



TUGAS AKHIR - SM141501

**SOLUSI ANALITIK HARGA EUROPEAN PUT
OPTION DISERTAI DIVIDEN DENGAN
REGIME-SWITCHING DUA STATE
MENGGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER**

MARULI MANURUNG
NRP 1211 100 063

Dosen Pembimbing:
Endah Rokhmati S.Si, MT, Ph.D
Drs. Sentot Didik S. M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015

Halaman ini sengaja dikosongkan.



FINAL PROJECT - SM141501

**AN ANALYTICAL SOLUTION OF EUROPEAN
PUT OPTION WITH DIVIDEND IN A
TWO-STATE REGIME-SWITCHING USING
FOURIER TRANSFORM**

MARULI MANURUNG
NRP 1211 100 063

Supervisors:
Endah Rokhmati S.Si, MT, Ph.D
Drs. Sentot Didik S. M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

Halaman ini sengaja dikosongkan.

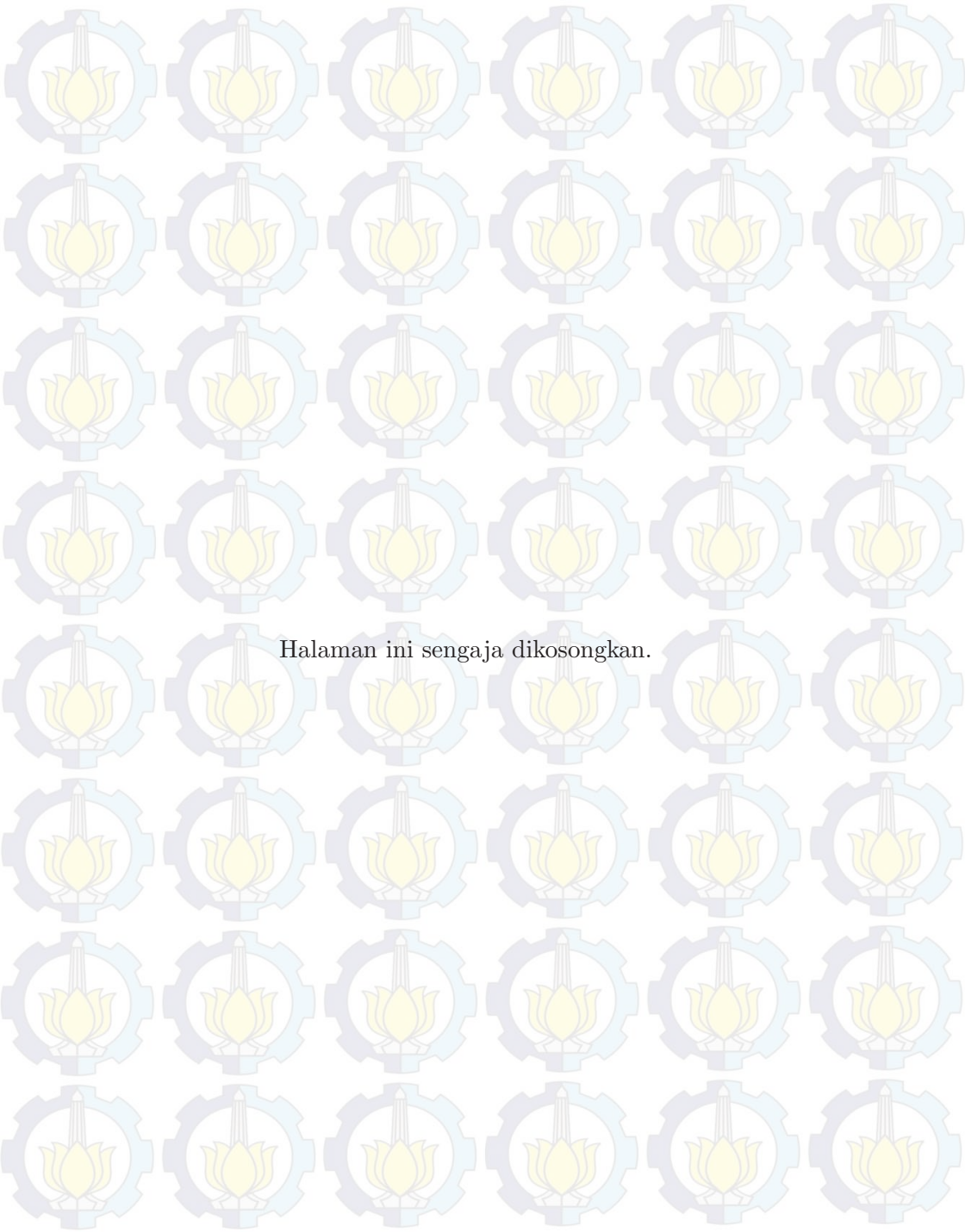
SOLUSI ANALITIK HARGA *EUROPEAN PUT OPTION* DISERTAI DIVIDEN DENGAN *REGIME-SWITCHING* DUA STATE MENGGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER

Nama Mahasiswa : Maruli Manurung
NRP : 1211 100 063
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : 1. Endah Rokhmati S.Si, MT, Ph.D
2. Drs. Sentot Didik S. M.Si

Abstrak

Model Black-Scholes tidak mampu merepresentasikan keadaan pasar yang sebenarnya karena volatilitasnya dianggap konstan. Oleh karena itu model Black-Scholes dikombinasikan dengan regime-switching. Disini, dijabarkan solusi analitik dari European put option disertai dividen dengan regime-switching menggunakan transformasi Fourier dan invers Fourier. Dari hasil simulasi, dapat dilihat bahwa nilai European put option mengalami penurunan baik ketika time to expiry, harga saham, dan interest rate meningkat. Ketika suatu parameter laju dari suatu state semakin besar maka nilai European put option disertai dividen dengan regime-switching dari state tersebut konvergen ke European put option disertai dividen dengan regime-switching dari state lainnya. Kombinasi volatilitas dari kedua state menyebabkan nilai European put option disertai dividen dengan regime-switching berada diantara nilai European put option dengan model Black-Scholes klasik (tanpa regime-switching) disertai dividen.

Kata-kunci: *Model Black-Scholes, regime-switching, European put option, transformasi Fourier, invers Fourier.*



Halaman ini sengaja dikosongkan.

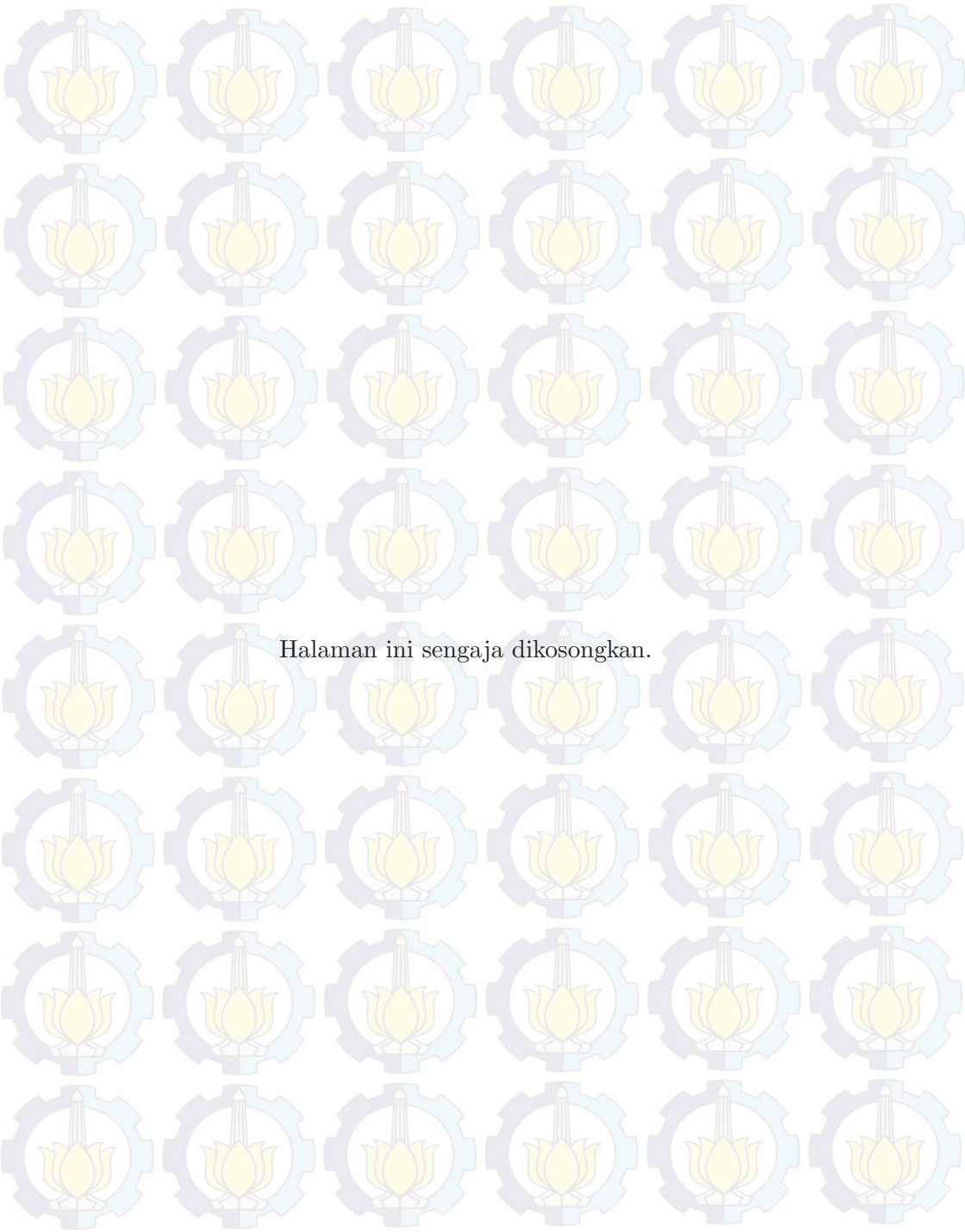
AN ANALYTICAL SOLUTION OF EUROPEAN PUT OPTION WITH DIVIDEND IN A TWO-STATE REGIME-SWITCHING USING FOURIER TRANSFORM

Name : Maruli Manurung
NRP : 1211 100 063
Department : Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors : 1. Endah Rokhmati S.Si, MT, Ph.D
2. Drs. Sentot Didik S. M.Si

Abstract

The Black-Scholes cannot represent the reality of the financial market because of its constant volatility. Therefore, the Black-Scholes model is combined with a regime-switching. Here, an analytical solution of European put option with dividend in a regime-switching using Fourier transform and its inversion is derived. The simulation results show that European put option values decrease as time to expiry, stock price and interest rate increase. As a rate parameter of a state increases, the European put option value with dividend in regime-switching of this state converges to the European put option value with dividend in regime-switching of another state. The combination between two volatilities causes European put option values with dividend in regime-switching lie in between the two classical Black-Scholes option values.

Key-words: *The Black-Scholes model, regime-switching, European put option, Fourier Transform, Fourier inversion.*



Halaman ini sengaja dikosongkan.

LEMBAR PENGESAHAN

SOLUSI ANALITIK HARGA *EUROPEAN PUT OPTION* DISERTAI DIVIDEN DENGAN *REGIME-SWITCHING DUA STATE* MENGGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER

AN ANALYTICAL SOLUTION OF EUROPEAN PUT OPTION WITH DIVIDEND IN A TWO-STATE REGIME-SWITCHING USING FOURIER TRANSFORM

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada

Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

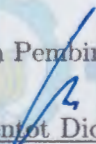
Oleh:

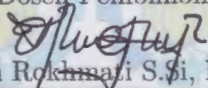
MARULI MANURUNG
NRP. 1211 100 063

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,

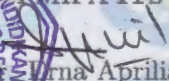

Drs. Sentot Didik S. M.Si
NIP. 19600527 198701 1 001


Endah Rokhmahati S.Si, MT, Ph.D
NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,

Jurusan Matematika

FPMIPA ITS


Prof. Verna Apriliani, M.Si
NIP. 19650414 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015



KATA PENGANTAR

Salam sejahtera,
Bersyukur kepada Tuhan Yesus Kristus yang telah memimpin, menyertai dan memberkati, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

**”SOLUSI ANALITIK HARGA EUROPEAN PUT
OPTION DISERTAI DIVIDEN DENGAN
REGIME-SWITCHING DUA STATE
MENGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER”**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliansi, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan bimbingan selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Ibu Endah Rochmati S.Si, MT, Ph.D dan Bapak Drs. Sentot Didik S. M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Ibu Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes, Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si, Ibu Dra. Titik Mudjiati, M.Si, dan Ibu

Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tugas Akhir ini.

4. Bapak Chairul Imron, MI.Komp. selaku koordinator Tugas Akhir dan Mas Ali.
5. Ibu Dra. Wahyu Fistia Doctorina, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Mei 2015

Penulis

Special Thank's To

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari pimpinan Tuhan Yesus Kristus dan semangat dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Papa dan Mama, kedua orang tua ku tercinta terima kasih atas segala doanya, juga kasih sayang dan pendidikan yang selalu dicurahkan kepada penulis selama ini.
2. Adik-adikku, Aldi dan Rahel, yang memberikanku canda dan tawa, meskipun kadang buat kesel juga sih hehehe.
3. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir, yang saling mendukung dan memotivasi satu sama lain.
4. Teman-teman angkatan 2011, terima kasih atas doa dan dukungan kalian selama ini.
5. Semua pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini.



Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xv
DAFTAR GAMBAR.....	xix
DAFTAR TABEL.....	xxi
DAFTAR SIMBOL.....	xxiii
BAB I. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 <i>Option</i> (Opsis)	
2.2.1 Komponen dalam <i>Option</i>	8
2.2.2 Mekanisme <i>Option</i>	9
2.2.3 Faktor-faktor yang mempengaruhi harga <i>Option</i>	9
2.2.4 Keuntungan Perdagangan <i>Option</i>	11
2.3 Proses Stokastik	12

2.2.1	Persamaan Differensial Stokastik.....	12
2.2.2	Rantai Markov Waktu Kontinu	13
2.4	Model Black-Scholes.....	13
2.5	Syarat Batas Persamaan Differensial Parsial	14
2.6	Lemma Ito.....	14
2.7	Transformasi Fourier	14
2.8	Greek	15
BAB III. METODE PENELITIAN		17
3.1	Studi Literatur	17
3.2	Pembentukan Pasangan Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes Disertai Dividen dengan <i>Regime-Switching</i>	17
3.3	Transformasi Fourier Pasangan Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes Disertai Dividen dengan <i>Regime-Switching</i>	17
3.4	Tahap Penyelesaian	18
3.5	Analisis Hasil Simulasi.....	18
3.6	Penarikan Kesimpulan.....	18
BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN		19
4.1	Pembentukan Pasangan Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes Disertai Dividen dengan <i>Regime-Switching</i>	19
4.2	Transformasi Fourier Pasangan Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes Disertai Dividen dengan <i>Regime-Switching</i>	24
4.3	Tahap Penyelesaian.....	33
4.4	Analisis Hasil Simulasi.....	63
BAB V. PENUTUP		71
5.1	Kesimpulan	71
5.2	Saran	72



