TUGAS AKHIR - SM 141501

METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL UNTUK MENYELESAIKAN PDB NONLINIER BRATU

AFIFAH DWI KURNIAWATI HASIBUAN
NRP 1211 100 045

Dosen Pembimbing
Dra. Sri Suprapti H., M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015

FINAL PROJECT-SM 141501

DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD FOR SOLVING ODE NON-LINEAR BRATU

AFIFAH DWI KURNIAWATI HASIBUAN
NRP 1211 100 045

Supervisor
Dra. Sri Suprapti H., M.Si

Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institut of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL UNTUK MENYELESAIKAN PDB NONLINIER BRATU

DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD FOR SOLVING ODE NON-LINEAR BRATU

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
AFIFAH DWI KURNIAWATI HASIBUAN
NRP. 1211 100 045

Menyetujui,
Dosen Pembimbing,

Dra. Sri Suprapti H., M.Si
NIP. 19540222 198403 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Prof.Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015

METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL UNTUK MENYELESAIKAN PDB NONLINIER BRATU

Nama Mahasiswa	**:**	**AFIFAH DWI KURNIAWATI HASIBUAN**
NRP	**:**	**1211 100 045**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Dosen Pembimbing	**:**	**Dra. Sri Suprapti H., M.Si**

Abstrak

Pada kasus fenomena alam banyak ditemukan model nonlinier. Salah satunya yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) nonlinier Bratu yang diturunkan dari model pengapian bahan bakar padat dalam teori pembakaran termal. Sebuah rumus baru telah dikembangkan berdasarkan dari metode transformasi diferensial untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Namun metode ini masih kurang sederhana dalam menghitung transformasi differensial dari bentuk nonliniernya. Sehingga pada Tugas Akhir ini digunakan sebuah metode transformasi diferensial dengan polinomial baru untuk menyelesaikan PDB nonlinier Bratu. Hasil simulasi grafik menunjukkan metode transformasi diferensial sangat dekat dengan solusi eksaknya serta galatnya cukup kecil. Nilai galat semakin kecil saat nilai orde semakin besar. Kemudian dari hasil simulasi konvergensi didapatkan $\exists\, 0 \leq \propto_k < 1$ untuk syarat $u(0) = u'(0) = 0$ sehingga solusi numerik dari persamaan Bratu konvergen ke eksaknya, namun untuk syarat $u(0) = u'(0) = \pi$ solusi numeriknya tidak konvergen ke eksaknya sehingga sebaiknya dipilih nilai $-\pi^2 < \lambda < \lambda_k$.

Kata kunci: Metode Transformasi Diferensial, PDB Nonlinier Bratu, Konvergensi, Parameter λ.

”Halaman ini sengaja dikosongkan”

DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD FOR SOLVING ODE NON-LINEAR BRATU

Name	**:**	**AFIFAH DWI KURNIAWATI HASIBUAN**
NRP	**:**	**1211 100 045**
Department	**:**	**Matematika**
Supervisor	**:**	**Dra. Sri Suprapti H., M.Si**

Abstact

In the case of natural phenomena are found nonlinear models. One of them is a model of ordinary differential equations (ODE) of nonlinear Bratu derived from solid fuel ignition models in the theory of thermal combustion. A new formula was developed based on differential transform method for solving it. However, this method is less simple in calculating the differential transform of nonlinear form. So in this Final Project used a differential transform method with new polynomial for solving Bratu equation. Results of the simulation graph showing differential transform method is very close to the exact solution as well as the error is quite small. The smaller the error value when the value of the larger order. After that, the convergence of simulation results obtained $\exists\, 0 \le \propto_k < 1$ *for the condition* $u(0) = u'(0) = 0$*, so the numerical solution of Bratu equation converge to the exact solution, but for the condition* $u(0) = u'(0) = \pi$*, the numerical solution of Bratu equation do not converge to the exact solution so that the value of* $\pi^2 < \lambda < \lambda_k$ *should be selected.*

Keywords: *Differential Transform Method, Bratu Nonlinear ODE, Convergence, λ Parameter.*

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Salah satu tujuan dari disusunnya Tugas Akhir ini adalah untuk memenuhi sebagian persyaratan dalam mencapai jenjang Sarjana Sains dari Jurusan Matematika ITS Surabaya.

Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik dan lancar atas kerja sama dan dukungan berbagai pihak. Sehubungan dengan itu, penulis bermaksud menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS.

2. Ibu Dra. Sri Suprapti H., M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah banyak membantu dan membimbing penulis dalam penyusunan laporan tugas akhir ini.

3. Ibu Sunarsini, M.Si, Ibu Dra. Wahyu F. D., M.Si, Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si, Bapak Moh. Iqbal, S.Si, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran untuk perbaikan tugas akhir ini.

4. Bapak Drs. Chairul Imron, MI.Komp selaku Koordinator Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS.

5. Bapak Dr. Darmaji, S.Si, MT selaku Dosen Wali yang telah membantu dan memberikan arahan akademik selama penulis menempuh perkuliahan di Jurusan Matematika ini.

6. Seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika atas kemudahan dan bantuan yang diberikan selama ini.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari pembaca. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

Special thanks to:

1. Allah Subhanahu wa ta'ala yang telah memberikan nikmat, karunia serta petunjuk dan kesabaran dalam setiap langkah penulis atas izin dan kehendakNya Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dan juga Nabi Muhamma SAW, shalawat serta salam selalu tercurah untuk beliau yang telah membimbing umatnya sehingga dapat berhijrah dari jaman kegelapan ke jaman yang dipenuhi dengan nikmat ilmu yang barokah ini.
2. Ibu dan Bapak yang selalu banyak membantu, mendoakan, serta memberikan nasihat dan motivasi kepadaku.
3. Kakak dan semua keluargaku yang telah membantu dan memberikan semangat kepadaku.
4. Teman-teman dekatku Ulva, Ifa, Tutut, Muna, Dini yang selalu bersama di jurusan dan saling membantu serta menyemangati selama kuliah di Matematika ini dan special to filsi terima kasih banyak sudah membantu tugas-tugasku saat kuliah dan Kakak sarah yang selama ini mau mengajak pulang bareng, semoga Allah membalas kalian dengan kebaikan yang banyak.
5. Teman-teman IM yang telah berjuang bersama dalam menegakkan dakwah IM. Semoga semangat dakwah kita bisa istiqomah dan IM dapat menjadi lebih baik ke depannya.
6. Teman-teman Menara'11 yang telah berjuang bersama saat-saat maba hingga sekarang, terima kasih sudah banyak membantu selama ini.
7. Teman-teman jurusan yang sudah berbagi pengalaman bersama selama aku kuliah di jurusan Matematika ITS
8. Dan buat semua pihak yang telah mendukung pengerjaan Tugas Akhir ini.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR GAMBAR

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR SIMBOL

λ	= parameter skalar Frank-Kamanetski
$\mathbb{R}$	= himpunan bilangan real
$\mathbb{N}$	= himpunan bilangan asli atau bilangan bulat positif
$\mathbb{F}$	= *field* atau lapangan
$\mathcal{H}$	= ruang Hilbert
$\mathcal{M}$	= operator umum diferensial nonlinier
$\mathcal{L}$	= operator linier yang didefinisikan $\mathcal{L} = \frac{d^n u(t)}{dt^n}$
$\mathcal{R}$	= operator linier sisa dari $\mathcal{M}$
$\mathcal{N}$	= operator nonlinier dari $\mathcal{M}$
$\mathcal{F}$	= operator nonlinier dari ruang Hilbert $\mathcal{H}$ ke dalam $\mathcal{H}$
Ω	= sebuah bola di dalam $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di titik 0
Δ	= operator Laplace
R	= jari-jari pada bola Ω
C^1	= himpunan dari semua fungsi yang mempunyai turunan pertama kontinu.
C^2	= himpunan dari semua fungsi yang mempunyai turunan kedua kontinu.
N	= orde atau pangkat tertinggi dari deret solusi
n	= jumlah partisi untuk $t \in [0,1]$ atau $x \in [0,1]$

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang dibahas pada Tugas Akhir ini. Kemudian dari permasalahan tersebut dirangkum ke dalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya untuk menyelesaikan permasalahan pada Tugas Akhir ini diberikan juga batasan masalah guna mendapatkan tujuan yang diharapkan dan manfaat yang diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir ini diuraikan pada akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang Masalah

Di dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknik model nonlinier merupakan salah satu hal yang penting, namun pada kenyataannya model nonlinier masih sulit untuk dipecahkan baik secara numerik maupun analitik. Salah satu bentuk model nonlinier yaitu pada masalah nilai eigen eliptik nonlinier yang timbul dalam berbagai ilmu pengetahuan dan teknik seperti perpindahan panas radiatif, teori pembakaran, dan nanoteknologi [1].

Persamaan Bratu merupakan kasus khusus dari persamaan masalah nilai eigen eliptik nonlinier yang diberikan dalam bentuk

$$u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0, 0 \le x \le 1. \tag{1.1}$$

Persamaan Bratu diturunkan dari penyederhanaan model pengapian bahan bakar padat pada teori pembakaran. Terdapat beberapa metode baik analitik maupun numerik yang telah sukses diterapkan oleh para peneliti dalam menyelesaikan persamaan Bratu. Wazwaz [2] menggunakan metode dekomposisi adomian untuk mendapatkan solusi eksak persamaan Bratu, Batiha [3] menggunakan metode iterasi *variational* untuk mendapatkan solusi numerik persamaan Bratu, Abukhaled [1] menyelesaikan persamaan Bratu menggunakan metode Spline, dan metode *wavelet* Legendre digunakan untuk menyelesaikan persamaan Bratu oleh [4] serta Chang [5] mengembangkan sebuah metode alternatif untuk menyelesaikan transformasi diferensial satu dimensi dari fungsi nonlinier yang diterapkan pada persaman

Bratu. Namun metode ini memerlukan diferensiasi, manipulasi aljabar dan perhitungan yang lebih sulit untuk transformasi diferensial pada fungsi nonlinier [6], sehingga pada Tugas Akhir ini digunakan pendekatan yang lebih efisien dalam menggunakan metode transformasi diferensial untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu. Fungsi nonlinier digantikan oleh polinomial transformasi diferensial kemudian fungsi linier digantikan dengan fungsi transformasinya yang diperoleh dari sifat-sifat dasar metode transformasi diferensial. Dengan demikian, persamaan Bratu dapat dengan mudah dipecahkan dengan perhitungan yang lebih sederhana untuk setiap fungsi nonlinier.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan dengan latar belakang yang ada, permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini antara lain:

1. Bagaimana menyelesaikan PDB nonlinier Bratu menggunakan metode transformasi diferensial.
2. Bagaimana mendapatkan hasil simulasi grafik perbandingan antara metode transformasi diferensial dengan solusi eksaknya.
3. Bagaimana mendapatkan hasil konvergensi pada solusi yang diperoleh dari persaman Bratu.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang diberikan dalam Tugas Akhir ini diantaranya sebagai berikut:

Nilai syarat awal PDB nonlinier Bratu yang diselesaikan adalah $u(0) = u'(0) = 0$ dan $u(0) = u'(0) = \pi$.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dijelaskan di atas, maka tujuan dari Tugas Akhir ini diantaranya sebagai berikut:

1. Menyelesaikan PDB nonlinier Bratu menggunakan metode transformasi diferensial.
2. Mendapatkan hasil simulasi grafik perbandingan antara metode transformasi diferensial dengan solusi eksaknya.
3. Mendapatkan hasil konvergensi dari solusi yang diperoleh pada persamaan Bratu.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai rujukan (acuan) untuk menyelesaikan PDB nonlinier Bratu dengan menggunakan metode yang lebih sederhana, efektif, dan akurat bagi para pengguna.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini secara keseluruhan disusun atas lima bab dan lampiran. Secara garis besar masing-masing bab akan membahas hal-hal sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran secara umum dari Tugas Akhir ini yang meliputi latar belakang permasalahan, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat serta sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang dasar teori serta materi pendukung yang digunakan penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini, antara lain persamaan diferensial tak linier, deret Taylor dan Maclaurin, metode transformasi diferensial, persamaan fungsional, operator, dan barisan rekursif.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang alur penyelesaian dan metode yang digunakan penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini.

BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

Bab ini menyajikan formulasi dan penyelesaian berupa solusi eksak dan numerik dari PDB nonlinier Bratu serta penjelasan mengenai hasil simulasi yang diperoleh.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan berdasarkan hasil pembahasan sebelumnya dan saran untuk mengembangkan penelitian sebelumnya.

LAMPIRAN

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang menjadi landasan atau dasar teori dan materi pendukung lainnya antara lain persamaan diferensial tak linier, deret Taylor dan Maclaurin, metode transformasi diferensial, persamaan fungsional, operator, dan barisan rekursif.

2.1 Persamaan Diferensial Tak Linier

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan dari satu atau beberapa variabel tak bebas terhadap satu atau beberapa variabel bebas. Berdasarkan tipe persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebasnya. Berdasarkan kelinierannya persamaan diferensial biasa terbagi menjadi linier dan tak linier.

