TUGAS AKHIR - SM 141501

KAJIAN ESTIMASI BAYES PADA PARAMETER SKALA θ DARI DISTRIBUSI INVERS WEIBULL

ZAIN RIZQIYYAH
NRP 1211 100 052

Dosen Pembimbing
Dra. Farida Agustini Widjajati, MS
Drs. Iis Herisman, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015

FINAL PROJECT - SM 141501

A STUDY OF BAYES ESTIMATION FOR SCALE PARAMETER θ OF INVERSE WEIBULL DISTRIBUTION

ZAIN RIZQIYYAH
NRP 1211 100 052

Supervisor
Dra. Farida Agustini Widjajati, MS
Drs. Iis Herisman, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

KAJIAN ESTIMASI BAYES PADA PARAMETER SKALA θ
DARI DISTRIBUSI INVERS WEIBULL

A STUDY OF BAYES ESTIMATION FOR SCALE PARAMETER θ
OF INVERSE WEIBULL DISTRIBUTION

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Bidang Studi Riset Operasi dan Pengolahan Data
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
ZAIN RIZQIYYAH
NRP. 1211 100 052

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Iis Herisman, M.Si	Dra. Farida Agustini W., MS
NIP. 19601002 198903 1 002	NIP. 19540817 198103 2 003

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015

A STUDY OF BAYES ESTIMATION FOR SCALE PARAMETER $\boldsymbol{\theta}$ OF INVERSE WEIBULL DISTRIBUTION

Name	: Zain Rizqiyyah
NRP	: 1211100052
Department	: Mathematics FMIPA ITS
Supervisors	: Dra. Farida Agustini W, MS
	Drs. Iis Herisman, M.Si

Abstract

In this final project studied the Bayes estimation methods on the scale parameter θ of inverse Weibull distribution. Inverse Weibull distribution is usually used to analyze the reliability and durability of an object. Scale parameter θ of inverse Weibull distribution is a numerical parameter that indicates the magnitude distribution of the data, which is often the value of the parameter is unknown. Thus, to estimate the value of the scale parameter required a parameter estimation method which is part of statistical inference. Bayes estimation is a method of estimation that combines distribution prior distribution and sample distribution. In this case used three of prior distributions that is quasi prior, gamma prior and uniform prior, while the distribution of the sample is the likelihood function of the inverse Weibull distribution. Then calculate the expected value of each posterior distribution, obtained estimator Bayes equation for the scale parameter θ. Given the case for Bayes estimator with Monte Carlo simulation and calculated the Mean Square Error. From the case obtained the good Bayes estimator that Bayes estimator on the scale parameter θ to the posterior distribution with gamma prior where the Mean Square Error smallest is 0.141871933186387.

***Keywords**: Inverse Weibull Distribution, Bayes Estimation, Mean Square Error, Monte Carlo Simulation,*

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

KAJIAN ESTIMASI BAYES PADA PARAMETER SKALA θ DARI DISTRIBUSI INVERS WEIBULL

Nama Mahasiswa	: Zain Rizqiyyah
NRP	: 1211100052
Jurusan	: Matematika FMIPA ITS
Pembimbing	: Dra. Farida Agustini W, MS
	Drs. Iis Herisman, M.Si

Abstrak

Pada Tugas Akhir ini dikaji mengenai metode estimasi Bayes pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull. Distribusi invers Weibull merupakan distribusi yang digunakan dalam menganalisa reliabilitas dan ketahanan suatu benda. Parameter skala θ dari distribusi invers Weibull merupakan parameter numerik yang menunjukkan besarnya sebaran data dari suatu distribusi, yang seringkali nilai dari parameternya tidak diketahui. Dengan demikian untuk memperkirakan atau menduga nilai dari parameter skala tersebut diperlukan suatu metode estimasi parameter yang merupakan bagian dari inferensi statistik. Metode estimasi Bayes merupakan metode estimasi yang menggabungkan distribusi prior dengan distribusi sampel. Dalam hal ini digunakan tiga distribusi prior yaitu prior quasi, prior gamma dan prior uniform, sedangkan distribusi sampelnya merupakan fungsi likelihood dari distribusi invers Weibull. Kemudian menghitung nilai ekspektasi dari setiap distribusi posterior, didapat persamaan untuk estimator Bayes pada parameter skala θ. Diberikan contoh kasus untuk estimator Bayes dengan simulasi Monte Carlo dan dihitung *Mean Square Error* (MSE). Didapat estimator Bayes yang baik yaitu estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior gamma dimana *Mean Square Error* terkecilnya adalah 0.141871933186387.

Kata Kunci: Distribusi Invers Weibull, Estimasi Bayes, *Mean Square Error*, Simulasi Monte Carlo,

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Segala Puji bagi Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan ridhoNya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul : **"Kajian Estimasi Bayes pada Parameter Skala $\boldsymbol{\theta}$ dari Distribusi Invers Weibull"** yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaiakan Program Studi S-1 pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan berkat kerja sama, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih dan memberikan penghargaan kepada:

1. Dra. Farida Agustini Widjajati, MS dan Drs. Iis Herisman, M.Si selaku Dosen Pembimbing.
2. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika.
3. Drs. Suhud Wahyudi, M.Si selaku Dosen Wali.
4. Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes, Endah Rochmawati M.P., Ph.D, dan Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si selaku Dosen Penguji Ujian Tugas Akhir.
5. Drs. Chairul Imron, MI.Komp. selaku Kaprodi S1 Jurusan Matematika ITS.
6. Achmet Usman Ali, S.Kom selaku Staf Jurusan Matematika ITS.
7. Seluruh jajaran dosen dan staf jurusan Matematika ITS.
8. Seluruh teman-teman mahasiswa jurusan matematika ITS.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

Special thanks to

Assalamualaikum..

Selama proses pengerjaan Tugas Akhir ini tentunya banyak pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan untuk penulis, baik moril ataupun materi. Penulis mengucapkan terima kasih sedalam-dalamnya kepada :

1. Ayah Agus Muballighin, Ibu Suprapti Handayani, Mbah Susiana, Mbah Sadeli, Bapak Subiyanto dan Ibu Siti Thoyyibah tercinta yang tanpa henti memberikan semangat, doa dan nasihat yang sangat berarti bagi penulis.
2. Putri Miftachul Chusnaini dan Laili Salma Ramadhani sebagai saudara penulis yang menginspirasi.
3. Jeffri Suprayogi tersayang yang tidak pernah lelah memberikan semangat, doa, nasihat dan senantiasa mendengarkan keluh kesah penulis dengan teramat sabar.
4. Keluarga baru penulis, Cahyaningrum Rahmasari, Hanifah Rahmani, Alief Nur A., Rizky Budiati Wahyuningtyas, Anindita Rucitra, Anisa Fadhillah, Sandra Nur Fitri, Fadel Muhammad, Dyas Nur Rahmawati, Machmuda Nuril Zuchria, Marselly Dian Saputri, Lailatul Qamariah A., dan Siti Fatimah yang menemani perjalanan penulis, semoga kelak kita berkumpul pada masa yang sangat indah.
5. Teman-teman Matematika angkatan 2011, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.
6. Kabinet 2012 dan Kabinet 2013, Mas Badari, Mas Khoir, Mbak Tika, mbak Aulia, Mbak Dika, Mbak Indira, Mbak Listyani, Mbak Iin, Mbak Yuni, Mas Romi, Mas Romdhoni, Isman, Yahya, Faing, Dina, Aza, Liyana, Farid, Heri, Aulia, dan Lena.
7. Teman sekaligus rekan kerja HIMATIKA ITS yang banyak memberikan ilmu dan pengalaman bagi penulis.
8. Bapak Soehardjoepri, Mas Fariz dan Mas Toni yang membantu dalam proses pengerjaan Tugas Akhir ini.

Dan pihak lainnya yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang sangat membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir. Semoga Allah SWT membalas kebaikan kalian dengan balasan yang lebih baik.

Akhir kata penulis mohon maaf sebesar-besarnya apabila ada kesalahan yang diperbuat, baik sengaja maupun tidak. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi pembaca khususnya, dan rekan-rekan mahasiswa lainnya.

Wassalam..

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Hal

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR GAMBAR

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR SIMBOL

Simbol		Keterangan
$L(\theta)$	:	Fungsi *likelihood*
$\pi_1(\theta)$	:	Prior quasi
$\pi_2(\theta)$	:	Prior gamma
$\pi_3(\theta)$	:	Prior uniform
$f_1(\theta \mid x)$	:	Distribusi posterior dengan prior quasi
$f_2(\theta \mid x)$	:	Distribusi posterior dengan prior gamma
$f_3(\theta \mid x)$	:	Distribusi posterior dengan prior uniform
$\hat{\theta}_1$	:	Estimator bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior quasi
$\hat{\theta}_2$	:	Estimator bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior gamma
$\hat{\theta}_3$	:	Estimator bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior uniform

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir. Kemudian permasalahan tersebut disusun dalam suatu rumusan masalah dan dijelaskan juga mengenai batasan masalah untuk memperoleh tujuan yang diinginkan dan manfaat. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir dari bab ini.

1.1 Latar Belakang Masalah

Inferensi statistik merupakan semua metode yang digunakan dalam penarikan kesimpulan atau generalisasi mengenai suatu populasi. Inferensi statistik dikelompokkan dalam dua bidang yaitu estimasi parameter dan uji hipotesis. Estimasi prameter merupakan suatu cara untuk memprediksi karakteristik suatu populasi berdasarkan sampel yang diambil. Secara umum estimasi parameter dikelompokkan menjadi dua yaitu estimasi parameter titik dan estimasi parameter interval. Untuk mendapatkan suatu inferensi statistik yang baik akan lebih tepat jika data yang digunakan adalah data gabungan antara data saat ini dengan data penelitian sebelumnya. Penggabungan data yang dilakukan bertujuan untuk meminimalkan tingkat kesalahan sehingga inferensi yang dilakukan mendekati sempurna. Metode estimasi Bayes merupakan metode estimasi parameter yang menggabungkan distribusi prior dan distribusi sampel. Distribusi prior sendiri merupakan distribusi yang memberikan informasi tambahan mengenai parameter yang diberikan, dimana parameter ini bervariasi mengikuti suatu distribusi tertentu. Distribusi sampel yang digabung dengan distribusi prior akan menghasilkan distribusi baru yaitu distribusi posterior. Distribusi posterior adalah distribusi yang menyatakan derajat keyakinan seseorang mengenai suatu parameter yang kemudian digunakan untuk menentukan inferensi dari suatu parameter [1].

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi yang digunakan untuk menganalisis data dalam hal reliabilitas atau ketahanan hidup yang mempunyai kelebihan yaitu mampu menyajikan keakuratan dari kegagalan dengan sampel yang berukuran sangat kecil. Distribusi Weibull pertama kali diperkenalkan oleh seorang fisikawan Swedia yang bernama Waloddi Weibull pada tahun 1936. Aspek penting dari distribusi Weibull adalah nilai dari parameter skala yang dapat mempengaruhi karakteristik dari distribusi Weibull sendiri, seperti bentuk kurva pdf, reliabilitas, dan tingkat kegagalan. Parameter skala θ merupakan parameter yang menunjukkan umur karakteristik dari suatu benda, seperti alat tertentu ataupun komponennya, dan juga menggambarkan sebaran data yang memberikan efek pada distribusi Weibull seperti perubahan skala absis [2].