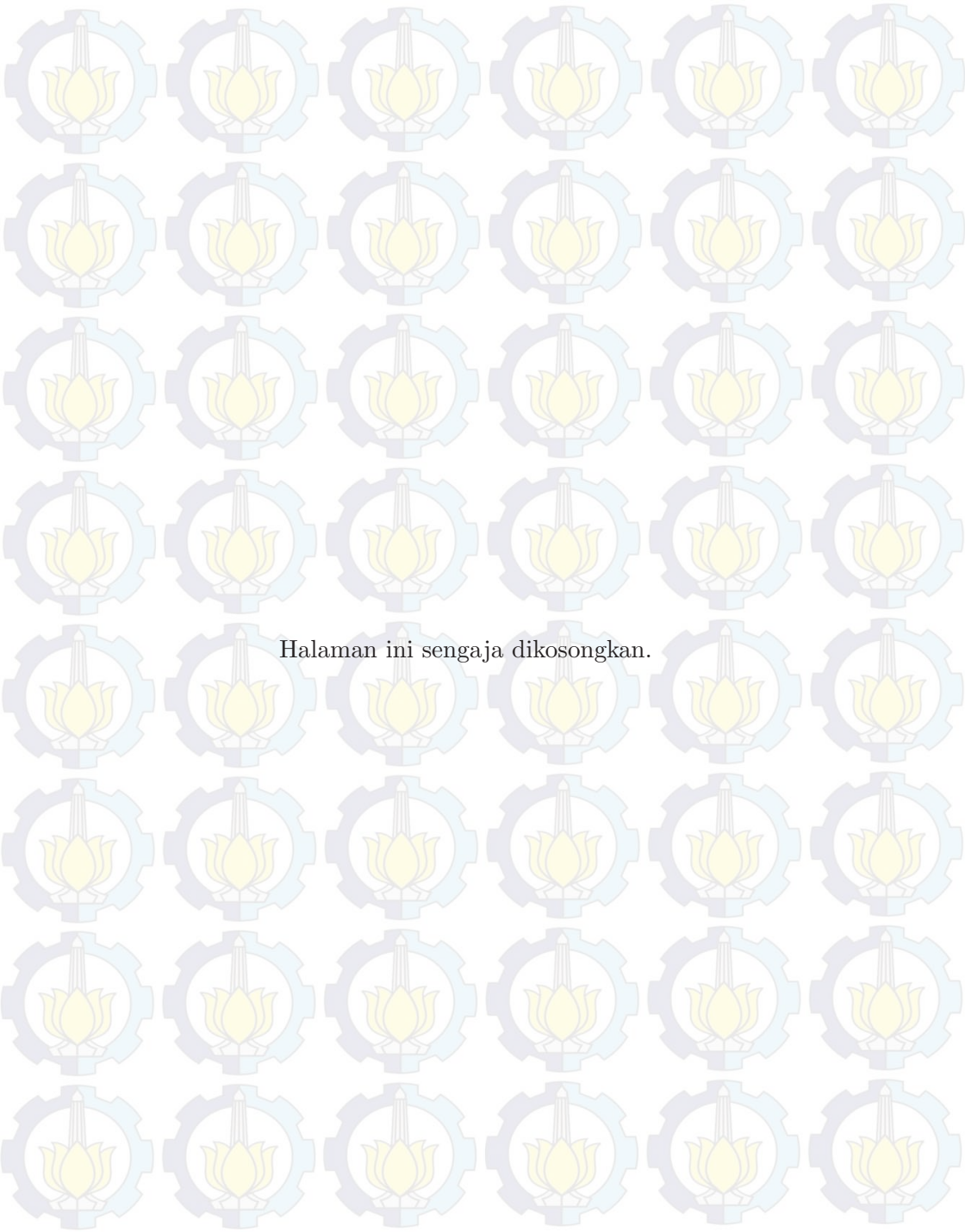
DAFTAR PUSTAKA

73

LAMPIRAN

Biodata Penulis

75



Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 4.1 Proses <i>jumping</i> antara dua <i>state</i>	20
Gambar 4.2 Kontur kompleks untuk menghitung Persamaan (4.39)	44
Gambar 4.3 Nilai <i>Option</i> vs <i>Time to expiry</i> ($T - t$)	64
Gambar 4.4 Nilai <i>Option</i> vs Harga Saham (S)	65
Gambar 4.5 Nilai <i>Option</i> vs <i>Interest Rate</i> (r)	66
Gambar 4.6 V_1 dan V_2 untuk $\lambda_{12} = 0$	67
Gambar 4.7 V_1 dan V_2 untuk $\lambda_{12} = 1$	67
Gambar 4.8 V_1 dan V_2 untuk $\lambda_{21} = 0$	68
Gambar 4.9 V_1 dan V_2 untuk $\lambda_{21} = 1$	68



Halaman ini sengaja dikosongkan.



DAFTAR TABEL

		Halaman
Table 4.1	Perbandingan BS_1 , BS_2 , V_1 V_2 terhadap $T - t \dots$	63
Table 4.2	Perbandingan BS_1 , BS_2 , V_1 V_2 terhadap $S \dots\dots\dots$	64
Table 4.3	Perbandingan BS_1 , BS_2 , V_1 V_2 terhadap $r \dots\dots\dots$	65



Halaman ini sengaja dikosongkan.

Daftar Simbol

- X_t : *State* pada saat t .
 V_j : Nilai *European put option* pada *state* j .
 S : Harga saham.
 E : *Strike price*.
 T : *Expiration / maturity date*.
 W : Proses Wiener.
 r : *Interest rate*.
 σ_j : *volatilitas* *state* j .
 μ : *Drift*.
 λ_{jk} : Laju dari *state* j ke *state* k .
 D : Dividen.
 Π : Harga portofolio.
 Δ : Laju perubahan nilai *option* terhadap harga saham.
 \mathcal{F} : Transformasi Fourier.
 BS : Black-Scholes.



Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Lalu diberikan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Saat ini sudah banyak perdagangan yang terjadi di pasar saham. Salah satunya yang banyak diperdagangkan adalah sekuritas. Sekuritas adalah suatu kontrak keuangan yang menyatakan bahwa pemegangnya adalah pemilik yang sah dari suatu aset. Sekuritas yang nilainya bergantung aset yang mendasarinya disebut sekuritas derivatif. Dari macam-macam sekuritas derivatif yang diperdagangkan di pasar saham, yang paling populer adalah *option*.

Option (opsi) adalah kontrak antara *holder* dan *writer* yang memberikan hak, bukan kewajiban, kepada *holder* untuk membeli atau menjual aset dengan harga tertentu (*strike price*) dan pada waktu tertentu (*expiration date / maturity date*) sesuai dengan kesepakatan [1]. Terdapat dua jenis *option*, yaitu *call option* dan *put option*. *Call option* adalah suatu kontrak yang memberikan hak kepada *holder* untuk membeli aset dasar dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu, sementara *put option* adalah suatu kontrak yang memberikan hak kepada *holder* untuk menjual aset

dasar dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu. Ada banyak *option* yang ada di pasar saham, salah satunya adalah *European option*, yang mana hanya bisa di*exercise* pada *expiration date*.

Model yang sering digunakan untuk mengevaluasi nilai *option* adalah model Black-Scholes dimana volalitasnya diasumsikan konstan. Asumsi ini tidak bisa merepresentasikan realita keadaan pasar saham yang mana volatilitasnya mengikuti proses stokastik, sehingga dibutuhkan sebuah model yang lebih realistis menggambarkan keadaan pasar. Salah satu konsep yang digunakan untuk mengatasi masalah ini adalah model Black-Scholes dengan *regime-switching*. Pada penelitian yang dilakukan oleh Badran dkk [2], dijelaskan mengenai solusi analitik dari *European put option* tanpa dividen dengan *regime-switching* menggunakan transformasi Fourier. Dalam perspektif ekonomi, *regime-switching* menggambarkan perubahan pilihan dan kepercayaan investor terhadap harga aset seiring dengan perubahan keadaan ekonomi sehingga proses *regime-switching* mampu menggambarkan keadaan pasar yang lebih realistis sesuai dengan keadaan ekonomi, baik saat keadaan ekonomi sedang lesu maupun sedang bertumbuh.

Berdasarkan permasalahan di atas, dalam Tugas Akhir ini penulis menjabarkan solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* menggunakan transformasi Fourier.

1.2 Rumusan Masalah

Berkaitan dengan latar belakang di atas, disusun suatu rumusan masalah yang dibahas dalam Tugas Akhir ini yaitu:

1. Bagaimana solusi analitik dari *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* menggunakan transformasi Fourier.

2. Bagaimana analisis hasil simulasi dari solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* menggunakan transformasi Fourier.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini antara lain:

1. *Regime-switching* terjadi pada dua *state*, yaitu ekonomi sedang lesu dan ekonomi sedang bertumbuh.
2. Dividen yang digunakan adalah kontinu.
3. Tidak ada biaya pajak dan transaksi.
4. Simulasi menggunakan software Matlab.

1.4 Tujuan

Tujuan yang dicapai dari penulisan Tugas Akhir ini antara lain:

1. Mengetahui solusi analitik dari *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* menggunakan transformasi Fourier.
2. Mendapatkan analisis hasil simulasi dari solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* menggunakan transformasi Fourier.

1.5 Manfaat

Manfaat dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Dapat dijadikan salah satu metode dalam mengestimasi harga *European put option* dengan dividen.
2. Diperoleh pengetahuan mengenai penerapan *regime-switching* dan transformasi Fourier dalam menentukan nilai *European put option* disertai dividen.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

Pada Bab ini dijelaskan gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II diuraikan tentang penelitian terdahulu mengenai harga sekuritas derivatif dengan *regime-switching*, *option*(opsi), dividen, proses stokastik, Model Black-Scholes, syarat batas persamaan diferensial parsial untuk *European put option*, Lemma Ito, transformasi Fourier, dan *Greek*.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, pembedaan pasangan persamaan diferensial parsial Black-Scholes disertai dividen dengan *regime-switching*, transformasi Fourier pada persamaan diferensial parsial Black-Scholes disertai dividen dengan *regime-switching*, dan mendapatkan solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching*. Selanjutnya dilakukan simulasi dan analisis terhadap hasil yang didapat.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada Bab IV dibahas secara detail bagaimana memperoleh solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* dan penjelasan mengenai analisa hasil simulasi yang diperoleh.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.



Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan tentang penelitian terdahulu mengenai harga sekuritas derivatif dengan *regime-switching*, *option*(opsi), proses stokastik, model Black-Scholes, syarat batas persamaan diferensial parsial untuk *European put option*, dan transformasi Fourier.

2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian tentang penentuan harga sekuritas derivatif dengan *regime-switching* telah dilakukan oleh beberapa orang. Naik [3] adalah orang pertama yang menjabarkan tentang penentuan harga *European option* dengan volatilitas yang diasumsikan bergerak antara dua *state* secara acak. Di Masi dkk [4], menjelaskan mengenai *mean-varians hedging* dari *European option* dimana drift dan volatilitasnya mengikuti proses *regime switching*.

Guo [5] menjelaskan tentang solusi tertutup (*closed-form solution*) dari *European call option* yang bebas *arbitrage* dengan dua *state* ekonomi. Hasil dari Guo [5] ini lebih baik dibandingkan dengan hasil yang dikemukakan oleh Naik [3] karena drift, volatilitas dan dividen diasumsikan bergantung pada *state* ekonomi. Sementara itu Sepp dan Skachkov [6] menjelaskan tentang penentuan harga *European call option* dengan *regime-switching* dua *state* menggunakan transformasi Laplace, namun invers Laplace tidak mampu diselesaikan secara analitik. Kemudian Badran dkk [2], menjabarkan tentang solusi analitik *European put option* tanpa dividen dengan *regime-switching* dua *state* menggunakan transformasi

Fourier. Tidak seperti Sepp dan Skachkov [6], Badran dkk [2] mampu menyelesaikan invers Fourier secara analitik.

2.2 *Option*(Opsi)

Option (opsi) adalah kontrak antara *holder* dan *writer* yang memberikan hak, bukan kewajiban, kepada *holder* untuk membeli atau menjual aset dengan harga tertentu (*strike price*) dan pada waktu tertentu (*expiration date / maturity date*) sesuai dengan kesepakatan.

2.2.1 *Komponen Dalam Option*

Ada beberapa komponen yang mendasari kontrak *option*, yaitu [7]:

1. ***Underlying asset***. *Option* yang diperdagangkan dalam pasar *option* hanya tersedia untuk sekuritas-sekuritas tertentu dan indeks-indeks yang disetujui. Sekuritas-sekuritas tersebut (disebut aset yang mendasar / *underlying asset*) diperdagangkan dalam pasar modal dan dipilih oleh organisasi *clearing* sesuai dengan persyaratan tertentu.
2. ***Maturity date / Expiration date***. *Maturity date* adalah tanggal batas *option* untuk di*exercise* sebelum menjadi kadaluarsa. *Maturity date* ditentukan oleh organisasi *clearing*.
3. ***Strike price***. *Strike price* adalah harga pembelian atau penjualan yang telah ditentukan untuk saham yang mendasari jika *option* di*exercise*. Organisasi *clearing* menentukan *strike price* untuk semua *option* yang terdaftar dalam pasar *option*.
4. **Premi** . Premi *option* ditentukan oleh perjanjian antara *holder* dan *writer*. Premi tidak ditentukan oleh organisasi *clearing*.

2.2.2 Mekanisme *Option*

Pada dasarnya ada dua jenis *option*, yaitu:

1. *Call Option*. *Call option* memberikan hak kepada *holder* untuk membeli aset dasar dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu [8]. Ada dua pihak dalam *call option*, yaitu pembeli opsi beli (*call option buyer / long call*) dan penjual opsi beli (*call option seller / short call*).
2. *Put Option*. *Put option* memberikan hak kepada *holder* untuk menjual aset dasar dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu [8]. Ada dua pihak dalam *put option*, yaitu pembeli opsi jual (*put option buyer / long put*) dan penjual opsi jual (*put option seller / short put*).

Ketika hak untuk membeli atau menjual tersebut telah digunakan oleh pemiliknya, dikatakan bahwa *option* telah *diexercise*. Saat ini *option* yang diperdagangkan tidak hanya terbatas pada saham (*stock option*) saja tetapi juga *option* pada indeks saham (*stock index option*) dan lainnya.

Banyak *option* yang diperdagangkan di pasar saham, seperti *European option*, *American option*, *Asian option* dan *barrier option*, namun yang sering diperdagangkan adalah *European options* dan *American options*. Perbedaan dua *option* ini yaitu pada waktu *exercise option*. *American option* dapat *diexercise* sewaktu-waktu sampai batas *expiration date* sedangkan *European option* hanya pada *expiration date* saja.

2.2.3 Faktor-faktor yang mempengaruhi harga *option*

Ada beberapa hal yang mempengaruhi harga *option*, antara lain :

1. Harga aset yang mendasarinya / *Underlying asset*. *Underlying asset* adalah faktor terpenting yang

mempengaruhi harga *option* karena harga aset tersebut dijadikan acuan dalam menentukan harga *option*. Harga *call option* akan semakin tinggi jika harga aset yang mendasarinya semakin tinggi. Dan sebaliknya harga *put option* akan semakin tinggi jika harga aset yang mendasarinya semakin rendah.

2. Jangka waktu jatuh tempo. Jangka waktu jatuh tempo mempengaruhi harga *option*. Semakin panjang jangka waktu jatuh tempo, maka makin tinggi harga *call option*, sedangkan harga *put option* semakin rendah.
3. Suku bunga bebas resiko / *Risk free interest rate*. Jika tingkat suku bunga dalam perekonomian mengalami kenaikan, maka berpengaruh pada harapan kenaikan harga atas *underlying asset* (dalam hal ini saham). Dengan asumsi semua variabel tetap, maka harga *put option* akan menurun apabila *risk free interest rate* mengalami peningkatan. Dan sebaliknya, harga *call option* akan selalu meningkat seiring dengan peningkatan *risk free interest rate*.
4. Volatilitas. Volatilitas atas *underlying asset* adalah ukuran tingkat ketidakpastian mengenai pergerakan *underlying asset* tersebut dimasa datang. Jika volatilitas semakin meningkat maka akan semakin meningkat pula peluang *underlying asset* mengalami peningkatan atau malah mengalami penurunan. Semakin besar volatilitas (semakin bergerak naik turun) semakin tinggi nilai *call option* dan *put option*.
5. Dividen. Dividen adalah pembagian laba kepada pemegang saham berdasarkan banyaknya saham yang dimiliki [9]. Dividen akan menurunkan harga *European call option* dan menaikkan harga *European put option*.

6. *Moneyness*. *Moneyness* merupakan perbedaan antara harga aset saat ini dengan *strike price*. *Call option* akan mempunyai nilai (*in the money*) jika *strike price* lebih rendah dari harga aset tersebut. Sementara *put option* akan mempunyai nilai jika *strike price* lebih tinggi dari harga aset tersebut.

2.2.4 Keuntungan perdagangan *option*

Ada beberapa keuntungan dalam perdagangan *option*, yaitu :

1. Manajemen Resiko. *Put option* memberi kesempatan investor yang memiliki saham untuk melakukan hedge (melindungi atau menjaga nilai saham tersebut) melalui penundaan penjualan saham yang dimilikinya terhadap kemungkinan kejatuhan harga sehingga dapat menghindari resiko kerugian.
2. Memberikan Waktu Untuk Memutuskan. Pemegang *option* mempunyai kesempatan memutuskan apakah akan meng*exercise option* dan menjual/membeli aset dasar atau tidak sampai pada *maturity date*.
3. Menyediakan Sarana Spekulasi. Para investor dapat memperoleh keuntungan jika dapat memprediksi harga naik dengan pertimbangan membeli *call option*, dan sebaliknya jika memprediksi harga cenderung turun dapat mempertimbangkan untuk membeli *put option*.
4. Daya (*Leverage*). *Option* memberikan kesempatan untuk mendapatkan pengembalian lebih tinggi daripada melakukan investasi secara langsung.
5. Diversifikasi. Dengan melakukan perdagangan *option* dapat memberikan kesempatan pada investor untuk

melakukan diversifikasi portofolio yang bertujuan memperkecil resiko investasi portofolio.

6. Penambahan Pendapatan. Pemegang saham dapat memperoleh tambahan yaitu dengan menerbitkan *call option* atas saham mereka sehingga mereka akan menerima premi dari *option* tersebut.

2.3 Proses Stokastik

Proses stokastik adalah himpunan variabel acak dalam bentuk $\{X_t(s), t \in T, s \in S\}$ dengan T adalah beberapa himpunan indeks yang disebut *parameter space* dan S adalah ruang sampel dari peubah acak yang disebut *state space*. Untuk setiap t tertentu, $X_t(s)$ menyatakan suatu peubah acak yang didefinisikan pada S . Untuk setiap s tertentu, $X_t(s)$ berhubungan dengan fungsi yang didefinisikan pada T yang disebut lintasan sampel (*sample path*).