Persamaan diferensial biasa linier orde n dengan y variabel tak bebas dan x variabel bebas adalah persamaan berbentuk

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+\cdots$$
$$+a_0(x)y=G(x) \qquad (2.1)$$

dengan a_n tidak sama dengan nol.

Persamaan diferensial biasa dikatakan tak linier, dilihat dari variabel tak bebas y, yaitu

1 Variabel tak bebas y dan turunannya berderajat lebih dari satu
2 Terdapat perkalian variabel tak bebas y dan (atau) juga turunannya
3 Terdapat fungsi-fungsi transenden dari y dan (atau) turunannya [7].

Contoh 2.1.1:

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2+\ y\frac{dy}{dx}=xe^y$$

2.2 Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Jika f adalah jumlah dari deret pangkat dengan interval konvergensi $a - r^* < x < a + r^*$, $(r^* > 0)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

$$a - r^* < x < a + r^*.$$

Deret ini disebut deret Taylor $f(x)$ di sekitar $x = a.$ Jika koefisien c_n diberikan oleh rumus

$$c_0 = f(a), c_1 = \frac{f'(a)}{1!}, c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \ldots c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ldots,$$

maka didapatkan

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + .. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Untuk kasus khusus $a = 0$ deret Taylor menjadi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Deret persamaan (2.3) dikenal dengan deret Maclaurin [8].

Contoh 2.2.1 :

Hampiri fungsi $f(x) = \sin x$ ke dalam deret Taylor di sekitar $a = 0$

Penyelesaian:

Didapatkan turunan $f(x)$ sebagai berikut

$f(x) = \sin x,$

$f'(x) = cosx,$

$f''(x) = -\sin x,$

$f'''(x) = -\cos x,$

$f^{(4)}(x) = \sin x,$

dan seterusnya.
Maka, berdasarkan persamaan (2.3), $\sin x$ dihampiri dengan deret Maclaurin sebagai berikut:

$$\sin x = sin(0) + \frac{\cos(0)}{1!}\, x + \frac{-\sin(0)}{2!}\, x^2 + \frac{-\cos(0)}{2!}\, x^3 + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Deret Taylor dan deret Maclaurin sangat penting dalam memperoleh suatu hampiran atau aproksimasi pada nilai penyelesaian dari suatu masalah nilai awal (MNA) pada nilai-nilai dari x tertentu.

2.3 Metode Transformasi Diferensial

Transformasi diferensial untuk turunan ke-k dari fungsi $u(x)$ didefinisikan sebagai berikut [6] :

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\, u(x)\right]_{x=x_0} \tag{2.4}$$

dengan $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mempunyai turunan yang kontinu terhadap x dan $U(k)$ adalah fungsi transformasi yang disebut fungsi-T. Invers dari transformasi diferensial $U(k)$ didefinisikan

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k\, U(k). \tag{2.5}$$

Dari persamaan (2.4) dan (2.5) didapat

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left\{\frac{d^k}{dx^k}\, u(x)\right\} |x = x_0 \tag{2.6}$$

yang menyatakan konsep dari transformasi diferensial yang diturunkan dari ekspansi deret Taylor, tetapi metode ini tidak menyelesaikan turunan secara simbolik. Fungsi $u(x)$ dapat dinyatakan dengan deret berhingga dan persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} (x - x_0)^k \, U(k). \tag{2.7}$$

Berdasarkan (2.4) dan (2.5) dapat ditentukan sifat-sifat operasi dari transformasi diferensial yang diberikan pada Teorema 2.3.1.

Teorema 2.3.1 [6,9]
Jika $f(x), g(x), u(x)$ fungsi dari x dan $F(k), G(k), U(k)$ masing-masing transformasi diferensial dari fungsi-fungsi tersebut, maka untuk konstanta α dan bilangan bulat tak negatif m, memenuhi sifat-sifat berikut ini:

i. Jika $u(x) = f(x) \pm g(x)$, maka $U(k) = F(k) \pm G(k)$.
ii. Jika $u(x) = \alpha\, g(x)$, maka $U(k) = \alpha\, G(k)$
iii. Jika $u(x) = \frac{dg(x)}{d(x)}$, maka $U(k) = (k+1)G(k+1)$.
iv. Jika $u(x) = \frac{d^m g(x)}{dx^m}$, maka $U(k) = (k+1)(k+2)\ldots(k+m)G(k+m)$.

Bukti :

i. Turunan ke-k dari persamaan $u(x) = f(x) \pm g(x)$ adalah
$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \frac{d^k f(x)}{dx^k} \pm \frac{d^k g(x)}{dx^k}.$$
Dengan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{k!}$ maka diperoleh
$$\frac{1}{k!}\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \frac{1}{k!}\frac{d^k f(x)}{dx^k} \pm \frac{1}{k!}\frac{d^k g(x)}{dx^k}$$
$$U(k) = F(k) \pm G(k)$$

ii. Turunan ke-k dari persamaan $u(x) = \alpha\, g(x)$ adalah
$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \alpha\left(\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right).$$
Jika kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{k!}$ maka diperoleh
$$\frac{1}{k!}\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \alpha\,\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right)$$

$$U(k) = \alpha\, G(k)$$

iii. Turunan ke-k dari persamaan $u(x) = \frac{dg(x)}{d(x)}$ adalah

$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \frac{d^{k+1} g(x)}{dx^{k+1}}.$$

Jika kedua ruas dikalikan $\frac{1}{k!}$ maka diperoleh

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^{k+1} g(x)}{dx^{k+1}}\right).$$

Selanjutnya mengalikan $\frac{k+1}{k+1}$ pada ruas kanan didapatkan

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^{k+1} g(x)}{dx^{k+1}}\right)\left(\frac{k+1}{k+1}\right)$$

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = (k+1)\,\frac{1}{k(k+1)!}\left(\frac{d^{k+1} g(x)}{dx^{k+1}}\right)$$

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = (k+1)\,\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{d^{k+1} g(x)}{dx^{k+1}}\right)$$

$$U(k) = (k+1)G(k+1)$$

iv. Turunan ke-k dari persamaan $u(x) = \frac{d^m g(x)}{dx^m}$ adalah

$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \frac{d^{k+m} g(x)}{dx^{k+m}}.$$

Jika kedua ruas dikalikan $\frac{1}{k!}$ maka diperoleh

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^{k+m} g(x)}{dx^{k+m}}\right).$$

Selanjutnya ruas kanan dikalikan dengan $\frac{(k+1)(k+2)\dots(k+m-1)(k+m)}{(k+1)(k+2)\dots(k+m-1)(k+m)}$, maka diperoleh

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^{k+m} g(x)}{dx^{k+m}}\right)\left(\frac{(k+1)(k+2)\dots(k+m-1)(k+m)}{(k+1)(k+2)\dots(k+m-1)(k+m)}\right)$$

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = (k+1)(k+2)\dots(k+m-1)(k+m)\,\frac{1}{(k+m)!}\left(\frac{d^{k+m} g(x)}{dx^{k+m}}\right)$$

$$U(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+m)G(k+m).$$

Sehingga Teorema 2.3.1 terbukti.

2.4 Persamaan Fungsional

Persamaan fungsional adalah sebuah persamaan untuk fungsi-fungsi atau nilai-nilai yang tidak diketahui. Dengan demikian, untuk menyelesaikan sebuah persamaan fungsional dapat diartikan mencari semua fungsi yang memenuhi persamaan. Salah satu persamaan fungsional dasar yaitu

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{2.8}$$

Persamaan diatas disebut persamaan fungsional Cauchy [10]. $f(x), f(y)$ adalah fungsi-fungsi yang dicari dari persamaan fungsional (2.8).

2.5 Operator

Definisi 2.5.1 [11] Misal V dan W dua ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Transformasi linier dari V ke W adalah pemetaan $T: V \to W$ yang memenuhi syarat berikut ini:

1. Untuk setiap $x, y \in V$, berlaku $T(x+y) = T(x) + T(y)$.
2. Untuk setiap $c \in \mathbb{F}$ dan $x \in V$, berlaku $T(cx) = cT(x)$.

Definisi 2.5.2 [11] Misal V ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Transformasi linier $T: V \to V$ disebut operator linier pada V.

Operator nonlinier adalah sebuah operator yang tidak memenuhi syarat dari pemetaan atau transformasi linier.

2.6 Barisan Rekursif

Barisan rekursif adalah suatu barisan yang didefinisikan dengan cara rekursif atau induktif yaitu menentukan nilai x_1 dan membentuk sebuah rumus untuk x_{n+1} $(n \geq 1)$ dalam suku $x_{n.}$. Secara umum, dapat ditentukan x_1 dan membentuk rumus untuk memperoleh x_{n+1} dari $x_1, x_2, \dots x_n$.

Contoh 2.6.1:
Barisan Fibonnaci $F := (f_n)$ diberikan oleh definisi induktif
$f_1 := 1,\ f_2 := 1,\ f_{n+1} := f_{n-1} + f_n\ ,\ \ (n \geq 2)$
Sehingga diperoleh barisan F yaitu (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …) [12].

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas tujuh tahap, antara lain studi literatur, penurunan model persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu, mencari solusi eksak persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu, mencari solusi numerik persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu, simulasi konvergensi dan numerik persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu serta penarikan kesimpulan dan saran.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan analisis model dan identifikasi permasalahan dengan mencari dan mempelajari literatur-literatur seperti jurnal, paper, dan buku-buku serta artikel dari internet yang berhubungan dengan model matematika persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu dan solusi untuk penyelesaian model tersebut dengan menggunakan metode transformasi diferensial.

3.2 Penurunan Model Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier Bratu

Pada tahap ini dilakukan penurunan rumus pada model pengapian bahan bakar padat dalam teori pembakaran termal untuk mendapatkan persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu.

3.3 Mencari Solusi Eksak Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier Bratu

Pada tahap ini dicari solusi eksak dari persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu dengan menggunakan metode transformasi diferensial.

3.4 Mencari Solusi Numerik Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier Bratu

Pada tahap ini dicari solusi numerik dari persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu dengan menggunakan metode transformasi diferensial.

3.5 Simulasi Konvergensi

Tahap simulasi ini dilakukan untuk mendapatkan hasil numerik dari perhitungan $\propto_k$. Nilai $\propto_k$ digunakan untuk menunjukkan bahwa solusi numerik dari persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu dengan menggunakan metode transformasi diferensial konvergen ke solusi atau nilai eksaknya.

3.6 Simulasi Numerik PDB Nonlinier Bratu Menggunakan Metode Transformasi Diferensial

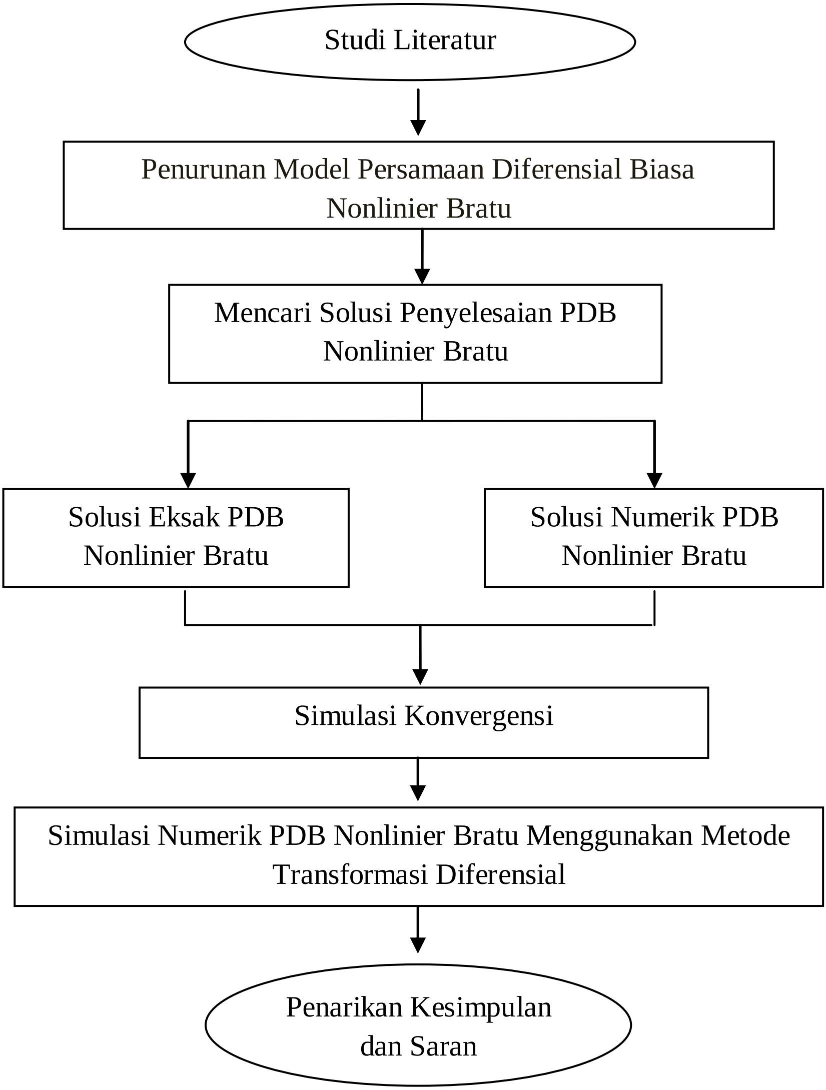
Tahap simulasi ini dilakukan untuk mendapatkan grafik perbandingan antara solusi atau penyelesaian numerik dari persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu menggunakan metode transformasi diferensial dengan solusi eksaknya, serta menganalisa nilai galat yang terjadi.