Distribusi invers Weibull digunakan untuk memodelkan berbagai karakteristik kegagalan seperti angka kematian bayi, menentukan masa hidup benda, periode reliabilitas suatu materi, dan dapat digunakan untuk menentukan efektivitas serta lama waktu pemeliharaan dari reliabilitas benda tersebut [3]. Distribusi invers Weibull juga memiliki peran penting dalam banyak aplikasi praktis termasuk komponen dinamis mesin diesel dan kumpulan beberapa data seperti perlakuan dan pemecahan cairan isolasi dari kegagalan konstan. Distribusi invers Weibull yang digunakan dalam berbagai aplikasi praktis terkadang nilai parameternya tidak diketahui, oleh karena itu untuk memperkirakan nilai parameternya dapat melakukan pendekatan umum seperti menggunakan metode estimasi Bayes [4]. Sehingga untuk memperkirakan parameter skala θ dari distribusi invers Weibull dapat digunakan metode estimasi Bayes sehingga didapat estimator Bayes sebagai penduga dari parameter skala θ.

Pada tahun 2013, Farhad Yaghmei, Manoochehr Babanezhad, dan Omid S. Moghadam melakukan penelitian pada papernya yang berjudul "*Bayesian Estimation of the Scale Parameter of Invers Weibull Distribution under the Asymmetric*

Loss Function". Dalam papernya tersebut menjelaskan tentang metode yang berbeda dari estimasi parameter skala distribusi invers Weibull dengan memperoleh *Maximum Likelihood Estimator* (MLE) pada parameter skala dari distribusi invers Weibull. Diperoleh pula estimator Bayes dengan tiga distribusi prior yaitu prior quasi, prior gamma dan prior uniform dan juga tiga *loss functions* yang berbeda pada parameter skala distribusi invers Weibull. Kemudian dibandingkan dengan studi simulasi dengan menghitung *Mean Square Error* dan diperoleh estimator yang baik pada parameter skala distribusi invers Weibull. Oleh karena itu berdasarkan paper tersebut, penulis mengambil judul untuk Tugas Akhir ini adalah *Kajian Estimasi Bayes pada Parameter Skala* θ *dari Distribusi Invers Weibull*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan dalam Tugas Akhir ini, disusunlah rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimanakah proses untuk mendapatkan *probability density function* (pdf) distribusi invers Weibull.
2. Bagaimanakah mendapatkan estimator Bayes pada parameter skala θ.
3. Bagaimanakah menentukan estimator Bayes yang baik dengan *Mean Square Error* minimum berdasarkan hasil simulasi.

1.3 Batasan Masalah

Pada Tugas Akhir ini dibuat batasan masalah yaitu:

1. Distribusi sampel yang digunakan adalah distribusi invers Weibull dengan parameter yang diestimasi adalah parameter skala θ.
2. Metode estimasi parameter yang digunakan adalah metode estimasi Bayes.
3. Tiga distribusi prior yang digunakan adalah prior quasi, prior gamma, dan prior uniform.

4. Menggunakan *Mean Square Error* berdasarkan hasil simulasi *Monte Carlo* untuk menentukan estimator Bayes yang baik pada parameter skala θ.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Kajian untuk mendapatkan pdf distribusi invers Weibull dua parameter.
2. Mendapatkan estimator Bayes pada parameter skala θ distribusi invers Weibull.
3. Membuat simulasi untuk menentukan estimator Bayes yang baik pada parameter skala θ dengan *Mean Square Error* minimum.

1.5 Manfaat

Manfaat dari Tugas Akhir ini diantaranya:

1. Sebagai pengetahuan tambahan bagi pembaca dan penulis mengenai estimasi pada parameter skala θ dari ditribusi invers Weibull menggunakan estimasi Bayes.
2. Memperoleh estimator Bayes yang baik untuk parameter skala θ dari distribusi invers Weibull berdasarkan studi simulasi.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab I ini diberikan gambaran umum tentang penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUTAKA

Pada bab II ini diuraikan mengenai materi-materi yang digunakan dan juga materi-materi yang mendukung pengerjaan Tugas Akhir, diantaranya adalah distribusi Weibull, fungsi *likelihood*, metode estimasi Bayes, distribusi prior antara lain prior quasi, prior gamma dan prior uniform, distribusi posterior, simulasi *Monte Carlo*, dan *Mean Square Error*.

BAB III METODE PENELITIHAN

Bab III berisi tentang penjelasan dari tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, perumusan distribusi invers Weibull dengan metode transformasi satu-satu, penentuan fungsi *likelihood* dari distribusi invers Weibull, penentuan distribusi posterior dengan tiga distribusi prior yang berbeda yaitu prior quasi, prior gamma dan prior uniform. Kemudian penentuan estimator Bayes dengan menghitung ekspektasi dari distribusi posterior dan diberikan contoh kasus dengan simulasi *Monte Carlo* dan dihitung *Mean Square Error* dari setiap estimator Bayes dan dipilih *Mean Square Error* yang minimum untuk memperoleh estimator Bayes yang baik. Tahap terakhir pembahasan dan penarikan kesimpulan dari pengujian dan contoh kasus.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab IV dijelaskan dan dibahas secara detail mengenai rumusan distribusi invers Weibull dua parameter, yang kemudian ditentukan fungsi *likelihood* dari distribusi invers Weibull. Selanjutnya dilakukan estimasi parameter pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull menggunakan metode estimasi Bayes dengan mempertimbangkan tiga distribusi prior yaitu prior quasi, prior gamma, dan prior uniform yang selanjutnya digabungkan dengan fungsi *likelihood* digunakan untuk menentukan distribusi posterior. Setelah itu diberikan contoh kasus yang disimulasikan menggunakan simulasi *Monte Carlo* dan dihitung *Mean Square Error* dari setiap estimator Bayes sehingga diperoleh estimator Bayes yang baik dan juga penjelasan mengenai hasil pengujian dan analisa yang diperoleh dari contoh kasus.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Bab V berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian yang akan dilakukan selanjutnya.

LAMPIRAN

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai distribusi Weibull, estimasi Bayes, distribusi prior, fungsi *likelihood*, distribusi posterior, simulasi *Monte Carlo*, dan *Mean Square Error*.

2.1 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull merupakan distribusi kontinu yang sering digunakan dalam uji ketahanan hidup suatu objek, seperti menyelesaikan masalah-masalah yang menyangkut umur suatu objek sampai objek tersebut tidak berfungsi lagi sebagaimana mestinya (rusak atau mati) [4]. Selama bertahun-tahun distribusi Weibull menjadi salah satu model data statistik yang memiliki jangkauan luas dari aplikasi uji hidup dan teori reliabilitas dengan kelebihan utamanya adalah menyajikan keakuratan kegagalan dengan sampel yang berukuran kecil [5].

Pada tahun 1939, Waloddi Weibull memperkenalkan distribusi Weibull dengan dua parameter, yaitu parameter skala dan parameter bentuk [5]. Diasumsikan bahwa ketahanan hidup suatu benda yang diuji memiliki distribusi Weibull dengan pdf sebagai berikut [4]:

$$f_Y(y;\theta,\beta)=\begin{cases}\theta\beta y^{\beta-1}e^{-\theta y^{\beta}} & ,y>0 \quad \theta,\beta>0\\ 0 & ,y \text{ yang lain}\end{cases} \tag{2.1}$$

dengan

θ : parameter skala

β : parameter bentuk

Parameter skala θ merupakan jenis khusus dari parameter numerik yang menunjukkan besarnya data, jika semakin besar nilai parameter skala θ maka distribusi data akan semakin menyebar dan begitu pula sebaliknya. Parameter skala θ juga menggambarkan sebaran data yang memberikan efek pada distribusi Weibull seperti perubahan skala absis. Parameter skala

θ juga menggambarkan umur karakteristik dari suatu benda seperti alat tertentu atau komponennya. Semakin besar nilai dari parameter skala θ dengan nilai parameter β yang konstan membuat kurva pdf distribusi Weibull membentang ke kanan dan tinggi kurva menurun dengan tetap mempertahankan bentuk kurva. Sedangkan semakin kecil nilai dari parameter θ dengan nilai parameter β yang konstan membuat kurva pdf distribusi Weibull membentang ke kiri dan tinggi kurva meningkat dengan mempertahankan bentuk kurva tersebut. Parameter skala θ pada distribusi Weibull merupakan aspek penting karena nilai dari parameter ini dapat mempengaruhi karakteristik distribusi Weibull seperti bentuk kurva dari pdf distribusi Weibull, reliabilitas, dan tingkat kegagalan distribusi Weibull [2].

Distribusi Weibull yang digunakan dalam berbagai aplikasi praktis terkadang nilai parameternya tidak diketahui, oleh karena itu untuk memperkirakan atau menduganya dapat dilakukan pendekatan umum. Untuk memperkirakan nilai dari suatu parameter dengan pendekatan umum dapat digunakan suatu metode estimasi.

2.2 Fungsi *Likelihood*

Fungsi *likelihood* merupakan pdf bersama dari r variabel acak $X_1, \dots, X_r$ yang dinotasikan dengan $f(x_1, \dots, x_r; \theta)$. Jika sampel acak $x_1, \dots, x_r$ tetap, maka fungsi *likelihood* adalah fungsi dari parameter θ yang dinotasikan $L(\theta)$. Jika $X_1, \dots, X_r$ merupakan variabel acak dari $f(x;\theta)$ maka fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$L(\theta) = f(x_1;\theta) \dots f(x_r;\theta) = \prod_{i=1}^{r} f(x_r;\theta) \tag{2.2}$$

2.3 Estimasi Bayes

Untuk mendapatkan inferensi yang lebih baik, akan lebih tepat jika data yang digunakan merupakan data gabungan antara data sampel saat ini dengan data penelitian sebelumnya. Penggabungan data bertujuan untuk meminimalkan tingkat kesalahan sehingga inferensi yang dihasilkan mendekati sempurna. Metode estimasi Bayes merupakan metode estimasi dari suatu inferensi statistika yang berbasis pada aturan Bayes yang menggabungkan informasi dan data observasi baru dengan informasi yang telah diperoleh sebelumnya. Metode estimasi Bayes menggabungkan distribusi prior yang memberikan informasi mengenai parameter dengan distribusi sampel sehingga diperoleh distribusi posterior yang digunakan dalam menentukan inferensi mengenai suatu parameter [1].

Estimator Bayes untuk parameter skala θ dapat diperoleh dengan menghitung nilai ekspektasi (harapan) dari distribusi posterior yang didefinisikan sebagai berikut [7]:

$$\hat{\theta} = E(\theta|x) \tag{2.3}$$

Dengan menggunakan metode estimasi Bayes untuk mengestimasi parameter skala θ pada distribusi invers Weibull dengan parameter bentuk $\beta > 0$ yang diasumsikan telah diketahui dipertimbangkan tiga distribusi prior yang berbeda diantaranya prior quasi, prior gamma dan prior uniform.