Karena $\{X_t(s)$ adalah suatu variabel acak, maka tidak diketahui secara pasti pada keadaan mana proses tersebut akan berada pada saat t . Himpunan semua nilai yang mungkin dari $X_t(s)$ disebut ruang keadaan dari proses tersebut. Secara singkat proses stokastik adalah himpunan peubah acak yang menggambarkan dinamika dari suatu proses.

2.3.1 Persamaan Diferensial Stokastik

Perubahan harga aset merupakan salah satu contoh proses stokastik, karena perubahannya seiring waktu dengan cara yang tidak pasti. Fluktuasi harga aset dinyatakan secara matematis dengan persamaan diferensial stokastik. Persamaan diferensial stokastik untuk harga saham yang disertai dividen diberikan oleh [10]:

$$dS(t) = (\mu_{X_t} - D)S(t)dt + \sigma_{X_t}S(t)dW(t), \quad (2.1)$$

dimana X_t adalah rantai Markov dengan *state* berhingga, μ adalah drift, D adalah dividen, σ adalah volatilitas, $S(t)$

adalah harga saham pada saat t , dan $W(t)$ adalah proses Wiener atau biasa disebut *Brownian Motion*. μ dan σ diasumsikan konstan.

2.3.2 Rantai Markov Waktu Kontinu

Suatu proses stokastik dengan *state* $X_t, t \geq 0$ pada *state space* S dikatakan rantai Markov waktu kontinu jika [11] :

$$\begin{aligned} P(X(s+t) = j | X(s) = i, X(u), 0 \leq u \leq s) &= P(X(s+t) \\ &= j | X(s) = i), t, s \geq 0, i, j \in S \end{aligned}$$

Pada rantai Markov (diskrit maupun kontinu), terdapat proses *jumping* pada beberapa *state*. Oleh karena itu, *regime-switching* merupakan salah satu rantai Markov, karena terjadi *jumping* antar *state*.

2.4 Model Black-Scholes

Model Black-Scholes atau yang juga dikenal dengan model Black-Scholes-Merton adalah salah satu konsep yang paling penting dalam dunia pasar finansial. Model ini dikembangkan pertama kali oleh Fischer Black, Robert Merton dan Myron Scholes pada tahun 1973. Pada model Black-Scholes, harga sekuritas diasumsikan mengikuti *Brownian Motion* dan bebas dari *arbitrage* [11]. Nilai *European put option* dengan model Black-Scholes klasik disertai dividen diberikan oleh [8]:

$$BS(S, t) = Ee^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - Se^{-D(T-t)}\mathcal{N}(-d_1) \quad (2.2)$$

dengan $BS(S, t)$ adalah nilai *European put option*, E adalah *strike price*, r adalah *interest rate*, S adalah harga aset dasar, T adalah *maturity date*, D adalah dividen, $\mathcal{N}(\cdot)$ adalah cdf distribusi normal dan

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/E) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \end{aligned}$$

2.5 Syarat Batas Persamaan Diferensial Parsial

Untuk mengestimasi harga *European put option*, ada syarat-syarat batas yang harus diperhatikan. Syarat batas untuk *European put option* disertai dividen dengan *strike price* $E > 0$ dan *expiration date* $T > 0$ diberikan oleh [10]:

$$V(0, t) = Ee^{-r(T-t)} \quad (2.3)$$

$$V(S, t) = 0 \text{ untuk } S \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

$$V(S, T) = \max\{E - S, 0\}. \quad (2.5)$$

2.6 Lemma Ito

Lemma Ito sangat bermanfaat untuk menghitung nilai *option* dalam hal manipulasi variabel random yang digunakan. Persamaan diferensial dengan konsep Lemma Ito untuk *option* disertai dividen dinyatakan sebagai berikut [10]:

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW + \left\{ (\mu - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt. \quad (2.6)$$

2.7 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan dan sejarawan dari Prancis bernama Jean Baptist Joseph Fourier. Transformasi Fourier adalah transformasi fungsi-fungsi yang bernilai riil atau kompleks ke fungsi-fungsi yang bernilai kompleks. Definisi matematis transformasi Fourier adalah sebagai berikut [12]:

Definisi 2.7.1

Misalkan $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ adalah sebuah fungsi konvergen dan $f(x)$ kontinu sepotong-sepotong pada setiap interval berhingga, maka transformasi Fourier dinyatakan oleh

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \hat{f}(\omega), \quad (2.7)$$

sementara invers transformasi Fourier dinyatakan sebagai berikut

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (2.8)$$

Seperti halnya transformasi yang lain, transformasi Fourier juga memiliki sifat-sifat. Berikut adalah beberapa sifat dari transformasi Fourier:

1. Sifat penjumlahan

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi, maka

$$\mathcal{F}\{f(x) + g(x)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) + \mathcal{F}\{g(x)\}(\omega).$$

2. Sifat linear

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi dan a konstan, maka

$$\mathcal{F}\{af(x)\}(\omega) = a\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega).$$

3. Sifat turunan

Diberikan $f^{(n)}(x)$ adalah turunan ke- n dari fungsi $f(x)$, maka

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\}(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega). \quad (2.9)$$

2.8 *Greek*

Greek adalah salah satu cara manajemen resiko dalam perdagangan *option*, yaitu dengan memperhatikan perubahan nilai *option* terhadap waktu *exercise*, harga saham, *interest rate* dan volatilitas [8]. Ada 5 macam *Greek*, yaitu:

1. Theta (Θ)

Theta adalah laju perubahan nilai *option* terhadap waktu *exercise*. Secara matematis ditulis $\Theta = \frac{dV}{d(T-t)}$.

2. Delta (Δ)

Delta adalah laju perubahan nilai *option* terhadap harga saham. Secara matematis ditulis $\Delta = \frac{dV}{dS}$.

3. Gamma (Γ)

Gamma adalah laju perubahan nilai *Delta option* terhadap harga saham. Secara matematis ditulis $\Gamma = \frac{d\Delta}{dS}$.

4. Rho (ρ)

Rho adalah laju perubahan nilai *option* terhadap waktu *interest rate*. Secara matematis ditulis $\rho = \frac{dV}{dr}$.

5. Vega (ν)

Vega adalah laju perubahan nilai *option* terhadap volatilitas. Secara matematis ditulis $\nu = \frac{dV}{d\sigma}$.

BAB III METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pengumpulan teori-teori pendukung yang menunjang, yaitu mengenai *option*, dividen, proses stokastik, model Black-Scholes, persamaan diferensial parsial Black-Scholes, *regime-switching*, transformasi Fourier dan *Greek*.

3.2 Pembentukan Pasangan Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes Disertai Dividen dengan *Regime-Switching*

Pada tahapan ini, dibentuk sebuah pasangan persamaan diferensial parsial Black-Scholes disertai dividen yang bergantung pada dua *state*, yaitu ekonomi sedang lesu dan ekonomi sedang bertumbuh dengan menggunakan konsep nilai ekspektasi, asumsi *risk-neutral* dan syarat batas nilai *European put option*.

3.3 Transformasi Fourier Pasangan Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes Disertai Dividen dengan *Regime-Switching*

Dalam tahapan ini, pasangan persamaan diferensial parsial Black-Scholes disertai dividen dengan *regime-switching* diubah menggunakan variabel non-dimensial. Selanjutnya, diterapkan transformasi Fourier pada pasangan persamaan

diferensial parsial Black-Scholes disertai dividen dengan *regime-switching* agar menjadi persamaan diferensial biasa.

3.4 Tahap Penyelesaian

Pada tahapan ini, pasangan persamaan diferensial biasa yang diperoleh dari subbab 3.3 dipisahkan untuk diselesaikan dengan menggunakan metode yang berlaku dalam penyelesaian pasangan persamaan diferensial biasa. Untuk memperoleh solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching*, digunakan invers Fourier pada penyelesaian persamaan diferensial biasa. Penyelesaian invers Fourier dilakukan dengan menerapkan teorema residu Cauchy, Lemma Jordan dan sifat-sifat yang berlaku pada bilangan kompleks.

3.5 Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini dilakukan analisis terhadap hasil simulasi dari solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching*.

3.6 Penarikan Kesimpulan

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan mengenai solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* menggunakan transformasi Fourier.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

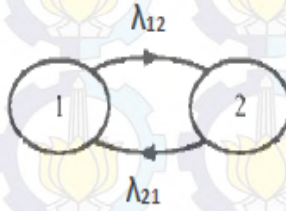
Pada bab ini dibahas solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching*. Pembahasan dimulai dengan pembentukan pasangan persamaan diferensial parsial Black Scholes untuk *European put option*. Kemudian dilanjutkan dengan pengubahan pasangan persamaan diferensial parsial Black-Scholes dengan *regime-switching* menggunakan variabel nondimensional. Lalu, dilakukan transformasi Fourier pada pasangan persamaan diferensial parsial Black-Scholes dengan *regime-switching*. Setelah itu, hasil dari transformasi Fourier dipisahkan untuk diselesaikan kemudian dilakukan invers Fourier untuk memperoleh penyelesaiannya. Terakhir, diberikan analisis hasil simulasi dari solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* menggunakan transformasi Fourier.

4.1 Pembentukan Pasangan Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes *European Put Option* disertai dividen dengan *Regime-Switching*

Misalkan X_t adalah rantai Markov waktu kontinu yang menggambarkan perubahan *state* yang terjadi, yaitu keadaan ekonomi lesu dan keadaan ekonomi bertumbuh. Maka secara matematis ditulis sebagai berikut:

$$X_t = \begin{cases} 1, & \text{jika ekonomi bertumbuh} \\ 2, & \text{jika ekonomi lesu.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Perubahan yang terjadi pada dua *state* ini yang disebut dengan *regime-switching* (Lihat Gambar 4.1).



Gambar 4.1: Proses *jumping* antara dua *state*

Dari Gambar 4.1, terlihat bahwa laju perubahan dari *state* 1 ke *state* 2 adalah λ_{12} dan laju perubahan dari *state* 2 ke *state* 1 adalah λ_{21} . Konsekuensinya, peluang *state* 1 tetap berada pada *state* 1 atau menjadi *state* 2 adalah $1 - \lambda_{12}dt$ dan $\lambda_{12}dt$ dan peluang *state* 2 tetap berada pada *state* 2 atau menjadi *state* 1 adalah $1 - \lambda_{21}dt$ dan $\lambda_{21}dt$. Misalkan posisi awal keadaan ekonomi adalah *state* 1, maka besarnya perubahan harga *option* adalah sebagai berikut:

$$dV = \begin{cases} V_1(S(t+dt), t+dt) - V_1(S(t), t), & p = 1 - \lambda_{12}dt \\ V_2(S(t+dt), t+dt) - V_1(S(t), t), & p = \lambda_{12}dt. \end{cases}$$

Jika diasumsikan

$$\begin{aligned} V_1(S(t+dt), t+dt) - V_1(S(t), t) &= dV_1 \\ V_2(S(t+dt), t+dt) - V_1(S(t), t) &= dV_2 + V_2 - V_1, \end{aligned}$$

maka

$$dV = \begin{cases} dV_1, & p = 1 - \lambda_{12}dt \\ dV_2 + V_2 - V_1, & p = \lambda_{12}dt. \end{cases} \quad (4.2)$$

Sekarang, dibentuk sebuah portofolio dari *option* dan sejumlah $-\Delta$ *underlying asset*. Nilai dari portofolio ini adalah

$$\Pi = V - \Delta S. \quad (4.3)$$

Sementara besarnya perubahan nilai portofolio bila terjadi pembayaran dividen adalah

$$d\Pi = dV - \Delta dS - DS\Delta dt.$$

Dengan menggunakan nilai dV seperti pada Persamaan (4.2), maka besarnya perubahan nilai portofolio menjadi

$$d\Pi = \begin{cases} dV_1 - \Delta dS - DS\Delta dt & , \quad p = 1 - \lambda_{12}dt \\ dV_2 + V_2 - V_1 - \Delta dS - DS\Delta dt, & p = \lambda_{12}dt. \end{cases}$$

Kemudian dicari nilai ekspektasi dari $d\Pi$, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E[d\Pi] &= (dV_1 - \Delta dS - DS\Delta dt)(1 - \lambda_{12}dt) \\ &\quad + (dV_2 + V_2 - V_1 - \Delta dS - DS\Delta dt)\lambda_{12}dt \\ &= dV_1 - \Delta dS - DS\Delta dt - \lambda_{12}dV_1dt + \lambda_{12}\Delta dSdt \\ &\quad + \Delta dV_2dS + \lambda_{12}V_2dt - \lambda_{12}V_1dt - \Delta dS\lambda_{12}dt. \end{aligned}$$

Selanjutnya, diterapkan konsep *risk-neutral* untuk menghitung nilai *option*. Konsep *risk-neutral* mengasumsikan bahwa investor tidak meminta *return* ekstra dari investasinya. Akibatnya, investor berekspektasi keuntungan / *profit* dari portofolio adalah sebanyak perubahan dari dana yang diinvestasikan (Π), secara matematis ditulis $E[d\Pi] = d\Pi$. Sehingga

$$d\Pi = dV_1 - \Delta dS - DS\Delta dt + \lambda_{12}dt(dV_2 - dV_1 + V_2 - V_1). \quad (4.4)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.6) pada Persamaan (4.4), diperoleh

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= \sigma_1 S \frac{\partial V_1}{\partial S} dW + \left\{ (\mu - D) S \frac{\partial V_1}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \frac{\partial V_1}{\partial t} \right\} dt \\
 &\quad - \Delta \{ (\mu - D) S dt + \sigma_1 S dW \} - DS \Delta dt + \lambda_{12} dt \\
 &\quad \times \left\{ \left(\sigma_2 S \frac{\partial V_2}{\partial S} dW + \left[(\mu - D) S \frac{\partial V_2}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{\partial V_2}{\partial t} \right] dt \right) - \left(\sigma_1 S \frac{\partial V_1}{\partial S} dW + \left[(\mu - D) S \frac{\partial V_1}{\partial S} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \frac{\partial V_1}{\partial t} \right] dt \right) + V_2 - V_1 \right\}.
 \end{aligned}$$

Karena $dW dt = 0$ dan $dt^2 = 0$ [10], maka

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= \sigma_1 S \left(\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta \right) dW + \left[\mu S \left(\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta \right) \right. \\
 &\quad \left. - DS \frac{\partial V_1}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \frac{\partial V_1}{\partial t} + \lambda_{12} (V_2 - V_1) \right] dt.
 \end{aligned}$$

Untuk menghilangkan *randomness* dalam *random walk* ini, dipilih

$$\Delta = \frac{\partial V_1}{\partial S},$$

sehingga diperoleh

$$d\Pi = \left[\frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \frac{\partial V_1}{\partial t} - DS \frac{\partial V_1}{\partial S} + \lambda_{12} (V_2 - V_1) \right] dt. \quad (4.5)$$

Agar portofolio yang dihasilkan bebas *arbitrage*, maka $d\Pi = r\Pi dt$, sehingga

$$\begin{aligned}
 r\Pi dt &= \left[\frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \frac{\partial V_1}{\partial t} - DS \frac{\partial V_1}{\partial S} + \lambda_{12} (V_2 - V_1) \right] dt \\
 r\Pi &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - DS \frac{\partial V_1}{\partial S} + \lambda_{12} (V_2 - V_1).
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan (4.3) dan memilih kembali $\Delta = \frac{\partial V_1}{\partial S}$, diperoleh

$$\begin{aligned} r\left(V_1 - S \frac{\partial V_1}{\partial S}\right) &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - DS \frac{\partial V_1}{\partial S} + \lambda_{12}(V_2 - V_1) \\ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1 &= \lambda_{12}(V_1 - V_2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Persamaan (4.6) adalah persamaan diferensial parsial Black-Scholes disertai dividen dengan *regime-switching*.

Sementara untuk kasus posisi awal keadaan ekonomi pada *state* 2, dengan cara analog seperti posisi awal pada *state* 1, diperoleh persamaan diferensial parsial Black-Scholes disertai dividen dengan *regime-switching* sebagai berikut:

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V_2}{\partial S} - rV_2 = \lambda_{21}(V_2 - V_1). \quad (4.7)$$

Sehingga bila Persamaan (4.6) dan Persamaan (4.7) masing-masing dikombinasikan dengan syarat batas (2.3), (2.4), (2.5), terbentuk pasangan sistem persamaan diferensial parsial (PDP) Black-Scholes untuk *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V_1}{\partial S} \\ - rV_1 = \lambda_{12}(V_1 - V_2) \\ V_1(0, t) = E e^{-r(T-t)} \\ \lim_{S \rightarrow \infty} V_1(S, t) = 0 \\ V_1(S, T) = \max\{E - S, 0\}, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V_2}{\partial S} \\ -rV_2 = \lambda_{21}(V_2 - V_1) \\ V_2(0, t) = Ee^{-r(T-t)} \\ \lim_{S \rightarrow \infty} V_2(S, t) = 0 \\ V_2(S, T) = \max\{E - S, 0\}. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

4.2 Transformasi Fourier Pasangan Sistem Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes *European Put Option* Disertai Dividen dengan *Regime-Switching*

Agar pasangan sistem PDP Black-Scholes *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* bisa ditransformasi Fourier dengan lebih mudah, maka pasangan sistem PDP harus dinormalisasi dengan menggunakan variabel non-dimensional. Misalkan diberikan variabel non-dimensional sebagai berikut [2]:

$$q_j(x, \tau_j) = \frac{e^x V_j(S, t)}{E}, \quad x = \ln\left(\frac{S}{E}\right), \quad \tau_j = \frac{\sigma_j^2}{2}(T - t), \quad (4.10)$$

untuk $j = 1, 2$. Faktor eksponensial dalam $q_j(x, \tau_j)$ digunakan untuk menjamin bahwa $q_j(x, \tau_j)$ terintegral dalam Transformasi Fourier.

