai adalah

$$\alpha_{M_2}\alpha_{P_2} < -\frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{wT} + e^{-xT})(e^{-zT} - 1)$$

3. Jika  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})} > -(c_{31} + c_{42})$  maka  $\text{Re}\lambda_3 > 0$ .

$$\alpha_{M_2}\alpha_{P_2} > -\frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{wT} + e^{-xT})(e^{-zT} - 1)$$

sehingga  $\lambda_3$  bernilai negatif dengan syarat bahwa nilai  $\alpha_{M_2}\alpha_{P_2} \leq -\frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{wT} + e^{-xT})(e^{-zT} - 1)$

Selanjutnya untuk  $\lambda_4$  diperoleh

$$\lambda_4 = \frac{(c_{31} + c_{42}) \pm \sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}}{2}$$

- Diketahui  $\alpha_{M_2}, M_2^*, \alpha_{P_2}, P_2^* > 0$  sehingga  $(c_{31} + c_{42}) = (-\alpha_{M_2}M_2^* - \alpha_{P_2}P_2^*) < 0$
- Diketahui  $\beta_{M_2}, \beta_{P_2}, M_2^*, P_2^*, w, x, z, T > 0$  sehingga dianalisis nilai dari  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}$ , dengan  $(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) =$ 
  - i. Jika nilai  $(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) < 0$  maka  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}$  adalah imajiner, sehingga cukup memperhatikan nilai bagian real saja yang sudah dianalisis bahwa bernilai negatif  $\text{Re}\lambda_4 < 0$ .
  - ii. Jika nilai  $(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) > 0$  maka nilai  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}$  adalah positif, terdapat 3 kemungkinan yaitu

1. Jika  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})} = -(c_{31} + c_{42})$   
maka  $\text{Re } \lambda_4 < 0$ .
2. Jika  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})} < -(c_{31} + c_{42})$   
maka  $\text{Re } \lambda_4 < 0$ .
3. Jika  $\sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})} > -(c_{31} + c_{42})$   
maka  $\text{Re } \lambda_4 < 0$ .

Dari analisis diatas diperoleh bahwa  $\lambda_3$  bernilai negatif dengan syarat nilai  $\alpha_{M_2} \alpha_{P_2} \leq -\frac{1}{z} \beta_{M_2} \beta_{P_2} (e^{wT} + e^{-xT})(e^{-zT} - 1)$ , dan  $\lambda_4$  juga bernilai negatif maka sistem *prey-predator* pada wilayah II bersifat stabil.

## 4.5 Simulasi Sistem

### 4.5.1 Penyelesaian Numerik Model

Penyelesaian numerik dari model digunakan untuk mencari penyelesaian model menggunakan metode runge kutta, dengan penyelesaian model dari populasi *prey* dan *predator* di wilayah I sebagai berikut.

$$M_{1n+1} = M_{1n} + \frac{1}{6}(k_{1,M_1} + 2k_{2,M_1} + 2k_{3,M_1} + k_{4,M_1})$$

$$P_{1n+1} = P_{1n} + \frac{1}{6}(k_{1,P_1} + 2k_{2,P_1} + 2k_{3,P_1} + k_{4,P_1})$$

dengan

$$k_{1,M_1} = hf(t_n, M_{1n}, P_{1n})$$

$$= h \left[ M_{1n} \left\{ n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1} M_{1n} \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{r} \beta_{M_1} P_{1n} (e^{-rT} - 1)$$

$$\left. \left. - \frac{1}{q} \beta_{M_1} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
k_{1,P_1} &= hf(t_n, M_{1n}, P_{1n}) \\
&= h \left[ P_{1n} \left\{ n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) - \alpha_{P_1} P_{1n} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta_{P_1} M_{1n} (e^{aT} + e^{-bT}) + \frac{1}{r} (e^{-rT} - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{q} (P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} \right] \\
k_{2,M_1} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, M_{1n} + \frac{k_{1,M_1}}{2}, P_{1n} + \frac{k_{1,P_1}}{2} \right) \\
&= h \left[ \left( M_{1n} + \frac{k_{1,M_1}}{2} \right) \left\{ n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha_{M_1} \left( M_{1n} + \frac{k_{1,M_1}}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{r} \beta_{M_1} \left( P_{1n} + \frac{k_{1,P_1}}{2} \right) (e^{-rT} - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{q} \beta_{M_1} (P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} \right] \\
k_{2,P_1} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, M_{1n} + \frac{k_{1,M_1}}{2}, P_{1n} + \frac{k_{1,M_1}}{2} \right) \\
&= h \left[ \left( P_{1n} + \frac{k_{1,M_1}}{2} \right) \left\{ n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha_{P_1} \left( P_{1n} + \frac{k_{1,M_1}}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta_{P_1} \left( M_{1n} + \frac{k_{1,M_1}}{2} \right) (e^{aT} + e^{-bT}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{r} (e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q} (P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,M_1} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, M_{1n} + \frac{k_{2,M_1}}{2}, P_{1n} + \frac{k_{2,P_1}}{2} \right) \\
&= h \left[ \left( M_{1n} + \frac{k_{2,M_1}}{2} \right) \left\{ n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} \right. \right. \\
&\quad - \alpha_{M_1} \left( M_{1n} + \frac{k_{2,M_1}}{2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r} \beta_{M_1} \left( P_{1n} + \frac{k_{2,P_1}}{2} \right) (e^{-rT} - 1) \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{q} \beta_{M_1} (P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} \right] \\
k_{3,P_1} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, M_{1n} + \frac{k_{2,M_1}}{2}, P_{1n} + \frac{k_{2,M_1}}{2} \right) \\
&= h \left[ \left( P_{1n} + \frac{k_{2,M_1}}{2} \right) \left\{ n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} \right. \right. \\
&\quad - \alpha_{P_1} \left( P_{1n} + \frac{k_{2,M_1}}{2} \right) \\
&\quad + \beta_P \left( M_{1n} + \frac{k_{2,M_1}}{2} \right) (e^{aT} + e^{-bT}) \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{r} (e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q} (P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} \right] \\
k_{4,M_1} &= hf(t_n, M_{1n} + k_{3,M_1}, P_{1n} + k_{3,P_1}) \\
&= h \left[ (M_{1n} + k_{3,M_1}) \left\{ n_{M_1} (1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} \right. \right. \\
&\quad - \alpha_{M_1} (M_{1n} + k_{3,M_1}) \\
&\quad + \frac{1}{r} \beta_{M_1} (P_{1n} + k_{3,P_1}) (e^{-rT} - 1) \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{q} \beta_{M_1} (P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,P_1} &= hf(t_n, M_{1n} + k_{3,M_1}, P_{1n} + k_{3,P_1}) \\
&= h \left[ (P_{1n} + k_{3,P_1}) \{ n_{P_1} (1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} \right. \\
&\quad - \alpha_{P_1} (P_{1n} + k_{3,P_1}) \\
&\quad + \beta_P (M_{1n} + k_{3,M_1}) (e^{aT} + e^{-bT}) \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} (e^{-rT} - 1) + \frac{1}{q} (P_2(T) e^{qT} - P_2(0)) \right]
\end{aligned}$$