2.3.1 Distribusi Prior

Pada metode estimasi Bayes, parameter yang digunakan merupakan variabel acak yang mempunyai distribusi prior. Distribusi prior adalah distribusi awal yang memberikan informasi mengenai suatu parameter dari distribusi sampel yang merupakan distribusi subyektif berdasarkan keyakinan seseorang yang dirumuskan sebelum data sampel diambil dan sebelum merumuskan distribusi posterior [1]. Distribusi prior dapat dinotasikan dengan $\pi(\theta)$ dimana θ adalah parameter yang diestimasi dari distribusi sampel. Dalam tugas akhir ini dipertimbangkan tiga distribusi prior yaitu [4]:

1. Prior Quasi

Ketika tidak ada informasi mengenai parameter dari suatu distribusi, salah satu prior yang dapat digunakan adalah prior quasi, yaitu [4]:

$$\pi_1(\theta) = \frac{1}{\theta^m} \; ; \; \theta > 0, m > 0 \tag{2.4}$$

dengan

θ : parameter skala dari distribusi invers Wibull

m : parameter dari prior quasi

2. Prior Gamma

Prior gamma adalah salah satu prior yang sering digunakan oleh para peneliti. Prior gamma juga merupakan bagian dari prior konjugat. Diasumsikan bahwa parameter skala θ berdistribusi prior gamma dengan parameter bentuk c dan parameter skala d, dengan pdf berikut [4]:

$$\pi_2(\theta) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \theta^{c-1} e^{-d\theta} \; ; \; \theta > 0, c, d > 0 \tag{2.5}$$

dengan

θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull

d : parameter skala dari prior gamma

c : parameter bentuk dari prior gamma

3. Prior Uniform

Diasumsikan bahwa parameter skala θ memiliki distribusi uniform pada rentang terbatas $[0, k]$, sehingga prior uniform didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$\pi_3(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{k} & , 0 < \theta < k \\ 0 & , \text{untuk yang lain} \end{cases} \tag{2.6}$$

2.3.2 Distribusi Posterior

Distribusi posterior dirumuskan setelah menentukan distribusi priornya. Distribusi prior yang digabungkan dengan distribusi sampel akan menghasilkan distribusi posterior yang kemudian digunakan untuk mengestimasi parameter. Distribusi posterior adalah pdf bersyarat θ pada sampel acak x yang didefinisikan sebagai berikut [8]:

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta, x)}{f(x)} \tag{2.7}$$

Jika parameter θ kontinu maka distribusi prior dan distribusi posterior dapat dituliskan dalam bentuk pdf. Pada umumnya pdf bersama $f(\theta, x)$ dan pdf marginal $f(x)$ tidak diketahui, hanya dinyatakan dalam bentuk distribusi prior dan fungsi *likelihood* yang biasanya diketahui. Pdf bersama dan pdf marginal dapat didefinisikan dalam bentuk fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\theta)$ dan dalam bentuk distribusi prior yang dinotasikan dengan $\pi(\theta)$, sehingga pdf bersama didefinisikan sebagai berikut [8]:

$$f(\theta, x) = \pi(\theta)L(\theta) \tag{2.8}$$

Pdf marginal didefinisikan sebagai berikut [7]:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta, x)\, d\theta \tag{2.9}$$

dengan mensubtitusikan Persamaan (2.8) pada Persamaan (2.9) diperoleh sebagai berikut:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta)L(\theta)\, d\theta \tag{2.10}$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (2.8) dan Persamaan (2.10) pada Persamaan (2.7) diperoleh pdf dari distribusi posterior untuk parameter θ yang bersyarat variabel acak kontinu X sebagai berikut [8]:

$$f(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)L(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta)L(\theta)\, d\theta} \tag{2.11}$$

dengan

$L(\theta)$: fungsi *likelihood*

$\pi(\theta)$: distribusi prior

2.4 Simulasi *Monte Carlo*

Simulasi adalah suatu prosedur kuantitatif yang menggambarkan sebuah sistem dengan mengembangkan model dari sistem tersebut dan melakukan sederetan uji coba untuk memperkirakan perilaku sistem pada jangka waktu tertentu. Simulasi juga dikatakan sebagai model dari sistem yang komponen-komponennya direpresentasikan melalui proses-proses aritmatika dan logika yang terdapat pada komputer [9].

Simulasi *Monte Carlo* merupakan tipe simulasi probabilistik untuk mencari penyelesaian masalah dengan percobaan dari proses acak [10]. Penggunaan nama *Monte Carlo* dipopulerkan oleh Stanislaw Ulam, Enrico Fermi, John Von Neumann dan Nicholas Metropolis. Simulasi *Monte Carlo* digunakan oleh Enrico Fermi pada tahun 1930, ketika ia menggunakan metode acak untuk menghitung sifat-sifat neutron yang waktu itu telah ditemukan. Simulasi *Monte Carlo* dikenal juga dengan istilah *Sampling Simulation* atau *Monte Carlo Sampling Tecnique*. Sampling simulation ini menggambarkan kemungkinan penggunaan data sampel dalam metode penggunaan *Monte Carlo* [11]. Metode Monte Carlo mensimulasikan sistem tersebut berulang-ulang kali, ratusan bahkan sampai ribuan kali tergantung sistem yang ditinjau, dengan cara memilih sebuah nilai acak untuk setiap variabel dari distribusi probabilitasnya [10].

Jika suatu sistem mengandung elemen yang mengikutsertakan faktor kemungkinan, model simulasi yang bisa digunakan adalah model simulasi *Monte Carlo*. Dasar dari simulasi *Monte Carlo* adalah percobaan elemen kemungkinan dengan menggunakan sampel acak. Hasil dari suatu percobaan dapat disimulasikan secara sederhana dengan memilih angka acak yang kemudian dibangun menggunakan software *Matlab*.

Simulasi *Monte Carlo* mensimulasikan sistem dengan menghasilkan nilai-nilai estimator Bayes sebanyak perulangan n kali, sehingga setiap estimator didapat pada setiap perulangan $n = 1$, $n = 2$, sampai n yang terakhir yang telah ditentukan dengan ukuran sampel r yang berbeda-beda.

2.5 *Mean Square Error*

Mean Square Error adalah salah satu metode yang digunakan untuk mengevaluasi suatu metode peramalan [12]. *Mean Square Error* juga dapat digunakan untuk menghitung error dari parameter yang telah diestimasi. *Mean Square Error* sebuah estimator adalah nilai harapan dari kuadrat eror. Eror yang ada menunjukkan seberapa besar perbedaan hasil estimasi dengan nilai yang akan diestimasi. Perbedaan itu terjadi karena adanya keacakan pada data atau karena estimator tidak mengandung informasi yang dapat menghasilkan estimator yang lebih akurat.

Mean Square Error adalah nilai error kuadrat rata-rata antara parameter sebelum diestimasi dengan parameter setelah diestimasi. Jika $\hat{\theta}$ adalah estimator pada parameter θ dari sampel acak $x_1, \ldots, x_r$ yang diamati, maka *Mean Square Error* dapat didefinisikan sebagai berikut [13]:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\theta_i - \hat{\theta}_i\right)^2}{n} \tag{2.12}$$

dengan

θ_i : nilai parameter sebelum diestimasi

$\hat{\theta}_i$: nilai parameter setelah diestimasi

n : banyaknya perulangan

Untuk mendapatkan estimator Bayes yang baik dapat memilih *Mean Square Error* terkecil atau minimum dari setiap estimator.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian dalam Tugas Akhir ini diuraikan sebagai berikut:

1. Tahap pertama adalah identifikasi permasalahan dan mempelajari lebih dalam mengenai distribusi invers Weibull, metode estimasi Bayes, prior quasi, prior gamma, prior uniform, fungsi *likelihood*, distribusi posterior, simulasi *Monte Carlo*, dan *Mean Square Error*.
2. Perumusan distribusi invers Weibull dengan menggunakan metode transformasi satu-satu dari distribusi Weibull.
3. Tahap selanjutnya adalah penentuan fungsi *likelihood* dari distribusi invers Weibull.
4. Penentuan distribusi posterior dengan tiga distribusi prior yaitu, prior quasi, prior gamma, dan prior uniform.
5. Penentuan estimator Bayes pada parameter skala θ dengan menghitung ekspektasi dari distribusi posterior dengan tiga distribusi prior.
6. Diberikan contoh kasus untuk estimator Bayes dengan simulasi *Monte Carlo* dan dihitung *Mean Square Error* dari setiap estimator Bayes.
7. Dianalisis hasil *Mean Square Error* dari simulasi *Monte Carlo* dan dipilih *Mean Square Error* yang minimum agar didapat estimator Bayes yang baik pada parameter skala θ.
8. Setelah semua tahapan dilakukan, yang terakhir adalah penarikan kesimpulan dari kajian dan analisa hasil *Mean Square Error* dari contoh kasus.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai penentuan distribusi invers Weibull kemudian penentuan estimator Bayes pada parameter skala dari distribusi invers Weibull. Pembahasan dimulai dari penentuan distribusi invers Weibull dengan cara transformasi satu-satu dari distribusi Weibull. Dilanjutkan dengan perumusan fungsi *likelihood* dari pdf distribusi invers Weibull, kemudian menggabungkan fungsi *likelihood* dengan distribusi prior yang telah dikutip dari [4], sehingga diperoleh distribusi posterior dari setiap distribusi prior dan fungsi *likelihood*. Selanjutnya penentuan estimator Bayes pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull dengan menghitung nilai ekspektasi dari setiap distribusi posterior. Di akhir pembahasan diberikan contoh kasus untuk mendapatkan nilai estimator Bayes pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull dengan simulasi *Monte Carlo*. Dihitung pula *Mean Square Error* dari setiap estimator Bayes dan dilakukan analisa hasil dari *Mean Square Error* agar diperoleh estimator Bayes pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull yang baik.

4.1 Perumusan Distribusi Invers Weibull

4.1.1 Kajian Distribusi Weibull

Diketahui variabel acak kontinu Y yang berdistribusi Weibull dengan dua parameter yang dinotasikan $Y \sim WEI(\theta, \beta)$ mempunyai pdf yang didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$f(y;\theta,\beta) = \begin{cases} \theta\beta y^{\beta-1} e^{-\theta y^{\beta}} & , y > 0 \quad \theta,\beta > 0 \\ 0 & , y \text{ yang lain} \end{cases} \tag{4.1}$$

dengan

θ : parameter skala

β : parameter bentuk

CDF dari suatu variabel acak kontinu Y yang memiliki pdf $f(y)$ didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt \tag{4.2}$$

Pada Persamaan (4.1) telah didefinisikan pdf untuk distribusi Weibull, sehingga sesuai pada Persamaan (4.2) dapat ditentukan CDF distribusi Weibull dengan dua parameter sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{y} f(t)\,dt \\ &= 0 + \int_{0}^{y} f(t)\,dt \\ &= \int_{0}^{y} \theta\beta t^{\beta-1} e^{-\theta t^{\beta}}\,dt \\ &= \theta\beta \int_{0}^{y} t^{\beta-1} e^{-\theta t^{\beta}}\,dt \end{aligned} \tag{4.3}$$

misal: $u = \theta t^{\beta}$

$$t^{\beta} = \frac{u}{\theta} \rightarrow t = \frac{u^{\frac{1}{\beta}}}{\theta^{\frac{1}{\beta}}}$$

selanjutnya didapat:

$$dt = \frac{1}{\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}} u^{\frac{1}{\beta}-1} du$$

dengan batas integral: $t = 0 \rightarrow u = 0$

$t = y \rightarrow u = \theta y^{\beta}$

sehingga Persamaan (4.3) menjadi:

$$F(y) = \theta\beta \int_0^{\theta y^\beta} \left(\frac{u^{\frac{1}{\beta}}}{\theta^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{\beta-1} e^{-u} \frac{1}{\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}} u^{\frac{1}{\beta}-1}\, du$$

$$= \frac{\theta\beta}{\theta^{1-\frac{1}{\beta}}\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}} \int_0^{\theta y^\beta} u^{1-\frac{1}{\beta}}\, u^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-u}\, du$$

$$= \int_0^{\theta y^\beta} e^{-u}\, du$$

$$= -e^{-\theta y^\beta} - (-e^0)$$

$$= 1 - e^{-\theta y^\beta}$$

Sehingga diperoleh CDF distribusi Weibull sebagai berikut:

$$F(y) = 1 - e^{-\theta y^\beta} \tag{4.4}$$

Jika diketahui variabel acak kontinu Y dengan pdf $f(y)$, maka didefinisikan nilai ekspektasi (harapan) dari Y sebagai berikut [6]:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y)\, dy \tag{4.5}$$

