

SEMINAR HASIL

ANALISIS BIFURKASI MUNDUR DAN SOLUSI NUMERIK PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MENULAR DENGAN KEKEBALAN PARSIAL

Mashurriyah Rohmawati

1211 100 017

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

June 13, 2015

Latar Belakang

- Penyakit Endemik

Latar Belakang

- Penyakit Endemik
- Model SIS (*Susceptible Infected Susceptible*)

Latar Belakang

- Penyakit Endemik
- Model SIS (*Susceptible Infected Susceptible*)
- Kekebalan Parsial

Latar Belakang

- Penyakit Endemik
- Model SIS (*Susceptible Infected Susceptible*)
- Kekebalan Parsial
- Penelitian sebelumnya

Latar Belakang

- Penyakit Endemik
- Model SIS (*Susceptible Infected Susceptible*)
- Kekebalan Parsial
- Penelitian sebelumnya
- Analisa model penyebaran penyakit menular

Latar Belakang

- Penyakit Endemik
- Model SIS (*Susceptible Infected Susceptible*)
- Kekebalan Parsial
- Penelitian sebelumnya
- Analisa model penyebaran penyakit menular
- Analisis Bifurkasi Mundur dan Simulasi Numerik

Rumusan Masalah

- 1 Bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar, kestabilan dari setiap titik kesetimbangan endemik, endemic equilibrium, dan disease free equilibrium.
- 2 Bagaimana mengetahui penyebab bifurkasi mundur dan nilai dampak vaksin dalam dinamika transmisi model epidemiologi dengan kekebalan parsial dan variable populasi.
- 3 Bagaimana hasil simulasi numeriknya dengan menggunakan software MATLAB.

Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini dibatasi ruang lingkupnya, yaitu model epidemiologi yang dianalisis merupakan model bertipe SIS dua tahap yang bersifat deterministik atau model kompartemen.

Tujuan

Tujuan yang dicapai dalam tugas akhir ini antara lain :

- 1 Menentukan *basic reproduction number*, kestabilan dari setiap titik kesetimbangan *endemic equilibrium*, dan *disease free equilibrium*.
- 2 Mendapatkan hasil identifikasi penyebab bifurkasi mundur dan nilai dampak vaksin dalam dinamika transmisi model epidemiologi dengan kekebalan parsial dan variable populasi.
- 3 Mendapatkan hasil simulasi numeriknya dengan menggunakan *software* MATLAB.

Manfaat

Manfaat dari penulisan Tugas Akhir ini adalah mendapatkan bilangan reproduksi dasar dan mengetahui adanya bifurkasi mundur dari model epidemik SIS. Dengan demikian tugas akhir ini dapat dijadikan referensi untuk mengevaluasi metode untuk mengendalikan penyakit menular.

Penelitian Sebelumnya

Pada penelitian sebelumnya Intan Putri Lestari (2012) telah membahas eksistensi bifurkasi mundur pada model penyebaran penyakit menular SIS yang ditambah dengan kompartemen vaksinasi dan didapatkan eksistensi bifurkasi mundur pada model epidemik SIS dengan vaksinasi dikarenakan ketidakefektifan vaksin sehingga terdapat titik kesetimbangan endemik saat bilangan reproduksi dasar kurang dari 1.

Model Kompartemen

Model SIS (*Susceptible Infected Susceptible*) merupakan model penyebaran penyakit dengan karakteristik bahwa setiap individu rentan terinfeksi suatu penyakit, kondisi ini dinotasikan dengan S (*susceptible*), individu yang rentan terinfeksi tersebut berinteraksi dengan individu yang terinfeksi, kemudian terinfeksi dinotasikan dengan I (*infected*). Dalam model SIS ini, individu dalam kelas infeksi dapat sembuh dengan pengobatan medis atau proses alam, sehingga masuk kelas sehat, tetapi kesembuhan itu tidak mengakibatkan individu tersebut kebal, sehingga memungkinkan terinfeksi kembali dan masuk kelas infeksi.

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (*Basic Reproduction Number*) atau biasa disebut R_0 adalah suatu parameter yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit.

Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar, digunakan metode *Driessche* dan *Watmough*. Dengan mengasumsikan bahwa populasi dapat dikelompokkan ke dalam n kompartemen.

Diberikan $x = (x_1, \dots, x_n)^t$, dengan $x_i \geq 0$ adalah bilangan dari individu pada masing-masing kompartemen sehingga kompartemen $m < n$ pertama sesuai dengan individu terinfeksi. Diberikan X_s adalah himpunan dari semua titik kesetimbangan bebas penyakit.

Lanjutan...