berikut penyelesaian model dari populasi *prey* dan *predator* pada wilayah II sebagai berikut

$$\begin{aligned}
M_{2n+1} &= M_{2n} + \frac{1}{6} (k_{1,M_2} + 2k_{2,M_2} + 2k_{3,M_2} + k_{4,M_2}) \\
P_{2n+1} &= P_{2n} + \frac{1}{6} (k_{1,P_2} + 2k_{2,P_2} + 2k_{3,P_2} + k_{4,P_2})
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
k_{1,M_2} &= hf(t_n, M_{2n}, P_{2n}) \\
&= h \left[ (M_{2n}) \{ n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2} (M_{2n}) \right. \\
&\quad + \frac{1}{z} \beta_{M_2} (P_{2n}) (e^{-zT} - 1) \\
&\quad \left. - \frac{1}{y} \beta_{M_2} (P_1(T) e^{yT} - P_1(0)) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,P_2} &= hf(t_n, M_{2n}, P_{2n}) \\
&= h \left[ (P_{2n}) \{ n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2} (P_{2n}) \right. \\
&\quad + \beta_{P_2} (M_{2n}) (e^{wT} + e^{-xT}) + \frac{1}{z} (e^{-zT} - 1) \\
&\quad \left. + \frac{1}{y} (P_1(T) e^{yT} - P_1(0)) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,M_2} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, M_{2n} + \frac{k_{1,M_2}}{2}, P_{2n} + \frac{k_{1,P_2}}{2} \right) \\
&= h \left[ \left( M_{2n} + \frac{k_{1,M_2}}{2} \right) \left\{ n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} \right. \right. \\
&\quad - \alpha_{M_2} \left( M_{2n} + \frac{k_{1,M_2}}{2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{z} \beta_{M_2} \left( P_{2n} + \frac{k_{1,P_2}}{2} \right) (e^{-zT} - 1) \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{y} \beta_{M_2} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} \right] \\
k_{2,P_1} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, M_{2n} + \frac{k_{1,M_2}}{2}, P_{2n} + \frac{k_{1,P_2}}{2} \right) \\
&= h \left[ \left( P_{2n} + \frac{k_{1,P_2}}{2} \right) \left\{ n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} \right. \right. \\
&\quad - \alpha_{P_2} \left( P_{2n} + \frac{k_{1,P_2}}{2} \right) \\
&\quad + \beta_{P_2} \left( M_{2n} + \frac{k_{1,M_2}}{2} \right) (e^{wT} + e^{-xT}) \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{z} (e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} \right] \\
k_{3,M_2} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, M_{2n} + \frac{k_{2,M_2}}{2}, P_{2n} + \frac{k_{2,P_2}}{2} \right) \\
&= h \left[ \left( M_{2n} + \frac{k_{1,M_2}}{2} \right) \left\{ n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} \right. \right. \\
&\quad - \alpha_{M_2} \left( M_{2n} + \frac{k_{1,M_2}}{2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{z} \beta_{M_2} \left( P_{2n} + \frac{k_{2,P_2}}{2} \right) (e^{-zT} - 1) \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{y} \beta_{M_2} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,P_2} &= hf \left( t_n + \frac{h}{2}, M_{2n} + \frac{k_{2,M_2}}{2}, P_{2n} + \frac{k_{2,P_2}}{2} \right) \\
&= h \left[ \left( P_{2n} + \frac{k_{2,P_2}}{2} \right) \left\{ n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} \right. \right. \\
&\quad - \alpha_{P_2} \left( P_{2n} + \frac{k_{2,P_2}}{2} \right) \\
&\quad + \beta_{P_2} \left( M_{2n} + \frac{k_{1,M_2}}{2} \right) (e^{wT} + e^{-xT}) \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{z} (e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,M_2} &= hf(t_n, M_{2n} + k_{3,M_2}, P_{2n} + k_{3,P_2}) \\
&= h \left[ (M_{2n} + k_{3,M_2}) \left\{ n_{M_2} (1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} \right. \right. \\
&\quad - \alpha_{M_2} (M_{2n} + k_{3,M_2}) \\
&\quad + \frac{1}{z} \beta_{M_2} (P_{2n} + k_{3,P_2}) (e^{-zT} - 1) \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{y} \beta_{M_2} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,P_2} &= hf(t_n, M_{2n} + k_{3,M_2}, P_{2n} + k_{3,P_2}) \\
&= h \left[ (P_{2n} + k_{3,P_2}) \left\{ n_{P_2} (1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} \right. \right. \\
&\quad - \alpha_{P_2} (P_{2n} + k_{3,P_2}) \\
&\quad + \beta_{P_2} (M_{2n} + k_{3,M_2}) (e^{wT} + e^{-xT}) \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{z} (e^{-zT} - 1) + \frac{1}{y} (P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} \right]
\end{aligned}$$