Sehingga seperti pada Persamaan (4.5), dapat ditentukan ekspektasi dari distribusi Weibull sebagai berikut:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} y\, f(y)\, dy + \int_0^{+\infty} y\, f(y)\, dy$$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} y\, f(y)\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} y\, \theta\beta y^{\beta-1} e^{-\theta y^\beta}\, dy$$

$$= \theta\beta \int_0^{+\infty} y^{1+\beta-1} e^{-\theta y^\beta}\, dy$$

$$= \theta\beta \int_0^{+\infty} y^{\beta} e^{-\theta y^\beta}\, dy \tag{4.6}$$

misal: $u = \theta y^\beta$

$$y^\beta = \frac{u}{\theta} \rightarrow y = \frac{u^{\frac{1}{\beta}}}{\theta^{\frac{1}{\beta}}}$$

selanjutnya didapat:

$$dy = \frac{1}{\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}} u^{\frac{1}{\beta}-1} du$$

dengan batas integral: $y = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0$

$y = +\infty \rightarrow \quad u = +\infty$

Sehingga Persamaan (4.6) menjadi:

$$E(Y) = \theta\beta \int_0^{+\infty} \left(\frac{u^{\frac{1}{\beta}}}{\theta^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{\beta} e^{-u} \cdot \frac{1}{\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}} u^{\frac{1}{\beta}-1}\, du$$

$$= \frac{\theta\beta}{\theta\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}} \int_0^{+\infty} u\, u^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\beta}}} \int_0^{+\infty} u^{\left(\frac{1}{\beta}+1\right)-1} e^{-u}\, du \tag{4.7}$$

Didefinisikan fungsi gamma sebagai berikut [6]:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du \tag{4.8}$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (4.8) pada Persamaan (4.7) diperoleh:

$$E(Y) = \theta^{-\frac{1}{\beta}}\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

Sehingga diperoleh ekspektasi distribusi Weibull dengan dua parameter yaitu:

$$E(Y) = \theta^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) \qquad (4.9)$$

Variansi dari variabel acak kontinu X didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$Var(Y) = E[(Y-\mu)^2] \qquad (4.10)$$

dengan

μ : mean

Sehingga Persamaan (4.10) diuraikan menjadi:

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E[(Y-\mu)^2] \\ &= E[Y^2 - 2Y\mu + \mu^2] \\ &= E(Y^2) - 2\mu E(Y) + \mu^2 \\ &= E(Y^2) - 2\mu E(Y) + \mu^2 \\ &= E(Y^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(Y^2) - \mu^2 \\ &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \end{aligned}$$

Sehingga variansi untuk peubah acak kontinu X menjadi:

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \qquad (4.11)$$

Untuk memperoleh variansi untuk peubah acak kontinu Y yang berdistribusi Weibull dengan dua parameter seperti pada Persamaan (4.11), harus terlebih dahulu diperoleh $E(Y^2)$ dan $E(Y)$ dari distribusi Weibull. Karena $E(Y)$ dari distribusi Weibull telah diperoleh, sekarang ditentukan $E(Y^2)$ dari distribusi Weibull dengan dua parameter sebagai berikut:

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, f(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} y^2 f(y)\, dy + \int_{0}^{+\infty} y^2 f(y)\, dy$$

$$= 0 + \int_{0}^{+\infty} y^2 f(y)\, dy$$

$$= \int_{0}^{+\infty} y^2 \theta\beta y^{\beta-1} e^{-\theta y^{\beta}}\, dy$$

$$= \theta\beta \int_{0}^{+\infty} y^{\beta+1} e^{-\theta y^{\beta}}\, dy \qquad (4.12)$$

misal: $u = \theta y^{\beta}$

$$y^{\beta} = \frac{u}{\theta} \rightarrow y = \frac{u^{\frac{1}{\beta}}}{\theta^{\frac{1}{\beta}}}$$

selanjutnya didapat:

$$dy = \frac{1}{\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}} u^{\frac{1}{\beta}-1} du$$

dengan batas integral: $y = 0 \rightarrow u = 0$

$y = +\infty \rightarrow u = +\infty$

sehingga Persamaan (4.12) menjadi:

$$E(Y^2) = \theta\beta \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{u^{\frac{1}{\beta}}}{\theta^{\frac{1}{\beta}}} \right)^{\beta+1} e^{-u} \frac{1}{\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}} u^{\frac{1}{\beta}-1}\, du$$

$$= \frac{\theta\beta}{\theta^{1+\frac{1}{\beta}}\, \beta\, \theta^{\frac{1}{\beta}}} \int_{0}^{+\infty} u^{1+\frac{1}{\beta}}\, u^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{\theta^{\frac{2}{\beta}}} \int_{0}^{+\infty} u^{1+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}-1} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{\theta^{\frac{2}{\beta}}} \int_{0}^{+\infty} u^{\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-1} e^{-u}\, du \tag{4.13}$$

Sesuai pada Persamaan (4.8), untuk Persamaan (4.12) menjadi:

$$E(Y^2) = \theta^{-\frac{2}{\beta}}\, \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)$$

Sehingga diperoleh:

$$E(Y^2) = \theta^{-\frac{2}{\beta}}\, \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \tag{4.14}$$

Sehingga variansi dari variabel acak kontinu Y yang berdistribusi Weibull dengan dua parameter dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (4.9) dan Persamaan (4.14) pada Persamaan (4.11) dan diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 \\ &= \left(\theta^{-\frac{2}{\beta}}\, \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\right) - \left(\theta^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right)^2 \\ &= \theta^{-\frac{2}{\beta}}\, \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \theta^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \\ &= \theta^{-\frac{2}{\beta}} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh variansi dari distribusi Weibull yaitu:

$$Var(Y) = \theta^{-\frac{2}{\beta}} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right) \tag{4.15}$$

dengan

θ : parameter skala

β : parameter bentuk

4.1.2 Kajian Distribusi Invers Weibull

Untuk mendapatkan distribusi invers Weibull digunakan metode transformasi satu-satu [6]. Diketahui bahwa variabel acak kontinu Y dengan pdf distribusi Weibull dua parameter adalah

$f_Y(y;\theta,\beta) = \theta\beta y^{\beta-1}e^{-\theta y^{\beta}}$ untuk $y > 0$ dan $\theta,\beta > 0$, dan mengasumsikan $X = w(Y)$ didefinisikan sebagai transformasi satu-satu dengan invers transformasi $y = u(x) = \frac{1}{x}$ [4]. *Jacobian* (J) didefinisikan sebagai $J = u'(x)$, sehingga *Jacobian* (J) diperoleh sebagai berikut:

$$J = u'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Pdf distribusi invers Weibull dengan metode transformasi satu-satu diperoleh sebagai berikut:

$$f(x) = f_Y\big(u(x)\big)\,|J|$$

$$f(x) = \theta\beta\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta-1} e^{-\theta\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}} \left|-\frac{1}{x^{-2}}\right|$$

$$= \theta\beta\,\frac{1}{x^{\beta-1}}\,e^{-\theta\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}}\,\frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{\theta\beta}{x^{\beta+1}}\,e^{-\theta x^{-\beta}}$$

Sehingga didapat pdf distribusi invers Weibull yaitu:

$$f(x;\theta,\beta) = \begin{cases} \frac{\theta\beta}{x^{\beta+1}}\,e^{-\theta x^{-\beta}} & ,x > 0 \;\; \theta,\beta > 0 \\ 0 & ,x\ yang\ lain \end{cases} \qquad (4.16)$$

Dengan memisalkan $x = t$, pdf distribusi invers Weibull menjadi $f(t) = \frac{\theta\beta}{t^{\beta+1}}\,e^{-\theta t^{-\beta}}$ untuk $t > 0$ dan $\theta,\beta > 0$. Sehingga CDF distribusi invers Weibull dengan dua parameter dapat ditentukan sebagai berikut:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{\theta\beta}{t^{\beta+1}} e^{-\theta t^{-\beta}}\, dt$$

$$= \theta\beta \int_0^x t^{-\beta-1} e^{-\theta t^{-\beta}}\, dt \qquad (4.17)$$

misal: $u = \theta t^{-\beta}$

$t^{-\beta} = \frac{u}{\theta} \rightarrow t = \theta^{\frac{1}{\beta}} u^{-\frac{1}{\beta}}$

selanjutnya didapat:

$$dt = -\frac{\theta^{\frac{1}{\beta}}}{\beta} u^{-\frac{1}{\beta}-1} du$$

dengan batas integral: $t = 0 \rightarrow u = 0$

$t = x \rightarrow u = \theta x^{-\beta}$

sehingga Persamaan (4.17) menjadi:

$$F(x) = \theta\beta \int_0^{\theta x^{-\beta}} \frac{u}{\theta} \left(\frac{u}{\theta}\right)^{\frac{1}{\beta}} e^{-u} \left(-\frac{\theta^{\frac{1}{\beta}}}{\beta}\right) u^{-\frac{1}{\beta}-1} du$$

$$= -\frac{\theta\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}}{\theta\theta^{\frac{1}{\beta}}\beta} \int_0^{\theta x^{-\beta}} u^1 u^{\frac{1}{\beta}} u^{-\frac{1}{\beta}-1} e^{-u} du$$

$$= -1 \int_0^{\theta x^{-\beta}} u^{1+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}-1} e^{-u} du$$

$$= -\int_0^{\theta x^{-\beta}} e^{-u}\, du$$

$$= e^{-\theta x^{-\beta}} - e^0$$

$$= e^{-\theta x^{-\beta}} - 1$$

Sehingga diperoleh CDF distribusi invers Weibull yaitu:

$$F(x) = e^{-\theta x^{-\beta}} - 1 \qquad (4.18)$$

Ekspektasi dari variabel acak kontinu X yang berdistribusi invers Weibull dengan dua parameter dapat ditentukan sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} x\, \frac{\theta\beta}{x^{\beta+1}} e^{-\theta x^{-\beta}}\, dx$$

$$= \theta\beta \int_{0}^{+\infty} x^{1-\beta-1} e^{-\theta x^{-\beta}}\, dx$$

$$= \theta\beta \int_{0}^{+\infty} x^{-\beta} e^{-\theta x^{-\beta}}\, dx \tag{4.19}$$

misal: $u = \theta x^{-\beta}$

$$x^{-\beta} = \frac{u}{\theta} \rightarrow x = \theta^{\frac{1}{\beta}} u^{-\frac{1}{\beta}}$$

selanjutnya didapat:

$$dx = -\frac{\theta^{\frac{1}{\beta}}}{\beta} u^{-\frac{1}{\beta}-1} du$$

dengan batas integral: $x = 0 \rightarrow u = 0$

$x = +\infty \rightarrow u = +\infty$

sehingga Persamaan (4.19) menjadi:

$$E(X) = \theta\beta \int_{0}^{+\infty} \frac{u}{\theta} e^{-\theta\left(\frac{u}{\theta}\right)} \left(-\frac{\theta^{\frac{1}{\beta}}}{\beta}\right) u^{-\frac{1}{\beta}-1}\, du$$

$$= -\frac{\theta\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}}{\theta\beta}\int_{0}^{+\infty} u\,u^{-\frac{1}{\beta}-1} e^{-u}\,du$$

$$= -\theta^{\frac{1}{\beta}}\int_{0}^{+\infty} u^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)-1} e^{-u}\,du \tag{4.20}$$

sesuai Persamaan (4.8), untuk Persamaan (4.20) menjadi:

$$E(X) = -\theta^{\frac{1}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$$