Didefinisikan

$$X_s = \{x \geq 0 | x_i = 0, i = 1, \dots, m\}$$

Selanjutnya untuk menghitung R_0 , penting untuk membedakan infeksi baru dari semua perubahan dalam populasi. Untuk itu didefinisikan $\mathcal{F}_i(x)$ adalah laju dari kemunculan infeksi baru pada kompartemen i , $\mathcal{V}_i^-(x)$ adalah laju dari perpindahan individu keluar dari kompartemen i , dan $\mathcal{V}_i^+(x)$ adalah laju dari perpindahan individu masuk ke kompartemen i .

Lanjutan...

Model penyebaran penyakit terdiri dari kondisi awal non-negatif dengan persamaan sistem berikut:

$$\dot{x}_i = f_i = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, n, \text{ dengan } \mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$$

Didefinisikan $K = FV^{-1}$ sebagai *next generation* matriks dan

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \text{ dengan } F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_i} \right], V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_i} \right], \\ 1 \leq i, j \leq m,$$

dan $\rho(A)$ adalah nilai eigen yang dominan dari matriks A .

Kestabilan Titik Tetap

Pandang persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{1}$$

Sebuah titik (\bar{x}_0, \bar{y}_0) merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (1) jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan.

$$x(t) \equiv \bar{x}_0 \text{ dan } y(t) \equiv \bar{y}_0$$

adalah penyelesaian kesetimbangan dari persamaan (1) untuk semua t .

Stabil Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotis lokal pada titik keseimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.

Teorema 2.1

Titik setimbang (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

Lanjutan...

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju penyebaran suatu penyakit. Analisis ini dilakukan pada titik setimbang bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium*) dan titik setimbang endemik (*Endemic Equilibrium*).

Bifurkasi

Bifurkasi secara umum adalah perubahan kualitatif yang meliputi perubahan stabilitas dan perubahan banyaknya titik kesetimbangan karena perubahan nilai parameter bilangan reproduksi dasar (R_0). Ada dua jenis bifurkasi dalam model penyebaran penyakit menular yaitu

- 1 Bifurkasi Maju (terjadi pada saat $R_0 > 1$ dimana hanya ada satu titik kesetimbangan endemik)
- 2 Bifurkasi Mundur (terjadi pada saat $R_0 < 1$ mempunyai dua titik kesetimbangan endemik)

Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler. Untuk fungsi dari persamaan differensial :

$$y' = f(x, y)$$

Dengan titik pendekatan awal x_0, y_0 , berdasarkan metode Euler nilai fungsi penyelesaian diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n(x_n, y_n)$$

Lanjutan...

Metode Runge-Kutta 2

Metode Runge-Kutta membuat step yang lebih kecil dari perubahan nilai dengan membagi nilai perubahan tiap step menjadi sejumlah bagian yang ditentukan, bentuk paling sederhana dari metode Runge Kutta ini adalah membagi bagian perubahan menjadi dua bagian sehingga :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

Lanjutan...

Metode Runge-Kutta 4

Bila pada metode Runge-Kutta 2, nilai koefisien perbaikannya adalah dua buah, maka pada metode ini menggunakan empat nilai koefisien perbaikan yaitu k_1 , k_2 , k_3 , dan k_4 yang diberikan sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

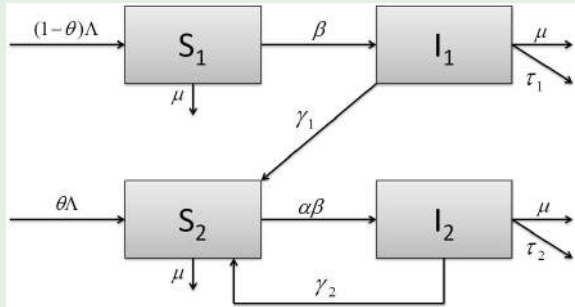
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Metode Penelitian

- 1 Tahap Mengkaji Model Penyebaran Penyakit Menular
- 2 Tahap Mencari Titik Keseimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar
- 3 Menganalisis Kestabilan Lokal dari Setiap Titik Keseimbangan dan Bifurkasi
- 4 Tahap Simulasi dan Analisis
- 5 Kesimpulan

Model Penyebaran Penyakit Menular

Diagram kompartemen dari model penyebaran penyakit menular :



Gambar 1: Diagram Kompartemen dari Model

Lanjutan...

Dari Gambar 1, maka sistem persamaan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= (1 - \theta)\Lambda - (\beta + \mu)S_1 \\ \frac{dI_1}{dt} &= \beta S_1 - (\gamma_1 + \mu + \tau_1)I_1 \\ \frac{dS_2}{dt} &= \theta\Lambda + \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 - (\alpha\beta + \mu)S_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= \alpha\beta S_2 - (\gamma_2 + \mu + \tau_2)I_2\end{aligned}\tag{2}$$

dengan $\beta = \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{N}$.

Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik setimbang bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi sehingga $I = 0$. Untuk memperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dengan menyatakan ruas kiri pada persamaan (2) bernilai nol kemudian mensubstitusikannya sehingga didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$\epsilon_0 = (S_1^*, I_1^*, S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{(1-\theta)\Lambda}{\mu}, 0, \frac{\theta\Lambda}{\mu}, 0 \right).$$

Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik adalah suatu keadaan dimana terjadi infeksi penyakit di dalam populasi sehingga $I_1 \neq I_2 \neq 0$. Untuk memperoleh titik kesetimbangan endemik dengan menyatakan ruas kiri pada persamaan (2) bernilai nol kemudian mensubstitusikannya.

Lanjutan...

Sehingga didapatkan titik kesetimbangan endemik

$\epsilon_1 = (S_1^{**}, I_1^{**}, S_2^{**}, I_2^{**})$ dengan

$$S_1^{**} = \frac{(1 - \theta)\Lambda}{(\beta^{**} + \mu)}$$

$$I_1^{**} = \frac{\beta(1 - \theta)\Lambda}{k_1(\beta^{**} + \mu)}$$

$$S_2^{**} = \frac{k_2\Lambda(k_1(\beta^{**} + \mu)\theta + \gamma_1(\beta^{**}(1 - \theta)))}{k_1(\beta^{**} + \mu)((\mu + \tau_2)(\alpha\beta^{**} + \mu) + \mu\gamma_2)}$$

$$I_2^{**} = \left(\frac{\alpha\beta\Lambda(k_1\theta(\beta + \mu) + \gamma_1(1 - \theta)\beta)}{k_1(\beta + \mu)((\mu + \tau_2)(\alpha\beta + \mu) + \mu\gamma_2)} \right)$$

dengan $\beta^{**} = \frac{\sigma_1 I_1^{**} + \sigma_2 I_2^{**}}{N^{**}}$ dan $N^{**} = S_1^{**} + I_1^{**} + S_2^{**} + I_2^{**}$.

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*) diperlukan sebagai parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit.

Didefinisikan sebagai berikut:

\mathcal{F}_i adalah laju kemunculan infeksi baru pada kompartemen i ,

\mathcal{V}_i^- adalah laju dari perpindahan individu keluar dari kompartemen i ,

\mathcal{V}_i^+ adalah laju dari perpindahan individu masuk ke dalam kompartemen i

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$$

Lanjutan...

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 \Lambda - \sigma_1 \theta \Lambda}{N \mu} & \frac{\sigma_2 - \sigma_2 \theta \Lambda}{N \mu} \\ \frac{\alpha \theta \Lambda \sigma_1}{N \mu} & \frac{\alpha \theta \Lambda \sigma_2}{N \mu} \end{bmatrix}$$
$$V = \begin{bmatrix} \gamma_1 + \mu + \tau_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 + \mu + \tau_2 \end{bmatrix}$$

Maka *Basic Reproduction Number* dari model adalah :

$$\mathfrak{R}_v = \frac{\sigma_1 k_2 (1 - \theta) + \alpha \sigma_2 k_1 \theta}{k_1 k_2} \quad (3)$$

dimana $k_1 = \gamma_1 + \mu + \tau_1$ dan $k_2 = \gamma_2 + \mu + \tau_2$.

Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Model penyebaran penyakit menular merupakan model persamaan yang tak linier, sehingga perlu dilakukan pelinieran dengan menggunakan ekspansi deret Taylor pada persamaan (2).

Lanjutan...

Matriks Jacobian persamaan (2) pada titik kesetimbangan bebas penyakit $\varepsilon_0 = (S_1^*, I_1^*, S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{(1-\theta)\Lambda}{\mu}, 0, \frac{\theta\Lambda}{\mu}, 0 \right)$ menjadi

$$J(\varepsilon_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\sigma_1(1-\theta) & 0 & -\sigma_2(1-\theta) \\ 0 & \bar{a} & 0 & \sigma_2(1-\theta) \\ 0 & 0 & -\mu & \bar{b} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c} \end{bmatrix}$$

Lanjutan...

dengan

$$\bar{a} = \sigma_1(1 - \theta) - (\gamma_1 + \mu + \tau_1)$$

$$\bar{b} = \frac{(\alpha\sigma_1\theta - \gamma_1)\sigma_2(1 - \theta)}{\sigma_1(1 - \theta) - (\gamma_1 + \mu + \tau_1)} + \gamma_2 - \alpha\sigma_2\theta$$

$$\bar{c} = \frac{(-\alpha\sigma_1\theta)\sigma_2(1 - \theta)}{\sigma_1(1 - \theta) - (\gamma_1 + \mu + \tau_1)} + \alpha\sigma_2\theta - (\gamma_2 + \mu + \tau_2)$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan $|\lambda I - J(\varepsilon_0)| = 0$. Sehingga didapat akar akar karakteristik sebagai berikut :

$$(\lambda + \mu)(\lambda - \bar{a})(\lambda + \mu)(\lambda - \bar{c}) = 0$$

Lanjutan...