#### 4.5.2 Implementasi Antarmuka

Implementasi antarmuka digunakan untuk mempermudah dalam penggunaan program dalam mencari penyelesaian numerik dari sistem, implementasi antarmuka terdiri 4 *button* yaitu “Home”, “Biodata”, “Simulasi” dan “Exit”



**Gambar 4.1 Home GUIDE Simulasi**

saat mencari penyelesaian numerik maka dilakukan perhitungan pada bagian “Simulasi”

**SimulasiNinid**

Home Biodata **Simulasi** Exit

**SIMULASI TUGAS AKHIR**

**Parameter**

**Pertumbuhan Alami**

Prey (Wilayah I)

Predator (Wilayah I)

Prey (Wilayah II)

Predator (Wilayah II)

**Kematian Akibat Kekurangan Makanan**

Prey (Wilayah I)

Predator (Wilayah I)

Prey (Wilayah II)

Predator (Wilayah II)

**Pemanenan**

Prey (Wilayah I)

Predator (Wilayah I)

Prey (Wilayah II)

Predator (Wilayah II)

**Kematian Akibat dimangsa Predator**

Prey (Wilayah I)

Prey (Wilayah II)

**Pertumbuhan Akibat Berhasil Memangsa Prey**

Predator (Wilayah I)

Predator (Wilayah II)

**Rate Migrasi**

Prey (Wilayah I)

Prey (Wilayah II)

Predator (Wilayah I)

Predator (Wilayah II)

**Nilai Populasi**

**Populasi**

Prey (Wilayah I)

Predator (Wilayah I)

Prey (Wilayah II)

Predator (Wilayah II)

**Syarat Batas**

**Populasi**

Prey (Wilayah I)

Predator (Wilayah I)

Prey (Wilayah II)

Predator (Wilayah II)

**Waktu**

Run Reset

**Wilayah Pertama**

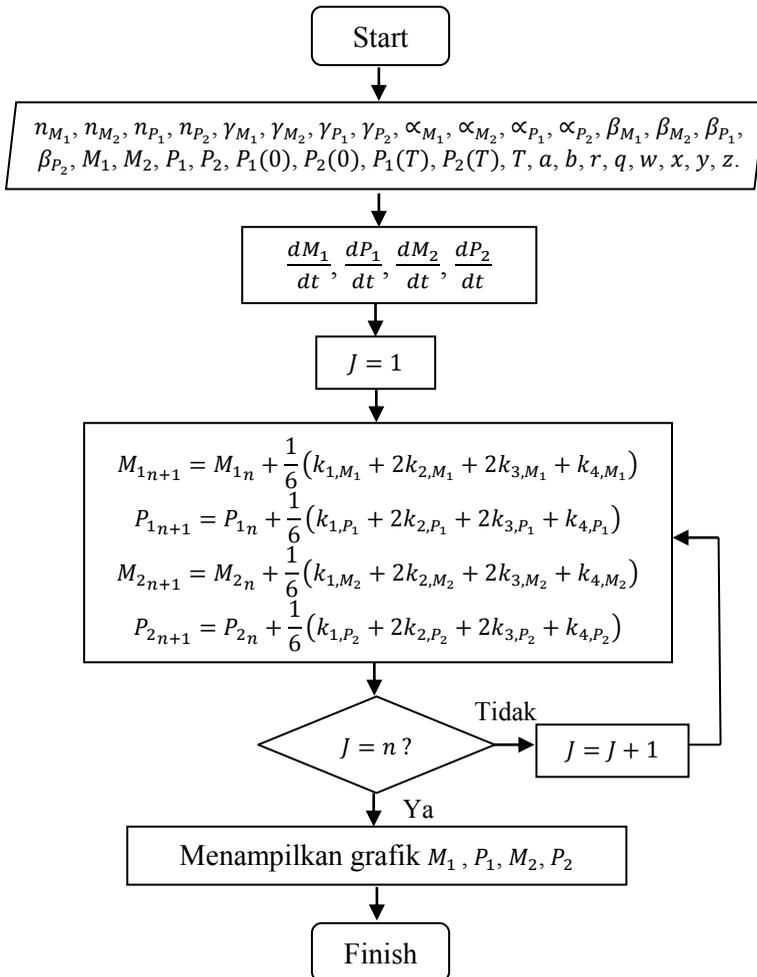
**Wilayah Kedua**

**Gambar 4.2 GUIDE Simulasi**

bagian “Simulasi” ini terdiri dari 2 *button* yaitu “Run” yang digunakan untuk menampilkan grafik sesuai hasil masukan dari pengguna dan “Reset” yang digunakan untuk menghapus hasil masukan parameter dan melakukan simulasi ulang.