Sehingga diperoleh nilai ekspektasi distribusi invers Weibull yaitu:

$$E(X) = -\theta^{\frac{1}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right) \tag{4.21}$$

Untuk mendapatkan variansi distribusi invers Weibull seperti pada Persamaan (4.11), terlebih dahulu didapatkan $E(X^2)$ dan $E(X)$ dari distribusi invers Weibull. Karena $E(X)$ telah didapatkan pada Persamaan (4.21), selanjutnya ditentukan $E(X^2)$ distribusi invers Weibull sebagai berikut:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2\,f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} x^2\,\frac{\theta\beta}{x^{\beta+1}}\,e^{-\theta x^{-\beta}}\,dx$$

$$= \theta\beta\int_{0}^{+\infty} x^{2-(\beta+1)} e^{-\theta x^{-\beta}}\,dx$$

$$= \theta\beta \int_{0}^{+\infty} x^{1-\beta} e^{-\theta x^{-\beta}}\, dx \tag{4.22}$$

misal: $u = \theta x^{-\beta}$

$$x^{-\beta} = \frac{u}{\theta} \rightarrow x = \theta^{\frac{1}{\beta}} u^{-\frac{1}{\beta}}$$

selanjutnya didapat:

$$dx = -\frac{\theta^{\frac{1}{\beta}}}{\beta} u^{-\frac{1}{\beta}-1} du$$

dengan batas integral: $x = 0 \rightarrow u = 0$

$x = +\infty \rightarrow u = +\infty$

sehingga Persamaan (4.22) menjadi:

$$E(X^2) = \theta\beta \int_{0}^{+\infty} \theta^{\frac{1}{\beta}} u^{-\frac{1}{\beta}} \left(\frac{u}{\theta}\right) e^{-u} \left(-\frac{\theta^{\frac{1}{\beta}}}{\beta}\right) u^{-\frac{1}{\beta}-1} du$$

$$= -\frac{\theta\beta\theta^{\frac{1}{\beta}}\theta^{\frac{1}{\beta}}}{\theta\beta} \int_{0}^{+\infty} u^{-\frac{1}{\beta}} u^{1} u^{-\frac{1}{\beta}-1} e^{-u}\, du$$

$$= -\theta^{\frac{2}{\beta}} \int_{0}^{+\infty} u^{\left(1-\frac{2}{\beta}\right)-1} e^{-u}\, du \tag{4.23}$$

sesuai Persamaan (4.8), untuk Persamaan (4.23) menjadi:

$$E(X^2) = -\theta^{\frac{2}{\beta}}\, \Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right)$$

Sehingga diperoleh $E(X^2)$ distribusi invers Weibull yaitu:

$$E(X^2) = -\theta^{\frac{2}{\beta}}\, \Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \tag{4.24}$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan Persamaan (4.21) dan Persamaan (4.24) pada Persamaan (4.11) dapat diperoleh variansi distribusi invers Weibull dengan dua parameter sebagai berikut :

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= -\theta^{\frac{2}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) - \left(-\theta^{\frac{1}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right)^2$$

$$= -\theta^{\frac{2}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) - \theta^{\frac{2}{\beta}}\,\Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$$

$$= -\theta^{\frac{2}{\beta}}\left(\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) + \Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right)$$

Sehingga diperoleh variansi distribusi invers Weibull yaitu:

$$Var(X) = -\theta^{\frac{2}{\beta}}\left(\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) + \Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right) \quad (4.25)$$

dengan

θ : parameter skala

β : parameter bentuk

4.2 Penentuan Fungsi *Likelihood*

Jika $x_1, \ldots, x_n$ suatu sampel acak yang konstan dari $f_X(x;\theta)$ maka fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\theta)$ merupakan fungsi dari parameter θ dan didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$L(\theta) = f_X(x_1;\theta) f_X(x_2;\theta) \ldots f_X(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta) \quad (4.26)$$

Seperti pada Persamaan (4.26), fungsi *likelihood* dari parameter skala θ distribusi invers Weibull ditentukan sebagai berikut:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{r} f(x_i;\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\theta\beta}{x_i^{\beta+1}}\, e^{-\theta x_i^{-\beta}}\right)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{r}\theta\beta}{\prod_{i=1}^{r} x_i^{\beta+1}} \prod_{i=1}^{r} e^{-\theta x_i^{-\beta}}$$

$$= \frac{(\theta\beta)^r}{\prod_{i=1}^r x_i^{\beta+1}} e^{-\theta \sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}}$$

Sehingga diperoleh fungsi *likelihood* dari parameter skala θ distribusi invers Weibull yaitu:

$$L(\theta) = \frac{(\theta\beta)^r}{\prod_{i=1}^r x_i^{\beta+1}} e^{-\theta \sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}} \tag{4.27}$$

dengan

θ : parameter skala distribusi invers Weibull
β : parameter bentuk distribusi invers Weibull
r : ukuran sampel

4.3 Metode Estimasi Bayes

Dasar dari metode estimasi Bayes adalah probabilitas bersyarat. Untuk melakukan estimasi bayes diperlukan informasi awal yang disebut distribusi prior dan dinotasikan dengan $\pi(\theta)$, dengan θ sebagai parameter skala dari distribusi sampel. Estimasi Bayes merupakan metode estimasi yang menggabungkan distribusi sampel dengan distribusi prior. Dalam hal ini, distribusi sampelnya adalah fungsi *likelihood* dari distribusi invers Weibull dan distribusi priornya adalah prior quasi, prior gamma dan prior uniform.

4.3.1 Distribusi Prior

Pada bab II telah ditentukan distribusi prior yang digunakan sebagai distribusi awal dalam estimasi Bayes yang telah dikutip dari [4], yaitu :

1. Prior Quasi

Ketika tidak ada informasi mengenai parameter dari suatu distribusi, maka salah satu prior yang dapat digunakan adalah prior quasi yang didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$\pi_1(\theta) = \frac{1}{\theta^m}\ ;\ \theta > 0, m > 0 \tag{4.28}$$

dengan
m : parameter dari prior quasi
θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull

2. Prior Gamma

Prior gamma adalah salah satu prior yang paling sering digunakan oleh para peneliti. Prior gamma juga merupakan bagian dari prior konjugat. Diasumsikan bahwa parameter skala θ berdistribusi prior gamma dengan parameter bentuk c dan parameter skala d didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$\pi_2(\theta) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \theta^{c-1} e^{-d\theta} \; ; \;\; \theta > 0, c, d > 0 \qquad (4.29)$$

dengan
c : parameter bentuk dari prior gamma
d : parameter skala dari prior gamma
θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull

3. Prior Uniform

Diasumsikan bahwa parameter skala θ meiliki distribusi uniform pada rentang terbatas $[0, k]$, sehingga prior uniform didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$\pi_3(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{k} & , 0 < \theta < k \\ 0 & , \text{untuk yang lain} \end{cases} \qquad (4.30)$$

4.3.2 Penentuan Distribusi Posterior

Jika parameter θ kontinu maka distribusi prior dan distribusi posterior dapat dituliskan dalam bentuk pdf. Pada umumnya pdf bersama $f(\theta, x)$ dan pdf marginal $f(x)$ tidak diketahui, hanya dinyatakan dalam bentuk distribusi prior dan fungsi *likelihood* yang biasanya diketahui [8]. Pdf bersama dapat didefinisikan dalam bentuk fungsi *likelihood* dan pdf marginal didefinisikan dalam bentuk distribusi prior sebagai berikut [2]:

$$f(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)\, L(\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\theta)\, L(\theta)\, d\theta} \qquad (4.31)$$

Dengan demikian dapat ditentukan distribusi posterior dengan distribusi prior berbeda yang diuraikan sebagai berikut:

1. Penentuan Distribusi Posterior dengan Prior Quasi

Sesuai Persamaan (4.31), dapat ditentukan distribusi posterior dengan prior quasi sebagai berikut:

$$f_1(\theta|x) = \frac{\pi_1(\theta)\, L(\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \pi_1(\theta)\, L(\theta)\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{\theta^m} \frac{(\theta\beta)^r}{\prod_{i=1}^r x_i^{\beta+1}} e^{-\theta \sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}}}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta^m} \frac{(\theta\beta)^r}{\prod_{i=1}^r x_i^{\beta+1}} e^{-\theta \sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}} d\theta}$$

$$= \frac{\frac{\beta^r}{\prod_{i=1}^r x_i^{\beta+1}} \theta^{r-m} e^{-\theta \sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}}}{\frac{\beta^r}{\prod_{i=1}^r x_i^{\beta+1}} \int_0^{+\infty} \theta^{r-m} e^{-\theta \sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}} d\theta}$$

$$= \frac{\theta^{r-m} e^{-\theta \sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}}}{\int_0^{+\infty} \theta^{(r-m+1)-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}} d\theta} \qquad (4.32)$$

untuk penyebut pada Persamaan (4.32) diuraikan sebagai berikut:

$$\int_0^{+\infty} \theta^{(r-m+1)-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}} d\theta \qquad (4.33)$$

misal: $u = \theta \sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}$

$$\theta = \frac{u}{\sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}}$$

selanjutnya didapat:

$$d\theta = \frac{1}{\sum_{i=1}^r x_i^{-\beta}} du$$

dengan batas integral: $\theta = 0 \quad \rightarrow u = 0$

$\theta = +\infty \rightarrow u = +\infty$

sehingga Persamaan (4.33) menjadi:

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}\right)^{(r-m+1)-1} e^{-u} \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} du$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r-m+1)-1} \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} \int_0^{+\infty} u^{(r-m+1)-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r-m+1)-1+1}} \int_0^{+\infty} u^{(r-m+1)-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1}} \int_0^{+\infty} u^{(r-m+1)-1} e^{-u} du \quad (4.34)$$

telah didefinisikan fungsi gamma pada Persamaan (4.8), sehingga Persamaan (4.34) menjadi:

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1}} \Gamma(r-m+1) \quad (4.35)$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (4.35) sebagai penyebut pada Persamaan (4.32), diperoleh sebagai berikut:

$$f_1(\theta|x) = \frac{\theta^{r-m} e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1}} \Gamma(r-m+1)}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1}}{\Gamma(r-m+1)} \theta^{r-m} e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}$$

Sehingga diperoleh distribusi posterior dengan prior quasi yaitu:

$$f_1(\theta|x) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1}}{\Gamma(r-m+1)} \theta^{r-m} e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} \quad (4.36)$$

untuk $\theta, \beta > 0$ dan $r - m > -1$, dengan

m : parameter dari prior quasi
θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull
β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull
r : ukuran sampel