Karena $x = \ln\left(\frac{S}{E}\right)$, maka $e^x = \frac{S}{E}$ akibatnya $q_j = \frac{SV_j}{E^2}$ sehingga diperoleh $V_j = \frac{E^2 q_j}{S}$. Sementara untuk turunannya adalah $\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}$ dan $\frac{\partial \tau_j}{\partial t} = -\frac{\sigma_j^2}{2}$.

a. Mengubah PDP

Di dalam pasangan PDP Black-Scholes *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching*, terdapat

PDP

$$\frac{\partial V_j}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_j^2 S^2 \frac{\partial^2 V_j}{\partial S^2} + (r-D)S \frac{\partial V_j}{\partial S} - rV_j = \lambda_{jk}(V_j - V_k), \quad (4.11)$$

dengan $j = 1, 2, j \neq k$. Komponen-komponen $\frac{\partial V_j}{\partial t}$, $\frac{\partial V_j}{\partial S}$, dan $\frac{\partial^2 V_j}{\partial S^2}$ diubah dengan menggunakan variabel non-dimensional pada Persamaan (4.10).

i. Mengubah $\frac{\partial V_j}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_j}{\partial t} &= \frac{\partial \left(\frac{E^2}{S} q_j \right)}{\partial t} \\ &= \frac{E^2}{S} \frac{\partial q_j}{\partial t} \\ &= \frac{E^2}{S} \frac{\partial q_j}{\partial \tau_j} \frac{\partial \tau_j}{\partial t} \\ &= \frac{E^2}{S} \frac{\partial q_j}{\partial \tau_j} \left(-\frac{\sigma_j^2}{2} \right) \\ &= -\frac{E^2}{S} \frac{\sigma_j^2}{2} \frac{\partial q_j}{\partial \tau_j}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

ii. Mengubah $\frac{\partial V_j}{\partial S}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_j}{\partial S} &= \frac{\partial \left(\frac{E^2}{S} q_j \right)}{\partial S} \\ &= E^2 \frac{\partial \left(\frac{q_j}{S} \right)}{\partial S} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
&= E^2 \left(\frac{1}{S} \frac{\partial q_j}{\partial S} + q_j \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{S} \right) \right) \\
&= E^2 \left(\frac{1}{S} \frac{\partial q_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + q_j \left(-\frac{1}{S^2} \right) \right) \\
&= E^2 \left(\frac{1}{S^2} \frac{\partial q_j}{\partial x} - \frac{1}{S^2} q_j \right) \\
&= \frac{E^2}{S^2} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - q_j \right). \tag{4.14}
\end{aligned}$$

iii. Mengubah $\frac{\partial^2 V_j}{\partial S^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_j}{\partial S^2} &= \frac{\partial \left[\frac{E^2}{S^2} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - q_j \right) \right]}{\partial S} \\
&= E^2 \frac{\partial \left[\frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - q_j \right) \right]}{\partial S} \\
&= E^2 \left[-\frac{2}{S^3} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - q_j \right) + \frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x \partial S} - \frac{\partial q_j}{\partial S} \right) \right] \\
&= E^2 \left[-\frac{2}{S^3} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - q_j \right) + \frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial S} - \frac{\partial q_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \right] \\
&= E^2 \left[-\frac{2}{S^3} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - q_j \right) + \frac{1}{S^3} \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} - \frac{\partial q_j}{\partial x} \right) \right] \\
&= \frac{E^2}{S^3} \left[-2 \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - q_j \right) + \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} - \frac{\partial q_j}{\partial x} \right) \right] \\
&= \frac{E^2}{S^3} \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial q_j}{\partial x} + 2q_j \right). \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.12), (4.14), dan (4.15) PDP pada Persamaan (4.11), PDP menjadi

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma_j^2}{2} \frac{\partial q_j}{\partial \tau_j} + \frac{1}{2} \sigma_j^2 \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial q_j}{\partial x} + 2q_j \right) + (r - D) \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - q_j \right) \\ - r q_j = \lambda_{jk} (q_j - q_k) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Kedua ruas dalam Persamaan (4.16) dibagi dengan $\frac{2}{\sigma_j^2}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -\frac{\partial q_j}{\partial \tau_j} + \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial q_j}{\partial x} + 2q_j \right) + \left(\frac{2r}{\sigma_j^2} - \frac{2D}{\sigma_j^2} \right) \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - q_j \right) \\ - \frac{2r}{\sigma_j^2} q_j = \frac{2\lambda_{jk}}{\sigma_j^2} (q_j - q_k). \end{aligned}$$

Misal $\gamma_j = \frac{2r}{\sigma_j^2}$, $\delta_j = \frac{2D}{\sigma_j^2}$ dan $\beta_{jk} = \frac{2\lambda_{jk}}{\sigma_j^2}$, maka

$$\begin{aligned} -\frac{\partial q_j}{\partial \tau_j} + \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial q_j}{\partial x} + 2q_j \right) + (\gamma_j - \delta_j) \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - q_j \right) - \gamma_j q_j \\ = \beta_{jk} (q_j - q_k), \\ -\frac{\partial q_j}{\partial \tau_j} + \frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} + (\gamma_j - \delta_j - 3) \frac{\partial q_j}{\partial x} - (2\gamma_j + \beta_{jk} - \delta_j - 2) q_j \\ = -\beta_{jk} q_k. \end{aligned} \quad (4.17)$$

b. Mengubah Syarat Batas PDP

i. Mengubah syarat batas $V_j(0, t) = Ee^{-r(T-t)}$. Karena

$S = 0$ maka $x \rightarrow -\infty$ (karena $x = \ln(S/E)$)

$$\begin{aligned} V_j(0, t) &= Ee^{-r(T-t)} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} q_j &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x E e^{-r(T-t)}}{E} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

ii. Mengubah syarat batas $\lim_{S \rightarrow \infty} V_j(S, t) = 0$. Karena $S \rightarrow \infty$ maka $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} V_j(S, t) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} q_j &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

iii. Mengubah Syarat Batas $V_j(S, T) = \max\{E - S, 0\}$.
Karena $t = T$ maka $\tau_j = 0$ (karena $\tau_j = \frac{\sigma_j^2}{2}(T - t)$)

$$\begin{aligned} V_j(S, T) &= (E - S)^+ \\ q_j(x, 0) &= \frac{e^x (E - S)^+}{E} \\ &= \frac{e^x (E - Ee^x)^+}{E} \\ &= (e^x - e^{2x})^+. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Sehingga dari Persamaan (4.17), (4.18), (4.19), dan (4.20), diperoleh pasangan sistem PDP yang baru yaitu sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{aligned} &-\frac{\partial q_j}{\partial \tau_j} + \frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} + (\gamma_j - \delta_j - 3) \frac{\partial q_j}{\partial x} \\ &-(2\gamma_j + \beta_{jk} - \delta_j - 2)q_j = -\beta_{jk}q_k \\ &\lim_{x \rightarrow -\infty} q_j(x, \tau_j) = 0 \\ &\lim_{x \rightarrow \infty} q_j(x, \tau_j) = 0 \\ &q_j(x, 0) = (e^x - e^{2x})^+, \end{aligned} \right. \quad (4.21)$$

dengan $j = 1, 2, j \neq k$.

Pasangan sistem PDP yang sudah dinormalisasi tersebut diubah ke ruang Fourier dengan menggunakan transformasi Fourier. Transformasi Fourier pada Persamaan (2.7) dengan fungsi $q_j(x, \tau_j)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{F}\{q_j(x, \tau_j)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} q_j(x, \tau_j) dx = \hat{q}_j(\omega, \tau_j), \quad j = 1, 2.$$

Tujuan mengubah PDP ke ruang Fourier adalah untuk menyederhanakan bentuk persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa (PDB). Berikut adalah transformasi Fourier pada komponen-komponen PDP dalam Persamaan (4.21).

i. Transformasi Fourier pada $\frac{\partial q_j}{\partial \tau_j}$

Untuk $j = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial q_1}{\partial \tau_1}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial q_1}{\partial \tau_1} dx \\ &= \frac{d}{d\tau_1} \hat{q}_1(\omega, \tau_1). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Untuk $j = 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial q_2}{\partial \tau_2}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial q_2}{\partial \tau_2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial q_2}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_2} dx. \end{aligned}$$

Dari Persamaan (4.10), diketahui $\tau_j = \frac{\sigma_j^2}{2}(T - t)$, $j = 1, 2$. Karena $\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_2}$ sebanding dengan $\frac{\tau_1}{\tau_2}$, maka $\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_2} =$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = A. \text{ Akibatnya,}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial q_2}{\partial \tau_2}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-i\omega x} \frac{\partial q_2}{\partial \tau_1} dx \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial q_2}{\partial \tau_1} dx \\ &= A \frac{d}{d\tau_1} \hat{q}_2(\omega, \tau_1). \end{aligned} \quad (4.23)$$

ii. Transformasi Fourier pada $\frac{\partial q_j}{\partial x}$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial q_j}{\partial x}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial q_j}{\partial x} dx.$$

Dengan menggunakan sifat transformasi Fourier (2.9), dengan $n = 1$, diperoleh

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial q_j}{\partial x}\right\} = i\omega \hat{q}_j(\omega, \tau_1), j = 1, 2. \quad (4.24)$$

iii. Transformasi Fourier pada $\frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2}$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} dx.$$

Dengan menggunakan sifat transformasi Fourier (2.9), dengan $n = 2$, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2}\right\} &= (i\omega)^2 \hat{q}_j(\omega, \tau_1) \\ &= -\omega^2 \hat{q}_j(\omega, \tau_1), j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan (4.22), (4.23), (4.24), dan (4.25) pada PDP (4.21), untuk $j = 1$, PDP menjadi

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{d\tau_1}\hat{q}_1(\omega, \tau_1) - \omega^2\hat{q}_1(\omega, \tau_1) + i\omega(\gamma_1 - \delta_1 - 3)\hat{q}_1(\omega, \tau_1) \\ & - (2\gamma_1 + \beta_{12} - \delta_1 - 2)\hat{q}_1(\omega, \tau_1) = -\beta_{12}\hat{q}_2(\omega, \tau_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{d}{d\tau_1}\hat{q}_1(\omega, \tau_1) + \omega^2\hat{q}_1(\omega, \tau_1) - i\omega(\gamma_1 - \delta_1 - 3)\hat{q}_1(\omega, \tau_1) \\ & + (2\gamma_1 + \beta_{12} - \delta_1 - 2)\hat{q}_1(\omega, \tau_1) = \beta_{12}\hat{q}_2(\omega, \tau_1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{d}{d\tau_1} + [\omega^2 - i\omega(\gamma_1 - \delta_1 - 3) + (2\gamma_1 + \beta_{12} - \delta_1 - 2)] \right\} \hat{q}_1(\omega, \tau_1) = \beta_{12}\hat{q}_2(\omega, \tau_1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d}{d\tau_1} + B_{12}(\omega) \right] \hat{q}_1(\omega, \tau_1) = \beta_{12}\hat{q}_2(\omega, \tau_1), \quad (4.26)$$

dengan $B_{12}(\omega) = \omega^2 - i\omega(\gamma_1 - \delta_1 - 3) + (2\gamma_1 + \beta_{12} - \delta_1 - 2)$. Dengan cara yang sama, untuk $j = 2$, diperoleh

$$\left[A \frac{d}{d\tau_1} + B_{21}(\omega) \right] \hat{q}_2(\omega, \tau_1) = \beta_{21}\hat{q}_1(\omega, \tau_1), \quad (4.27)$$

dengan $B_{21}(\omega) = \omega^2 - i\omega(\gamma_2 - \delta_2 - 3) + (2\gamma_2 + \beta_{21} - \delta_2 - 2)$.

Selanjutnya, ditinjau syarat batas PDP yang baru. Dua syarat batas PDP yang baru, $\lim_{x \rightarrow -\infty} q_j = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty} q_j = 0$ digunakan sebagai jaminan bahwa

fungsi $q_j(x, \tau_j)$ adalah fungsi yang konvergen sehingga fungsi tersebut dapat ditransformasi Fourier (sesuai Definisi (2.7.1)). Sementara untuk syarat batas $q_j(x, 0) = (e^x - e^{2x})^+$ dilakukan transformasi Fourier.

Diketahui $q_j(x, 0) = (e^x - e^{2x})^+$, $j = 1, 2$, artinya $q_j(x, 0) = 0$ untuk $0 \leq x < \infty$ dan $q_j(x, 0) = e^x - e^{2x}$ untuk $-\infty < x < 0$. Berikut adalah proses transformasi Fourier untuk $q_j(x, 0) = (e^x - e^{2x})^+$, $j = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{q_j(x, 0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (e^x - e^{2x})^+ dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega x} (e^x - e^{2x}) dx \\
 &\quad + \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} 0 dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 [e^{(1-i\omega)x} - e^{(2-i\omega)x}] dx \\
 &= \lim_{p \rightarrow -\infty} \int_p^0 [e^{(1-i\omega)x} - e^{(2-i\omega)x}] dx \\
 &= \lim_{p \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{1-i\omega} (e^0 - e^{(1-i\omega)p}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2-i\omega} (e^0 - e^{(2-i\omega)p}) \right] \\
 &= \left[\frac{1}{1-i\omega} (1-0) - \frac{1}{2-i\omega} (1-0) \right] \\
 &= \frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{2-i\omega} \\
 &= \frac{1}{(1-i\omega)(2-i\omega)} = \hat{q}_0. \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

Kemudian, Persamaan (4.28) dikombinasikan dengan Persamaan (4.26) dan Persamaan (4.27) menghasilkan

$$\left. \frac{d\hat{q}_1(\omega, \tau_1)}{d\tau_1} \right|_{\tau_1=0} + B_{12}\hat{q}_0 = \beta_{12}\hat{q}_0$$

$$A \left. \frac{d\hat{q}_2(\omega, \tau_1)}{d\tau_1} \right|_{\tau_1=0} + B_{21}\hat{q}_0 = \beta_{21}\hat{q}_0.$$

Sehingga diperoleh pasangan sistem PDB sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{d}{d\tau_1} + B_{12}(\omega) \right] \hat{q}_1(\omega, \tau_1) = \beta_{12}\hat{q}_2(\omega, \tau_1) \\ \hat{q}_1(\omega, 0) = \hat{q}_0 \\ \left. \frac{d\hat{q}_1(\omega, \tau_1)}{d\tau_1} \right|_{\tau_1=0} + B_{12}(\omega)\hat{q}_0 = \beta_{12}\hat{q}_0, \end{array} \right. \quad (4.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[A \frac{d}{d\tau_1} + B_{21}(\omega) \right] \hat{q}_2(\omega, \tau_1) = \beta_{21}\hat{q}_1(\omega, \tau_1) \\ \hat{q}_2(\omega, 0) = \hat{q}_0 \\ \left. \frac{d\hat{q}_2(\omega, \tau_1)}{d\tau_1} \right|_{\tau_1=0} + B_{21}(\omega)\hat{q}_0 = \beta_{21}\hat{q}_0. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

4.3 Tahap Penyelesaian

Untuk memperoleh $\hat{q}_1(\omega, \tau_1)$, PDB pada Persamaan (4.29) disubstitusikan ke dalam PDB pada Persamaan (4.30), diperoleh

$$\left[A \frac{d}{d\tau_1} + B_{21}(\omega) \right] \left(\frac{1}{\beta_{12}} \left[\frac{d}{d\tau_1} + B_{12}(\omega) \right] \hat{q}_1 \right) = \beta_{21}\hat{q}_1$$

$$\left[A \frac{d}{d\tau_1} + B_{21}(\omega) \right] \left(\frac{1}{\beta_{12}} \dot{\hat{q}}_1 + \frac{B_{12}(\omega)}{\beta_{12}} \hat{q}_1 \right) = \beta_{21}\hat{q}_1$$

$$A\ddot{\hat{q}}_1 + [AB_{12}(\omega) + B_{21}(\omega)]\dot{\hat{q}}_1 + [B_{12}(\omega)B_{21}(\omega) - \beta_{12}\beta_{21}]\hat{q}_1 = 0.$$