3.7 Kesimpulan dan Saran

Setelah dilakukan analisa dan pembahasan maka dapat ditarik sebuah kesimpulan dan saran sebagai bahan masukan atau pertimbangan untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

3.8 Skema Penelitian

Skema penelitian bertujuan untuk memudahkan dalam pengerjaan Tugas Akhir agar lebih sistematis. Skema penelitian yang digunakan disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Penelitian

“ Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB IV
ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas metode transformasi diferensial dengan polinomial baru, analisis konvergensi, penurunan rumus PDB nonlinier Bratu pada model pengapian bahan bakar padat serta solusi penyelesaian dari PDB nonlinier Bratu. Pembahasan dimulai dengan menganalisis metode transformasi diferensial dengan polinomial baru. Kemudian dilanjutkan dengan menganalisis metode yang digunakan untuk menunjukkan konvergensi dari solusi PDB Nonlinier Bratu. Selanjutnya penurunan model matematika pada pengapian bahan bakar padat untuk mendapatkan PDB nonlinier Bratu. Berikutnya menyelesaikan PDB nonlinier Bratu menggunakan metode transformasi diferensial dengan polinomial baru. Setelah itu, pada akhir pembahasan diberikan analisis hasil simulasi dari grafik perbandingan antara solusi eksak dan numerik serta konvergensi dari solusi PDB nonlinier Bratu.

4.1 Metode Transformasi Diferensial dengan Polinomial Baru

Berikut ini dijelaskan mengenai langkah-langkah atau cara penyelesaian suatu persamaan diferensial menggunakan metode transformasi diferensial dengan polinomial baru.

Misalkan terdapat persamaan diferensial berikut ini

$$\mathcal{M}\big(u(t)\big) = g(t), \tag{4.1}$$

dengan $\mathcal{M}$ adalah operator umum diferensial nonlinier yang menyertakan bentuk linier dan nonlinier. Bentuk linier dipecah menjadi $\mathcal{L} + \mathcal{R}$, dengan $\mathcal{L}$ didefinisikan $\mathcal{L} = \frac{d^n u(t)}{dt^n}$ dan $\mathcal{R}$ adalah operator linier sisa. Kemudian bentuk nonlinier didefinisikan $\mathcal{N}$. Sehingga persamaan (4.1) dapat ditulis sebagai

$$\mathcal{M}\big(u(t)\big) = \mathcal{L}\big(u(t)\big) + \mathcal{R}\big(u(t)\big) + \mathcal{N}\big(u(t)\big) = g(t), \tag{4.2}$$

Penyelesaian $\mathcal{L}\big(u(t)\big)$ dari persamaan (4.2), didapatkan

$$\mathcal{L}\big(u(t)\big) = -\,\mathcal{R}\big(u(t)\big) - \,\mathcal{N}\big(u(t)\big) + \,g(t). \tag{4.3}$$

Masing-masing fungsi dari kedua ruas pada persamaan (4.3) ditransformasikan menggunakan sifat-sifat dasar transformasi diferensial yang diberikan pada Teorema 2.3.1 kecuali fungsi $\mathcal{N}\big(u(t)\big)$ ditransformasikan menggunakan rumus polinomial baru. Sehingga didapatkan fungsi transformasinya sebagai berikut

1. Dengan menggunakan sifat iv pada Teorema 2.3.1 diperoleh fungsi transformasi dari $\mathcal{L}\big(u(t)\big)$ yaitu

$$T(\mathcal{L}\big(u(t)\big)) = T\left(\frac{d^n u(t)}{dt^n}\right)$$

$$= (k+1)(k+2)\ldots(k+n)U(k+n) \tag{4.4}$$

2. Fungsi transformasi dari $\mathcal{R}\big(u(t)\big)$ yaitu
$$T\big(\mathcal{R}\big(u(t)\big)\,\big) = \mathcal{R}\big(U(k)\big). \tag{4.5}$$
3. Fungsi transformasi dari $g(t)$ yaitu
$$T\big(g(t)\big) = \,G(k). \tag{4.6}$$
4. Fungsi transformasi dari $\mathcal{N}\big(u(t)\big)$ yaitu
$$T\left(\mathcal{N}\big(u(t)\big)\right) = \mathcal{N}\big(U(k)\big) = \mathcal{D}_k\big(U(0), \ldots, U(k)\big), \tag{4.7}$$

dengan $\mathcal{D}_k$ adalah rumus polinomial baru yang diperoleh dari Teorema 4.1.1 di bawah ini.

Teorema 4.1.1 [6] Jika $\mathcal{N}\big(u(t)\big)$ adalah fungsi nonlinier, maka fungsi transformasi diferensial dari $\mathcal{N}\big(u(t)\big)$ dihitung sebagai berikut

$$\mathcal{N}\big(U(k)\big) = \mathcal{D}_k\big(U(0), \ldots, U(k)\big),$$

dengan $U(k)$ adalah fungsi tranformasi diferensial dari $u(t)$ dan $\mathcal{D}_k$ adalah polinomial-polinomial yang dapat dihitung menggunakan rumus

$$\mathcal{D}_k\big(U(0), \ldots, U(k)\big) = \frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{k}\lambda^i U(i)\right)\right]_{\lambda=0}, i = 1,2,3, \ldots \tag{4.8}$$

Bukti :

Misalkan terdapat fungsi nonlinier $\mathcal{N}(u)$ dengan $\mathcal{N}$ merupakan bentuk atau suku nonlinier. $\mathcal{N}(U)$ adalah fungsi transformasi dari $\mathcal{N}(u)$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{\infty} U(i)\right) \tag{4.9}$$

Dari persamaan (4.9), fungsi transformasi $\mathcal{N}(U)$ dapat dibentuk kembali ke dalam deret pangkat dengan variabel peubah bebas λ. Persamaan (4.9) menjadi

$$\mathcal{N}\big(U(\lambda)\big) = \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i U(i)\right) \tag{4.10}$$

Deret (4.10) mempunyai interval konvergensi ρ. Di sisi lain,

$$\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i U(i)\right) = \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{k} \lambda^i U(i)\right) + \mathcal{N}\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda^i U(i)\right)$$

$\mathcal{N}\big(U(\lambda)\big)$ diturunkan sampai ke- k diperoleh

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \mathcal{N}(U(\lambda))_{\lambda=0} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i U(i)\right)_{\lambda=0} \tag{4.11}$$

Karena solusi penyelesaian metode transformasi diferensial dapat dinyatakan dengan deret berhingga maka persamaan (4.11) menjadi

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \mathcal{N}(U(\lambda))_{\lambda=0} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{k} \lambda^i U(i)\right)_{\lambda=0} \tag{4.12}$$

Karena terdapat turunan sampai ke- k dari $\mathcal{N}\big(U(\lambda)\big)$ maka $\mathcal{N}\big(U(\lambda)\big)$ dapat dibentuk menjadi deret Maclaurin.

$$\mathcal{N}\big(U(\lambda)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \mathcal{N}\big(U(\lambda)\big)_{\lambda=0}}{k!} \lambda^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{k} \lambda^i U(i)\right)_{\lambda=0}}{k!} \lambda^k$$

$$= \mathcal{N}(U(0)) + \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{1} \lambda^i U(i)\right)_{\lambda=0}\right)\lambda$$

$$+ \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{2} \lambda^i U(i)\right)_{\lambda=0}\right)\lambda^2 +$$

$$\left(\frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{3} \lambda^i U(i)\right)_{\lambda=0}\right)\lambda^3 + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{k} \lambda^i U(i)\right)_{\lambda=0}\right)\lambda^k + \cdots$$

Sehingga dengan mengambil $\lambda = 1$, $\mathcal{N}\big(U(\lambda)\big)$ menjadi

$$\mathcal{N}\big(U(\lambda)\big) = \mathcal{N}\big(U(0)\big) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{1} \lambda^i U(i)\right)_{\lambda=0} +$$

$$+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{2}\lambda^i U(i)\right)_{\lambda=0}$$

$$+\cdots\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{k}\lambda^i U(i)\right)_{\lambda=0}+\cdots$$

Atau $\mathcal{N}\big(U(\lambda)\big)$ ekivalen dengan bentuk

$$\mathcal{N}\big(U(\lambda)\big)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{k}\lambda^i U(i)\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{N}(U)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{D}_k\big(U(0),\dots,U(k)\big)$$

Sebagai akibatnya diperoleh fungsi transformasi diferensial dari $\mathcal{N}(u)$ yaitu

$$\mathcal{N}(U)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{D}_k\big(U(0),\dots,U(k)\big) \tag{4.13}$$

Karena

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}U(k)$$

maka persamaan (4.13) menjadi

$$\mathcal{N}\left(\sum_{k=0}^{\infty}U(k)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{D}_k\big(U(0),\dots,U(k)\big)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{N}\big(U(k)\big)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{D}_k\big(U(0),\dots,U(k)\big),$$

$\mathcal{N}(U(k)) = \mathcal{D}_k\big(U(0), \dots, U(k)\big).$

Jadi, terbukti bahwa fungsi transformasi dari $\mathcal{N}(u)$ atau $\mathcal{N}(u(t))$ dapat dihitung menggunakan rumus polinomial $\mathcal{D}_k$.

Selanjutnya masing-masing fungsi transformasi dari $\mathcal{L}\big(u(t)\big)$, $\mathcal{R}\big(u(t)\big), \mathcal{N}\big(u(t)\big)$, dan $g(t)$ dituliskan kembali sehingga persamaan (4.3) menjadi

$$\mathcal{L}\big(u(t)\big) = -\,\mathcal{R}\big(u(t)\big) - \,\mathcal{N}\big(u(t)\big) + \,g(t)$$

$$(k+1)(k+2)\dots(k+n)U(k+n) = \,-\mathcal{R}\big(U(k)\big) - \mathcal{D}_k\big(U(0), \dots, U(k)\big) + G(k). \qquad (4.14)$$

Dari persamaan (4.14) didapatkan $U(k+n)$ yaitu

$$U(k+n) = \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)}\Big\{-\,\mathcal{R}\big(U(k)\big) - \,\mathcal{D}_k\big(U(0), \dots, U(k)\big) + G(k)\Big\} \qquad (4.15)$$

$U(k+n)$ merupakan nilai koefisien dari deret pangkat yang dicari untuk mendapatkan penyelesaian dari suatu persamaan diferensial. Selanjutnya, persamaan diferensial yang diselesaikan menggunakan metode ini adalah persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu.

4.2 Analisis Konvergensi

Misalkan terdapat persamaan diferensial yang dinyatakan dalam bentuk persamaan fungsional didefinisikan sebagai berikut

$$u(t) = \mathcal{F}\big(u(t)\big). \qquad (4.16)$$

Dengan $\mathcal{F}$ merupakan operator nonlinier. Bentuk penyelesaian dari metode transformasi diferensial yaitu

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} U(k)(t-t_0)^k. \qquad (4.17)$$

Dengan menggunakan barisan rekursif maka didapatkan

$$S_{n+1} = \mathcal{F}(S_n). \tag{4.18}$$

Persamaan (4.18) dibentuk menjadi persamaan fungsional sehingga didapatkan

$$S = \mathcal{F}(S). \tag{4.19}$$

Definisi 4.2.1 [6]

Untuk setiap $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, didefinisikan

$$\propto_k = \begin{cases} \frac{\|u_{k+1}\|}{\|u_k\|}, & \|u_k\| \neq 0, \\ 0 \quad , & \|u_k\| = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

Dengan $\|u_k\| = \sqrt{U(k){t_0}^k + U(k){t_1}^k + \cdots + U(k){t_n}^k}$.

$U(k)$ yang diperoleh dari (4.15) dan n = jumlah partisi untuk
$t \in [0,1]$

Teorema 4.2.1 [6]

Jika $\mathcal{F}$ sebuah operator dari ruang Hilbert $\mathcal{H}$ ke dalam $\mathcal{H}$ dan u adalah solusi eksak dari (4.16). Deret solusi

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(t - t_0)^k,$$

dengan $U(k)$ yang diperoleh dari (4.15), konvergen ke u, jika $\exists\ 0 \leq \propto_k < 1$, sehingga

untuk $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ berakibat

$\|u_{k+1}\| <\propto_k \|u_k\|$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa barisan dari S_n seperti persamaan (4.17) atau dapat dituliskan $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy dalam ruang

Hilbert. Barisan $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ dikatakan barisan Cauchy jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat N sedemikian hingga

$\|S_n - S_m\| < \varepsilon$ jika $n, m \geq N$ atau dengan kalimat lain
$\|S_n - S_m\| \to 0$ saat $n, m \to \infty$.