### 4.5.3 Flow Chart

*Flow Chart* merupakan diagram yang digunakan untuk menjeaskan proses berjalannya program dari sistem yang disimulasikan



Gambar 4.3 Flow Chart Simulasi

dengan masukan parameter yaitu  $n_{M_1}$ ,  $n_{M_2}$ ,  $n_{P_1}$ ,  $n_{P_2}$ ,  $\gamma_{M_1}$ ,  $\gamma_{M_2}$ ,  $\gamma_{P_1}$ ,  $\gamma_{P_2}$ ,  $\alpha_{M_1}$ ,  $\alpha_{M_2}$ ,  $\alpha_{P_1}$ ,  $\alpha_{P_2}$ ,  $\beta_{M_1}$ ,  $\beta_{M_2}$ ,  $\beta_{P_1}$ ,  $\beta_{P_2}$ , nilai populasi awal untuk  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , syarat batas untuk  $P_1(0)$ ,  $P_2(0)$ ,  $P_1(T)$ ,  $P_2(T)$ ,  $T$ , dan rate migrasi  $a$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $q$ ,  $w$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Kemudian masukan parameter tersebut dihitung menggunakan metode runge-kutta sesuai rumus pada sub bab 4.6.1 dan hasil akhirnya menampilkan grafik penyelesaian numerik. Simulasi ini dilakukan sampai mendapatkan nilai penyelesaian yang diinginkan yaitu nilai pada saat penyelesaian positif dan stabil.

#### 4.5.4 Hasil Simulasi

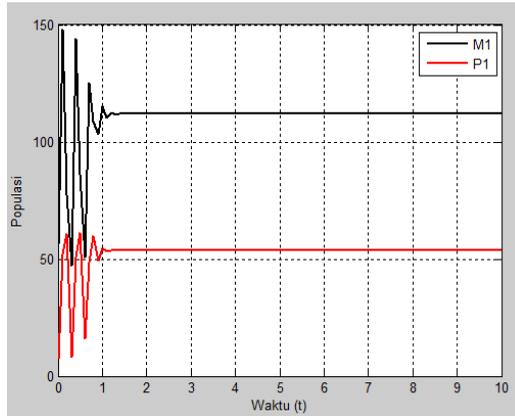
Pada simulasi dipilih dua wilayah sesuai fenomena yang terjadi pada model, yaitu wilayah I adalah daerah WPP-RI 713, dan wilayah II daerah wilayah WPP-RI 714

Berikut adalah tabel asil percobaan simulasi pada wilayah I yaitu pada WPP-RI 713

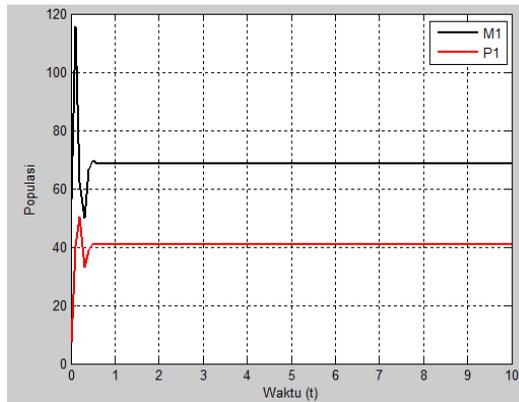
	I	II	III
$n_{M_1}$	30	30	30
$n_{P_1}$	10	10	10
$\gamma_{M_1}$	0.001	0.001	0.001
$\gamma_{P_1}$	0.664	0.664	0.8
$\alpha_{M_1}$	0.01	0.01	0.01
$\alpha_{P_1}$	0.7	0.7	0.7
$\beta_{M_1}$	0.48	0.6	0.6
$\beta_{P_1}$	0.1	0.1	0.1
$a$	0.25	0.25	0.25
$b$	0.25	0.25	0.25
$r$	0.25	0.25	0.25
$q$	0.25	0.25	0.25
$M_1$	56.31155	56.31155	56.31155
$P_1$	7.294	7.294	7.294

**Tabel 4.1** Percobaan Simulasi Wilayah I

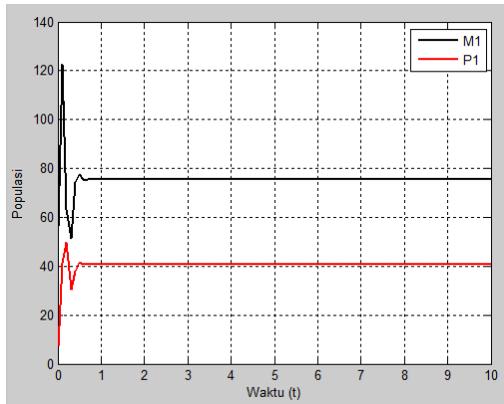
Berikut adalah grafik hasil simulasi dari *prey* dan *predator* pada wilayah I



**Gambar 4.4** Grafik Wilayah I Percobaan Pertama



**Gambar 4.5** Grafik Wilayah I Percobaan Kedua



**Gambar 4.6** Grafik Wilayah I Percobaan Ketiga

Berikut dilakukan analisis pada grafik percobaan diatas

1. Pada grafik percobaan pertama, terjadi kelahiran yang sangat besar dan pemanenan yang sangat kecil pada populasi *prey* sehingga mengakibatkan jumlah *prey* meningkat, dan *predator* juga mengalami peningkatan karena tingkat kelahiran yang cukup besar dan meningkat karena bergantung pada populasi *prey* yang mengalami peningkatan juga, populasi *prey* dan *predator* stabil pada waktu  $t = 2.5$  tahun dengan jumlah tuna sebanyak 536421ton dan ikan teri sebanyak 1119728 ton.
2. Pada grafik percobaan kedua, terjadi kenaikan pada jumlah populasi *prey* yang dimangsa *predator* sehingga jumlah populasi *prey* menurun jika dibandingkan pada percobaan pertama, populasi *prey* dan *predator* stabil pada waktu  $t = 1.1$  tahun dengan jumlah tuna sebanyak 408727 ton dan teri sebanyak 686410 ton.
3. Pada grafik percobaan ketiga, terjadi kenaikan pada jumlah populasi *predator* yang di panen sehingga populasi *predator* mengalami penurunan, begitu pula pada populasi *prey* karena bergantung pada populasi *predator*, populasi *prey* dan *predator* stabil pada waktu  $t = 1.4$  tahun dengan

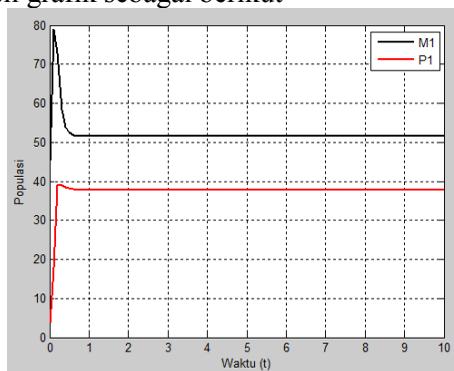
jumlah tuna sebanyak 407443 ton dan ikan teri sebanyak 754575 ton.