Sehingga akan diperoleh nilai eigen dari akar karakteristiknya sebagai berikut

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

$$\lambda_2 = \sigma_1(1 - \theta) - (\gamma_1 + \mu + \tau_1) < 0,$$

$$\text{untuk } \frac{\sigma_1(1 - \theta)}{\gamma_1 + \mu + \tau_1} < 1$$

$$\lambda_3 = -\mu < 0$$

Lanjutan...

$$\lambda_4 = -\frac{(\alpha\sigma_1\theta)\sigma_2(1-\theta)}{\sigma_1(1-\theta) - (\gamma_1 + \mu + \tau_1)} + \alpha\sigma_2\theta$$
$$-(\gamma_2 + \mu + \tau_2) < 0,$$

untuk

$$\left(\frac{(\alpha\sigma_1\theta)\sigma_2(1-\theta) - \alpha\sigma_2\theta[\sigma_1(1-\theta) - (\gamma_1 + \mu + \tau_1)]}{(\gamma_2 + \mu + \tau_2)(\gamma_1 + \mu + \tau_1)} + \frac{\sigma_1(1-\theta)}{\gamma_1 + \mu + \tau_1} \right) < 1$$

Lanjutan...

Karena nilai eigen ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan λ_4) bernilai negatif pada bagian realnya maka berdasarkan akar-akar karakteristik (nilai eigen λ) maka titik setimbang $\varepsilon_0 = (S_1^*, I_1^*, S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{(1-\theta)\Lambda}{\mu}, 0, \frac{\theta\Lambda}{\mu}, 0 \right)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Kestabilan lokal titik endemik dilakukan pelinieran terlebih dahulu sebelum melakukan analisis kestabilan.

Matriks Jacobian persamaan (1) sampai (4) di titik kesetimbangan endemik $\varepsilon_1 = (S_1^{**}, I_1^{**}, S_2^{**}, I_2^{**})$ menjadi

$$J(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} A & -\frac{\sigma_1 S_1^{**}}{N} & 0 & -\frac{\sigma_2 S_1^{**}}{N} \\ 0 & B & 0 & P \\ 0 & 0 & C & Q \\ 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

Lanjutan...

dengan pemisalan sebagai berikut:

$$A = -\frac{\sigma_1 I_1^{**}}{N} - \frac{\sigma_2 I_2^{**}}{N} - \mu$$

$$B = \frac{\left(-\frac{\sigma_1 I_1^{**}}{N} - \frac{\sigma_2 I_2^{**}}{N}\right)}{\left(\frac{-\sigma_1 I_1^{**} - \sigma_2 I_2^{**} - \mu N}{N}\right)} \left(-\frac{\sigma_1 S_1^{**}}{N}\right) + \frac{\sigma_1 S_1^{**}}{N} - (\gamma_1 + \mu + \tau_1)$$

$$C = -\frac{\alpha \sigma_1 I_1^{**}}{N} - \frac{\alpha \sigma_2 I_2^{**}}{N} - \mu$$

$$D = \frac{\left(-\frac{\alpha \sigma_1 I_1^{**}}{N} - \frac{\alpha \sigma_2 I_2^{**}}{N}\right)}{C} Q + R$$

Lanjutan...

dengan pemisalan sebagai berikut:

$$P = \frac{\left(-\frac{\sigma_1 I_1^{**}}{N} - \frac{\sigma_2 I_2^{**}}{N}\right)}{\left(\frac{-\sigma_1 I_1^{**} - \sigma_2 I_2^{**} - \mu N}{N}\right)} \left(-\frac{\sigma_2 S_1^{**}}{N}\right) + \frac{\sigma_2 S_1^{**}}{N}$$
$$Q = \frac{-\gamma_1 + \frac{\alpha \sigma_1 S_2^{**}}{N}}{B} P + \gamma_2 - \frac{\alpha \sigma_2 S_2^{**}}{N}$$
$$R = \frac{-\gamma_1 + \frac{\alpha \sigma_1 S_2^{**}}{N}}{B} P + \frac{\alpha \sigma_2 S_2^{**}}{N} - (\gamma_2 + \mu + \tau_2)$$

Lanjutan...

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan $|J(E_1) - \lambda I| = 0$. Sehingga didapat akar-akar karakteristik $(A - \lambda)(B - \lambda)(C - \lambda)(D - \lambda) = 0$

$$\lambda_1 = A = -\left(\frac{\sigma_1 I_1^{**}}{N} + \frac{\sigma_2 I_2^{**}}{N} + \mu\right) < 0$$

$$\lambda_2 = B = \left(-\frac{\sigma_1 S_1^{**}}{N}\right) \left(\frac{\left(\frac{\sigma_1 I_1^{**}}{N} + \frac{\sigma_2 I_2^{**}}{N}\right)}{\left(\frac{\sigma_1 I_1^{**} + \sigma_2 I_2^{**} + \mu N}{N}\right)} - 1\right)$$

$$-(\gamma_1 + \mu + \tau_1) < 0$$

$$\text{untuk } \frac{\left(\frac{\sigma_1 I_1^{**}}{N} + \frac{\sigma_2 I_2^{**}}{N}\right)}{\left(\frac{\sigma_1 I_1^{**} + \sigma_2 I_2^{**} + \mu N}{N}\right)} > 1$$