Sehingga ditunjukkan bahwa $\lim_{n,m\to\infty}\|S_n - S_m\| = 0$. Jika

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|u_{n+1}\| \leq \propto_k \|u_n\| \leq \propto_k{}^2 \|u_{n-1}\| \leq \cdots \leq \propto_k{}^{n+1} \|u_0\|.$$

untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m,$ maka didapatkan

$$\begin{aligned}\|S_n - S_m\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) \\ &\quad + \cdots)(S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \|S_n - S_{n-1}\| + \|S_{n-1} - S_{n-2}\| + \cdots \\ &\quad + \|S_{m+1} - S_m\| \\ &\leq \propto_k{}^n \|u_0\| + \propto_k{}^{n-1} \|u_0\| + \cdots + \propto_k{}^{m+1} \|u_0\| \\ &\leq (\propto_k{}^{m+1} + \propto_k{}^{m+2} + \cdots + \propto_k{}^n)\|u_0\| \\ &= \propto_k{}^{m+1} \frac{1 - \propto_k{}^{n-m}}{1 - \propto_k} \|u_0\|.\end{aligned}$$

Jadi, terdapat $\propto_k$ yang berada pada interval $0 \leq \propto_k < 1$ sehingga $\lim_{n,m\to\infty}\|S_n - S_m\| = 0$. Dengan demikian, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy di ruang Hilbert $\mathcal{H}$. Karena ruang Hilbert adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap maka setiap barisan Cauchy di $\mathcal{H}$ mempunyai limit atau konvergen sehingga mengakibatkan $\exists S, S \in \mathcal{H}, \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,$
Jadi, $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$ konvergen.

Menyelesaikan persamaan (4.16) ekivalen untuk menyelesaikan persamaan (4.19) sehingga jika $\mathcal{F}$ operator kontinu maka

$$\mathcal{F}(S) = \mathcal{F}\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = S,$$

S tidak lain merupakan penyelesaian dari persamaan (4.16) juga. Dengan demikian, Teorema 4.2.1 terbukti atau $\exists\ 0 \leq \propto_k < 1$ sehingga deret solusi $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ konvergen ke nilai eksaknya.

4.3 Penurunan Rumus PDB Nonlinier Bratu Pada Model Pengapian Bahan Bakar Padat

Diberikan model pengapian bahan bakar padat sebagai berikut [13]:

$$\theta_t - \Delta\theta = \delta e^{\theta}, (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \tag{4.21}$$

dengan kondisi batas awal

$$\begin{aligned} \theta(x,0) &= 0, x \in \Omega \\ \theta(x,t) &= 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty) \end{aligned} \tag{4.22}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dengan batas halus $\partial\Omega$. Batas halus adalah jika tiap titik $x \in \partial\Omega$ maka terdapat fungsi yang mempunyai turunan kontinu pada titik tersebut. Model tersebut didapatkan dari penyederhanaan model matematika dalam prinsip-prinsip konservasi dasar pada teori pembakaran.

Berkaitan dengan model *steady state* atau keadaan tunak yaitu keadaan di mana suatu sistem berada dalam kesetimbangan atau tidak berubah lagi seiring waktu, didapatkan model

$$\begin{aligned} -\Delta\psi &= \delta e^{\psi}, x \in \Omega \\ \psi(x) &= 0, \ x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dengan Δ merupakan operator Laplace dan δ merupakan parameter skalar Frank-Kamentski yang mencirikan keadaan awal sistem. Bergantung pada nilai δ, reaksi bisa meledak dan bisa juga berlangsung perlahan-lahan. Nilai dari parameter δ memisahkan reaksi yang lambat dan reaksi yang menyebabkan ledakan yang selanjutnya disebut kondisi kritis.

Selanjutnya persamaan diferensial parsial pada persamaan (4.23) disederhanakan dengan menggunakan teknik simetrisasi. Persamaan diferensial parsial yang didefinisikan pada domain Ω memiliki sifat simetri tertentu. Jika Ω adalah sebuah bola di dalam $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di 0, maka menurut hasil penelitian

Gidas , Ni , dan Nirenberg [14] semua penyelesaian atau solusi dari persamaan (4.23) adalah radial simetri.
Lebih tepatnya , untuk $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\} = B_R$, misalkan u $\in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ merupakan penyelesaian positif dari

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u), x \in \Omega \\ u &= 0,\ x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.24}$$

dengan $f \in C^1$ $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ maka u adalah radial simetris dan radial menurun. Jika $r = |x|$, maka $u = u(r)$ dan $u'(r) < 0$ untuk $r \in (0, R)$. Ini berarti bahwa setiap penyelesaian positif dari persamaan (4.24) adalah penyelesaian dari

$$\begin{aligned} u'' + \frac{n-1}{r} u' + f(u) = 0,\ 0 < r < R \\ u'(0) = 0,\ u(R) = 0 \end{aligned} \tag{4.25}$$

dengan menyamakan persamaan (4.23) dan (4.24) maka dapat diperoleh $u = \psi, f(u) = \delta e^{\psi}$. Sehingga bentuk persamaan (4.23) ekivalen dengan bentuk persamaan dari

$$\begin{aligned} \psi'' + \frac{n-1}{r} \psi' + \delta e^{\psi} = 0, 0 < r < R \\ \psi'(0) = 0,\ \psi(R) = 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Pada keserbaragaman domain khusus, untuk $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^n$ maka persamaan (4.26) ekivalen untuk penyelesaian positif $\psi(r) \in C^2[0,1]$ dari

$$\psi'' + \frac{n-1}{r} \psi' + \delta e^{\psi} = 0,\ 0 < r < 1 \tag{4.27}$$

dengan syarat batas

$$\psi'(0) = 0,\ \psi(1) = 0 .$$

Karena persamaan Bratu yang diturunkan berdimensi satu maka, $n = 1$ sehingga persamaan (4.27) menjadi

$$\psi'' + \delta e^{\psi} = 0,\ 0 \le r \le 1 \tag{4.28}$$

dengan syarat batas

$\psi'(0) = 0,\ \psi(1) = 0.$

Jika $\psi = u$, $\delta = \lambda$, dan $r = x$ maka diperoleh persamaan diferensial biasa (PDB) nonlinier Bratu yang timbul dalam model pengapian bahan bakar padat pada teori pembakaran sebagai berikut

$$u'' + \lambda e^{u} = 0,\ \ 0 \le x \le 1 \qquad (4.29)$$

dengan syarat

$u'(0) = 0,\ u(0) = 0$.

4.4 Solusi Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier Bratu Menggunakan Metode Transformasi Diferensial

Diberikan masalah nilai awal PDB nonlinier Bratu ($x \in [0,1]$)

$$u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0,\ \lambda \text{ konstan} \qquad (4.30)$$

dengan syarat

$$u(0) = u'(0) = 0. \qquad (4.31)$$

dengan menggunakan sifat dari metode transformasi diferensial maka bentuk transformasi dari persamaan (4.30) adalah

$u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0$

$u''(x) = -\lambda e^{u(x)}$

$\mathrm{T}(\frac{\boldsymbol{d^2u(x)}}{\boldsymbol{dx^2}}) = \mathrm{T}(-\lambda e^{u(x)})$

$$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda\mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \dots, U(k)\big), k = 0,1,2,\dots \qquad (4.32)$$

dengan $\mathcal{D}_k$ merupakan rumus polinomial yang digunakan untuk mendapatkan fungsi transformasi dari bentuk nonlinier $\mathcal{N}(u) = e^{u(x)}$. Untuk syarat awal (4.31) dengan $x_0 = 0$ ditransformasikan menjadi

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\,u(x)\right]_{x=0}$$

$$U(0) = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{dx^0}\,u(0)\right]_{x=0} = u(0) = 0$$

$$U(1) = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dx}\,u(x)\right]_{x=0}$$

$U(1) = \frac{1}{1!} u'(0) = 0$
Sehingga diperoleh syarat awal yang telah ditransformasikan yaitu

$$U(0) = U(1) = 0 \quad (4.33)$$

Kemudian, $k = 0,1,2, \ldots,$ disubstitusikan ke persamaan (4.32) didapatkan

Untuk $k = 0$, maka

$$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda \mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \ldots, U(k)\big)$$

$$(0+1)(0+2)U(0+2) = -\lambda \mathcal{D}_0\big(U(0)\big)$$

$$2U(2) = -\lambda \mathcal{D}_0\big(U(0)\big) \quad (4.34)$$

Menghitung $\mathcal{D}_0\big(U(0)\big)$

$$\mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \ldots, U(k)\big) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{k} \lambda^i U(i) \right) \right]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_0\big(U(0)\big) = \frac{1}{0!} \frac{\partial^0}{\partial \lambda^0} \left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{0} \lambda^i U(i) \right) \right]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_0\big(U(0)\big) = \mathcal{N}\big(\lambda^0 U(0)\big)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0\big(U(0)\big) &= \mathcal{N}\big(U(0)\big) \\ &= e^{U(0)} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sehingga nilai dari $\mathcal{D}_0\big(U(0)\big)$ disubstitusikan ke persamaan (4.34) menjadi

$$2U(2) = -\lambda$$

$$U(2) = -\frac{\lambda}{2}$$

Untuk $k = 1$, maka

$$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda \mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \ldots, U(k)\big)$$

$$(1+1)(1+2)U(1+2) = -\lambda \mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big)$$

$$6\, U(3) = -\lambda \mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big) \quad (4.35)$$

Menghitung $\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big)$

$$\mathcal{D}_1\big(U(0),U(1)\big) = \frac{1}{1!}\frac{\partial^1}{\partial\lambda^1}\left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{1}\lambda^i U(i)\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$\mathcal{D}_1\big(U(0),U(1)\big) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\mathcal{N}(\lambda^0 U(0) + \lambda^1 U(1))\right]_{\lambda=0}$$
$$\mathcal{D}_1\big(U(0),U(1)\big) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\mathcal{N}(U(0) + \lambda U(1))\right]_{\lambda=0}$$
$$\mathcal{D}_1\big(U(0),U(1)\big) = \left[U(1)\mathcal{N}'(U(0) + \lambda U(1))\right]_{\lambda=0}$$
$$\mathcal{D}_1\big(U(0),U(1)\big) = U(1)\mathcal{N}'\big(U(0)\big)$$
$$\mathcal{D}_1\big(U(0),U(1)\big) = 0$$

Nilai $\mathcal{D}_1\big(U(0),U(1)\big)$ disubstitusikan ke persamaan (4.35) diperoleh

$U(3) = 0.$

Untuk $k = 2$, maka

$$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda\mathcal{D}_k\big(U(0),U(1),\ldots,U(k)\big)$$
$$(2+1)(2+2)U(2+2) = -\lambda\mathcal{D}_2(U(0),U(1),U(2))$$
$$12\,U(4) = -\,\lambda\mathcal{D}_2(U(0),U(1),U(2)) \tag{4.36}$$

Menghitung $\mathcal{D}_2(U(0),U(1),U(2)\,)$

$$\mathcal{D}_2(U(0),U(1),U(2)) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{2}\lambda^i U(i)\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[\mathcal{N}(\lambda^0 U(0) + \lambda^1 U(1) + \lambda^2 U(2))\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(U(1) + 2\lambda U(2))\mathcal{N}'(U(0) + \lambda U(1) + \lambda^2 U(2))\right]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{2}\Big[2U(2)\mathcal{N}'\big(U(0) + \lambda U(1) + \lambda^2 U(2)\big) + \big(U(1) + 2\lambda U(2)\big)(U(1) + 2\lambda U(2))\mathcal{N}'(U(0) + \lambda U(1) + \lambda^2 U(2))\Big]_{\lambda=0}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2U(2)\mathcal{N}'\big(U(0)\big) + U(1)U(1)\mathcal{N}''\big(U(0)\big)\right)$$
$$= U(2)\mathcal{N}'\big(U(0)\big) + \frac{1}{2}U(1)^2\mathcal{N}''\big(U(0)\big)$$
$$= -\frac{\lambda}{2}e^{U(0)}$$
$$= -\frac{\lambda}{2}$$

Nilai dari $\mathcal{D}_2(U(0), U(1), U(2))$ disubstitusikan ke persamaan (4.36) diperoleh

$$12\,U(4) = -\lambda\,.-\frac{\lambda}{2}$$

$$U(4) = \frac{\lambda^2}{24}$$

Untuk $k = 3$, maka

$$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda\mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \dots, U(k)\big)$$

$$(3+1)(3+2)U(3+2) = -\lambda\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3))$$

$$20\,U(5) = -\lambda\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) \tag{4.37}$$