Berikut adalah tabel asil percobaan simulasi pada wilayah II yaitu pada WPP-RI 714

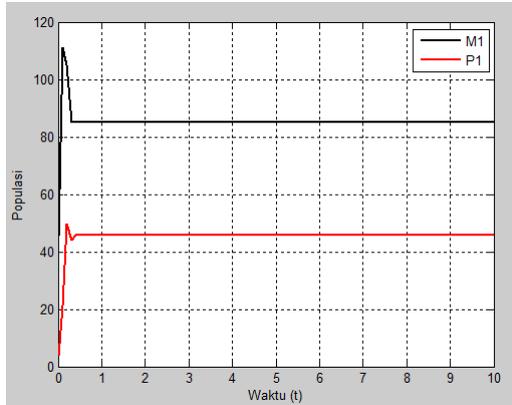
	I	II	III
$n_{M_2}$	30	30	30
$n_{P_2}$	10	10	10
$\gamma_{M_2}$	0.4	0.23	0.23
$\gamma_{P_2}$	0.77	0.77	0.77
$\alpha_{M_2}$	0.1	0.1	0.1
$\alpha_{P_2}$	0.52	0.52	0.52
$\beta_{M_2}$	0.27	0.27	0.4
$\beta_{P_2}$	0.06	0.06	0.06
$w$	0.25	0.25	0.25
$x$	0.25	0.25	0.25
$y$	0.25	0.25	0.25
$z$	0.25	0.25	0.25
$M_2$	45.351	45.351	45.351
$P_2$	3.5671	3.5671	3.5671

**Tabel 4. 2** Percobaan Simulasi Wilayah II

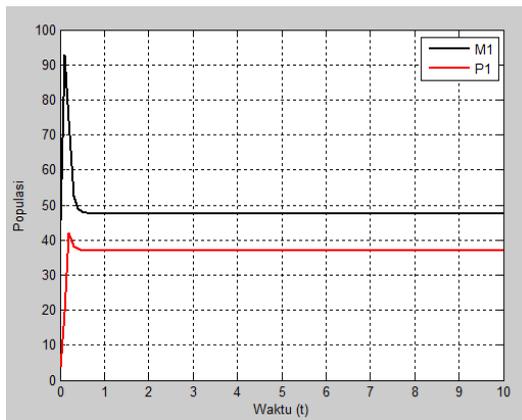
Dengan hasil grafik sebagai berikut



**Gambar 4.7** Grafik Wilayah II Percobaan Pertama



**Gambar 4.8** Grafik Wilayah II Percobaan Kedua



**Gambar 4.9** Grafik Wilayah II Percobaan Ketiga

Berikut dilakukan analisis pada grafik percobaan diatas

1. Pada percobaan pertama, populasi mengalami peningkatan karena tingkat kelahiran yang sangat besar, dan populasi *predator* mengalami kenaikan populasi akibat tingginya tingkat kelahiran, *prey* dan *predator* stabil pada waktu  $t = 1.6$  tahun dengan jumlah tuna sebanyak 378149 ton dan teri sebanyak 515334 ton.

2. Pada percobaan kedua, jumlah populasi *prey* meningkat karena terjadi penurunan pemanenan pada *prey* sehingga jumlah populasi *predator* juga ikut meningkat, *prey* dan *predator* stabil pada waktu  $t = 0.9$  tahun dengan jumlah tuna sebanyak 458115 ton dan teri sebanyak 851300 ton.
3. Pada percobaan ketiga, jumlah populasi *prey* menurun dibandingkan dengan percobaan kedua karena bertambahnya jumlah populasi *prey* yang dimangsa oleh *predator*, sehingga mempengaruhi jumlah populasi *predator* juga, *prey* dan *predator* stabil pada waktu mendekati  $t = 1.4$  tahun dengan jumlah tuna sebanyak 368810 ton dan teri sebanyak 476101 ton.