Lanjutan...

$$\lambda_3 = C = - \left(\frac{\alpha\sigma_1 I_1^{**}}{N} + \frac{\alpha\sigma_2 I_2^{**}}{N} + \mu \right) < 0$$

$$\lambda_4 = D = \left(\frac{-\gamma_1 N \left(1 + \frac{\alpha\sigma_1 S_2}{-\gamma_1 N} \right)}{N} \right) \frac{P}{B}$$

$$\left(\frac{\left(\frac{\alpha\sigma_1 I_1^{**}}{N} + \frac{\alpha\sigma_2 I_2^{**}}{N} \right)}{\left(\frac{\alpha\sigma_1 I_1^{**}}{N} + \frac{\alpha\sigma_2 I_2^{**}}{N} + \mu \right)} + 1 \right)$$

$$+ \left(\frac{-\gamma_2 N \left(1 - \frac{\alpha\sigma_2 S_2}{N} \right)}{N} \right)$$

Lanjutan...

$$\left(1 - \frac{\left(\frac{\alpha\sigma_1 I_1^{**}}{N} + \frac{\alpha\sigma_2 I_2^{**}}{N} \right)}{\left(\frac{\alpha\sigma_1 I_1^{**}}{N} + \frac{\alpha\sigma_2 I_2^{**}}{N} + \mu \right)} \right) - \mu - \tau_2,$$

untuk $\frac{\left(\frac{\alpha\sigma_1 I_1^{**}}{N} + \frac{\alpha\sigma_2 I_2^{**}}{N} \right)}{\left(\frac{\alpha\sigma_1 I_1^{**}}{N} + \frac{\alpha\sigma_2 I_2^{**}}{N} + \mu \right)} > 1$

Lanjutan...

Karena nilai eigen ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4) bernilai negatif pada bagian realnya maka berdasarkan akar-akar karakteristik (nilai eigen λ) maka titik setimbang $\varepsilon_1 = (S_1^{**}, I_1^{**}, S_2^{**}, I_2^{**})$ stabil lokal asimtotis.

Eksistensi Kesetimbangan Endemik

Pada bagian ini titik kesetimbangan endemik yang diperoleh dari $g(\beta)$ digunakan untuk menentukan R_0 yang optimum sehingga dapat dibuat kurva bifurkasinya.

Diketahui $g(\beta) = a(\beta^{**})^2 + b\beta^{**} + c = 0$ dengan

$$a = \alpha[k_1\theta + (\gamma_1 + \mu + \tau_2)(1 - \theta)],$$

$$b = k_1\alpha(\mu + \tau_2)(1 - \theta) + k_1\alpha\theta(\mu - \sigma_2) \\ + k_2(1 - \theta)(\mu + \gamma_1) + k_1k_2\theta - \sigma_1\alpha(\mu + \tau_2) \\ (1 - \theta) - \sigma_2\gamma_1\alpha(1 - \theta)$$

$$c = k_1k_2\mu(1 - \mathfrak{R}_v)$$

Eksistensi Kesetimbangan Endemik

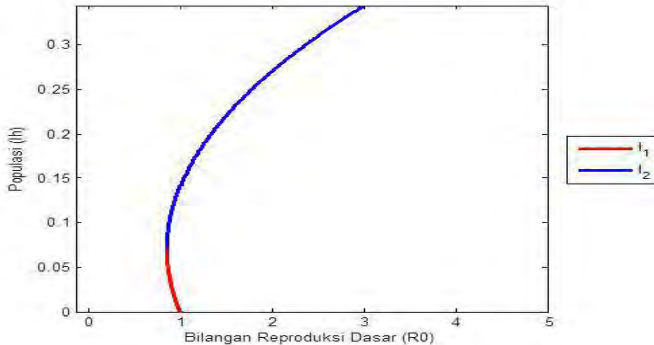
dimana $\mathcal{R}_v = \frac{\sigma_1 k_2 (1-\theta) + \alpha \sigma_2 k_1 \theta}{k_1 k_2}$ dengan $k_1 = \gamma_1 + \mu + \tau_1$ dan $k_2 = \gamma_2 + \mu + \tau_2$.

Dalam hal ini koefisien a selalu bernilai positif. Sedangkan koefisien c bergantung pada nilai \mathcal{R}_v , jika $\mathcal{R}_v < 1$, maka $c > 0$, jika $\mathcal{R}_v > 1$, maka $c < 0$ dan jika $\mathcal{R}_v = 1$, maka $c = 0$. Karena $a > 0$ maka agar penyelesaian dari persamaan $g(\beta)$ bernilai positif bergantung pada nilai b dan c. Untuk $\mathcal{R}_v > 1$, persamaan di atas menghasilkan dua akar persamaan, salah satunya bernilai positif, sedangkan lainnya negatif.