Menghitung $\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3))$

$$\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\lambda^3}\left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{3}\lambda^i U(i)\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\lambda^3}[\mathcal{N}(\lambda^0U(0) + \lambda^1U(1) + \lambda^2U(2) + \lambda^3U(3))]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) = U(3)\mathcal{N}'\big(U(0)\big) + U(1)U(2)\mathcal{N}''\big(U(0)\big) + \frac{1}{3!}\,(U(1))^3\mathcal{N}^{(3)}\big(U(0)\big)$$

$$\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) = U(3)\,e^{U(0)} + U(1)U(2)e^{U(0)} + \frac{1}{3!}\,(U(1))^3e^{U(0)}$$

$$\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) = 0$$

Nilai dari $\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3))$ disubstitusikan ke persamaan (4.37) diperoleh

$U(5) = 0.$

Untuk $k = 4$, maka

$$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda\mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \dots, U(k)\big)$$

$$(4+1)(4+2)U(4+2) = -\lambda\mathcal{D}_4(U(0), U(1), U(2), U(3), U(4))$$

$$30\,U(6) = -\lambda\mathcal{D}_4(U(0), U(1), U(2), U(3), U(4)) \tag{4.38}$$

Dengan cara yang sama didapatkan hasil dari $\mathcal{D}_4(U(0), U(1), U(2), U(3), U(4))$ sehingga persamaan (4.38) menjadi

$$30\,U(6) = -\lambda\left(U(4)\mathcal{N}'\big(U(0)\big) + \left(\big(U(1)U(3)\big) + \frac{(U(2))^2}{2}\right)\mathcal{N}''\big(U(0)\big)\right)$$

$$30\,U(6) = -\lambda\left(\frac{\lambda^2}{24}\,e^{U(0)} + \frac{\lambda^2}{8}\,e^{U(0)}\right)$$

$$30\,U(6) = -\lambda\left(\frac{\lambda^2}{6}\right)$$

$$U(6) \quad = -\frac{\lambda^3}{180}$$

Dan seterusnya untuk k yang lain dapat dihitung melalui simulasi Matlab untuk memudahkan perhitungan. Maka berdasarkan hasil yang diperoleh diatas didapatkan

$$U(2) = -\frac{\lambda}{2}$$

$$U(3) = 0$$

$$U(4) = \frac{\lambda^2}{24}$$

$$U(5) = 0$$

$$U(6) = -\frac{\lambda^3}{180}$$

$\vdots$

$U(k)$

Dari sifat transformasi diferensial

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x - x_0)^k\,U(k),$$

karena $x_0 = 0$

maka

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,U(k),$$

$$u(x) = U(0) + U(1)x + U(2)x^2 + U(3)x^3 + \cdots$$

dengan mensubstitusikan nilai $U(0), U(1), U(2), \ldots$ yang telah dihitung sebelumnya maka didapat solusi hampirannya adalah

$$u(x) = -\frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{\lambda^2}{24}x^4 - \frac{\lambda^3}{180}x^6 + \ldots \tag{4.39}$$

Menurut persamaan (4.28) dan (4.29) parameter λ sama dengan δ sehingga λ adalah parameter Frank-Kamentski. Terdapat λ_k yang merupakan nilai kritis untuk membedakan antara kejadian eksplosif (ledakan) dan noneksplosif termal. Nilai λ_k telah dihitung sebelumnya oleh [15] sebesar 3.513830719. Terdapat penyelesaian untuk $\lambda < \lambda_k$, namun untuk $\lambda > \lambda_k$ maka akan terjadi ledakan termal. Oleh sebab itu, dievaluasi nilai λ saat $\lambda < \lambda_k$. Masing-masing nilai λ yang dipilih disubstitusikan ke persamaan (4.39).

Untuk $\boldsymbol{\lambda = 2}$ maka

$$u(x) = -x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + \ldots$$

atau ekivalen dengan

$$u(x) = -2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 - \cdots\right]$$

yang dekat dengan bentuk

$$u(x) = -2\ln(\cosh(x)) \tag{4.40}$$

sehingga persamaan (4.40) tidak lain merupakan solusi eksak dari PDB nonlinier Bratu untuk nilai $\lambda = 2$.

Untuk $\boldsymbol{\lambda = -2}$, maka

$$u(x) = -\frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{\lambda^2}{24}x^4 - \frac{\lambda^3}{180}x^6 + \ldots$$

$$u(x) = -\frac{(-2)}{2}x^2 + \frac{(-2)^2}{24}x^4 - \frac{(-2)^3}{180}x^6 + \ldots$$

$$u(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \ldots$$

$$u(x) = -2\left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 - \cdots\right]$$

atau ekivalen dengan fungsi

$$u(x) = -2\ln(\cos(x)) \tag{4.41}$$

dimana (4.41) merupakan solusi eksak untuk $\lambda = -2$.

Untuk $\boldsymbol{\lambda = 1}$, maka

$$u(x) = -\frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{\lambda^2}{24}x^4 - \frac{\lambda^3}{180}x^6 + \ldots$$

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{180}x^6 + \ldots$$

Untuk $\boldsymbol{\lambda = -1}$, maka
$u(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{180}x^6 + \ldots$

Sebagai tambahan, syarat awal PDB Nonlinier Bratu yang lain juga diselesaikan, Misalkan,
$u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0,\ \lambda$ konstan
dengan syarat
$u(0) = 0$ dan $u'(0) = \pi.$ (4.42)
Maka dengan menggunakan cara yang sama didapatkan
$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda\mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \ldots, U(k)\big), k = 0,1,2,\ldots$ (4.43)
dimana syarat pada persamaan (4.42) telah ditransformasikan menjadi
$U(0) = 0$ dan $U(1) = \pi$
Selanjutnya $k = 0,1,2,\ldots$ disubstitusikan ke persamaan (4.43) didapatkan

Untuk $\boldsymbol{k = 0}$, maka

$$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda\mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \ldots, U(k)\big)$$
$$(0+1)(0+2)U(0+2) = -\lambda\mathcal{D}_0\big(U(0)\big)$$
$$2U(2) = -\lambda\mathcal{D}_0\big(U(0)\big) \tag{4.44}$$

Menghitung $\mathcal{D}_0\big(U(0)\big)$

$$\mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \ldots, U(k)\big) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{k}\lambda^i U(i)\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_0\big(U(0)\big) = \frac{1}{0!}\frac{\partial^0}{\partial\lambda^0}\left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{0}\lambda^i U(i)\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_0\big(U(0)\big) = \mathcal{N}\big(\lambda^0 U(0)\big)$$
$$\mathcal{D}_0\big(U(0)\big) = \mathcal{N}\big(U(0)\big)$$
$$= e^{U(0)}$$
$$= e^0 = 1$$

Sehingga nilai dari $\mathcal{D}_0\big(U(0)\big)$ disubstitusikan ke persamaan (4.44) menjadi
$2U(2) = -\lambda$

$$U(2) = -\frac{\lambda}{2}$$

Untuk $k = 1$, maka
$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda\mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \dots, U(k)\big)$
$(1+1)(1+2)U(1+2) = -\lambda\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big)$
$6\,U(3) = -\lambda\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big)$ (4.45)
Menghitung $\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big)$

$$\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big) = \frac{1}{1!}\frac{\partial^1}{\partial\lambda^1}\left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{1}\lambda^i U(i)\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\,[\mathcal{N}(\lambda^0 U(0) + \lambda^1 U(1))]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\,[\mathcal{N}(U(0) + \lambda U(1))]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big) = [U(1)\mathcal{N}'(U(0) + \lambda U(1))]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big) = U(1)\mathcal{N}'\big(U(0)\big)$$

$$\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big) = \pi e^{U(0)} = \pi$$

Nilai $\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big)$ disubstitusikan ke persamaan (4.45) diperoleh
$6\,U(3) = -\lambda\mathcal{D}_1\big(U(0), U(1)\big)$
$6\,U(3) = -\lambda\,\pi$

$$U(3) = -\frac{\lambda\pi}{6}$$

Untuk $k = 2$, maka
$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda\mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \dots, U(k)\big)$
$(2+1)(2+2)U(2+2) = -\lambda\mathcal{D}_2(U(0), U(1), U(2))$
$12\,U(4) = -\lambda\mathcal{D}_2(U(0), U(1), U(2))$ (4.46)
Menghitung $\mathcal{D}_2(U(0), U(1), U(2))$

$$\mathcal{D}_2(U(0), U(1), U(2)) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{2}\lambda^i U(i)\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\,[\mathcal{N}(\lambda^0 U(0) + \lambda^1 U(1) + \lambda^2 U(2))]_{\lambda=0}$$

$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(U(1) + 2\lambda U(2))\mathcal{N}'(U(0) + \lambda U(1) + \lambda^2 U(2))\right]_{\lambda=0}$

$$= \frac{1}{2}\Big[2U(2)\mathcal{N}'\big(U(0) + \lambda U(1) + \lambda^2 U(2)\big) + \big(U(1) + 2\lambda U(2)\big)(U(1) + 2\lambda U(2))\mathcal{N}''(U(0) + \lambda U(1) + \lambda^2 U(2))\Big]_{\lambda=0}$$

$= \frac{1}{2}\left(2U(2)\mathcal{N}'\big(U(0)\big) + U(1)U(1)\mathcal{N}''\big(U(0)\big)\right)$

$= U(2)\mathcal{N}'\big(U(0)\big) + \frac{1}{2}U(1)^2\mathcal{N}''\big(U(0)\big)$

$= -\frac{\lambda}{2}e^{U(0)} + \frac{1}{2}e^{U(0)}\pi^2$

$= -\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi^2}{2}$

Nilai dari $\mathcal{D}_2(U(0), U(1), U(2))$ disubstitusikan ke persamaan (4.46) diperoleh

$12\,U(4) = -\lambda\,.\,(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi^2}{2})$

$$U(4) = \frac{\lambda^2}{24} - \frac{\lambda\pi^2}{24}$$

Untuk $k = 3$, maka

$(k+1)(k+2)U(k+2) = -\lambda\mathcal{D}_k\big(U(0), U(1), \dots, U(k)\big)$

$(3+1)(3+2)U(3+2) = -\lambda\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3))$

$$20\,U(5) = -\lambda\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) \qquad (4.47)$$

Menghitung $\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3))$

$$\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\lambda^3}\left[\mathcal{N}\left(\sum_{i=0}^{3}\lambda^i U(i)\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\lambda^3}[\mathcal{N}(\lambda^0 U(0) + \lambda^1 U(1) + \lambda^2 U(2) + \lambda^3 U(3))]_{\lambda=0}$$

$\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) =$
$U(3)\mathcal{N}'\big(U(0)\big) + U(1)U(2)\mathcal{N}''\big(U(0)\big) +$
$\frac{1}{3!}\,(U(1))^3\mathcal{N}^{(3)}\big(U(0)\big)$

$\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) = U(3)\ e^{U(0)} + U(1)U(2)e^{U(0)} + \frac{1}{3!}\ (U(1))^3 e^{U(0)}$

$\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3)) = -\frac{\lambda\pi}{6} - \frac{\lambda\pi}{2} + \frac{\pi^3}{6} = \frac{-4\lambda\pi+\pi^3}{6}$

Nilai dari $\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3))$ disubstitusikan ke persamaan (4.47) diperoleh

$20\ U(5) = -\lambda\mathcal{D}_3(U(0), U(1), U(2), U(3))$

$20\ U(5) = -\lambda(\frac{-4\lambda\pi+\pi^3}{6})$

$U(5) = \frac{4\lambda^2\pi-\lambda\pi^3}{120}$

Berdasarkan hasil yang diperoleh diatas:

$U(1) = 1$

$U(2) = -\frac{\lambda}{2}$

$U(3) = -\frac{\lambda\pi}{6}$

$U(4) = \frac{\lambda^2}{24} - \frac{\lambda\pi^2}{24}$

$U(5) = \frac{4\lambda^2\pi - \lambda\pi^3}{120}$

$\vdots$

$U(k)$

dengan menggunakan sifat transformasi diferensial maka didapatkan solusi hampirannya

$$u(x) = \pi x - \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda\pi}{6}\ x^3 + \left(\frac{\lambda^2}{24} - \frac{\lambda\pi^2}{24}\right)x^4 + \left(\frac{4\lambda^2\pi-\lambda\pi^3}{120}\right)x^5 + \cdots \qquad (4.48)$$

Sama seperti sebelumnya nilai λ juga dievaluasi yaitu saat $\lambda < \lambda_k$ diambil $\lambda = -\pi^2$ sedangkan untuk $\lambda > \lambda_k$ dipilih $\lambda = \pi^2$.

Untuk $\lambda = -\pi^2$, maka persamaan (4.48) menjadi

$u(x) = \pi x + \frac{\pi^2}{2}x^2 + \frac{\pi^3}{6}\ x^3 + \frac{\pi^4}{12}x^4 + \frac{\pi^5}{24}\ x^5 + \ldots$

atau ekivalen dengan bentuk

$u(x) = -\ln\,(1 - \sin\pi\, x)$

Untuk $\lambda = \pi^2$, maka persamaan (4.48) menjadi

$$u(x) = \pi x - \frac{\pi^2}{2}x^2 - \frac{\pi^3}{6}\ x^3 + \frac{\pi^5}{40}\ x^5 + \ldots$$

4.5 Simulasi Konvergensi

Untuk mendukung keakuratan dari metode yang digunakan maka ditunjukkan konvergensi dari solusi yang didapatkan. Konvergensi diperoleh melalui perhitungan $\propto_k$ yang didefinisikan pada Definisi 4.2.1.