2. Penentuan Distribusi Posterior dengan Prior Gamma

Sesuai Persamaan (4.31), dapat ditentukan distribusi posterior dengan prior gamma sebagai berikut:

$$f_2(\theta|x) = \frac{\pi_2(\theta)\, L(\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \pi_2(\theta)\, L(\theta)\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{d^c}{\Gamma(c)}\, \theta^{c-1} e^{-d\theta}\, \frac{(\theta\beta)^r}{\prod_{i=1}^{r} x_i^{\beta+1}}\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}}{\int_0^{+\infty} \frac{d^c}{\Gamma(c)}\, \theta^{c-1} e^{-d\theta}\, \frac{(\theta\beta)^r}{\prod_{i=1}^{r} x_i^{\beta+1}}\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{d^c b^r}{\Gamma(c) \prod_{i=1}^{r} x_i^{\beta+1}}\, \theta^{c+r-1} e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)}}{\frac{d^c b^r}{\Gamma(c) \prod_{i=1}^{r} x_i^{\beta+1}} \int_0^{+\infty} \theta^{c+r-1}\, e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)} d\theta}$$

$$= \frac{\theta^{c+r-1} e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)}}{\int_0^{+\infty} \theta^{(c+r)-1} e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)}\, d\theta} \qquad (4.37)$$

untuk penyebut pada Persamaan (4.37) diuraikan sebagai berikut:

$$\int_0^{+\infty} \theta^{(c+r)-1} e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)}\, d\theta \qquad (4.38)$$

misal: $u = \theta\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)$

$$\theta = \frac{u}{d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}$$

selanjutnya didapat:

$$d\theta = \frac{1}{d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} du$$

dengan batas integral: $\theta = 0 \quad \rightarrow u = 0$

$\theta = +\infty \rightarrow u = +\infty$

sehingga Persamaan (4.38) menjadi:

$$= \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{u}{d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} \right)^{(c+r)-1} e^{-u} \frac{1}{d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} du$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{u^{(c+r)-1}}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)-1} \left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{1}} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)-1+1}} \int_{0}^{+\infty} u^{(c+r)-1} e^{-u} du \qquad (4.39)$$

telah didefinisikan fungsi gamma pada Persamaan (4.8), sehingga Persamaan (4.39) menjadi:

$$= \frac{1}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)}} \Gamma(c + r) \qquad (4.40)$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (4.40) sebagai penyebut pada Persamaan (4.37), diperoleh sebagai berikut:

$$f_2(\theta|x) = \frac{\theta^{(c+r)-1} e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)}}{\frac{1}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)}} \Gamma(c + r)}$$

$$= \frac{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)}}{\Gamma(c + r)} \theta^{(c+r)-1} e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)}$$

Sehingga diperoleh distribusi posterior dengan prior gamma yaitu:

$$f_2(\theta|x) = \frac{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)}}{\Gamma(c + r)} \theta^{(c+r)-1} e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)} \qquad (4.41)$$

untuk $\theta, \beta, d > 0$ dan $c + r > 0$, dengan

d : parameter skala dari prior gamma

c : parameter *shape* dari prior gamma

θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull

β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull

r : ukuran sampel

3. Penentuan Distribusi Posterior dengan Prior Uniform

Sesuai Persamaan (4.31), dapat ditentukan distribusi posterior dengan prior uniform sebagai berikut:

$$f_3(\theta|x) = \frac{\pi_3(\theta)\, L(\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \pi_3(\theta)\, L(\theta)\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{k} \frac{(\theta\beta)^r}{\prod_{i=1}^{r} x_i^{\beta+1}} e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{k} \frac{(\theta\beta)^r}{\prod_{i=1}^{r} x_i^{\beta+1}} e^{-\theta \prod_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} d\theta}$$

$$= \frac{\frac{\beta^r}{k \prod_{i=1}^{r} x_i^{\beta+1}} \theta^r e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}}{\frac{\beta^r}{k \prod_{i=1}^{r} x_i^{\beta+1}} \int_0^{+\infty} \theta^r e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} d\theta}$$

$$= \frac{\theta^r e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}}{\int_0^{+\infty} \theta^{(r+1)-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} d\theta} \tag{4.42}$$

untuk penyebut pada Persamaan (4.42) diuraikan sebagai berikut:

$$\int_0^{+\infty} \theta^{(r+1)-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} d\theta \tag{4.43}$$

misal: $u = \theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}$

$$\theta = \frac{u}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}$$

selanjutnya didapat:

$$d\theta = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} du$$

dengan batas integral: $\theta = 0 \quad \rightarrow u = 0$

$\theta = +\infty \rightarrow u = +\infty$

sehingga Persamaan (4.43) menjadi:

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} \right)^{(r+1)} e^{-u} \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^{(r+1)}}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)-1} \left(\sum x_i^{-\beta}\right)^{1}} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)}} \int_0^{+\infty} u^{(r+1)-1} e^{-u} du \qquad (4.44)$$

telah didefinisikan fungsi gamma pada Persamaan (4.8), sehingga Persamaan (4.44) menjadi:

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)}} \Gamma(r+1) \qquad (4.45)$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (4.45) sebagai penyebut pada Persamaan (4.42), diperoleh sebagai berikut:

$$f_3(\theta|x) = \frac{\theta^r e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)}} \Gamma(r+1)}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)}}{\Gamma(r+1)} \theta^r e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}$$

Sehingga diperoleh distribusi posterior dengan prior uniform yaitu:

$$f_3(\theta|x) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)}}{\Gamma(r+1)} \theta^r e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} \tag{4.46}$$

untuk $\theta, \beta > 0$ dan $r > -1$, dengan

θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull

β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull

r : ukuran sampel

4.3.3 Estimator Bayes

Estimator Bayes untuk parameter skala θ dapat diperoleh dengan menghitung nilai ekspektasi (harapan) dari distribusi posterior $f(\theta|x)$ yang didefinisikan sebagai berikut [7]:

$$\hat{\theta} = E(\theta|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\, f(\theta|x)\, d\theta \tag{4.47}$$

dengan

θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull

$\hat{\theta}$: estimator pada parameter skala distribusi invers Weibull

Dengan demikian dapat ditentukan estimator Bayes pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull yang diuraikan sebagai berikut:

1. Penentuan Estimator Bayes untuk Distribusi Posterior dengan Prior Quasi

Sesuai pada Persamaan (4.47), dapat ditentukan estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior quasi sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\, f_1(\theta|x)\, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \theta\, f_1(\theta|x)\, d\theta + \int_{0}^{+\infty} \theta\, f_1(a|x)\, d\theta$$

$$= 0 + \int_{0}^{+\infty} \theta\, f_1(a|x)\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \theta \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1}}{\Gamma(r-m+1)} \theta^{r-m} e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}\, d\theta$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1}}{\Gamma(r-m+1)} \int_{0}^{+\infty} \theta^{r-m+1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}\, d\theta \qquad (4.48)$$

misal: $u = \theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}$

$$\theta = \frac{u}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}$$

selanjutnya didapat:

$$d\theta = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} du$$

dengan batas integral: $\theta = 0 \;\rightarrow\; u = 0$

$\theta = +\infty \;\rightarrow\; \theta = +\infty$

sehingga Persamaan (4.48) menjadi:

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1}}{\Gamma(r-m+1)} \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{u}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}\right)^{r-m+1} e^{-u} \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} du$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1}}{\Gamma(r-m+1)} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1} \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} \int_{0}^{+\infty} u^{r-m+1} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right) \Gamma(r-m+1)} \int_{0}^{+\infty} u^{(r-m+2)-1} e^{-u} du \qquad (4.49)$$

telah didefinisikan fungsi gamma pada Persamaan (4.8), sehingga Persamaan (4.49) menjadi:

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(r-m+1)}\Gamma(r-m+2)$$

Sehingga diperoleh estimator bayes pada distribusi posterior dengan prior quasi sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\Gamma(r-m+2)}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(r-m+1)} \qquad (4.50)$$

untuk $\beta > 0$ dan $r - m > -1$, dengan

β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull

m : parameter dari prior quasi

r : ukuran sampel

2. Penentuan Estimator Bayes untuk Distribusi Posterior dengan Prior Gamma

Sesuai pada Persamaan (4.47), dapat ditentukan estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior gamma sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\, f_2(\theta|x)\, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \theta\, f_2(\theta|x)\, d\theta + \int_{0}^{+\infty} \theta\, f_2(a|x)\, d\theta$$

$$= 0 + \int_{0}^{+\infty} \theta\, f_2(a|x)\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \theta\, \frac{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)}}{\Gamma(c+r)} \theta^{(c+r)-1} e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)}\, d\theta$$

$$= \frac{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)}}{\Gamma(c+r)} \int_{0}^{+\infty} \theta^{(c+r)} e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)}\, d\theta \qquad (4.51)$$

misal: $u = \theta\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)$

$$\theta = \frac{u}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)}$$

selanjutnya didapat:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)} \rightarrow d\theta = \frac{1}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)} du$$

dengan batas integral: $\theta = 0 \quad \rightarrow u = 0$

$\theta = +\infty \rightarrow \theta = +\infty$

sehingga Persamaan (4.51) menjadi:

$$= \frac{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)}}{\Gamma(c+r)} \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{u}{d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}\right)^{(c+r)} e^{-u} \frac{1}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)} du$$

$$= \frac{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)}}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{c+r} \left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(c+r)} \int_{0}^{+\infty} u^{c+r} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(c+r)} \int_{0}^{+\infty} u^{(c+r+1)-1} e^{-u}\, du \qquad (4.52)$$

telah didefinisikan fungsi gamma pada Persamaan (4.8), sehingga Persamaan (4.52) menjadi:

$$= \frac{1}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(c+r)} \Gamma(c+r+1)$$

Sehingga diperoleh estimator bayes untuk distribusi posterior dengan fungsi gamma sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\Gamma(c+r+1)}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(c+r)} \qquad (4.53)$$

untuk $\beta, d > 0$ dan $c + r > 0$, dengan

d : parameter skala dari prior gamma

c : parameter *shape* dari prior gamma

β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull

r : ukuran sampel

3. Penentuan Estimator Bayes pada Distribusi Psterior dengan Prior Uniform

Sesuai pada Persamaan (4.47), dapat ditentukan estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior uniform sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\, f_3(\theta|x)\, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \theta\, f_3(\theta|x)\, d\theta + \int_{0}^{+\infty} \theta\, f_3(a|x)\, d\theta$$

$$= 0 + \int_{0}^{+\infty} \theta\, f_3(a|x)\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \theta\, \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)}}{\Gamma(r+1)} \theta^r e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}\, d\theta$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)}}{\Gamma(r+1)} \int_{0}^{+\infty} \theta^{r+1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}\, d\theta \qquad (4.54)$$

misal: $u = \theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}$

$$\theta = \frac{u}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}$$

selanjutnya didapat:

$$d\theta = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} du$$

dengan batas integral: $\theta = 0 \rightarrow u = 0$

$\theta = +\infty \rightarrow \theta = +\infty$

sehingga Persamaan (4.54) menjadi:

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)}}{\Gamma(r+1)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}}\right)^{r+1} e^{-u} \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} du$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)}}{\Gamma(r+1)} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r+1} \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} \int_0^{+\infty} u^{r+1} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\, \Gamma(r+1)} \int_0^{+\infty} u^{(r+2)-1} e^{-u}\, du \tag{4.55}$$

telah didefinisikan fungsi gamma pada Persamaan (4.8), sehingga Persamaan (4.55) menjadi:

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\, \Gamma(r+1)} \Gamma(r+2)$$

Sehingga diperoleh estimator bayes untuk distribusi posterior dengan prior uniform sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_3 = \frac{\Gamma(r+2)}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\, \Gamma(r+1)} \tag{4.56}$$

untuk $\beta > 0$ dan $r > -1$, dengan

β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull

r : ukuran sampel

4.5 Contoh Kasus dengan Simulasi *Monte Carlo*

Setelah diperoleh persaman estimator Bayes pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull, dapat dilakukan contoh kasus dengan nilai-nilai parameter dan ukuran sampel sesuai dengan rujukan [4]. Untuk memperoleh estimator Bayes pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull dibuat simulasi Monte Carlo dengan menghitung *Mean Square Error* dari setiap estimator Bayes yang diuraikan sebagai berikut:

4.5.1 Estimator Bayes untuk Distribusi Posterior dengan Prior Quasi ($\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$)

Estimator Bayes untuk distribusi posterior dengan prior quasi ($\hat{\theta}_1$) diperoleh dari simulasi *Monte Carlo* dengan algoritma seperti pada Gambar 4.1.