## LAMPIRAN

### SOURCE CODE

```
%Masukan Parameter Wilayah I
nM1=input('nM1=');
nP1= input('nP1=');
gammaM1= input(' gammaM1 =');
gammaP1= input(' gammaP1 =');
alphaM1= input('alpha M1=');
alphaP1= input(' alpha P1 =');
betaM1= input(' beta M1 =');
betaP1= input(' beta P1 =');
a= input('a=');
b= input('b=');
q= input('q=');
r= input('r=');
P2T= input('P2T=');
P20= input('P20=');
M1(1)= input('M1=');
P1(1)= input('M2=');
%Masukan Parameter Wilayah II
nM2=input('nM=');
nP2= input('nP=');;
gammaM2= input('gammaM2=');
gammaP2= input(' gammaP2 =');
alphaM2= input(' alpha M2 =');
alphaP2= input(' alpha P2 =');
betaM2= input(' beta M2 =');
betaP2= input('beta= P2');
w= input('w=');
x= input('x=');
y= input('y=');
z= input('z=');
P1T= input('P1T=');
P10= input('P10=');
M2(1)= input('M2(1)=');
P2(1)= input('P2(1)=');

N=100;
```

```

tf=10;
t=linspace(0,tf,N+1);
h=tf/N;
T=1;

v%RUMUS UMUM WILAYAH I
%M1=(M1*((nM1*(1-gammaM1))-gammaM1-
(alphaM1*M1)+((betaM1*P1*(exp(-r*T)-1))/r)-
(betaM1*(P2T*(exp(q*T))-P20)/q)));
%P1=(P1*((nP1*(1-gammaP1))-gammaP1-
(alphaP1*P1)+((betaP1*M1*(exp(a*T)+exp(-
b*T))))+((exp(-r*T)-1)/r)+((P2T*(exp(q*T))-
P20)/q)));
for i=1:N
    %Step 1
    K1_M1(i)= h*(M1(i)*((nM1*(1-gammaM1))-
gammaM1-
(alphaM1*(M1(i))))+((betaM1*(P1(i))*(exp(-r*T)-
1))/r)-(betaM1*(P2T*(exp(q*T))-P20)/q)));
    K1_P1(i)= h*(P1(i)*((nP1*(1-gammaP1))-
gammaP1-
(alphaP1*(P1(i))))+((betaP1*(M1(i))*(exp(a*T)+exp(-
b*T))))+((exp(-r*T)-1)/r)+((P2T*(exp(q*T))-
P20)/q)));
    %Step2
    K2_M1(i)= h*((M1(i)+K1_M1(i)/2)*((nM1*(1-
gammaM1))-gammaM1-
(alphaM1*(M1(i)+K1_M1(i)/2))+((betaM1*(P1(i)+K1_
P1(i)/2)*(exp(-r*T)-1))/r)-
(betaM1*(P2T*(exp(q*T))-P20)/q)));
    K2_P1(i)= h*((P1(i)+K1_P1(i)/2)*((nP1*(1-
gammaP1))-gammaP1-
(alphaP1*(P1(i)+K1_P1(i)/2))+((betaP1*(M1(i)+K1_
M1(i)/2)*(exp(a*T)+exp(-b*T))))+((exp(-r*T)-
1)/r)+((P2T*(exp(q*T))-P20)/q)));
    %Step3
    K3_M1(i)= h*((M1(i)+K2_M1(i)/2)*((nM1*(1-
gammaM1))-gammaM1-
(alphaM1*(M1(i)+K2_M1(i)/2))+((betaM1*(P1(i)+K2_

```

```

P1(i)/2)*(exp(-r*T)-1)/r)-
(betaM1*(P2T*(exp(q*T))-P20)/q));
    K3_P1(i) = h*((P1(i)+K2_P1(i)/2)*((nP1*(1-
gammaP1))-gammaP1-
(alphaP1*(P1(i)+K2_P1(i)/2))+((betaP1*(M1(i)+K2_
M1(i)/2)*(exp(a*T)+exp(-b*T)))))+((exp(-r*T)-
1)/r)+((P2T*(exp(q*T))-P20)/q));
    %Step4
    K4_M1(i) = h*((M1(i)+K3_M1(i))*((nM1*(1-
gammaM1))-gammaM1-
(alphaM1*(M1(i)+K3_M1(i)))+((betaM1*(P1(i)+K3_P1
(i))*(exp(-r*T)-1)/r)-(betaM1*(P2T*(exp(q*T))-
P20)/q)));
    K4_P1(i) = h*((P1(i)+K3_P1(i))*((nP1*(1-
gammaP1))-gammaP1-
(alphaP1*(P1(i)+K3_P1(i)))+((betaP1*(M1(i)+K3_M1
(i))*(exp(a*T)+exp(-b*T)))))+((exp(-r*T)-
1)/r)+((P2T*(exp(q*T))-P20)/q));
    %Total
    M1(i+1) = M1(i) + (1/6)*(K1_M1(i) +
(2*K2_M1(i) + (2*K3_M1(i) + K4_M1(i)));
    P1(i+1) = P1(i) + (1/6)*(K1_P1(i) +
(2*K2_P1(i) + (2*K3_P1(i) + K4_P1(i)));

%RUMUS UMUM WILAYAH II
%M2=(M2*( (nM2*(1-gammaM2))-gammaM2-
(alphaM2*M2)+((betaM2*P2*(exp(-z*T)-1)/z)-
(betaM2*(P1T*(exp(y*T))-P10)/y)));
%P2=(P2*( (nP2*(1-gammaP2))-gammaP2-
(alphaP2*P2)+((betaP2*M2*(exp(w*T)+exp(-
x*T)))))+((exp(-z*T)-1)/z)+((P1T*(exp(y*T))-
P10)/y)));

    %Step 1
    K1_M2(i) = h*(M2(i))*((nM2*(1-gammaM2))-
gammaM2-
(alphaM2*(M2(i)))+((betaM2*(P2(i))*(exp(-z*T)-
1)/z)-(betaM2*(P1T*(exp(y*T))-P10)/y)));