Dari Definisi 4.2.1, untuk setiap $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, maka

$$\propto_k = \begin{cases} \frac{\|u_{k+1}\|}{\|u_k\|}, & \|u_k\| \neq 0, \\ 0 \quad , & \|u_k\| = 0 \end{cases}$$

dan Teorema 4.2.1 diberikan bahwa
untuk $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\|u_{k+1}\| \leq \propto_k \|u_k\|. \tag{4.49}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.49) didapatkan

$$\|u_{k+2}\| \leq \propto_k \|u_{k+1}\| \leq \propto_k{}^2 \|u_k\| \tag{4.50}$$

Persamaan (4.50) dapat ditulis kembali menjadi

$$\|u_{k+2}\| \leq \propto_k{}^2 \|u_k\| \tag{4.51}$$

untuk $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sehingga dari persamaan (4.51) dapat dibentuk rumus baru dalam perhitungan $\propto_k$ yaitu

$$\propto_k = \begin{cases} \sqrt{\frac{\|u_{k+2}\|}{\|u_k\|}}\ , & \|u_k\| \neq 0, \\ 0 \quad , & \|u_k\| = 0 \end{cases} \tag{4.52}$$

Selanjutnya digunakan rumus pada (4.52) dalam perhitungan $\propto_k$ untuk mendapatkan hasil konvergensi.

Pada Teorema (4.2.1) diberikan rumus

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(t - t_0)^k \tag{4.53}$$

Karena variabel bebas yang digunakan pada PDB Nonlinier Bratu (4.30) adalah x maka persamaan (4.53) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x - x_0)^k. \tag{4.54}$$

Persamaan (4.54) dapat ditulis kembali ke dalam bentuk

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_k = U(0)x^0 + U(1)x^1 + \cdots + U(k)x^k \tag{4.55}$$

Dari (4.55) diperoleh

$$u_0 = U(0)x^0$$

$$u_1 = U(1)x^1 \tag{4.56}$$

$$u_2 = U(2)x^2$$

$$\vdots$$

$$u_k = U(k)x^k$$

Jika $\exists\ 0 \leq \propto_k < 1$ maka deret solusi

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x - x_0)^k$$

konvergen ke u (nilai eksaknya). Nilai $\propto_k$ diperoleh melalui rumus pada (4.52).

Berikutnya diberikan contoh dalam perhitungan $\propto_k$ untuk menunjukkan konvergensi. Misalkan untuk nilai $\lambda = 2$, batas maksimum k atau N = 4 dan $x_0 = 0$ maka berturut-turut nilai dari $U(0)$, $U(1), U(2), U(3), U(4)$ yang telah dihitung sebelumnya yaitu

$U(0) = 0$
$U(1) = 0$
$U(2) = -1$
$U(3) = 0$
$U(4) = \dfrac{1}{6}$

Nilai masing-masing $U(0)$ sampai $U(4)$ disubstitusikan ke rumus (4.56) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_0 &= U(0)x^0 = 0 \\ u_1 &= U(1)x^1 = 0 \\ u_2 &= U(2)x^2 = -x^2 \\ u_3 &= U(3)x^3 = 0 \\ u_4 &= U(4)x^4 = \frac{1}{6}x^4 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Jika nilai $x \in [0,1]$ dan diasumsikan nilai x dibagi menjadi 5 partisi dengan panjang interval 0.25 maka didapatkan

$x_0 = 0,$

$x_1 = 0{,}25,$

$x_2 = 0{,}5,$

$x_3 = 0{,}75,$

$x_4 = 0{,}1,$

Masing-masing nilai $x_0, x_1, \dots x_4$ disubstitusikan ke dalam masing-masing persamaan (4.57) sehingga didapatkan vektor baris dari nilai u_k yang bentuk umumnya yaitu

$$u_k = [U(k){x_0}^k \quad U(k){x_1}^k \quad U(k){x_2}^k \quad U(k){x_3}^k \quad U(k){x_4}^k] \tag{4.58}$$

Karena batas maksimum $k = 4$ maka masing-masing $k = 0,1,2,3,4$ disubstitusikan ke persamaan (4.58) didapatkan

Untuk $k = 0$, maka

$$u_k = [U(k){x_0}^k \quad U(k){x_1}^k \quad U(k){x_2}^k \quad U(k){x_3}^k \quad U(k){x_4}^k]$$

$$u_0 = [U(0){x_0}^0 \quad U(0){x_1}^0 \quad U(0){x_2}^0 \quad U(0){x_3}^0 \quad U(0){x_4}^0]$$

karena $U(0) = 0$, maka

$u_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

$\|u_0\| = 0$

Untuk $k = 1$, maka

$u_1 = [U(1){x_0}^1 \quad U(1){x_1}^1 \quad U(1){x_2}^1 \quad U(1){x_3}^1 \quad U(1){x_4}^1]$

karena $U(1) = 0$, maka

$u_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

$\|u_1\| = 0$

Untuk $k = 2$, maka

$u_2 = [U(2){x_0}^2 \quad U(2){x_1}^2 \quad U(2){x_2}^2 \quad U(2){x_3}^2 \quad U(2){x_4}^2]$

$= [-1.{x_0}^2 \quad -1.{x_1}^2 \quad -1.{x_2}^2 \quad -1.{x_3}^2 \quad -1.{x_4}^2]$

$= [-1.0^2 \quad -1.(0.25)^2 \quad -1.(0.5)^2 \quad -1.(0.75)^2 \quad -1.1^2]$

$= [0 \quad -0.0625 \quad -0.25 \quad -0.5625 \quad -1]$

$\|u_2\| = \sqrt{0^2 + (-0.0625)^2 + (-0.25)^2 + (-0.5625)^2 + (-1)^2}$

= 1.17593

Untuk $k = 3$, maka

$u_3 = [U(3){x_0}^3 \quad U(3){x_1}^3 \quad U(3){x_2}^3 \quad U(3){x_3}^3 \quad U(3){x_4}^3]$

Karena $U(3) = 0$, maka

$u_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

$\|u_3\| = 0$

Untuk $k = 4$, maka

$u_4 = [U(4){x_0}^4 \quad U(4){x_1}^4 \quad U(4){x_2}^4 \quad U(4){x_3}^4 \quad U(4){x_4}^4]$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}{x_0}^4 & \frac{1}{6}{x_1}^4 & \frac{1}{6}{x_2}^4 & \frac{1}{6}{x_3}^4 & \frac{1}{6}{x_4}^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}0^4 & \frac{1}{6}(0.25)^4 & \frac{1}{6}(0.5)^4 & \frac{1}{6}(0.75)^4 & \frac{1}{6}1^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.000651 & 0.010417 & 0.052734 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$\|u_4\| = 0.175122$

sehingga didapatkan nilai masing-masing $\propto_k$, dengan $k = 0{,}1{,}2$.

Untuk $k = 0$, maka

$$\propto_k = \sqrt{\frac{\|u_{k+2}\|}{\|u_k\|}}$$

$\propto_0 = \sqrt{\frac{\|u_2\|}{\|u_0\|}} = \sqrt{\frac{1.17593}{0}}$, karena dari Definisi 4.2.1, $\propto_k = 0$ jika $\|u_k\| = 0$ maka diperoleh $\propto_0 = 0$.

Untuk $k = 1$, maka

$$\propto_k = \sqrt{\frac{\|u_{k+2}\|}{\|u_k\|}}$$

$$\propto_1 = \sqrt{\frac{\|u_3\|}{\|u_1\|}} = \sqrt{\frac{0}{1.17593}} = 0$$

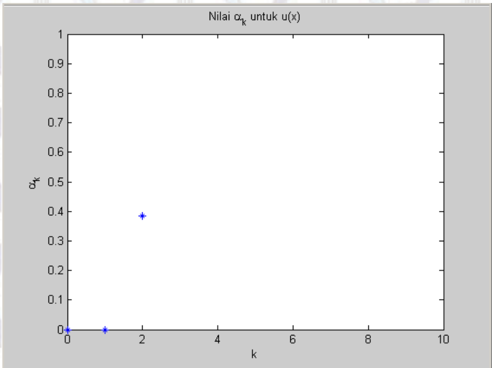
Untuk $k = 2$, maka

$$\propto_k = \sqrt{\frac{\|u_{k+2}\|}{\|u_k\|}}$$

$$\propto_2 = \sqrt{\frac{\|u_4\|}{\|u_2\|}} = \sqrt{\frac{0.175122}{1.17593}} = 0.3859$$

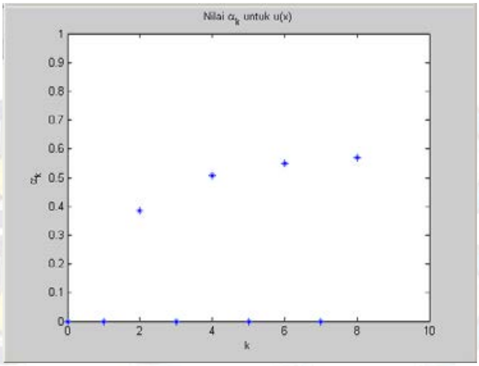
Jadi, diperoleh nilai $\propto_0 = 0, \propto_1 = 0$, dan $\propto_2 = 0.3859$. Masing-masing nilai berada pada interval $0 \leq \propto_k < 1$ sehingga solusi numerik untuk $\lambda = 2$ dan N = 4 konvergen ke nilai eksaknya.

Selanjutnya perhitungan $\propto_k$ disimulasikan pada Matlab. Hasil simulasi perhitungan $\propto_k$ pada contoh diatas diberikan pada Gambar 4.1 untuk nilai $\lambda = 2$ dan N = 4 dengan sumbu x menyatakan indeks ke- k dan sumbu y menyatakan nilai $\propto_k$ dengan $k = 0,1,2$.



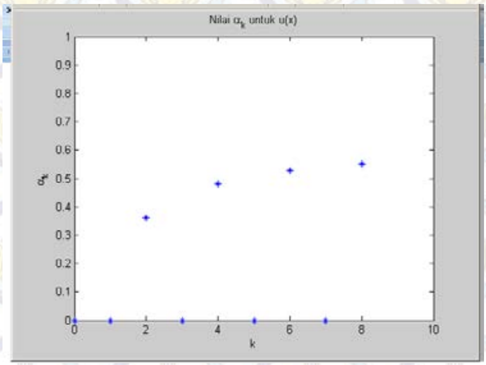
Gambar 4.1 Hasil Numerik Perhitungan $\propto_k$ untuk $\lambda = 2$ dan N = 4

Dari Gambar 4.1 menunjukkan bahwa hasil simulasi perhitungan $\propto_k$ dengan $k = 0,1,2$ sama dengan hasil perhitungan secara analitik untuk $\lambda = 2$ dan N = 4. Begitu juga untuk N yang lain, misalkan N=10 dengan $\lambda = 2$, maka diperoleh nilai $\propto_k$ dengan $k = 0,1,2,..8$ sebagai berikut



Gambar 4.2 Hasil Numerik Perhitungan $\propto_k$ untuk $\lambda = 2$ dan N=10

Dari hasil simulasi pada Gambar 4.2 diperoleh nilai $\propto_0 = 0$, $\propto_1 = 0$, $\propto_2 = 0.3859$, $\propto_3 = 0$, $\propto_4 = 0.50775$, $\propto_5 = 0$, $\propto_6 = 0.54803$, $\propto_7 = 0$, dan $\propto_8 = 0.5684$. Sehingga nilai $\propto_k$ berada pada interval $0 \leq \propto_k < 1$ mengakibatkan solusi numerik yang didapat konvergen ke hasil eksaknya. Hasil yang sama juga akan didapatkan ketika nilai x dipartisi menjadi n bagian yang lain dengan $x \in [0,1]$. Misalkan $n = 21$, dengan N=10, $\lambda = 2$ hasil simulasi yang didapatkan yaitu



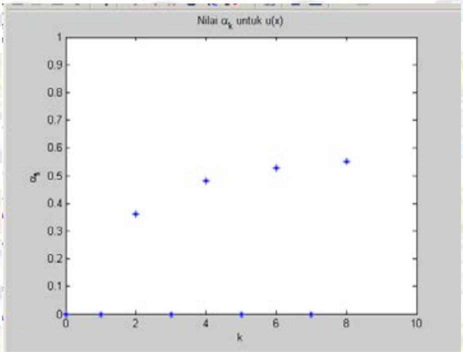
Gambar 4.3 Hasil Numerik Perhitungan $\propto_k$ untuk $n = 21$, $\lambda = 2$ dan N=10

Dari hasil simulasi pada Gambar 4.3 diperoleh $\propto_0 = 0$, $\propto_1 = 0$, $\propto_2 = 0.3608$, $\propto_3 = 0$, $\propto_4 = 0.48181$, $\propto_5 = 0$, $\propto_6 =$

0.5266 , $\propto_7 = 0$, dan $\propto_8 = 0.55156$, sehingga $0 \leq \propto_k < 1$ yang berakibat solusi numeriknya konvergen juga ke solusi eksaknya.