Misal, $\hat{q}_1 = e^{m\tau_1}$, maka didapat

$$Am^2 e^{m\tau_1} + [AB_{12}(\omega) + B_{21}(\omega)]me^{m\tau_1} + [B_{12}(\omega)B_{21}(\omega) - \beta_{12}\beta_{21}]e^{m\tau_1} = 0,$$

$$(Am^2 + [AB_{12}(\omega) + B_{21}(\omega)]m + [B_{12}(\omega)B_{21}(\omega) - \beta_{12}\beta_{21}])e^{m\tau_1} = 0.$$

Karena $e^{m\tau_1} \neq 0$, maka $Am^2 + [AB_{12}(\omega) + B_{21}(\omega)]m + [B_{12}(\omega)B_{21}(\omega) - \beta_{12}\beta_{21}] = 0$ sehingga

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= -\frac{[AB_{12}(\omega) + B_{21}(\omega)]}{2A} \\ &\quad \pm \frac{\sqrt{[AB_{12}(\omega) + B_{21}(\omega)]^2 - 4A[B_{12}(\omega)B_{21}(\omega) - \beta_{12}\beta_{21}]}}{2A} \\ &= -\frac{B_{12}(\omega)}{2} - \frac{B_{21}(\omega)}{2A} \\ &\quad \pm \frac{\sqrt{A^2 B_{12}^2 + B_{21}^2 - 2AB_{12}(\omega)B_{21}(\omega) + 4\beta_{12}\beta_{21}}}{2A} \\ &= -\frac{B_{12}(\omega)}{2} - \frac{B_{21}(\omega)}{2A} \\ &\quad \pm \frac{\sqrt{[AB_{12}(\omega) - B_{21}]^2 + 4\beta_{12}\beta_{21}}}{2A}. \end{aligned}$$

Solusi homogenya adalah $\hat{q}_1 = C_1 e^{m_1\tau_1} + C_2 e^{m_2\tau_1}$, dengan C_1, C_2 konstan. Untuk mendapatkan C_1 dan C_2 , digunakan solusi homogen, turunan solusi homogen, dan Persamaan (4.29). Turunan dari solusi homogen adalah $\dot{\hat{q}}_1 = m_1 C_1 e^{m_1\tau_1} + m_2 C_2 e^{m_2\tau_1}$, sehingga

$$\hat{q}_1(\omega, 0) = C_1 + C_2 = \hat{q}_0$$

$$\dot{\hat{q}}_1(\omega, 0) = m_1 C_1 + m_2 C_2 = \beta_{12}\hat{q}_0 - B_{12}(\omega)\hat{q}_0.$$

C_1 dalam $\hat{q}_1(\omega, 0)$ disubstitusikan ke C_1 dalam $\hat{q}_1(\omega, 0)$, diperoleh

$$\begin{aligned} (m_1 - m_2)C_2 &= (m_1 - \beta_{12} + B_{12}(\omega))\hat{q}_0 \\ C_2 &= -\frac{(\beta_{12} - m_1 - B_{12}(\omega))}{m_1 - m_2}\hat{q}_0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Kemudian nilai C_2 pada Persamaan (4.31) disubstitusikan ke dalam $\hat{q}_1(\omega, 0)$, didapat

$$\begin{aligned} C_1 &= \hat{q}_0 + \frac{(\beta_{12} - m_1 - B_{12}(\omega))}{m_1 - m_2}\hat{q}_0 \\ &= \frac{(\beta_{12} - m_2 - B_{12}(\omega))}{(m_1 - m_2)}\hat{q}_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sehingga diperoleh bentuk $\hat{q}_1(\omega, \tau_1)$ sebagai berikut:

$$\hat{q}_1(\omega, \tau_1) = \frac{\hat{q}_0\{[\beta_{12} - m_2 - B_{12}(\omega)]e^{m_1\tau_1} - [\beta_{12} - m_1 - B_{12}(\omega)]e^{m_2\tau_1}\}}{m_1 - m_2}.$$

Karena dari Persamaan (4.28)

$$\hat{q}_0 = \frac{1}{(1 - i\omega)(2 - i\omega)},$$

maka

$$\hat{q}_1(\omega, \tau_1) = \frac{\{[\beta_{12} - m_2 - B_{12}(\omega)]e^{m_1\tau_1} - [\beta_{12} - m_1 - B_{12}(\omega)]e^{m_2\tau_1}\}}{(1 - i\omega)(2 - i\omega)(m_1 - m_2)}. \quad (4.33)$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh $\hat{q}_1(\omega, \tau_1)$, didapatkan bentuk $\hat{q}_2(\omega, \tau_2)$ sebagai berikut

$$\hat{q}_2(\omega, \tau_2) = \frac{\{[\beta_{21} - Am_2 - B_{21}(\omega)]e^{Am_1\tau_2} - [\beta_{21} - Am_1 - B_{21}(\omega)]e^{Am_2\tau_2}\}}{A(1 - i\omega)(2 - i\omega)(m_1 - m_2)}. \quad (4.34)$$

Bentuk $\hat{q}_j(\omega, \tau_j)$ dituliskan dalam bentuk yang lebih mudah terlebih dahulu agar dapat diselesaikan. Disini dituliskan tahap penyelesaian untuk $\hat{q}_1(\omega, \tau_1)$, sementara untuk $\hat{q}_2(\omega, \tau_2)$ diselesaikan dengan cara yang sama dengan $\hat{q}_1(\omega, \tau_1)$.

Bentuk $\hat{q}_1(\omega, \tau_1)$ sesuai Persamaan (4.33) adalah sebagai berikut:

$$\hat{q}_1(\omega, \tau_1) = \frac{\{[\beta_{12} - m_2 - B_{12}(\omega)]e^{m_1\tau_1} - [\beta_{12} - m_1 - B_{12}(\omega)]e^{m_2\tau_1}\}}{(1 - i\omega)(2 - i\omega)(m_1 - m_2)}.$$

Misalkan $\beta_{12} - B_{12}(\omega) = l$, $r = (1 - i\omega)(2 - i\omega)$, $m_1 = a + y$ dan $m_2 = a - y$, dengan $a = -\frac{B_{12}(\omega)}{2} - \frac{B_{21}(\omega)}{2A}$ dan $y = \frac{\sqrt{[AB_{12}(\omega) - B_{21}]^2 + 4\beta_{12}\beta_{21}}}{2A}$, maka

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= \frac{[l - (a - y)]e^{(a+y)\tau_1} - [l - (a + y)]e^{(a-y)\tau_1}}{2ry} \\ &= e^{a\tau_1} \left\{ \frac{(l - (a - y))e^{y\tau_1} - (l - (a + y))e^{-y\tau_1}}{2ry} \right\} \\ &= e^{a\tau_1} \left\{ \frac{(l - a)(e^{y\tau_1} - e^{-y\tau_1}) + y(e^{y\tau_1} + e^{-y\tau_1})}{2ry} \right\} \\ &= e^{a\tau_1} \left\{ \frac{h}{2y}(e^{y\tau_1} - e^{-y\tau_1}) + \frac{e^{y\tau_1} + e^{-y\tau_1}}{2r} \right\}, \quad (4.35) \end{aligned}$$

dengan $h = \frac{l - a}{r}$.

Sekarang, bentuk a, h , dan y disederhanakan. Penyederhanaan ini agar diperoleh bentuk $\hat{q}_1(\omega, \tau_1)$ yang mudah untuk diselesaikan. Pertama, bentuk dari a

disederhanakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{B_{12}(\omega)}{2} - \frac{B_{21}(\omega)}{2A} \\
 &= -\frac{AB_{12}(\omega) + B_{21}(\omega)}{2A} \\
 &= -\frac{[A(\omega^2 - i\omega(\gamma_1 - \delta_1 - 3) + (2\gamma_1 + \beta_{12} - \delta_1 - 2)) \\
 &\quad + (\omega^2 - i\omega(\gamma_2 - \delta_2 - 3) + (2\gamma_2 + \beta_{21} - \delta_2 - 2))] }{2A} \\
 &= -\frac{[(A+1)\omega^2 + (A+1)3i\omega - (A+1)2 - i\omega(A\gamma_1 + \gamma_2) \\
 &\quad + 2(A\gamma_1 + \gamma_2) + (A\beta_{12} + \beta_{21}) + (-1+i\omega)(A\delta_1 + \delta_2)]}{2A} \\
 &= -\frac{(A+1)}{2A} [\omega^2 + 3i\omega - 2 - i\omega\gamma_+ + 2\gamma_+ \\
 &\quad + i\omega\delta_+ - \delta_+ + \beta_+],
 \end{aligned}$$

dimana $\gamma_+ = \frac{A\gamma_1 + \gamma_2}{A+1}$, $\delta_+ = \frac{A\delta_1 + \delta_2}{A+1}$ dan $\beta_+ = \frac{A\beta_{12} + \beta_{21}}{A+1}$. Akibatnya, $e^{a\tau_1}$ menjadi

$$e^{a\tau_1} = \exp\left\{-\frac{(A+1)}{2A}\tau_1[\omega^2 + 3i\omega - 2 - i\omega\gamma_+ + 2\gamma_+ + i\omega\delta_+ - \delta_+ + \beta_+]\right\}.$$

Misal $\tau_+ = \frac{(A+1)}{2A}\tau_1$, maka

$$e^{a\tau_1} = \exp\{-\tau_+[\omega^2 + 3i\omega - 2 - i\omega\gamma_+ + 2\gamma_+ + i\omega\delta_+ - \delta_+ + \beta_+]\}. \quad (4.36)$$

Kemudian, penyederhanaan h adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{l-a}{r} \\
 &= \frac{\beta_{12} - B_{12}(\omega) + \frac{B_{12}(\omega)}{2} + \frac{B_{21}(\omega)}{2A}}{(1-i\omega)(2-i\omega)} \\
 &= \frac{\beta_{12} - \frac{B_{12}(\omega)}{2} + \frac{B_{21}(\omega)}{2A}}{-\omega^2 - 3i\omega + 2} \\
 &= \frac{2A\beta_{12} - AB_{12}(\omega) + B_{21}(\omega)}{2A(-\omega^2 - 3i\omega + 2)} \\
 &= \frac{2A\beta_{12} - A[\omega^2 - i\omega(\gamma_1 - \delta_1 - 3) + (2\gamma_1 + \beta_{12} - \delta_1 - 2)]}{2A(-\omega^2 - 3i\omega + 2)} \\
 &\quad + \frac{[\omega^2 - i\omega(\gamma_2 - \delta_2 - 3) + (2\gamma_2 + \beta_{21} - \delta_2 - 2)]}{2A(-\omega^2 - 3i\omega + 2)} \\
 &= \frac{(-A+1)\omega^2 + (-A+1)3i\omega - (-A+1)2}{2A(-\omega^2 - 3i\omega + 2)} \\
 &\quad + \frac{(i\omega - 2)(A\gamma_1 - \gamma_2) + (1-i\omega)(A\delta_1 - \delta_2) + A\beta_{12} + \beta_{21}}{2A(-\omega^2 - 3i\omega + 2)} \\
 &= (-A+1) \frac{\left[\omega^2 + 3i\omega - 2 - (i\omega - 2) \left(\frac{A\gamma_1 - \gamma_2}{A-1} \right) \right.}{2A(-\omega^2 - 3i\omega + 2)} \\
 &\quad \left. - (1-i\omega) \left(\frac{A\delta_1 - \delta_2}{A-1} \right) - \left(\frac{A\beta_{12} + \beta_{21}}{A-1} \right) \right]}{2A(-\omega^2 - 3i\omega + 2)}.
 \end{aligned}$$

Karena $\frac{A\gamma_1 - \gamma_2}{A-1} = 0$ dan $\frac{A\delta_1 - \delta_2}{A-1} = 0$ dan misalkan $\alpha_+ = \frac{A\beta_{12} + \beta_{21}}{A-1}$ maka

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{(A-1) [-\omega^2 - 3i\omega + 2 + \alpha_+]}{2A (-\omega^2 - 3i\omega + 2)} \\
 &= \frac{A-1}{2A} \left[\frac{\alpha_+}{-\left(\omega + \frac{3i}{2}\right)} + 1 \right]. \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Sementara untuk penyederhanaan y adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\sqrt{[AB_{12}(\omega) - B_{21}]^2 + 4\beta_{12}\beta_{21}}}{2A} \\
 &= \frac{(\{A[\omega^2 - i\omega(\gamma_1 - \delta_1 - 3) + (2\gamma_1 + \beta_{12} - \delta_1 - 2)] \\
 &\quad - [\omega^2 - i\omega(\gamma_2 - \delta_2 - 3) + (2\gamma_2 + \beta_{21} - \delta_2 - 2)]\}^2 \\
 &\quad + 4\beta_{12}\beta_{21})^{1/2}}{2A} \\
 &= \frac{(\{(A-1)\omega_2 + (A-1)3i\omega - (A-1)2 - i\omega(A\gamma_1 - \gamma_2) \\
 &\quad + 2(A\gamma_1 - \gamma_2) - (1-i\omega)(A\delta_1 - \delta_2) + (A\beta_{12} - \beta_{21})\}^2 \\
 &\quad + 4\beta_{12}\beta_{21})^{1/2}}{2A} \\
 &= \frac{\left\{ (A-1)^2 \left[\omega^2 + 3i\omega - 2 - (i\omega - 2) \left(\frac{A\gamma_1 - \gamma_2}{A-1} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (1-i\omega) \left(\frac{A\delta_1 - \delta_2}{A-1} \right) + \left(\frac{A\beta_{12} - \beta_{21}}{A-1} \right) \right]^2 + \frac{4\beta_{12}\beta_{21}}{(A-1)^2} \right\}^{1/2}}{2A}.
 \end{aligned}$$

Karena $\frac{A\gamma_1 - \gamma_2}{A-1} = 0$ dan $\frac{A\delta_1 - \delta_2}{A-1} = 0$ dan misalkan $\alpha_- = \frac{A\beta_{12} - \beta_{21}}{A-1}$ dan $\mu^2 = \frac{4\beta_{12}\beta_{21}}{(A-1)^2}$ maka

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{(A-1)^2 \left\{ \left[\left(\omega + \frac{3i}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} + \alpha_- \right]^2 + \mu^2 \right\}}}{2A} \\ &= \frac{(A-1)}{2A} \sqrt{\left[\left(\omega + \frac{3i}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} + \alpha_- \right]^2 + \mu^2}. \end{aligned}$$

Misal $g(\omega) = \sqrt{\left[\left(\omega + \frac{3i}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} + \alpha_- \right]^2 + \mu^2}$, diperoleh

$$y = \frac{(A-1)}{2A} g(\omega). \quad (4.38)$$

Sehingga bentuk dari $\hat{q}_1(\omega, \tau_1)$ menjadi

$$\begin{aligned} \hat{q}_1(\omega, \tau_1) &= \exp\{-\tau_+[\omega^2 + 3i\omega - 2 - i\omega\gamma_+ + 2\gamma_+ \\ &\quad + i\omega\delta_+ - \delta_+ + \beta_+]\} \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{\alpha_+}{-\left(\omega + \frac{3i}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} + 1 \right] \frac{e^{g(\omega)\tau_-} - e^{-g(\omega)\tau_-}}{2g(\omega)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{g(\omega)\tau_-} + e^{-g(\omega)\tau_-}}{2\left[-\left(\omega + \frac{3i}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]} \right\}, \quad (4.39) \end{aligned}$$

dengan $\tau_- = \left(\frac{A-1}{2A}\right)\tau_1$.

Kemudian, dilakukan invers transformasi Fourier seperti yang diberikan oleh Persamaan (2.8) untuk memperoleh $q_1(x, \tau_1)$ sehingga diperoleh bentuk invers Fourier dari

Persamaan (4.39) yaitu

$$\begin{aligned}
 q_1(x, \tau_1) &= \frac{e^{-2\gamma_+\tau_++\delta_+\tau_+-\frac{\tau_+}{4}-\beta_+\tau_+}}{2\pi} \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x+\gamma_+\tau_+-\delta_+\tau_+)} \exp\{-\tau_+[(\omega + \frac{3i}{2})^2]\} \\
 &\times \left\{ \left[\frac{\alpha_+}{-(\omega + \frac{3i}{2})^2 - \frac{1}{4}} + 1 \right] \frac{e^{g(\omega)\tau_-} - e^{-g(\omega)\tau_-}}{2g(\omega)} \right. \\
 &\left. + \frac{e^{g(\omega)\tau_-} + e^{-g(\omega)\tau_-}}{2\left[-(\omega + \frac{3i}{2})^2 - \frac{1}{4}\right]} \right\} d\omega. \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Untuk mengevaluasi integral kompleks pada Persamaan (4.40), dibentuk lintasan kompleks dengan menggunakan bagian integral dari Persamaan (4.40). Misalkan integral dari Persamaan (4.40) dipandang dalam bentuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{im\omega} f(\omega) d\omega.$$

Terlihat bahwa lingkaran berpusat pada $\omega = \frac{3i}{2}$, $m = x + \gamma_+\tau_+ - \delta_+\tau_+$ dan

$$\begin{aligned}
 f(\omega) &= \exp\{-\tau_+[(\omega + \frac{3i}{2})^2]\} \\
 &\times \left\{ \left[\frac{\alpha_+}{-(\omega + \frac{3i}{2})^2 - \frac{1}{4}} + 1 \right] \frac{e^{g(\omega)\tau_-} - e^{-g(\omega)\tau_-}}{2g(\omega)} \right. \\
 &\left. + \frac{e^{g(\omega)\tau_-} + e^{-g(\omega)\tau_-}}{2\left[-(\omega + \frac{3i}{2})^2 - \frac{1}{4}\right]} \right\},
 \end{aligned}$$

dimana m menyatakan kuadran dari lingkaran. Apabila $m \geq 0$ maka digunakan lingkaran yang berada di kuadran pertama

dan kedua, sementara untuk $m < 0$ digunakan lingkaran pada kuadran ketiga dan keempat.