```

```

K1_P2(i) = h*(P2(i)*(nP2*(1-gammaP2))-
gammaP2-
(alphaP2*(P2(i)))+(betaP2*(M2(i))*(exp(w*T)+exp
(-x*T))))+(exp(-z*T)-1)/z)+(P1T*(exp(y*T))-
P10)/y));
%Step2
K2_M2(i) = h*((M2(i)+K1_M2(i)/2)*(nM2*(1-
gammaM2))-gammaM2-
(alphaM2*(M2(i)+K1_M2(i)/2))+(betaM2*(P2(i)+K1_
P2(i)/2)*(exp(-z*T)-1))/z)-
(betaM2*(P1T*(exp(y*T))-P10)/y));
K2_P2(i) = h*((P2(i)+K1_P2(i)/2)*(nP2*(1-
gammaP2))-gammaP2-
(alphaP2*(P2(i)+K1_P2(i)/2))+(betaP2*(M2(i)+K1_
M2(i)/2)*(exp(w*T)+exp(-x*T))))+(exp(-z*T)-
1)/z)+(P1T*(exp(y*T))-P10)/y));
%Step3
K3_M2(i) = h*((M2(i)+K2_M2(i)/2)*(nM2*(1-
gammaM2))-gammaM2-
(alphaM2*(M2(i)+K2_M2(i)/2))+(betaM2*(P2(i)+K2_
P2(i)/2)*(exp(-z*T)-z))/r)-
(betaM2*(P1T*(exp(y*T))-P10)/y));
K3_P2(i) = h*((P2(i)+K2_P2(i)/2)*(nP2*(1-
gammaP2))-gammaP2-
(alphaP2*(P2(i)+K2_P2(i)/2))+(betaP2*(M2(i)+K2_
M2(i)/2)*(exp(w*T)+exp(-x*T))))+(exp(-z*T)-
1)/z)+(P1T*(exp(y*T))-P10)/y));
%Step4
K4_M2(i) = h*((M2(i)+K3_M2(i))*(nM2*(1-
gammaM2))-gammaM2-
(alphaM2*(M2(i)+K3_M2(i)))+(betaM2*(P2(i)+K3_P2
(i))*(exp(-z*T)-1))/z)-(betaM2*(P1T*(exp(y*T))-
P10)/y));
K4_P2(i) = h*((P2(i)+K3_P2(i))*(nP2*(1-
gammaP2))-gammaP2-
(alphaP2*(P2(i)+K3_P2(i)))+(betaP2*(M2(i)+K3_M2
(i))*(exp(w*T)+exp(-x*T))))+(exp(-z*T)-
1)/z)+(P1T*(exp(y*T))-P10)/y));
%Total

```

```
M2(i+1) = M2(i) + (1/6)*(K1_M2(i) +  
(2*K2_M2(i)) + (2*K3_M2(i)) + K4_M2(i));  
P2(i+1) = P2(i) + (1/6)*(K1_P2(i) +  
(2*K2_P2(i)) + (2*K3_P2(i)) + K4_P2(i));  
end
```

```
figure(1)  
plot(t,M1,'k','LineWidth',2);  
hold on;  
plot(t,P1,'r','LineWidth',2);  
hold on;  
xlabel('Waktu (t)');  
ylabel('Populasi');  
legend('M1','P1');  
grid on;
```

```
figure(2)  
plot(t,M2,'k','LineWidth',2);  
hold on;  
plot(t,P2,'r','LineWidth',2);  
hold on;  
xlabel('Waktu (t)');  
ylabel('Populasi');  
legend('M2','P2');  
grid on;
```



## BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dalam tugas akhir ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Dengan mempelajari fenomena yang ada dan diberikan beberapa asumsi model populasi *prey-predator* dengan migrasi *predator* pada dua wilayah. Model I dan II berupa sistem persamaan nonlinear sebagai berikut :

- a. Model I yaitu model pada wilayah I

$$\frac{dM_1}{dt} = M_1 \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\}$$

$$\frac{dP_1}{dt} = P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 + \beta_{P_1}M_1(k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)) - \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\}$$

- b. Model II yaitu model pada wilayah II

$$\frac{dM_2}{dt} = M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 - \beta_{M_2}P_2 \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\}$$

$$\frac{dP_2}{dt} = P_2 \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2}P_2 + \beta_{P_2}M_2 (k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t)) - \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\}$$

dimana

$$M_1, M_2, P_1, P_2 > 0, n_{M_1} > n_{P_1} > 0, n_{M_2} > n_{P_2} > 0, \gamma_{M_1}, \gamma_{M_2}, \gamma_{P_1}, \gamma_{P_2}, \alpha_{M_1}, \alpha_{M_2}, \alpha_{P_1}, \alpha_{P_2}, \beta_{M_1}, \beta_{M_2}, \beta_{P_1}, \beta_{P_2} > 0$$

dengan fungsi bobot yaitu suatu fungsi perubahan nilai populasi selama migrasi pada kedua wilayah sebagai berikut:

$$k_{M_1}^+(t) = e^{at}, \quad k_{M_1}^-(t) = e^{-bt}, \quad \int_0^T k_{P_1}^+(t)dt = \int_0^T e^{qt}(t)dt, \\ \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt = \int_0^T e^{-rt} dt \text{ dan } k_{M_2}^+(t) = e^{wt}, \quad k_{M_2}^-(t) = e^{-xt}, \\ \int_0^T k_{P_2}^+(t)dt = \int_0^T e^{yt}dt, \quad \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt = \int_0^T e^{-zt}dt$$