Untuk nilai λ yang lain yaitu $\lambda = -2$, $\lambda = -1$, dan $\lambda = 1$ yang digunakan pada syarat pertama persamaan Bratu, didapatkan hasil simulasi konvergensinya sebagai berikut

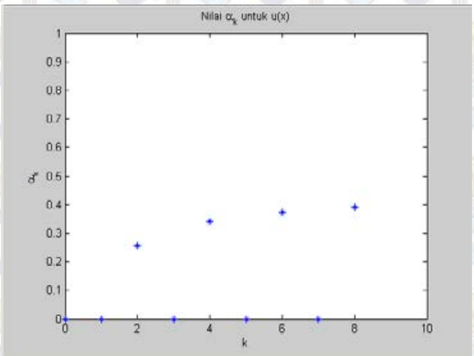
Untuk $\boldsymbol{\lambda = -2}$, maka



Gambar 4.4 Hasil Numerik Perhitungan $\propto_k$ untuk n = 21, $\lambda = -2$ dan N =10

Nilai $\propto_k$ yang diperoleh pada hasil simulasi Gambar 4.4 sama ketika $\lambda = -2$.

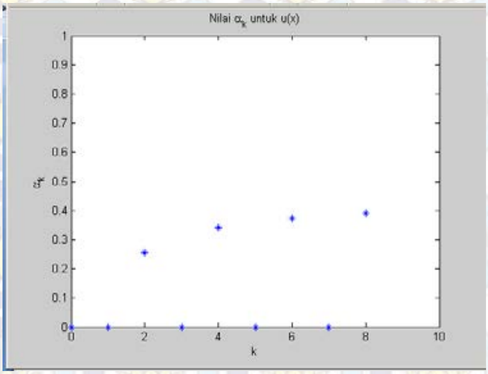
Untuk $\boldsymbol{\lambda = -1}$, maka



Gambar 4.5 Hasil Numerik Perhitungan $\propto_k$ untuk n = 21, $\lambda = -1$ dan N =10

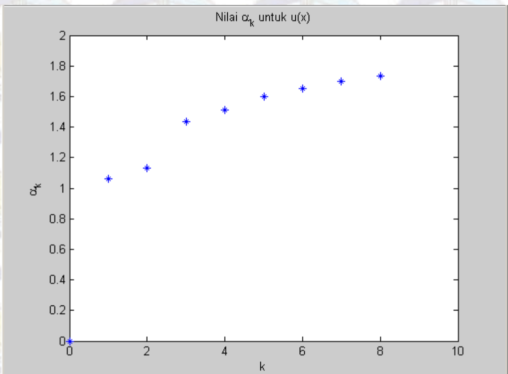
Nilai $\propto_k$ yang diperoleh dari hasil simulasi pada Gambar 4.5 yaitu $\propto_0 = 0$, $\propto_1 = 0$, $\propto_2 = 0.25513$, $\propto_3 = 0$, $\propto_4 = 0.34069$, $\propto_5 = 0$, $\propto_6 = 0.37236$, $\propto_7 = 0$, dan $\propto_8 = 0.39001$.

Untuk $\lambda = 1$, maka

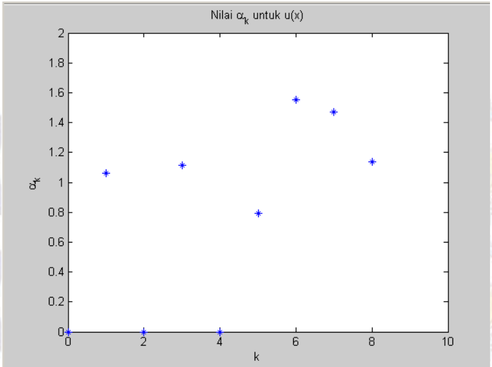


Gambar 4.6 Hasil Numerik Perhitungan $\propto_k$ untuk n = 21, $\lambda = 1$ dan N =10

Nilai $\propto_k$ yang diperoleh pada hasil simulasi Gambar 4.6 sama ketika $\lambda = -1$. Sedangkan untuk syarat yang kedua dari persamaan Bratu dengan $\lambda = -\pi^2$ dan $\lambda = \pi^2$ diperoleh hasil simulasi konvergensinya



Gambar 4.7 Hasil Numerik Perhitungan $\propto_k$ untuk n = 21, $\lambda = -\pi^2$ dan N = 10



Gambar 4.8 Hasil Numerik Perhitungan $\propto_k$ untuk n = 21, $\lambda = \pi^2$ dan N = 10

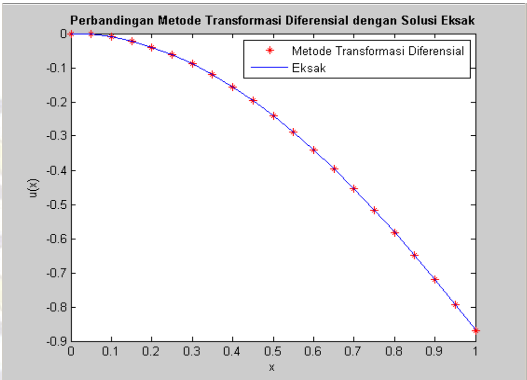
Dari Gambar 4.7 diperoleh $\propto_0 = 0$, $\propto_1 = 1.0622$, $\propto_2 = 1.1329$, $\propto_3 = 1.4349$, $\propto_4 = 1.5129$, $\propto_5 = 1.6013$, $\propto_6 = 1.6981$, $\propto_7 = 1.6981$, dan $\propto_8 = 1.7319$ sedangkan dari Gambar 4.8 diperoleh $\propto_0 = 0$, $\propto_1 = 1.0622$, $\propto_2 = 0$, $\propto_3 = 1.1115$, $\propto_4 = 0$, $\propto_5 = 0.79404$, $\propto_6 = 1.5532$, $\propto_7 = 1.4694$, dan $\propto_8 = 1.1381$, sehingga terdapat $\propto_k > 1$ yang mengakibatkan solusi numerik yang didapatkan tidak konvergen ke solusi eksaknya.

Untuk $\lambda = \pi^2$ hasil numeriknya tidak konvergen ke eksaknya dikarenakan dipilih nilai $\lambda > \lambda_k = 3.513830719$ [15], namun untuk nilai λ yang lain yaitu $\lambda = -2$, $\lambda = -1$, dan $\lambda = 1$ tampak dari Gambar 4.4 sampai dengan Gambar 4.6 diperoleh $0 \leq \propto_k < 1$ sehingga solusi numeriknya konvergen ke eksaknya. Hal tersebut juga dikarenakan dipilih nilai $\lambda < \lambda_k$.

4.6 Simulasi Numerik dan Analisa Galat

Berikut ini diberikan grafik perbandingan antara hasil numerik menggunakan metode transformasi diferensial dengan solusi eksaknya. N merupakan orde/pangkat tertinggi dari solusi penyelesaian numerik yang berupa deret.

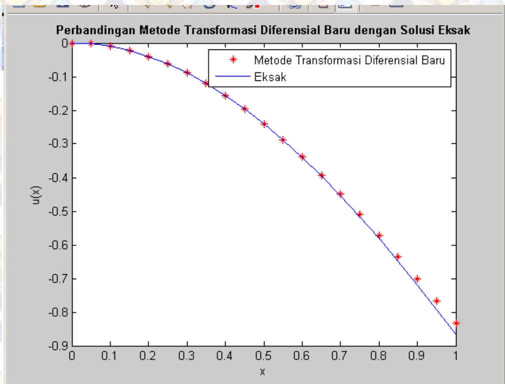
Untuk $\lambda = 2$ dan N=10 didapatkan grafiknya yaitu sebagai berikut



Gambar 4.9 Grafik Perbandingan Metode Transformasi Diferensial dengan Solusi Eksak untuk $\lambda = 2$ dan N = 10

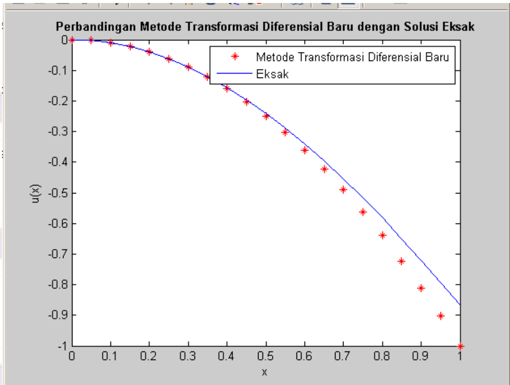
Pada Gambar 4.9 menunjukkan bahwa hasil yang diperoleh dari perhitungan dengan metode numerik transformasi diferensial mendekati solusi eksaknya. Selanjutnya diuji juga untuk N yang lain yaitu

Untuk $\boldsymbol{\lambda = 2}$, N = 5 maka



Gambar 4.10 Grafik Perbandingan Metode Transformasi Diferensial dengan Solusi Eksak untuk $\lambda = 2$ dan N = 5

Untuk $\lambda = 2$, N = 3 maka



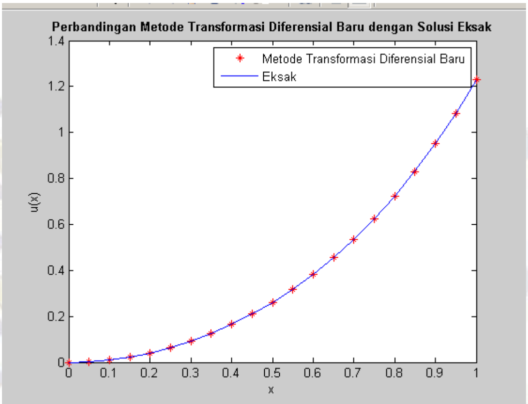
Gambar 4.11 Grafik Perbandingan Metode Transformasi Diferensial dengan Solusi Eksak untuk $\lambda = 2$ dan N = 3

Dari Gambar 4.9 sampai dengan Gambar 4.11 dapat disimpulkan bahwa semakin nilai N kecil maka grafik solusi numeriknya semakin menjauh dari grafik eksaknya atau dengan kata lain nilai galatnya semakin besar. Hal itu dibuktikan dengan hasil RMSE *(Root Mean Square Error)* dengan nilai λ dan masing-masing N yang telah diujikan sebelumnya yaitu $\lambda = 2$ untuk N = 10, N = 5, N = 3 dengan $x \in [0,1]$ dan $n = 21$ diberikan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Nilai RMSE dengan $\lambda = 2$ untuk N = 10, N = 5, dan N = 3

Root Mean Square Error (RMSE)	N=10	N=5	N=3
	0.00028611	0.011044	0.049486

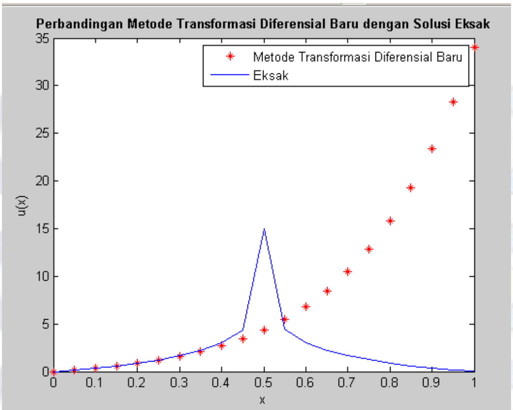
Dari Tabel 4.1 dapat disimpulkan bahwa semakin kecil N maka galatnya semakin besar dan berakibat juga kebalikanya. Untuk $\lambda = -2$, grafik perbandingan solusi numerik dengan eksaknya berikut ini



Gambar 4.12 Grafik Perbandingan Metode Transformasi Diferensial dengan Solusi Eksak untuk $\lambda = -2$ dan N = 10

Dari Gambar 4.12 menunjukkan bahwa grafik solusi numeriknya mendekati ke grafik solusi eksaknya. Kesimpulan yang sama juga akan diperoleh yaitu nilai N semakin kecil maka grafik numeriknya menjauhi grafik eksaknya atau galatnya semakin besar begitu juga sebaliknya. Untuk nilai $\lambda = 1$ dan $\lambda = -1$ tidak dapat ditunjukkan grafik perbandingannya karena belum ada solusi eksaknya namun solusi numeriknya tetap konvergen ke hasil eksaknya.

Sedangkan untuk syarat yang kedua dari persamaan Bratu ketika $\lambda = -\pi^2$ diperoleh grafik perbandingan antara solusi numerik dan eksaknya sebagai berikut



Gambar 4.13 Grafik Perbandingan Metode Transformasi Diferensial dengan Solusi Eksak untuk $\lambda = -\pi^2$

Gambar 4.13 menunjukkan bahwa grafik perbandingan antara kedua solusi berbeda jauh hal ini dapat diartikan terjadi peristiwa ledakan saat $x = 0.5$ sehingga dari hasil simulasi konvergensinya diperoleh solusi numeriknya tidak konvergen ke hasil eksaknya.