Selanjutnya, ditentukan range sudut lingkaran yang digunakan untuk mengevaluasi integral kompleks pada Persamaan (4.40). Misalkan

$$\omega + \frac{3i}{2} = Re^{i\theta},$$

maka

$$\begin{aligned} \left| f\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right) \right| &= \left| \exp\{-(Re^{i\theta})^2\tau_+\} \right. \\ &\times \left\{ \frac{1}{2g\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right)} \left[\frac{\alpha_+}{-(Re^{i\theta})^2 - \frac{1}{4}} + 1 \right] \right. \\ &\times \left[e^{g\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right)\tau_-} - e^{-g\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right)\tau_-} \right] \\ &\left. \left. + \frac{e^{g\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right)\tau_-} + e^{-g\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right)\tau_-}}{2\left[-(Re^{i\theta})^2 - \frac{1}{4}\right]} \right\} \right|. \end{aligned}$$

Dengan memisalkan

$$P_1 = \frac{1}{2g\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right)} \left[\frac{\alpha_+}{-(Re^{i\theta})^2 - \frac{1}{4}} + 1 \right]$$

dan

$$P_2 = \frac{1}{2\left[-(Re^{i\theta})^2 - \frac{1}{4}\right]},$$

bentuk $\left| f\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right) \right|$ menjadi

$$\begin{aligned} \left| f\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right) \right| &= \left| \exp\{-R^2 e^{2i\theta}\tau_+\} \right. \\ &\times \left\{ P_1 \left[e^{g\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right)\tau_-} - e^{-g\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right)\tau_-} \right] \right. \\ &\left. \left. + P_2 \left[e^{g\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right)\tau_-} + e^{-g\left(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}\right)\tau_-} \right] \right\} \right|. \end{aligned}$$

Apabila digunakan aproksimasi

$$g(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}) = \sqrt{\left[R^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{4} + \alpha_-\right]^2 + \mu^2} \\ \approx |R^2 e^{2i\theta}|,$$

akibatnya

$$\left|f(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2})\right| = \left|e^{-R^2 e^{2i\theta} \tau_+} \left\{P_1 \left[e^{R^2 e^{2i\theta} \tau_-} - e^{-R^2 e^{2i\theta} \tau_-}\right] + P_2 \left[e^{R^2 e^{2i\theta} \tau_-} + e^{-R^2 e^{2i\theta} \tau_-}\right]\right\}\right| \\ \leq (P_2 + P_1) \left|e^{-R^2 e^{2i\theta} \tau_+ + R^2 e^{2i\theta} \tau_-}\right| \\ + (P_2 - P_1) \left|e^{-R^2 e^{2i\theta} \tau_+ - R^2 e^{2i\theta} \tau_-}\right| \\ = (P_2 + P_1) \left|e^{-(\tau_+ - \tau_-)R^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)}\right| \\ + (P_2 - P_1) \left|e^{-(\tau_+ + \tau_-)R^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)}\right|.$$

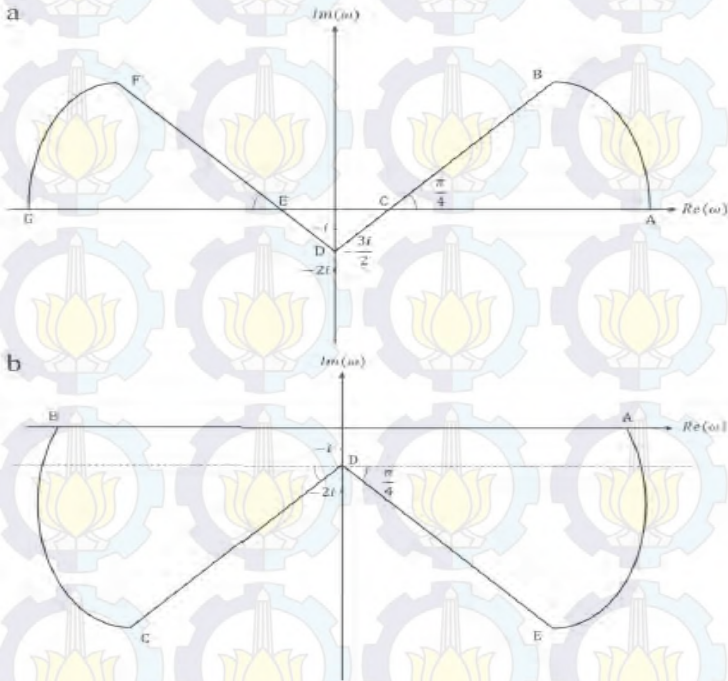
Karena dalam bilangan kompleks berlaku $|e^{a+ib}| = e^a$, maka

$$\left|f(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2})\right| = (P_2 + P_1) \left|e^{-(\tau_+ - \tau_-)R^2 \cos 2\theta}\right| \\ + (P_2 - P_1) \left|e^{-(\tau_+ + \tau_-)R^2 \cos 2\theta}\right|.$$

Phatikan bahwa $\tau_+ - \tau_-$ dan $\tau_+ + \tau_-$ selalu positif. Agar $f(Re^{i\theta} - \frac{3i}{2}) \rightarrow 0$ saat $R \rightarrow 0$, maka $\cos 2\theta > 0$. Nilai $\cos 2\theta > 0$ pada kuadran pertama dan keempat, sehingga θ yang memenuhi adalah

$$-\frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{\pi}{2}, \text{ dan, } -\frac{3\pi}{2} < 2\theta < \frac{3\pi}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}, \text{ dan, } -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}. \quad (4.41)$$

Dari hasil (4.41), dibentuk lintasan kompleks seperti pada Gambar 4.2. Gambar 4.2(a) digunakan untuk mengevaluasi Persamaan (4.40) jika $x + \gamma_+ \tau_+ - \delta_+ \tau_+ \geq 0$, sementara Gambar 4.2(b) digunakan untuk mengevaluasi Persamaan (4.40) jika $x + \gamma_+ \tau_+ - \delta_+ \tau_+ < 0$.



Gambar 4.2: Kontur kompleks untuk menghitung Persamaan (4.40)

Dalam kedua lintasan tersebut, $\omega = -i$ adalah titik dimana $\hat{q}_j(\omega, \tau_j)$ tidak analitik, oleh karena itu digunakan teorema residu Cauchy yang dinyatakan sebagai berikut [13]:

Teorema Residu Cauchy. Misalkan $f(z)$ analitik di semua titik di lintasan tertutup C_R kecuali di titik $z_k, k = 1, 2, \dots, n$

yang berada di dalam lintasan C_R , maka

$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z_k} f(z).$$

$\hat{q}_1(\omega, \tau_1)$ analitik di semua titik di lintasan tertutup C_R kecuali pada pole $\omega = -i$. Sehingga dengan mengaplikasikan teorema residu Cauchy, integral pada invers Fourier dapat diekspresikan dalam bentuk residu pada $\omega = -i$ dan integral real tunggal.

Pada Gambar 4.2(a), GA adalah garis sepanjang sumbu- x . AB dan FG lengkungan dari lingkaran yang berpusat pada $\omega = -\frac{3i}{2}$ dengan jari-jari R menuju tak hingga dan BD dan DF adalah garis yang menghubungkan ujung lengkungan dengan pusat lingkaran. Pada Gambar 4.2(b), BA adalah garis sepanjang sumbu- x . BC dan EA lengkungan dari lingkaran yang berpusat pada $\omega = -\frac{3i}{2}$ dengan jari-jari R menuju tak hingga dan CD dan DE adalah garis yang menghubungkan ujung lengkungan dengan pusat lingkaran.

Sementara untuk integral pada lengkungan AB dan FG dalam Gambar 4.2(a) dan integral pada lengkungan BC dan EA dalam Gambar 4.2(b), digunakan Lemma Jordan [13].

Lemma Jordan. Misalkan $f(z)$ adalah fungsi analitik pada semua titik dalam lintasan C_R yang berbentuk setengah lingkaran dengan $z = Re^{i\phi}$, ($0 \leq \phi \leq \pi$), dan misal untuk setiap z pada C_R terdapat sebuah bilangan konstan positif M_R sedemikian hingga $|f(z)| \leq M_R$ dan $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$, maka untuk setiap bilangan konstan positif a berlaku

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

Dengan menggunakan Lemma Jordan, integral pada lengkungan AB dan FG dalam Gambar 4.2(a) dan integral

pada lengkungan BC dan EA dalam Gambar 4.2(b) menuju nol saat $R \rightarrow \infty$. Sehingga dengan menerapkan teorema residu Cauchy, untuk $x + \gamma_+ \tau_+ - \tau_+ \delta_+ \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{GA} e^{i\omega x} \hat{q}_1(\omega, \tau_1) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{FD} e^{i\omega x} \hat{q}_1(\omega, \tau_1) d\omega + \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{DB} e^{i\omega x} \hat{q}_1(\omega, \tau_1) d\omega - \\ &i \text{Res}_{\omega=-i} \{e^{i\omega x} \hat{q}_1(\omega, \tau_1)\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sementara $x + \gamma_+ \tau_+ - \tau_+ \delta_+ < 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{BA} e^{i\omega x} \hat{q}_1(\omega, \tau_1) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{CD} e^{i\omega x} \hat{q}_1(\omega, \tau_1) d\omega + \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{DE} e^{i\omega x} \hat{q}_1(\omega, \tau_1) d\omega - \\ &i \text{Res}_{\omega=-i} \{e^{i\omega x} \hat{q}_1(\omega, \tau_1)\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Untuk kedua kondisi ($x + \gamma_+ \tau_+ - \tau_+ \delta_+ \geq 0$ dan $x + \gamma_+ \tau_+ - \tau_+ \delta_+ < 0$), residu pada $\omega = -i$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\omega=-i} \{e^{i\omega x} \hat{q}_1\} &= (\omega + i)e^x \exp\{-\tau_+[\gamma_+ + \beta_+]\} \times \\ &\left\{ \left[\frac{\alpha_+}{(\omega + i)(-i)} + 1 \right] \frac{e^{\alpha_+ \tau_-} - e^{-\alpha_+ \tau_-}}{2\alpha_+} \right. \\ &\left. + \frac{e^{\alpha_+ \tau_-} + e^{-\alpha_+ \tau_-}}{2(\omega + i)(-i)} \right\} \\ &= e^{x - \tau_+ \gamma_+ - \beta_+ \tau_+} \times \left\{ \frac{e^{\alpha_+ \tau_-}}{-i} \right\} \\ &= -\frac{e^{x - \tau_+ \gamma_+}}{i}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Selanjutnya, adalah menyelesaikan integral non-trivial pada Persamaan (4.42) dan (4.43). Digunakan kembali bentuk

invers pada Persamaan (4.40),

$$\begin{aligned}
 q_1(x, \tau_1) &= \frac{e^{-2\gamma_+\tau_+ + \delta_+\tau_+ - \frac{\tau_+}{4} - \beta_+\tau_+}}{2\pi} \\
 &\times \int_{C_R} e^{i\omega(x + \gamma_+\tau_+ - \delta_+\tau_+)} \exp\{-\tau_+[(\omega + \frac{3i}{2})^2]\} \\
 &\times \left\{ \left[\frac{\alpha_+}{-(\omega + \frac{3i}{2})^2 - \frac{1}{4}} + 1 \right] \frac{e^{g(\omega)\tau_-} - e^{-g(\omega)\tau_-}}{2g(\omega)} \right. \\
 &\left. + \frac{e^{g(\omega)\tau_-} + e^{-g(\omega)\tau_-}}{2\left[-(\omega + \frac{3i}{2})^2 - \frac{1}{4}\right]} \right\} d\omega.
 \end{aligned}$$

Perhatikan untuk kondisi $x + \gamma_+\tau_+ - \tau_+\delta_+ \geq 0$. Bentuk integral kontur pada *DB* dan *FD* diselesaikan sebagai berikut.

1. Pada *DB*

Misalkan $\omega + \frac{3i}{2} = \rho e^{i\pi/4}$ maka $d\omega = e^{i\pi/4} d\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)d\rho$. Akibatnya

$$\begin{aligned}
 &\exp\{i(\rho e^{i\pi/4} - \frac{3i}{2})(x + \tau_+\gamma_+ - \tau_+\delta_+) - \tau_+(\rho e^{i\pi/4})\} \\
 &= \exp\{i\left[\rho\left(\frac{1+i}{2}\right) - \frac{3i}{2}\right](x + \tau_+\gamma_+ - \tau_+\delta_+) - i\rho^2\tau_+\} \\
 &= \exp\left\{i\rho\left(\frac{1+i}{2}\right) + \frac{3}{2}\right\}(x + \tau_+\gamma_+ - \tau_+\delta_+) - i\rho^2\tau_+ \\
 &= \exp\left\{\left[\rho\left(\frac{i-1}{2}\right) + \frac{3}{2}\right](x + \tau_+\gamma_+ - \tau_+\delta_+) - i\rho^2\tau_+\right\} \\
 &= \exp\left\{\frac{3}{2}(x + \tau_+\gamma_+ - \tau_+\delta_+)\right\} \\
 &\times \exp\left\{\rho\left(\frac{i-1}{2}\right)(x + \tau_+\gamma_+ - \tau_+\delta_+) - i\rho^2\tau_+\right\}
 \end{aligned}$$

Untuk $\left[\frac{\alpha_+}{-(\omega + \frac{3i}{2})} + 1 \right]$ adalah

$$\begin{aligned} \left[\frac{\alpha_+}{-(\omega + \frac{3i}{2})} + 1 \right] &= \frac{\alpha_+}{-(\rho e^{i\pi/4}) - \frac{1}{4}} + 1 \\ &= \frac{\alpha_+}{-i\rho^2 - \frac{1}{4}} + 1. \end{aligned}$$

Dan untuk $g(\omega)$ adalah

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \sqrt{[(\omega + \frac{3i}{2}) + \frac{1}{4} + \alpha_-]^2 + \mu^2} \\ &= \sqrt{[i\rho^2 + (\frac{1}{4} + \alpha_-)]^2 + \mu^2} \\ &= \sqrt{-\rho^4 + (\frac{1}{4} + \alpha_-)^2 + 2i\rho^2(\frac{1}{4} + \alpha_-) + \mu^2} \\ &= Z_1. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{BA} e^{i\omega x} \hat{q}_1 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ \frac{3x - \tau_+ \gamma_+ - \tau_+ \delta_+}{2} - \frac{\tau_+}{4} - \tau_+ \beta_+ \right\} \\ &\quad \int_0^\infty e^{\rho(\frac{i-1}{\sqrt{2}})(x + \tau_+ \gamma_+ - \tau_+ \delta_+) - i\rho^2 \tau_+} \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{\alpha_+}{-i\rho^2 - \frac{1}{4}} + 1 \right] \frac{e^{Z_1 \tau_-} - e^{-Z_1 \tau_-}}{2Z_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{Z_1 \tau_-} + e^{-Z_1 \tau_-}}{2(-i\rho^2 - \frac{1}{4})} \right\} \frac{1+i}{\sqrt{2}} d\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{BA} e^{i\omega x} \hat{q}_1 d\omega &= \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{3x - \tau_+\gamma_+ - \tau_+\delta_+}{2} - \frac{\tau_+}{4} - \beta_+\tau_+\right\} \\ &\int_0^\infty e^{[-\frac{(1-i)\rho}{\sqrt{2}}(x+\tau_+\gamma_+-\tau_+\delta_+)-i\rho^2\tau_+]} \\ &\times \left\{ \frac{\alpha_+(e^{Z_1\tau_-} - e^{-Z_1\tau_-})}{(-i\rho^2 - \frac{1}{4})Z_1} + \frac{e^{Z_1\tau_-} - e^{-Z_1\tau_-}}{Z_1} \right. \\ &\left. + \frac{e^{Z_1\tau_-} + e^{-Z_1\tau_-}}{-i\rho^2 - \frac{1}{4}} \right\} (1+i)d\rho. \end{aligned}$$