Eksistensi Kesetimbangan Endemik

Selanjutnya dari nilai \mathfrak{R}_v dan β akan disimulasikan dengan menggunakan MATLAB R2010a yang menghasilkan kurva bifurkasi dengan sumbu (x,y) menyatakan (\mathfrak{R}_v, β) . Pada Gambar 2 merupakan kurva bifurkasi hasil dari simulasi dengan menggunakan nilai parameter $\mu = 0.097$, $\tau_2 = 0.162$, $\sigma_1 = 0.5$, $\gamma_1 = 0.52$, $\sigma_2 = 0.75$, $\gamma_2 = 0.001$, $\alpha = 0.8$, $\theta = 0.533$, $\tau_1 = 0.36$.

Eksistensi Kesetimbangan Endemik



Gambar 2. Kurva Bifurkasi Mundur

Eksistensi Kesetimbangan Endemik

Pada Gambar 2 menunjukkan bahwa telah terjadi bifurkasi mundur untuk $\mathcal{R}_v < 1$ sehingga diperoleh tiga titik tetap, yang terdiri dari titik setimbang bebas penyakit, titik setimbang endemik stabil, dan titik setimbang endemik tidak stabil.

Pada saat $0.08646438738 < \mathcal{R}_v < 1$ ada tiga titik kesetimbangan, satu titik kesetimbangan endemik bersifat stabil (warna biru), satu titik kesetimbangan endemik bersifat tidak stabil (warna merah), dan satu titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil. dan untuk $R_0 > 1$ titik endemik stabil sangat besar sehingga penularan (endemik) sulit diatasi dan terdapat titik setimbang bebas penyakit yang tidak stabil.

Keterkaitan antara kesetimbangan bebas penyakit dan kesetimbangan endemik

Parameter θ dan α dapat dijadikan sebagai kontrol dalam model $g(\beta)$ karena hubungannya dengan laju vaksinasi dan keefektifan vaksin.

Berdasarkan Theorema 2 bahwa kesetimbangan bebas penyakit stabil dan kesetimbangan endemik untuk nilai dari θ dan α dalam region

$$M = \{(\theta, \alpha) \in [0, 1] \times [0, 1] : b < 0, c > 0, b^2 - 4ac > 0\}.$$

Dua Kasus Khusus

1. Semua rekrutmen baru telah di vaksinasi ($\theta = 1$)
Pada kasus ini diperoleh

$$\mathfrak{R}_v = \frac{\alpha\sigma_2}{k_2}$$

dan koefisien dari persamaan $g(\beta)$ menjadi

$$a = \alpha$$

$$b = \alpha\mu + k_2(1 - \mathfrak{R}_v)$$

$$c = k_2\mu(1 - \mathfrak{R}_v)$$

Dua Kasus Khusus

Teorema 3. Kesetimbangan bebas penyakit (ε_0) dari model (2) adalah stabil asimtotik global pada Ω saat $\mathfrak{R}_v \leq 1$.

Saat $\theta = 1$ tidak ada rekrutmen pada kompartemen S_1 , sehingga S_1 dan I_1 mendekati nol saat $t \rightarrow \infty$. Sehingga model menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dS_2}{dt} &= \Lambda + \gamma_2 I_2 - \frac{\alpha \sigma_2 I_2}{N} S_2 - \mu S_2, \\ \frac{dI_2}{dt} &= -\frac{\alpha \sigma_2 I_2}{N} S_2 - (\gamma_2 + \mu + \tau_2) I_2.\end{aligned}$$

Dua Kasus Khusus

Pernyataan tersebut dapat dibuktikan dengan menggunakan LaSalle's Invariance Principle dengan fungsi Lyapunov $G(S_1, I_1, S_2, I_2) = S_1 + I_1$ dan $\dot{G} = 0 \iff S_1 = I_1 = 0$. Maka subset invarian terbesar dari

$$\begin{aligned} W &= (S_1, I_1, S_2, I_2) \in \Omega : \dot{G}(S_1, I_1, S_2, I_2) = 0 \\ &= (S_1, I_1, S_2, I_2) \in \Omega : S_1 = I_1 = 0. \end{aligned}$$

adalah kesetimbangan bebas penyakit ε_0 . Sehingga berdasarkan *LaSalle's Invariance Principle* bahwa ε_0 adalah stabil asimtotik global.