Untuk $\lambda = \pi^2$ tidak dapat ditunjukkan grafik perbandingan karena belum ada solusi eksaknya, namun dari hasil konvergensi sebelumnya didapatkan juga solusi numeriknya tidak konvergen ke eksaknya. Sehingga sebaiknya diambil nilai $-\pi^2 < \lambda < \lambda_k$ untuk syarat yang kedua dari persamaan Bratu agar penyelesaiannya konvergen ke solusi eksaknya serta peristiwa ledakan dapat dihindari.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh berdasarkan pembahasan dan hasil simulasi serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan hasil analisa yang telah dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Metode transformasi diferensial dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinier Bratu.
2. Hasil simulasi grafik menunjukkan metode transformasi diferensial sangat dekat dengan solusi eksaknya serta nilai galatnya sangat kecil. Nilai galat akan semakin kecil saat orde atau pangkat tertinggi dari solusi deret yang didapatkan semakin besar.
3. Untuk nilai $\lambda < \lambda_k$ pada syarat yang pertama, diperoleh $\exists\ 0 \leq\ \propto_k < 1$ sehingga solusi numerik penyelesaian persamaan Bratu konvergen ke eksaknya, namun untuk syarat yang kedua saat $\lambda = -\pi^2$ dan $\lambda = \pi^2$ solusinya tidak konvergen ke eksaknya sehingga sebaiknya dipilih nilai $-\pi^2 < \lambda < \lambda_k$ dengan $\lambda_k = 3.513830719$ agar penyelesaiannya konvergen ke eksaknya serta peristiwa ledakan dapat dihindari.

5.2 Saran

Dalam Tugas Akhir ini telah dibahas penyelesaian persamaan diferensial nonlinier Bratu untuk masalah nilai awal, namun terdapat hal-hal lainnya yang belum dibahas yaitu:

1. Menyelesaikan persamaan Bratu dengan menggunakan syarat awal yang lain.
2. Analisa kestabilan nilai λ.
3. Estimasi galat dari solusi yang didapatkan.

Untuk penelitian yang akan datang, dapat membahas hal-hal tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abukhaled, M., Khuri, S., and Sayfy, A, 2012. “Spline-based numerical treatments of Bratu-type equations”. **Palestine Journal of Mathematics** Vol. 1 pp: 63-70.

[2] Wazwaz, AM, 2005. “Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations”. **Appl. Math. Comput** Vol. 166 pp: 652-663.

[3] Batiha.B, 2010. ”Numerical solution of Bratu-type equation by the variational iteration method”. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics** Vol. 39 (1) pp: 23 – 29.

[4] Venkatesh, S.G, 2012. “The legendre wavelet method for solving initial value problems of Bratu-type”. **Computer and Mathematics with applications** Vol. 63 pp: 1287-1295.

[5] Chang, Shih-Hsiang, 2008. ”A new algorithm for calculating one-dimensional differential transform of nonlinear functions”**. Applied Mathematics and Computation** Vol. 195 pp: 799–808.

[6] Nik, H.Saberi dan Soleymani, F, 2013. ”A Taylor-type numerical method for solving nonlinear ordinary differential equations”**. Alexandria Engineering Journal** Vol. 52 pp: 543-550.

[7] Ross, L.S. 1984. **Differential Equations Third Edition, John Wiley & Sons**. New York**.**

[8] Kaplan, W. **Advanced Calculus Fifth Edition.** Publishing House of Electronics Industry.

[9] Rahayu, Sugiatno, dan Prihandono, B, 2012. “Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Tak Linier Dengan Metode Transformasi Diferensial”. **Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)** Vol. 01 pp: 9-14.

[10] Kircak, O. 2011. **Functional Equations,** <URL: https://ozgurmath.files.wordpress.com/2011/12/functional-equations-book.pdf>.

[11] Yunus, M**.** 2005. **Pengantar Analisis Fungsional.** Surabaya: ITS press.

[12] Bartle, R.G., Sherbert, D.R. 2000. **Introduction to Real Analysis, 3rd ed.,** John Wiley and Sons, New York.

[13] J. Bebernes, D. Eberly. 1989. **Mathematical Problems from Combustion Theory, vol. 83 of Applied Math.** Sci.**,** Springer Verlag**,** New York**.**

[14] Gidas, B., Ni, W., dan Nirenberg, L. 1979**. ”Symmetry and related problems via the maximum principle”.**Comm. Math. Phys. Vol.68 pp: 209-243.

[15] Ascher, U.M., Matheij, R., dan Russell, RD. 1995. **Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations.** Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, PA.

LAMPIRAN

Listing program untuk mendapatkan konvergensi dan grafik perbandingan antara solusi numerik dari metode transformasi diferensial dengan solusi eksak.

- Listing program untuk syarat $u(0) = 0$ dan $u'(0) = 0$ dengan $\lambda = 2, \lambda = -2, \lambda = -1$, dan $\lambda = 1$
  M-file dengan judul **simulasi1.m**

```
clc; clear all; close all;

disp('
=================================================
================== ');
disp(' ');
disp('      Metode Transformasi Diferensial
Dibandingkan Dengan Analitik');
disp(' ');
disp('   Nama Mahasiswa    = Afifah Dwi
Kurniawati Hasibuan');
disp('   NRP               = 1211100045');
disp('   Dosen Pembimbing  = Dra.Suprapti
H.,M.si');
disp(' ');
disp('
=================================================
================== ');
disp(' ');
Jawab = input('Apakah anda ingin lanjut program
(Y/N)? ','s');

while Jawab=='Y'
    clc; clear all; close all;

    disp('
=================================================
=== ');
    disp(' ');
```

```
    disp('       Metode Transformasi Diferensial 
Dibandingkan Dengan Analitik');
    disp(' ');
    disp('   Nama Mahasiswa    = Afifah Dwi 
Kurniawati Hasibuan');
    disp('   NRP               = 1211100045');
    disp('   Dosen Pembimbing = Dra.Suprapti 
H.,M.si');
    disp(' ');
    disp('
================================================
=== ');
    p = input('Masukkan nilai lambda = ');
    N = input('Masukkan banyak N(orde tertinggi) 
= ');
    n = input('Masukkan banyak n(partisi) = ');


syms lambda x;

y(1) = 0;
Y(2) = 0;

for k=1:N-1
    if k==1
        U = 0;
        for a=0:k-1
            U = U+lambda^a*Y(a+1);
        end
        D = exp(Y(1));
    else
        U = 0;
        for a=0:k-1
            U = U+lambda^a*Y(a+1);
        end
        Diff_N = Turunan_N(U,k);
        D = (1/factorial(k-
1))*subs(Diff_N,{lambda},{0});
    end
    Y(k+2) = (-p/(k*(k+1)))*D;
end
```

```
Y

y = 0;
for k=0:N
    y = y + x^k*Y(k+1);
end
pretty(y)

x_new =linspace(0,1,n);
for i=1:length(x_new)
    y_new(i) = subs(y,{x},{x_new(i)});
end
y_new=double(y_new);

figure(1);
    if p>0
        y = -p.*log(cosh(x_new));
    else
        y = p.*log(cos(x_new));
    end
plot(x_new,y_new,'r*',x_new,y);
title('Perbandingan Metode Transformasi
Diferensial Baru dengan Solusi
Eksak','fontweight','b');
xlabel('x')
ylabel('u(x)');
legend('Metode Transformasi Diferensial
Baru','Eksak');

error=y-y_new
RMSE = sqrt(mean((y - y_new).^2))
%Konvergensi
for i=1:length(Y)
    for j=1:length(x_new)
        yk(i,j)=Y(i)*(x_new(j)^(i-1));
    end
end
for i=1:size(yk,1)-2
norm_yk(i) = norm(yk(i,:));
    if norm_yk(i) == 0
        alpha(i) = 0;
```

```
    else alpha(i) = sqrt(
norm(yk(i+2,:))/norm_yk(i));
    end
end
norm_yk, alpha

figure(2)
k = 0:N-2;
plot(k,alpha,'*');
set(gca,'XTick',0:2:20)
set(gca,'XTickLabel',{'0','2','4','6','8','10','
12','14','16','18','20'})
xlabel('k')
ylabel('\alpha_k')
axis([0 20 0 1])
title('Nilai \alpha_k untuk u(x)')
Jawab = input('Apakah anda ingin lanjut program
(Y/N)? ','s');
end
disp(' ');
disp('>>>>>>>>>>>>>>>>TERIMA
KASIH<<<<<<<<<<<<<<<<<<');
```

- Listing program untuk syarat $u(0) = 0$ dan $u'(0) = \pi$ dengan $\lambda = -\pi$, dan $\lambda = \pi$
  M-file dengan judul **simulasi2.m**

```
clc; clear all; close all;

disp('
================================================
================== ');
disp(' ');
disp('        Metode Transformasi Diferensial
Dibandingkan Dengan Analitik');
disp(' ');
disp('    Nama Mahasiswa    = Afifah Dwi
Kurniawati Hasibuan');
disp('    NRP               = 1211100045');
disp('    Dosen Pembimbing = Dra.Suprapti
H.,M.si');
```

```
disp(' ');
disp('
=================================================================================== ');
disp(' ');
Jawab = input('Apakah anda ingin lanjut program
(Y/N)? ','s');

while Jawab=='Y'
    clc; clear all; close all;

    disp('
============================================================
=== ');
    disp(' ');
    disp('       Metode Transformasi Diferensial
Dibandingkan Dengan Analitik');
    disp(' ');
    disp('   Nama Mahasiswa    = Afifah Dwi
Kurniawati Hasibuan');
    disp('   NRP               = 1211100045');
    disp('   Dosen Pembimbing = Dra.Suprapti
H.,M.si');
    disp(' ');
    disp('
============================================================
=== ');
    p = input('Masukkan nilai lambda = ');
    N = input('Masukkan banyak N(orde tertinggi)
= ');
    n = input('Masukkan banyak n(partisi) = ');


syms lambda x;

y(1) = 0;
Y(2) = 3.14;

for k=1:N-1
    if k==1
```

```
        U = 0;
        for a=0:k-1
            U = U+lambda^a*Y(a+1);
        end
        D = exp(Y(1));
    else
        U = 0;
        for a=0:k-1
            U = U+lambda^a*Y(a+1);
        end
        Diff_N = Turunan_N(U,k);
        D = (1/factorial(k-
1))*subs(Diff_N,{lambda},{0});
    end
    Y(k+2) = (-p/(k*(k+1)))*D;
end
Y

y = 0;
for k=0:N
    y = y + x^k*Y(k+1);
end
pretty(y)

x_new =linspace(0,1,n);
for i=1:length(x_new)
    y_new(i) = subs(y,{x},{x_new(i)});
end
y_new=double(y_new);

figure(1);
    y_eksak = -log(1-sin(3.14*x_new));
plot(x_new,y_new,'r*',x_new,y);
title('Perbandingan Metode Transformasi
Diferensial Baru dengan Solusi
Eksak','fontweight','b');
xlabel('x')
ylabel('u(x)');
legend('Metode Transformasi Diferensial
Baru','Eksak');
```

```
error=y-y_new
RMSE = sqrt(mean((y - y_new).^2))
%Konvergensi
for i=1:length(Y)
    for j=1:length(x_new)
        yk(i,j)=Y(i)*(x_new(j)^(i-1));
    end
end
for i=1:size(yk,1)-2
norm_yk(i) = norm(yk(i,:));
    if norm_yk(i) == 0
        alpha(i) = 0;
    else alpha(i) = sqrt(
norm(yk(i+2,:))/norm_yk(i));
    end
end
norm_yk, alpha

figure(2)
k = 0:N-2;
plot(k,alpha,'*');
set(gca,'XTick',0:2:20)
set(gca,'XTickLabel',{'0','2','4','6','8','10','
12','14','16','18','20'})
xlabel('k')
ylabel('\alpha_k')
axis([0 20 0 1])
title('Nilai \alpha_k untuk u(x)')
Jawab = input('Apakah anda ingin lanjut program
(Y/N)? ','s');
end
disp(' ');
disp('>>>>>>>>>>>>>>>TERIMA
KASIH<<<<<<<<<<<<<<<<<<');
```

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BIODATA PENULIS

Penulis dilahirkan di Surabaya 10 Juni 1993. Pendidikan formal yang pernah ditempuh yaitu TK Al-Hikmah Surabaya, SDN Mojo VI Surabaya, SMPN 37 Surabaya, dan SMAN 1 Surabaya. Setelah lulus dari SMA, penulis mengikuti SNMPTN undangan 2011 dan diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika ITS. Penulis aktif dalam kepengurusan Lembaga Dakwah Jurusan Ibnu Muqlah di Departemen Keputrian (2012-2014) dan Lembaga Dakwah Kampus Jamaah Masjid Manarul Ilmi di Departemen Annisa (2012-2013). Selain itu, penulis juga aktif dalam kepengurusan HIMATIKA di Departemen Kesejahteraan Mahasiswa (2012-2013).
Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke hasibuan.afifah@gmail.com.