Misalkan $f_1(\rho) = e^{-\frac{\rho}{\sqrt{2}}(x+\tau_+\gamma_+-\tau_+\delta_+)}$ dan $f_2(\rho) = \rho^2\tau_+ - \frac{\rho}{\sqrt{2}}(x + \tau_+\gamma_+ - \tau_+\delta_+)$, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{DB} e^{i\omega x} \hat{q}_1 d\omega &= \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} e^{\frac{3x-\tau_+\gamma_+-\tau_+\delta_+}{2} - \frac{\tau_+}{4} - \beta_+\tau_+} \\ &\int_0^\infty f_1(\rho) e^{-if_2(\rho)} \left\{ \frac{\alpha_+(e^{Z_1\tau_-} - e^{-Z_1\tau_-})}{(-i\rho^2 - \frac{1}{4})Z_1} \right. \\ &\left. \frac{e^{Z_1\tau_-} - e^{-Z_1\tau_-}}{Z_1} + \frac{e^{Z_1\tau_-} + e^{-Z_1\tau_-}}{-i\rho^2 - \frac{1}{4}} \right\} \\ &\times (1+i)d\rho. \quad (4.46) \end{aligned}$$

2. Pada *FD* Misalkan $\omega + \frac{3i}{2} = \rho e^{3\pi i/4}$, maka $d\omega = e^{3\pi i/4} d\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)d\rho$. Dengan cara yang sama seperti pada *DB*, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{FD} e^{i\omega x} \hat{q}_1 d\omega &= \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} e^{\frac{3x-\tau_+\gamma_+-\tau_+\delta_+}{2} - \frac{\tau_+}{4} - \beta_+\tau_+} \\ &\int_0^\infty f_1(\rho) e^{if_2(\rho)} \left\{ \frac{\alpha_+(e^{Z_2\tau_-} - e^{-Z_2\tau_-})}{(i\rho^2 - \frac{1}{4})Z_2} \right. \\ &\left. \frac{e^{Z_2\tau_-} - e^{-Z_2\tau_-}}{Z_2} + \frac{e^{Z_2\tau_-} + e^{-Z_2\tau_-}}{i\rho^2 - \frac{1}{4}} \right\} \\ &\times (i-1)d\rho, \quad (4.47) \end{aligned}$$

dengan

$$Z_2 = \sqrt{-\rho^4 + \left(\frac{1}{4} + \alpha_-\right)^2 - 2i\rho^2\left(\frac{1}{4} + \alpha_-\right) + \mu^2}. \quad (4.48)$$

Dengan mengkombinasikan Persamaan (4.46) dan (4.47), diperoleh bentuk $\frac{1}{2\pi} \int_{DB} e^{i\omega x} \hat{q}_1 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{FD} e^{i\omega x} \hat{q}_1 d\omega$ yaitu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} e^{\frac{3x-\tau_+\gamma_+-\tau_+\delta_+}{2} - \frac{\tau_+}{4} - \beta_+\tau_+} \times \\ & \int_0^\infty \left\{ \frac{f_1(\rho)e^{-if_2(\rho)}\alpha_+}{Z_1(-i\rho^2 - \frac{1}{4})} [(e^{Z_1\tau_-} - e^{-Z_1\tau_-}) + (ie^{Z_1\tau_-} - ie^{-Z_1\tau_-})] \right. \\ & - \frac{f_1(\rho)e^{if_2(\rho)}\alpha_+}{Z_2(i\rho^2 - \frac{1}{4})} [(e^{-Z_2\tau_-} - e^{Z_2\tau_-}) + (ie^{Z_2\tau_-} - ie^{-Z_2\tau_-})] \\ & + \frac{f_1(\rho)e^{-if_2(\rho)}}{Z_1} [(e^{Z_1\tau_-} - e^{-Z_1\tau_-}) + (ie^{Z_1\tau_-} - ie^{-Z_1\tau_-})] \\ & - \frac{f_1(\rho)e^{if_2(\rho)}}{Z_2} [(e^{-Z_2\tau_-} - e^{Z_2\tau_-}) + (ie^{Z_2\tau_-} - ie^{-Z_2\tau_-})] \\ & + \frac{f_1(\rho)e^{-if_2(\rho)}}{-i\rho^2 - \frac{1}{4}} [(e^{Z_1\tau_-} + e^{-Z_1\tau_-}) + (ie^{Z_1\tau_-} + ie^{-Z_1\tau_-})] \\ & \left. - \frac{f_1(\rho)e^{if_2(\rho)}}{i\rho^2 - \frac{1}{4}} [(-e^{Z_2\tau_-} - e^{-Z_2\tau_-}) + (ie^{Z_2\tau_-} + ie^{-Z_2\tau_-})] \right\}. \quad (4.49) \end{aligned}$$

Agar Persamaan (4.49) lebih mudah diselesaikan, Z_1 dan Z_2 pada Persamaan (4.45) dan (4.48) harus diubah terlebih dahulu menjadi bentuk yang lebih sesuai, yaitu

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{-\rho^4 + \left(\frac{1}{4} + \alpha_-\right)^2 + 2i\rho^2\left(\frac{1}{4} + \alpha_-\right) + \mu^2} \\ \log Z_1 &= \frac{1}{2} \log[-\rho^4 + \left(\frac{1}{4} + \alpha_-\right)^2 + 2i\rho^2\left(\frac{1}{4} + \alpha_-\right) + \mu^2] \end{aligned} \quad (4.50)$$

Misalkan $z = re^{i\theta}$. Bila diambil logaritma dengan basis bilangan natural dari kedua sisi maka

$$\begin{aligned}\log z &= \log re^{i\theta} \\ &= \log r + \log e^{i\theta} \\ &= \ln r + i\theta \log e \\ &= \ln r + i\theta.\end{aligned}\quad (4.51)$$

Dengan menggunakan sifat logaritma pada bilangan kompleks seperti pada Persamaan (4.51), bentuk $\log Z_1$ pada Persamaan (4.50) menjadi

$$\begin{aligned}\log Z_1 &= \frac{1}{2} \left[\ln \left\{ \left[\left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 - \rho^4 + \mu^2 \right]^2 + 4\rho^4 \left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + i \tan^{-1} \left(\frac{2\rho^2 \left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)}{\left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 - \rho^4 + \mu^2} \right) \right] \\ &= \ln \left\{ \left[\left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 - \rho^4 + \mu^2 \right]^2 + 4\rho^4 \left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}} \\ &\quad + \frac{i}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho^2 \left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)}{\left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 - \rho^4 + \mu^2} \right).\end{aligned}$$

Misal, $M(\rho) = \left\{ \left[\left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 - \rho^4 + \mu^2 \right]^2 + 4\rho^4 \left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}}$ dan $\phi(\rho) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho^2 \left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)}{\left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 - \rho^4 + \mu^2} \right)$, maka

$$\begin{aligned}\log Z_1 &= \ln M(\rho) + i\phi(\rho) \\ Z_1 &= e^{\ln M(\rho) + i\phi(\rho)} \\ &= M(\rho)e^{i\phi(\rho)}\end{aligned}\quad (4.52)$$

$$\begin{aligned}e^{Z_1\tau_-} &= e^{M(\rho)e^{i\phi(\rho)}\tau_-} \\ &= e^{M(\rho)\tau_- [\cos \phi(\rho) + i \sin \phi(\rho)]} \\ &= e^{M(\rho)\tau_- \cos \phi(\rho) + iM(\rho)\tau_- \sin \phi(\rho)}.\end{aligned}$$

Misalkan $X(\rho) = M(\rho)\tau_- \cos \phi(\rho)$ dan $Y(\rho) = M(\rho)\tau_- \sin \phi(\rho)$, maka

$$\begin{aligned} e^{Z_1\tau_-} &= e^{X(\rho)+iY(\rho)} \\ &= e^{X(\rho)}e^{iY(\rho)}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Dan dengan cara yang sama seperti pada Z_1 , maka Z_2 menjadi

$$Z_2 = M(\rho) \cos \phi(\rho) - iM(\rho) \sin \phi(\rho) \quad (4.54)$$

dan $e^{Z_2\tau_-}$ menjadi

$$e^{Z_2\tau_-} = e^{X(\rho)}e^{-iY(\rho)}. \quad (4.55)$$

Untuk menyelesaikan Persamaan (4.49), maka integran pada integral dalam Persamaan (4.49) dibagi menjadi 3 bagian sebagai berikut.

(i) Bagian I

$$\begin{aligned} &\frac{f_1(\rho)e^{-if_2(\rho)}\alpha_+}{Z_1(-i\rho^2 - \frac{1}{4})} [(e^{Z_1\tau_-} - e^{-Z_1\tau_-}) + (ie^{Z_1\tau_-} - ie^{-Z_1\tau_-})] \\ &- \frac{f_1(\rho)e^{if_2(\rho)}\alpha_+}{Z_2(i\rho^2 - \frac{1}{4})} [(e^{-Z_2\tau_-} - e^{Z_2\tau_-}) + (ie^{Z_2\tau_-} - ie^{-Z_2\tau_-})]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

(ii) Bagian II

$$\begin{aligned} &\frac{f_1(\rho)e^{-if_2(\rho)}}{Z_1} [(e^{Z_1\tau_-} - e^{-Z_1\tau_-}) + (ie^{Z_1\tau_-} - ie^{-Z_1\tau_-})] \\ &- \frac{f_1(\rho)e^{if_2(\rho)}}{Z_2} [(e^{-Z_2\tau_-} - e^{Z_2\tau_-}) + (ie^{Z_2\tau_-} - ie^{-Z_2\tau_-})]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

(iii) Bagian III

$$\begin{aligned} & \frac{f_1(\rho)e^{-if_2(\rho)}}{-i\rho^2 - \frac{1}{4}} [(e^{Z_1\tau^-} + e^{-Z_1\tau^-}) + (ie^{Z_1\tau^-} + ie^{-Z_1\tau^-})] \\ & - \frac{f_1(\rho)e^{if_2(\rho)}}{i\rho^2 - \frac{1}{4}} [(-e^{Z_2\tau^-} - e^{-Z_2\tau^-}) + (ie^{Z_2\tau^-} + ie^{-Z_2\tau^-})]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Persamaan (4.52), (4.54), (4.53) dan (4.55) disubstitusikan pada Persamaan (4.56), (4.57), dan (4.58). Berikut adalah penyelesaian ketiga bagian tersebut. a) Penyelesaian Bagian I

$$\begin{aligned} & \frac{f_1(\rho)\alpha_+ e^{-if_2(\rho)} e^{-i\phi(\rho)}}{(i\rho^2 - \frac{1}{4})M(\rho)} \{(e^{X(\rho)} e^{iY(\rho)} - e^{-X(\rho)} e^{-iY(\rho)}) \\ & + (ie^{X(\rho)} e^{iY(\rho)} - ie^{-X(\rho)} e^{-iY(\rho)})\} - \frac{f_1(\rho)\alpha_+ e^{if_2(\rho)} e^{i\phi(\rho)}}{(i\rho^2 - \frac{1}{4})M(\rho)} \\ & \{(e^{-X(\rho)} e^{iY(\rho)} - e^{X(\rho)} e^{-iY(\rho)}) + (ie^{X(\rho)} e^{-iY(\rho)} - ie^{-X(\rho)} e^{iY(\rho)})\} \\ & = \frac{f_1(\rho)\alpha_+}{(\rho^4 + \frac{1}{16})M(\rho)} \left\{ e^{-i(f_2(\rho)+i\phi(\rho))} (e^{X(\rho)} e^{iY(\rho)} - e^{-X(\rho)} e^{-iY(\rho)}) \right. \\ & [(i\rho^2 - \frac{1}{4}) + (-\rho^2 - \frac{i}{4})] - e^{i(f_2(\rho)+i\phi(\rho))} (e^{X(\rho)} e^{-iY(\rho)} \\ & - e^{-X(\rho)} e^{iY(\rho)}) [(i\rho^2 + \frac{1}{4}) + (\rho^2 - \frac{i}{4})] \left. \right\} \\ & = \frac{f_1(\rho)\alpha_+}{(\rho^4 + \frac{1}{16})M(\rho)} \left\{ e^{X(\rho)} \left[e^{-i(f_2(\rho)+\phi(\rho)-Y(\rho))} (i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2) \right. \right. \\ & - e^{i(f_2(\rho)+\phi(\rho)-Y(\rho))} (i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2) \left. \right] \\ & - e^{-X(\rho)} \left[e^{-i(f_2(\rho)+\phi(\rho)+Y(\rho))} (i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2) \right. \\ & \left. - e^{i(f_2(\rho)+\phi(\rho)+Y(\rho))} (i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2) \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Misal $R = f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)$ dan $S = f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)$, maka

$$\frac{f_1(\rho)\alpha_+}{(\rho^4 + \frac{1}{16})M(\rho)} \left\{ e^{X(\rho)} \left[e^{-iR} \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2 \right) - e^{iR} \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] - e^{-X(\rho)} \left[e^{-iS} \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2 \right) - e^{iS} \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] \right\}.$$

Karena dalam bilangan kompleks berlaku $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ dan $e^{-i\phi} = \cos(\phi) - i \sin(\phi)$, diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{f_1(\rho)\alpha_+}{(\rho^4 + \frac{1}{16})M(\rho)} \left\{ e^{X(\rho)} \left[(\cos R - i \sin R) \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2 \right) - (\cos R + i \sin R) \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] \right. \\ & \left. - e^{-X(\rho)} \left[(\cos S - i \sin S) \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2 \right) - (\cos S + i \sin S) \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] \right\} \\ & = \frac{f_1(\rho)\alpha_+}{(\rho^4 + \frac{1}{16})M(\rho)} \left\{ e^{X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \sin R - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos R \right] \right. \\ & \left. - e^{-X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \sin S - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos S \right] \right\} \\ & = \frac{f_1(\rho)\alpha_+}{(\rho^4 + \frac{1}{16})M(\rho)} \left\{ e^{X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \right] \right. \\ & \left. - e^{-X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

b) Penyelesaian Bagian II

$$\begin{aligned}
& \frac{f_1(\rho)e^{-if_2(\rho)}e^{-i\phi(\rho)}}{M(\rho)} [(e^{X(\rho)}e^{iY(\rho)} - e^{-X(\rho)}e^{-iY(\rho)}) \\
& + (ie^{X(\rho)}e^{iY(\rho)} - ie^{-X(\rho)}e^{-iY(\rho)})] \\
& - \frac{f_1(\rho)e^{if_2(\rho)}}{M(\rho)} [(e^{-X(\rho)}e^{iY(\rho)} - e^{X(\rho)}e^{-iY(\rho)}) \\
& + (ie^{X(\rho)}e^{-iY(\rho)} - ie^{-X(\rho)}e^{iY(\rho)})] \\
& = \frac{f_1(\rho)}{M(\rho)} \{e^{X(\rho)}[e^{-i(f_2(\rho)+\phi(\rho)-Y(\rho))} + ie^{-i(f_2(\rho)+\phi(\rho)-Y(\rho))}] \\
& + e^{i(f_2(\rho)+\phi(\rho)-Y(\rho))} - ie^{i(f_2(\rho)+\phi(\rho)-Y(\rho))}] \\
& + e^{-X(\rho)}[e^{-i(f_2(\rho)+\phi(\rho)+Y(\rho))} \\
& + ie^{-i(f_2(\rho)+\phi(\rho)+Y(\rho))} + e^{i(f_2(\rho)+\phi(\rho)+Y(\rho))} \\
& - ie^{i(f_2(\rho)+\phi(\rho)+Y(\rho))}]\}.
\end{aligned}$$