Dua Kasus Khusus

2. Pemulihan dari infeksi yang menjadikan kekebalan permanen ($\alpha = 0$)
Pada kasus ini diperoleh

$$\mathcal{R}_v = \frac{\sigma_1(1 - \theta)}{k_1}$$

dan koefisien dari persamaan $g(\beta)$ menjadi

$$a = 0$$

$$b = (1 - \theta)(\mu + \gamma_1) + k_1\theta$$

$$c = k_1\mu(1 - \mathcal{R}_v).$$

Dua Kasus Khusus

Teorema 4. Kesetimbangan bebas penyakit dari model (4.1)-(4.4) adalah stabil asimtotik global pada Ω saat $\mathfrak{R}_v \leq 1$.

Saat $\alpha = 0$ pemulihan dari infeksi menjadikan kekebalan permanen sehingga kompartemen *infected* I_2 mendekati nol saat $t \rightarrow 0$.

Sehingga model menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= (1 - \theta)\Lambda - \frac{\sigma_1 I_1}{N} S_1 - \mu S_1, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \frac{\sigma_1 I_1}{N} S_1 - (\gamma_1 + \mu + \tau_1) I_1, \\ \frac{dS_2}{dt} &= \theta\Lambda + \gamma_1 I_1 - \mu S_2.\end{aligned}$$

Dua Kasus Khusus

Pernyataan tersebut dapat dibuktikan dengan menggunakan LaSalle's Invariance Principle dengan fungsi Lyapunov

$$U(S_1, I_1, S_2, I_2) = \begin{cases} I_2 + \frac{1}{2}(\theta S_1 - (1 - \theta)S_2)^2 & \text{saat } S_1 > \frac{1-\theta}{\theta} S_2, \\ I_2 & \text{saat } S_1 \leq \frac{1-\theta}{\theta} S_2. \end{cases}$$

Sehingga, $\dot{U} \leq 0$ dengan $\dot{U} = 0$ jika dan hanya jika $I_2 = 0$ dan $\theta S_1 - (1 - \theta)S_2 = 0$. Oleh karena itu

$\hat{\Omega} = \{(S_1, I_1, S_2, I_2) \in \Omega : \theta S_1 \leq (1 - \theta)S_2, I_2 = 0\}$ adalah stabil dan *attractive invariant subdomain* pada Ω .

Dua Kasus Khusus

Oleh karena itu, ε adalah kesetimbangan stabil asimtotik global dari persamaan $g(\beta)$ pada Ω jika kesetimbangan stabil asimtotik global dari persamaan $g(\beta)$ pada $\hat{\Omega}$ atau $\bar{\varepsilon}_0 = (S_1^*, I_1^*, S_2^*) = (\frac{\Lambda(1-\theta)}{\mu}, 0, \frac{\Lambda\theta}{\mu})$ adalah kesetimbangan stabil asimtotik global dari persamaan (4) pada

$$\bar{\Omega} = \left\{ (S_1, I_1, S_2) \in R_+^3 : S_1 + I_1 + S_2 \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \theta S_1 \leq (1 - \theta) S_2 \right\}.$$

Dua Kasus Khusus

Untuk sistem dinamis yang didefinisikan pada persamaan (4), fungsi *Lyapunov* $F(S_1, I_1, S_2) = \frac{1}{2}I_1^2$. Maka dengan $S_1 \leq (1 - \theta)N$. Sehingga $\dot{F} \leq 0$. Maka diperoleh $\dot{F} = 0$ jika dan hanya jika $I_1 = 0$. Dengan mensubstitusikan $I_1 = 0$ pada persamaan pertama dan ketiga pada (4) didapatkan S_1 mendekati $\frac{\Lambda(1-\theta)}{\mu}$ dan S_2 mendekati $\frac{\Lambda\theta}{\mu}$ pada saat $t \rightarrow \infty$. Oleh karena itu, $\bar{\varepsilon}_0$ adalah kesetimbangan stabil asimtotik global pada (4) terhadap $\bar{\Omega}$ dan ε_0 adalah kesetimbangan stabil asimtotik global pada (1)-(4) terhadap Ω .

Eksistensi Nilai Ambang Batas untuk θ dan α

Fungsi a , b , dan c pada $g(\beta)$ yang digunakan pada pendefinisian persamaan koeksistensi region M adalah fungsi kontinu pada θ dan α .

$$\overline{M} = \{(\theta, \alpha) : b \leq 0, c \geq 0, b^2 - 4ac \geq 0\}.$$

dengan

$$\hat{\theta} = \max \{ \theta \in [0, 1] : \exists \alpha \in [0, 1] : (\theta, \alpha) \in \overline{M} \}$$

dan

$$\hat{\alpha} = \min \{ \alpha \in [0, 1] : \exists \theta \in [0, 1] : (\theta, \alpha) \in \overline{M} \}$$

Eksistensi Nilai Ambang Batas untuk θ dan α

Dengan asumsi bahwa $\hat{\theta} = 1$, maka terdapat $\hat{\alpha}$ sedemikian hingga $(1, \hat{\alpha})$ bukan anggota M. Oleh karena itu, $b=0$ pada titik $(1, \hat{\alpha})$ pada Gambar 2, berdasarkan pada koefisien a,b,dan c pada saat $\theta = 0$ bahwa $\alpha = 0$ dan $\mathcal{R}_v = 1$, hasil ini bertentangan dengan \mathcal{R}_v saat $\theta = 1$, sehingga $\hat{\theta} < 1$. Dengan cara yang sama didapatkan $\alpha > 0$.