dengan  $a, b, r, q, w, x, y, z > 0$

Kondisi awal

$$M_1(0) = M_{10},$$

$$P_1(0) = P_{10},$$

$$M_2(0) = M_{20},$$

$$P_2(0) = P_{20}.$$

Kondisi batas

$$(M_1)_{min} \leq M_1 \leq (M_1)_{max}$$

$$(M_2)_{min} \leq M_2 \leq (M_2)_{max}$$

$$(P_1)_{min} < (M_1)_{max},$$

$$(P_1)_{max} \geq (M_1)_{max},$$

$$(P_2)_{min} < (M_2)_{max},$$

$$(P_2)_{max} \geq (M_2)_{max}.$$

2. Model pada wilayah I dan wilayah II memiliki titik kesetimbangan dengan syarat kestabilan kedua titik kesetimbangan tersebut adalah sebagai berikut
  - a. Hasil analisis kestabilan sistem wilayah I diperoleh bahwa  $\lambda_1$  bernilai negatif ketika banyaknya *prey* dan *predator* yang meninggal akibat kekurangan makanan berjumlah kurang dari sama dengan jumlah *prey* yang dimangsa oleh *predator* yang berada pada wilayah I, dan  $\lambda_2$  juga bernilai negatif maka sistem *prey-predator* pada wilayah I bersifat stabil.
  - b. Hasil analisis kestabilan sistem wilayah II diperoleh bahwa  $\lambda_3$  bernilai negatif ketika banyaknya *prey* dan *predator* yang meninggal akibat kekurangan makanan berjumlah kurang dari sama dengan jumlah *prey* yang dimangsa oleh *predator* yang berada pada wilayah II, dan  $\lambda_4$  juga bernilai negatif maka sistem *prey-predator* pada wilayah II bersifat stabil.dengan syarat pada titik kesetimbangan pada masing-masing wilayah sebagai berikut
  - i. Besar populasi *prey* yang tumbuh harus lebih besar dari pada *predator* yang bermigrasi dari wilayah lain menuju wilayah yang diamati dan jumlah *prey* yang dipanen
  - ii. Besar populasi *predator* yang tumbuh dan besar populasi *predator* yang bermigrasi dari wilayah lain menuju wilayah yang diamati harus lebih besar daripada jumlah *predator* yang dipanen dan jumlah *predator* yang bermigrasi dari wilayah yang diamati menuju wilayah lain.
3. Hasil simulasi diperoleh sebagai berikut
  - a. Simulasi pada wilayah I diperoleh waktu stabil kedua populasi saat waktu selama 2.5 tahun, terjadi kelahiran yang sangat besar dan pemanenan yang sangat kecil pada populasi *prey* sehingga mengakibatkan jumlah *prey*

meningkat, dan *predator* juga mengalami peningkatan karena tingkat kelahiran yang cukup besar dan meningkat karena bergantung pada populasi *prey* yang mengalami peningkatan juga, dengan jumlah tuna sebanyak 536421 ton dan ikan teri sebanyak 1119728 ton.

- b. Simulasi pada wilayah II diperoleh waktu stabil kedua populasi pada waktu selama 1.6 tahun populasi mengalami peningkatan karena tingkat kelahiran yang sangat besar, dan populasi *predator* mengalami kenaikan populasi akibat tingginya tingkat kelahiran, dengan jumlah tuna sebanyak 378149 ton dan teri sebanyak 515334 ton.

## 5.2 Saran

Berdasarkan pembahasan, simulasi dan kesimpulan yang telah dilakukan, saran pada tugas akhir ini adalah sebaiknya dilakukan pengembangan model dengan menambahkan fenomenan terdapat dua populasi *prey* yang berbeda.

## DAFTAR PUSTAKA

1. (PERATURAN KEMENTERIAN KELAUTAN, 2009) (RI, 2009)
2. Bellomo, N., Angelis, E.D, Delitala, M. (2007), *Lecture Notes on Mathematical Modelling in Applied Sciences*, Department of Matematics Politecnico Torino, Italy.
3. Boyce, W.E., dan DiPrima, R.C. (2012), *Elementary Differential Equations, 10th Edition*, John Wiley & Sons, Inc, United State of America.
4. Hariyanto., Widodo, B., Budiantara, I.N., Nidom, C.A. (2013). “The Contruction of a Model of Pre-Coalition between H1N1-p and H5N1 Influenza Virus in Indonesia”, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7, 2013, no. 99, hal. 4899 – 4907.
5. Kusumayadi, E.A. (2015), “Analisis Sistem Dinamik Model Penyebaran Penyakit Menular Antar Dua Wilayah dan Kontrol Optimal pada Populasi Infected, Tesis. Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
6. Narayan, K.L. dan Ramacharyulu, N.CH.P. (2008), “A *Prey-Predator* Model with an Alternative Food for the *Predator*, Harvesting of Both the Species and with A Gestation Period for Interaction”, *Journal International of Open Problems Compt, Math* Vol.1, No.1, hal 71-79.
7. Pujiastuti, S., (2016). Laporan Kinerja Kementerian Kelautan dan Perikanan Tahun 2014. Kementerian Kelautan dan Perikanan Republik Indonesia. Jakarta.
8. Siahaan, N.H.T., (2004), *Hukum Lingkungan dan Ekologi Pembangunan*, Erlangga. Jakarta.
9. Subiono. (2013), *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*, Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
10. V. Volterra, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, *Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei* 2 (1926) 31–113.



## BIODATA PENULIS



**Nihaya Alivia Coraima Dewi** atau biasa dipanggil Ninid lahir di Lamongan, 9 Januari 1995. Penulis telah menempuh pendidikan formal di RA Islamiyah, MI Islamiyah Kedung Mengarih, SMP Negeri 1 Kembangbahu, SMA Negeri 1 Lamongan.

Kemudian penulis menempuh pendidikan S1 di Jurusan Matematika, FMIPA ITS angkatan 2012, penulis

mengambil bidang minat Matematika Terapan.

Penulis juga mengikuti kegiatan organisasi, yaitu sebagai Staff Departemen Sosial Masyarakat HIMATIKA ITS serta Staff Divisi Pengabdian Masyarakat dan Mobilisasi Relawan UKM KSR PMI ITS pada tahun periode 2013-2014 dan sebagai Sekretaris Departemen Pengabdian Masyarakat HIMATIKA ITS pada tahun periode 2014-2015. Selain aktif dalam organisasi, penulis juga aktif mengikuti kepanitiaan acara, seperti OMITS, ITS Mengajar BSO IECC BEM ITS. Penulis memiliki pengalaman kerja praktek pada tahun 2015 di KPw Bank Indonesia Jember.

Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Laporan Tugas Akhir ini, bisa melalui email [alivianihaya@gmail.com](mailto:alivianihaya@gmail.com).

Semoga bermanfaat.