Algoritma I:

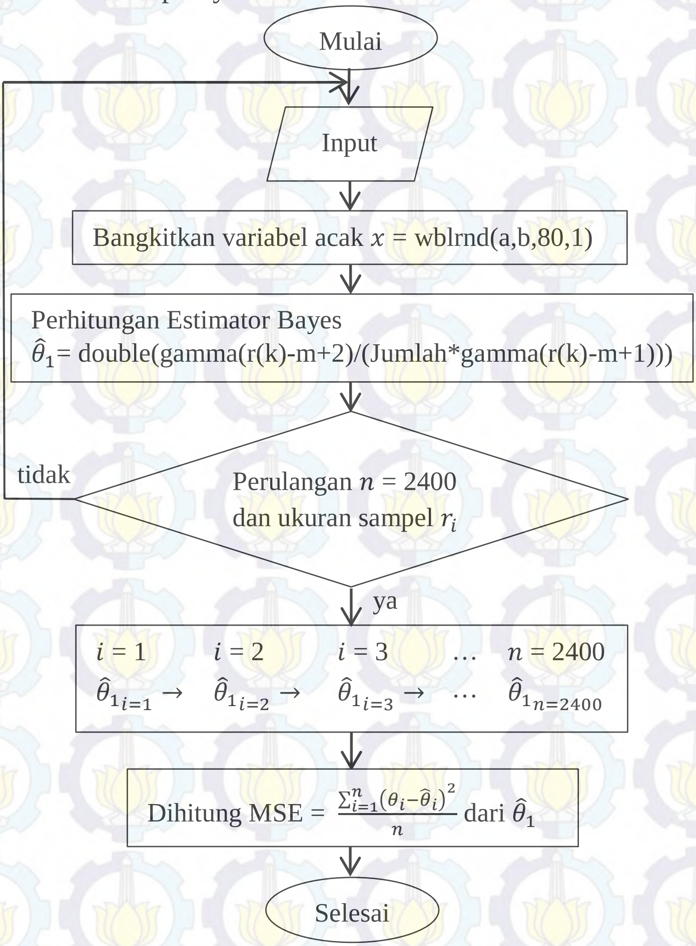
1. Input nilai parameter bentuk $\beta = 2$ dan nilai awal parameter skala $\theta = 0.5$ yang berukuran sampel $r = 5$, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, dan 80 serta nilai parameter prior quasi $m = 0.5$.
2. Dibangkitkan variabel acak x yang berdistribusi Weibull dengan nilai inputan sesuai pada tahap 1.
3. Dihitung estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior quasi ($\hat{\theta}_1$).
4. Langkah 1 sampai 3 diulang sebanyak $n = 2.400$ kali.
5. Dihitung *Mean Square Error* dari estimator Bayes $\hat{\theta}_1$ dengan ukuran sampel r yang berbeda dan memandang perulangan n sebagai banyaknya pengamatan.

Dari simulasi yang telah dilakukan, diperoleh perhitungan *Mean Square Error* untuk $\hat{\theta}_1$ seperti tersebut pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 *Mean Square Error* untuk estimator Bayes $\hat{\theta}_1$.

r	MSE_1	r	MSE_1
5	0.154566276496557	45	0.201262711539710
10	0.175835618735887	50	0.201644131487833
15	0.184973989628226	55	0.202678801202343
20	0.188900387514921	60	0.203543701322275
25	0.192454383049951	65	0.204227903492718
30	0.196213962635152	70	0.206098815921172
35	0.198072276317362	75	0.206289944893622
40	0.199724482368924	80	0.206342727734282

Dari Tabel 4.1 didapat perhitungan *Mean Square Error* dari estimator Bayes untuk distribusi posterior dengan prior quasi (θ_1). *Mean Square Error* yang diperoleh menghasilkan nilai error yang konsisten, semakin besar ukuran sampel r nilai errornya juga semakin besar. *Mean Square Error* terkecilnya didapat pada ukuran sampel r = 5 dengan nilai MSE_1 = 0.154566276496557. Dengan demikian estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior quasi ($\hat{\theta}_1$) bekerja dengan baik saat ukuran sampelnya kecil.



Gambar 4.1. Algoritma simulasi *Monte Carlo* untuk estimator Bayes $\hat{\theta}_1$.

4.5.2 Estimator Bayes untuk Distribusi Posterior dengan Prior Gamma ($\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$)

Estimator Bayes untuk distribusi posterior dengan prior gamma ($\hat{\theta}_2$) diperoleh dari simulasi *Monte Carlo* dengan algoritma seperti pada Gambar 4.2.

Algoritma II:

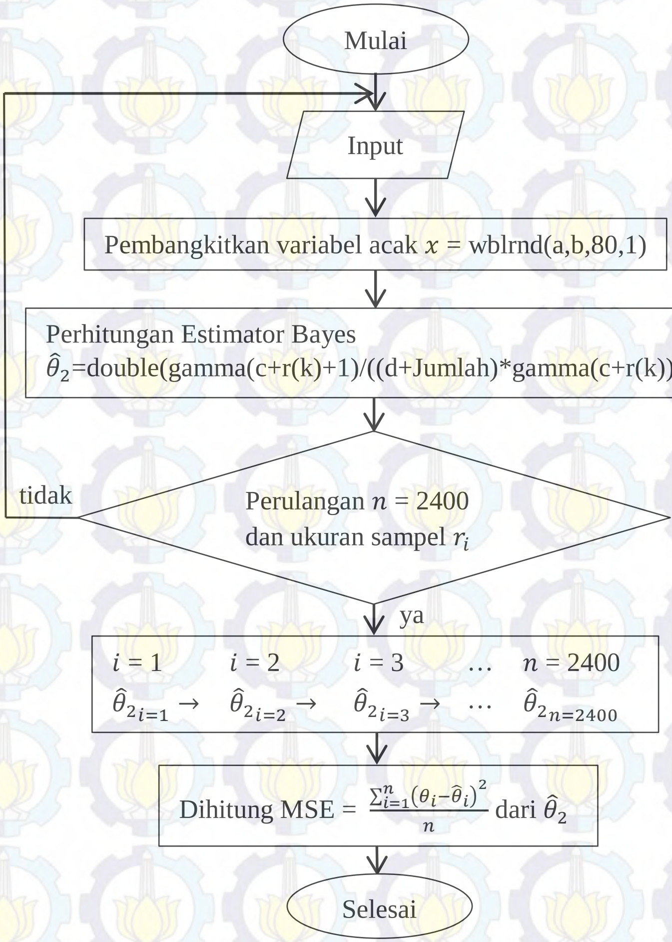
1. Input nilai parameter bentuk $\beta = 2$ dan nilai awal parameter skala $\theta = 0.5$ yang berukuran sampel $r = 5$, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, dan 80 serta nilai parameter prior gamma $d = 3$ dan $c = 2$.
2. Dibangkitkan variabel acak x yang berdistribusi Weibull dengan nilai inputan sesuai pada tahap 1.
3. Dihitung estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior gamma ($\hat{\theta}_2$).
4. Langkah 1 sampai 3 diulang sebanyak n = 2400 kali.
5. Dihitung *Mean Square Error* dari estimator Bayes $\hat{\theta}_2$ dengan ukuran sampel r yang berbeda dan memandang perulangan n sebagai banyaknya pengamatan.

Dari simulasi yang telah dilakukan, diperoleh perhitungan *Mean Square Error* untuk $\hat{\theta}_2$ seperti tersebut pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2 *Mean Square Error* untuk estimator Bayes $\hat{\theta}_2$.

r	MSE_2	r	MSE_2
5	0.141871933186387	45	0.199144260058774
10	0.169214175353577	50	0.201441394441170
15	0.179384786825177	55	0.201843807239978
20	0.184075684023662	60	0.202619402463145
25	0.189664363584572	65	0.203505866126688
30	0.194300424812500	70	0.204326732559592
35	0.195635286191682	75	0.204455745766468
40	0.197291099261156	80	0.205621496249104

Dari Tabel 4.2 didapat perhitungan *Mean Square Error* dari estimator Bayes untuk distribusi posterior dengan prior gamma ($\hat{\theta}_2$). *Mean Square Error* yang diperoleh menghasilkan nilai error yang konsisten, semakin besar ukuran sampel r nilai errornya juga semakin besar. *Mean Square Error* terkecilnya didapat pada ukuran sampel r = 5 dengan nilai MSE_2 = 0.141871933186387. Dengan demikian estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior gamma ($\hat{\theta}_2$) bekerja dengan baik saat ukuran sampelnya kecil.



Gambar 4.2. Algoritma simulasi *Monte Carlo* untuk estimator Bayes $\hat{\theta}_2$.

4.5.3 Estimator Bayes untuk Distribusi Posterior dengan Prior Uniform ($\hat{\theta}_3$)

Estimator Bayes untuk distribusi posterior dengan prior uniform ($\hat{\theta}_3$) diperoleh dari simulasi *Monte Carlo* dengan algoritma seperti pada Gambar 4.3.

Algoritma III:

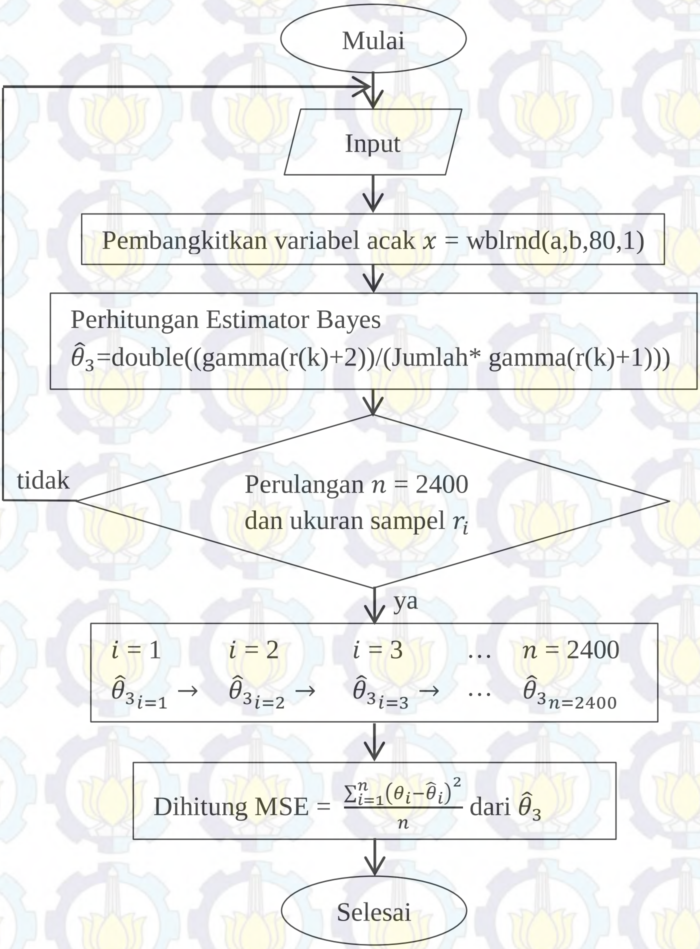
1. Input nilai parameter bentuk $\beta = 2$ dan nilai awal parameter skala $\theta = 0.5$ yang berukuran sampel $r = 5$, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, dan 80.
2. Dibangkitkan variabel acak x yang berdistribusi Weibull dengan nilai inputan sesuai pada tahap 1.
3. Dihitung estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior uniform ($\hat{\theta}_3$).
4. Langkah 1 sampai 3 diulang sebanyak n = 2400 kali.
5. Dihitung *Mean Square Error* dari estimator Bayes $\hat{\theta}_3$ dengan ukuran sampel r yang berbeda dan memandang perulangan n sebagai banyaknya pengamatan.