Hasil ini menunjukkan bahwa bifurkasi mundur dapat di hilangkan jika (i) populasi yang divaksinasi berjumlah besar atau (ii) keefektifan vaksin $\phi = 1 - \alpha$ cukup tinggi. Parameter dari wilayah koeksistensi pada Gambar 2 $\hat{\alpha} = 0.25$ dan $\hat{\theta} = 0.95$, jadi diperlukan paling sedikit 75% keefektifan vaksin atau 95% cakupan vaksin untuk menghilangkan bifurkasi mundur.

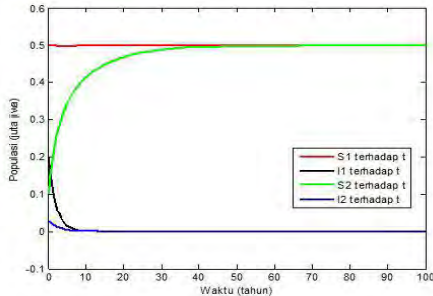
Simulasi Numerik

Metode numerik yang digunakan adalah metode numerik Runge-Kutta orde empat. Nilai parameter bebas penyakit yang digunakan adalah $\Lambda = 0.1, \theta = 0.5, \mu = 0.1, \sigma_1 = 0.2, \sigma_2 = 0.3, \gamma_1 = 0.3, \gamma_2 = 0.15, \tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0.1, \alpha = 0.5$. Nilai awal bebas penyakit yang digunakan adalah $S_1 = 0.5, I_1 = 0.20, S_2 = 0.10, I_2 = 0.03$.

Hasil simulasi dengan mengambil parameter dan nilai awal diatas menghasilkan $\mathfrak{R}_v = 0.4143$, yang berarti simulasi model berada pada keadaan bebas penyakit.

Simulasi Numerik

Didapatkan grafik kestabilan sebagai berikut:



Gambar 3. Grafik Dinamika Penyebaran Penyakit Saat $N=100$, $h=0.1$

Simulasi Numerik

Dari Gambar 4 terlihat bahwa populasi *Susceptible*, *Infected* sudah menunjukkan ke arah titik setimbang dan stabil pada titik tersebut. Untuk populasi *Susceptible* (yang belum pernah terinfeksi sebelumnya) mendekati titik setimbang 0.0925, populasi *Infected* (yang menularkan penyakit paling sedikit satu kali) mendekati titik setimbang 0.4980, populasi *Susceptible* (yang telah terinfeksi paling sedikit satu kali) mendekati titik setimbang 0.1013, populasi *Infected* (yang menularkan penyakit paling sedikit dua kali) mendekati titik setimbang 0.4943 dan stabil pada titik tersebut. Berdasarkan hasil numerik tersebut, terdapat penyebaran penyakit menular karena masih terdapat individu pada setiap populasi.




Simulasi Numerik

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan metode Runge-Kutta, grafik ini stabil jika menggunakan nilai $h = 0,1$. Pada saat $\mathcal{R}_v > 1$ akan terjadi penyebaran penyakit, hal ini dikarenakan terdapat individu pada populasi *Infected* yang menyebarkan penyakit. Titik kesetimbangan endemik akan stabil pada titik tersebut untuk masing-masing populasi *Susceptible*, *Infected*. Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk $\mathcal{R}_v > 1$ titik kesetimbangan enddemik dari masing-masing populasi akan stabil asimtotik lokal dan tidak stabil untuk nilai yang lainnya.

Kesimpulan

- 1 Bifurkasi mundur dapat dihilangkan jika :
 - (i) Populasi yang divaksinasi berjumlah besar (paling sedikit 95%) atau
 - (ii) Keefektifan vaksin $\phi = 1 - \alpha$ cukup tinggi (paling sedikit 75%).
- 2 Simulasi model penyebaran penyakit menular dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta menghasilkan grafik dari kesetimbangan bebas penyakit jika nilai $h = 0,1$. Serta simulasi numerik dari model menunjukkan bahwa diperlukan keefektifan vaksin yang cukup tinggi untuk pemberantasan penyakit secara efektif.

Daftar Pustaka

-  Lestari. I.P. (2012). Eksistensi Bifurkasi Mundur pada Model Penyebaran Penyakit Menular dengan Vaksinasi. **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
-  Driessche,P.,Watmough,J. 2002. *Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission.* **Mathematical Biosciences 180 (2002) 29-48**
-  Anguelov, R., dan Salisu, M. 2014. " Backward Bifurcation Analysis of Epidemiological Model with Partial Immunity". **Journal of Computers and Mathematics with Application 931-940.**