Dari simulasi yang telah dilakukan, diperoleh perhitungan *Mean Square Error* untuk $\hat{\theta}_3$ seperti tersebut pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 *Mean Square Error* untuk estimator Bayes $\hat{\theta}_3$.

r	MSE_3	r	MSE_3
5	0.147011371152342	45	0.199995245971037
10	0.170940510864099	50	0.202086070665318
15	0.181262968375342	55	0.202951466975526
20	0.187348348889584	60	0.203888368463330
25	0.192541273303184	65	0.204593082345738
30	0.194517772056302	70	0.205406030126721
35	0.197853231177456	75	0.205447932918197
40	0.199304405976705	80	0.206270038309001

Dari Tabel 4.3 didapat perhitungan *Mean Square Error* dari estimator Bayes untuk distribusi posterior dengan prior uniform ($\hat{\theta}_3$). *Mean Square Error* yang diperoleh menghasilkan nilai error yang konsisten, semakin besar ukuran sampel r nilai errornya juga semakin besar. *Mean Square Error* terkecilnya didapat pada ukuran sampel r = 5 dengan nilai MSE_3 = 0.147011371152342. Dengan demikian estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior uniform ($\hat{\theta}_3$) bekerja dengan baik saat ukuran sampelnya kecil.



Gambar 4.3. Algoritma simulasi *Monte Carlo* untuk estimator Bayes $\hat{\theta}_3$.

Dari semua perhitungan *Mean Square Error* untuk setiap estimator Bayes dapat disimpulkan ketiga estimator bekerja dengan baik saat ukuran sampelnya kecil. Tetapi dari ketiga estimator Bayes yang telah didapat, estimator Bayes untuk distribusi posterior dengan prior gamma ($\hat{\theta}_2$) bekerja lebih baik karena *Mean Square Error* untuk $\hat{\theta}_2$ paling kecil dari ketiga *Mean Square Error* yang telah dihitung.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan kesimpulan yang diperoleh dari kegiatan Tugas Akhir dan saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan dalam bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Dengan menggunakan metode transformasi dari distribusi Weibull diperoleh distribusi invers Weibull dengan pdf:
$$f(x;\theta,\beta) = \begin{cases} \dfrac{\theta\beta}{x^{\beta+1}} e^{-\theta x^{-\beta}} & ,x > 0 \quad \theta,\beta > 0 \\ 0 & ,x \; yang \; lain \end{cases}$$
dengan
θ : parameter skala
β : parameter bentuk
2. Diperoleh estimator Bayes pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull sebgai berikut:
$$\hat{\theta}_1 = \frac{\Gamma(r-m+2)}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(r-m+1)}$$
$$\hat{\theta}_2 = \frac{\Gamma(c+r+1)}{\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(c+r)}$$
$$\hat{\theta}_3 = \frac{\Gamma(r+2)}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\,\Gamma(r+1)}$$
3. Dengan membuat simulasi *Monte Carlo* dan nilai parameter skala θ = 0.5 dan nilai parameter bentuk β = 2 dengan ukuran sampel $r =$ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, dan 80 diperoleh estimator Bayes untuk distribusi posterior dengan prior gamma $\left(\hat{\theta}_2\right)$ adalah estimator yang baik.

5.2 Saran

Pada Tugas akhir ini dibahas tentang metode estimasi Bayes pada parameter skala distribusi invers Weibull. Namun, terdapat hal-hal lainnya yang belum dibahas, disarankan untuk penelitian yang akan datang dapat membahas mengenai hal-hal tersebut:

1. Dapat menggunakan metode estimasi lainnya untuk memperoleh estimator untuk parameter skala dan parameter bentuk distribusi Invers Weibull.
2. Dapat menggunakan metode simulasi yang lain untuk memperoleh nilai estimator Bayes.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Walpole, R. E. (1997). **Pengantar Statistika Edisi ke-3, PT. Gramedia Pustaka Utama Jakarta**

[2] Anonim. http://www.weibull.com/hotwire/issue14/relbasics14.html. Diakses pada 28 Februari 2015.

[3] Khan, M. S., Pasha. G. R. dan Pasha, A. H. (2008). "Theoritical Analysis of Inferse Weibull Distribution". **WSEAS TRANSLATIONS on MATHEMATICS Vol. 7**, Hal. 30-38.

[4] Yaghmei, F., Babanezhad, M. dan Moghdam, O.S. (2013). "Bayesian Estimation of the Scale Parameter of Inverse Weibull Distribution under the Asymmetric Loss Function". **Journal of Probability and Statistics Vol. 2013**.

[5] Hazhiah, I. T., Sugito, dan Rahmawati, R. (2012). "Estimasi Parameter Distribusi Weibull Dua Parameter Menggunakan Metode Bayes". **Media Statistik Vol. 5 No. 1**, Hal. 27-35.

[6] Bain, L. J. dan Engelhardt, M. (1992). **Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second Edition, California, Duxbury Press**.

[7] Casella, G. dan Berger, R. L. (2002). **Satistical Inference, Boston: Duxbury Press**.

[8] Sugito, dan Ispriyanti, D. (2010). "Distribusi Invers Gamma pada Inferensi Bayesian". **Media Statistika Vol. 3 No. 2**, Hal. 59-68.

[9] Saiful, Mulyadi, Mardin, F. dan Husnawati. (2013). "Analisis Risiko Finansial dengan Metode Simulasi Monte Carlo". **Hasil Penelitian Fakultas Teknik Vol. 7**.

[10] Fadjar, A. (2008). "Aplikasi Simulasi Monte Carlo dalam Estimasi Biaya Proyek". **Jurnal SMARTek Vol. 6**, Hal. 222-227.

[11] Sugiharto, B. (2007). “Aplikasi Simulasi untuk Peramalan Permintaan dan Pengolahan Persediaan yang Bersifat Probabilistik”. **INASEA Vol. 8**, Hal. 112-120.

[12] Winita. (2011). “Pemilihan Teknik Peramalan dan Penentuan Kesalahan Peramalan”. http://repository.usu.ac.id/bitstream/123456789/19126/4/Chapter%20II.pdf

[13] Andriyanto, U. S. dan Basith, A. **Metode dan Aplikasi Peramalan**.

LAMPIRAN

***Listing* Program**

```
clc; clear all; close all;


%% Input Awal
disp('Simulasi Monte Carlo');
disp('Masukkan nilai-nilai berikut:');
m = input ('Parameter dari prior quasi m = ');
d = input ('Parameter dari prior gamma d = ');
c = input ('Parameter dari prior gamma c = ');
n = input ('Masukkan banyaknya perulangan n =
');
disp ('Parameter skala dari distribusi invers
Weibull a = 0.5');
disp ('Parameter bentuk dari distribusi invers
Weibull b = 2');
disp ('Dengan ukuran sampel r = 5, 10, 15, 20,
25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, dan
80')
a = 0.5;
b = 2;
r = [5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75
80];

syms alpha;
format long
%% Simulasi Estimator Bayes untuk Prior Quasi
for k=1:length(r)
    for t=1:n
        x = wblrnd(a,b,80,1);
        Jumlah = 0;
        for i=1:r(k)
            Jumlah = Jumlah + (x(i)^(-b));
        end
        a_topi1(k,t) = double(gamma(r(k)-
m+2)/(Jumlah*gamma(r(k)-m+1)));
```

LAMPIRAN (Lanjutan)

```
end
end

% MSE
format long
for i=1:length(r)
    Jumlah = 0;
    for t=1:n
        Jumlah = Jumlah+(a_topi1(i,t)-a)^2;
    end
    MSE1(i) = Jumlah/n;
end

%% Simulasi Estimator Bayes untuk Prior Gamma
for k=1:length(r)
    for t=1:n
        x = wblrnd(a,b,80,1);
        Jumlah = 0;
        for i=1:r(k)
            Jumlah = Jumlah + (x(i)^(-b));
        end
        a_topi2(k,t) =
double(gamma(c+r(k)+1)/((d+Jumlah)*gamma(c+r(k))
));
    end
end

% MSE
format long
for i=1:length(r)
    Jumlah = 0;
    for t=1:n
        Jumlah = Jumlah+(a_topi2(i,t)-a)^2;
    end
    MSE2(i) = Jumlah/n;
end
```

LAMPIRAN (Lanjutan)

```
%% Simulasi Estimator Bayes untuk Prior Uniform
for k=1:length(r)
    for t=1:n
        x = wblrnd(a,b,80,1);
        Jumlah = 0;
        for i=1:r(k)
            Jumlah = Jumlah + (x(i)^(-b));
        end
        a_topi3(k,t) =
double((gamma(r(k)+2))/(Jumlah*gamma(r(k)+1)));
    end
end
% MSE
format long
for i=1:length(r)
    Jumlah = 0;
    for t=1:n
        Jumlah = Jumlah+(a_topi3(i,t)-a)^2;
    end
    MSE3(i) = Jumlah/n;
End

MSE=[MSE1' MSE2' MSE3'];
a_topi1
a_topi2
a_topi3
disp('    MSE Quasi Prior     MSE Gamma Prior
MSE Uniform Prior')
disp(MSE)

Minimum_MSE = min(MSE);
for i=1:size(MSE,2)
    Letak_MSE_Minimum(i) =
find(MSE(:,i)==min(MSE(:,i)));
end
Minimum_MSE
Letak_MSE_Minimum
```

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BIODATA PENULIS

Penulis bernama lengkap Zain Rizqiyyah, biasa dipanggil Zain atau Kiki. Penulis dilahirkan di Surabaya pada tanggal 2 Januari 1994. Penulis lulus dari TK MI Darul Ulum Medaeng, MI Darul Ulum Medaeng, MTs Akselerasi Unggulan Amanatul Ummah Surabaya, MAN Insan Cendekia Serpong dan melanjutkan pendidikan di Matematika ITS pada tahun 2011 melalui jalur SNMPTN Undangan dengan NRP 1211100052. Di jurusan Matematika penulis mengambil bidang minat Riset Operasi dan Pengolahan Data. Selain tekun menjalani studi, penulis juga aktif dalam berorganisasi. Penulis tergabung dalam Himpunan Mahasiswa Matematika ITS sebagai anggota STI 46 dan pernah menjabat sebagai Bendahara Umum II HIMATIKA ITS periode 2012-2013, dan Bendahara Umum I HIMATIKA ITS periode 2013-2014. Untuk keterangan lebih lanjut, dapat menghubungi penulis melalui email : kikyzain@gmail.com