Seperti pada penyelesaian bagian I, misalkan $R = f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)$ dan $S = f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)$, maka

$$\begin{aligned}
& \frac{f_1(\rho)}{M(\rho)} \{e^{X(\rho)}[e^{-iR} + ie^{-iR} + e^{iR} - ie^{iR}] \\
& + e^{-X(\rho)}[e^{-iS} + ie^{-iS} + e^S - ie^{iS}]\} \\
& = \frac{f_1(\rho)}{M(\rho)} \{e^{X(\rho)}[\cos R - i \sin R + i(\cos R - i \sin R) \\
& + \cos R + i \sin R - i(\cos R + i \sin R)] - e^{-X(\rho)}[\cos S - i \sin S \\
& + i(\cos S - i \sin S) + \cos S + i \sin S - i(\cos S + i \sin S)]\} \\
& = \frac{2f_1(\rho)}{M(\rho)} \{e^{X(\rho)}[\sin R + \cos R] - e^{-X(\rho)}[\sin S + \cos S]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2f_1(\rho)}{M(\rho)} \{e^{X(\rho)} [\sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \\
&+ \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho))] - e^{-X(\rho)} [\sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \\
&+ \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho))]\}. \quad (4.60)
\end{aligned}$$

c) Penyelesaian Bagian III

$$\begin{aligned}
&\frac{f_1(\rho)e^{-if_2(\rho)}}{-i\rho^2 - \frac{1}{4}} [(e^{X(\rho)}e^{iY(\rho)} + e^{-X(\rho)}e^{-iY(\rho)}) \\
&+ (ie^{X(\rho)}e^{iY(\rho)} + ie^{-X(\rho)}e^{-iY(\rho)})] \\
&- \frac{f_1(\rho)e^{if_2(\rho)}}{i\rho^2 - \frac{1}{4}} [(-e^{-X(\rho)}e^{iY(\rho)} - e^{X(\rho)}e^{-iY(\rho)}) \\
&+ (ie^{X(\rho)}e^{-iY(\rho)} + ie^{-X(\rho)}e^{iY(\rho)})] \\
&= \frac{f_1(\rho)\alpha_+}{(\rho^4 + \frac{1}{16})} \left\{ e^{-if_2(\rho)} (e^{X(\rho)}e^{iY(\rho)} - e^{-X(\rho)}e^{-iY(\rho)}) \right. \\
&[(i\rho^2 - \frac{1}{4}) + (-\rho^2 - \frac{i}{4})] - e^{if_2(\rho)} (e^{X(\rho)}e^{-iY(\rho)} \\
&+ e^{-X(\rho)}e^{iY(\rho)}) [(i\rho^2 + \frac{1}{4}) + (\rho^2 - \frac{i}{4})] \left. \right\} \\
&= \frac{f_1(\rho)}{(\rho^4 + \frac{1}{16})} \left\{ e^{X(\rho)} \left[e^{-i(f_2(\rho)-Y(\rho))} (i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2) \right. \right. \\
&- e^{i(f_2(\rho)-Y(\rho))} (i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2) \left. \right] \\
&+ e^{-X(\rho)} \left[e^{-i(f_2(\rho)+Y(\rho))} (i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2) \right. \\
&- e^{i(f_2(\rho)+Y(\rho))} (i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2) \left. \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Misalkan $T = f_2(\rho) - Y(\rho)$ dan $U = f_2(\rho) + Y(\rho)$, maka

$$\begin{aligned}
& \frac{f_1(\rho)}{(\rho^4 + \frac{1}{16})} \left\{ e^{X(\rho)} \left[e^{-iT} \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - e^{iT} \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] + e^{-X(\rho)} \left[e^{-iU} \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - e^{iU} \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] \right\} \\
& = \frac{f_1(\rho)}{(\rho^4 + \frac{1}{16})} \left\{ e^{X(\rho)} \left[(\cos T - i \sin T) \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\cos T + i \sin T) \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + e^{-X(\rho)} \left[(\cos U - i \sin U) \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \rho^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\cos U + i \sin U) \left(i\rho^2 - \frac{i}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2 \right) \right] \right\} \\
& = \frac{f_1(\rho)}{(\rho^4 + \frac{1}{16})} \left\{ e^{X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \sin T - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos T \right] \right. \\
& \quad \left. - e^{-X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \sin U - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos U \right] \right\} \\
& = \frac{f_1(\rho)}{(\rho^4 + \frac{1}{16})} \left\{ e^{X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \sin(f_2(\rho) - Y(\rho)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos(f_2(\rho) - Y(\rho)) \right] \right. \\
& \quad \left. - e^{-X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \sin(f_2(\rho) + Y(\rho)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos(f_2(\rho) + Y(\rho)) \right] \right\}. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Sehingga dengan menggunakan Persamaan (4.44), (4.59), (4.60), dan (4.61), penyelesaian untuk $\frac{1}{2\pi} \int_{G_A} e^{i\omega x} \hat{q}_1(\omega, \tau_1) d\omega$

pada Persamaan (4.42) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 & e^{x-\tau+\gamma_+} + \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} e^{\frac{3x-\tau+\gamma_+-\tau+\delta_+-\tau_+-\beta_+\tau_+}{2} - \frac{\tau_+-\beta_+\tau_+}{4}} \int_0^\infty \left\{ \frac{f_1(\rho)\alpha_+}{(\rho^4 + \frac{1}{16})M(\rho)} \right. \\
 & \times \left\{ e^{X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \right] \right. \\
 & \left. - e^{-X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \right] \right\} \\
 & + \frac{2f_1(\rho)}{M(\rho)} \{ e^{X(\rho)} [\sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \\
 & + \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho))] - e^{-X(\rho)} [\sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \\
 & + \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho))] \} + \frac{f_1(\rho)}{(\rho^4 + \frac{1}{16})} \\
 & \times \left\{ e^{X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) - Y(\rho)) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) - Y(\rho)) \right] \right. \\
 & \left. - e^{-X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + Y(\rho)) \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) + Y(\rho)) \right] \right\} \Big\} d\rho.
 \end{aligned}$$

Karena $\frac{1}{2\pi} \int_{G_A} e^{i\omega x} \hat{q}_1(\omega, \tau_1) d\omega = q_1(x, \tau_1)$, maka dengan mengembalikan variable x , $q_1(x, \tau_1)$, τ_+ , γ_+ , δ_+ , β_+ dan α_+ ke bentuk semula diperoleh bentuk $V_1(S, t)$ sebagai berikut

$$Ee^{-\tau(T-t)} + \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \sqrt{SE} e^{-\frac{1}{2} \left(r + D + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{8} \right) (T-t)}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^\infty \left\{ \frac{2f_1(\rho)(\lambda_{12} + \lambda_{21})}{(\rho^4 + \frac{1}{16})M(\rho)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \right. \\
& \times \left\{ e^{X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \right] \right. \\
& \left. - e^{-X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \right] \right\} \\
& + \frac{2f_1(\rho)}{M(\rho)} \left\{ e^{X(\rho)} [\sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \right. \\
& + \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho))] - e^{-X(\rho)} [\sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \\
& + \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho))] \left. \right\} + \frac{f_1(\rho)}{(\rho^4 + \frac{1}{16})} \\
& \times \left\{ e^{X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) - Y(\rho)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) - Y(\rho)) \right] \right. \\
& + e^{-X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + Y(\rho)) \right. \\
& \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) + Y(\rho)) \right] \right\} \left. \right\} d\rho, \tag{4.62}
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
x &= \ln\left(\frac{S}{E}\right) \\
q_1(x, \tau_1) &= \frac{SV_1(S, t)}{E^2} \\
\tau_+ &= \tau_1 \left(\frac{A+1}{2A}\right) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{4}(T-t) \\
\gamma_+ &= \frac{A\gamma_1 + \gamma_2}{A+1} = \frac{4r}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_+ &= \frac{A\delta_1 + \delta_2}{A+1} = \frac{4D}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \beta_+ &= \frac{A\beta_{12} + \beta_{21}}{A+1} = \frac{2(\lambda_{12} + \lambda_{21})}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \alpha_+ &= \frac{A\beta_{12} + \beta_{21}}{A-1} = \frac{2(\lambda_{12} + \lambda_{21})}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}.\end{aligned}$$

Untuk kondisi $\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r-D)(T-t) < 0$ ($x + \gamma_+\tau_+ - \tau_+\delta_+ < 0$), dapat dihitung dengan cara yang sama pada kondisi $\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r-D)(T-t) \geq 0$ ($x + \gamma_+\tau_+ - \tau_+\delta_+ \geq 0$) dan diperoleh hasil seperti pada Persamaan (4.62). Jadi rumus $V_1(S, t)$ pada Persamaan (4.62) dapat digeneralisasi untuk semua $\ln\left(\frac{S}{E}\right) + r(T-t)$ dengan mendefinisikan ulang fungsi $f_1(\rho)$ dan $f_2(\rho)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}f_1(\rho) &= e^{-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left|\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r-D)(T-t)\right|} \\ f_2(\rho) &= \frac{\rho^2}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(T-t) - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left|\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r-D)(T-t)\right|.\end{aligned}$$

Sementara itu dengan cara yang sama pada penyelesaian $\hat{q}_1(\omega, \tau_1)$, diperoleh penyelesaian $\hat{q}_2(\omega, \tau_2)$ adalah $V_2(S, t)$, yang bentuknya sebagai berikut

$$\begin{aligned}Ee^{-r(T-t)} &+ \frac{1}{4\pi\sqrt{2}}\sqrt{SE}e^{-\frac{1}{2}\left(r+D+\lambda_{12}+\lambda_{21}+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{8}\right)(T-t)} \\ &\times \int_0^\infty \left\{ \frac{(-1)2f_1(\rho)(\lambda_{12} + \lambda_{21})}{(\rho^4 + \frac{1}{16})M(\rho)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \right. \\ &\times \left. \left\{ e^{-X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \right] \right. \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \Big] \\
& - e^{X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \right. \\
& \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \right] \Big\} \\
& + \frac{2f_1(\rho)}{M(\rho)} \left\{ e^{-X(\rho)} [\sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho)) \right. \\
& + \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y(\rho))] - e^{X(\rho)} [\sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho)) \\
& + \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y(\rho))] \Big\} + \frac{f_1(\rho)}{(\rho^4 + \frac{1}{16})} \\
& \times \left\{ e^{-X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + Y(\rho)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) + Y(\rho)) \right] \right. \\
& \left. + e^{X(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) - Y(\rho)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) - Y(\rho)) \right] \right\} d\rho. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Dengan generalisasi, diperoleh bentuk $V_j(S, t)$, $j = 1, 2$, yaitu

$$\begin{aligned}
& Ee^{-r(T-t)} + \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \sqrt{SE} e^{-\frac{1}{2}\left(r+D+\lambda_{12}+\lambda_{21}+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{8}\right)(T-t)} \\
& \times \int_0^\infty \left\{ \frac{(-1)^{j-1} 2f_1(\rho)(\lambda_{12} + \lambda_{21})}{(\rho^4 + \frac{1}{16})M(\rho)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \right. \\
& \times \left\{ e^{X_j(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y_j(\rho)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2}\right) \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y_j(\rho)) \right] \right. \\
& \left. - e^{-X_j(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y_j(\rho)) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y_j(\rho)) \Big] \Big\} \\
& + \frac{2f_1(\rho)}{M(\rho)} \left\{ e^{X_j(\rho)} [\sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y_j(\rho)) \right. \\
& + \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) - Y_j(\rho))] - e^{-X_j(\rho)} [\sin(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y_j(\rho)) \\
& + \cos(f_2(\rho) + \phi(\rho) + Y_j(\rho))] \Big\} + \frac{f_1(\rho)}{(\rho^4 + \frac{1}{16})} \\
& \times \left\{ e^{X_j(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \sin(f_2(\rho) - Y_j(\rho)) \right. \right. \\
& - \left. \left. \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos(f_2(\rho) - Y_j(\rho)) \right] \right. \\
& + e^{-X_j(\rho)} \left[\left(2\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \sin(f_2(\rho) + Y_j(\rho)) \right. \\
& - \left. \left. \left(2\rho^2 + \frac{1}{2} \right) \cos(f_2(\rho) + Y_j(\rho)) \right] \Big\} d\rho, \tag{4.64}
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\tau_- &= \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{4} (T - t), & \alpha_- &= \frac{2(\lambda_{12} - \lambda_{21})}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \\
\mu^2 &= \frac{4\lambda_{12}\lambda_{21}}{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2} \\
M(\rho) &= \left\{ \left[\left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 - \rho^4 + \mu^2 \right]^2 + 4\rho^4 \left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}} \\
\phi(\rho) &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho^2 \left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)}{\left(\frac{1}{4} + \alpha_- \right)^2 - \rho^4 + \mu^2} \right) \\
X_j(\rho) &= (-1)^{j-1} M(\rho) \tau_- \cos \phi(\rho) \\
Y_j(\rho) &= (-1)^{j-1} M(\rho) \tau_- \sin \phi(\rho)
\end{aligned}$$

$$f_1(\rho) = e^{-\frac{\rho}{\sqrt{2}} \left| \ln\left(\frac{S}{E}\right) + r(T-t) \right|}$$

$$f_2(\rho) = \frac{\rho^2}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) (T-t) - \frac{\rho}{\sqrt{2}} \left| \ln\left(\frac{S}{E}\right) + r(T-t) \right|.$$

4.4 Analisis Hasil Simulasi

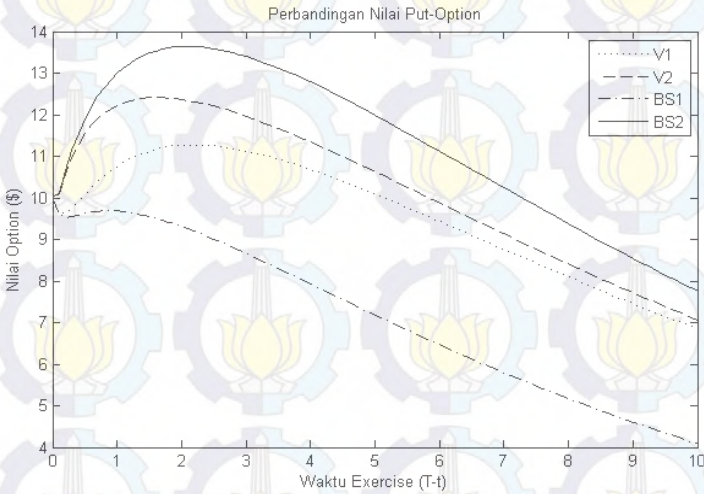
Pada pembahasan ini, dianalisis hasil simulasi dari nilai *option* dengan formula *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* (Persamaan (4.64)) dan formula Black-Scholes (BS) klasik dengan dividen (Persamaan (2.2)).

1. *Theta*

Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi adalah sebagai berikut: $S = \$90$, $E = \$100$, $r = 0.1$, $D = 0.05$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, dan $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 1$ dan hasil simulasi ditunjukkan oleh Gambar 4.3 dan Tabel 4.1. Dari Gambar 4.3 dan Tabel 4.1, terlihat bahwa nilai *European put option* (V_1, V_2, BS_1, BS_2) pada awalnya mengalami peningkatan namun kemudian mengalami penurunan ketika *time to expiry* ($T - t$) bertambah.

Tabel 4.1: Perbandingan BS_1, V_1, V_2 dan BS_2 terhadap $T - t$

$T - t$	BS_1	V_1	V_2	BS_2
0	10	10	10	10
2	9.3126	11.2617	12.3701	13.6363
4	7.9275	10.6815	11.3422	12.7872
6	6.4651	9.4356	9.8769	11.1258
8	5.1725	8.0958	8.4076	9.3731
10	4.0941	6.8397	7.0671	7.7562



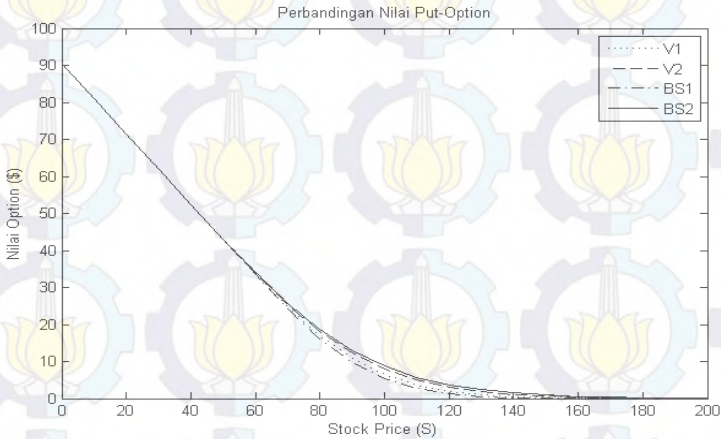
Gambar 4.3: Nilai Option vs Time to expiry ($T - t$)

2. Delta

Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi adalah sebagai berikut: $T - t = 1$, $E = \$100$, $r = 0.1$, $D = 0.05$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, dan $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 1$ dan hasil simulasi ditunjukkan oleh Gambar 4.4 dan Tabel 4.2. Dari Gambar 4.4 dan Tabel 4.2, terlihat bahwa nilai *European put option* (V_1, V_2, BS_1, BS_2) mengalami penurunan (bahkan menuju nol) ketika harga saham (S) meningkat.

Tabel 4.2: Perbandingan BS_1, V_1, V_2 dan BS_2 terhadap S

S	BS_1	V_1	V_2	BS_2
90	9.6818	10.7514	12.2179	12.9951
140	0.2162	0.5533	1.1179	1.4695
200	5.9327e-04	0.0136	0.0493	0.0775



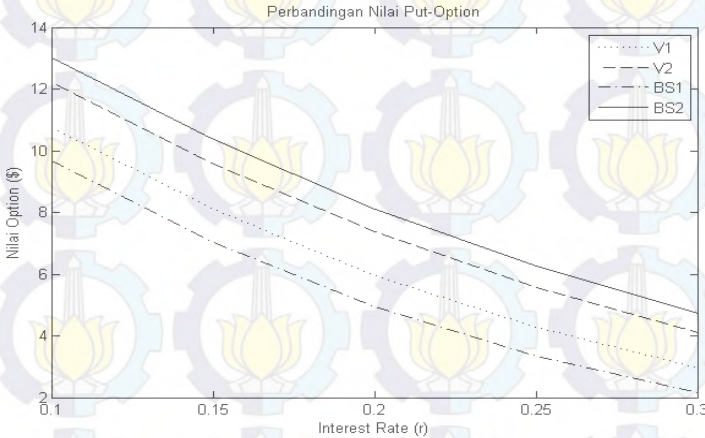
Gambar 4.4: Nilai *Option* vs Harga Saham (S)

3. *Rho*

Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi adalah sebagai berikut: $S = \$90$, $E = \$100$, $T - t = 1$, $D = 0.05$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, dan $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 1$ dan hasil simulasi ditunjukkan oleh Gambar 4.5 dan Tabel 4.3. Dari Gambar 4.4 dan Tabel 4.3, terlihat bahwa nilai *European put option* (V_1, V_2, BS_1, BS_2) mengalami penurunan ketika *interest rate* (r) meningkat.

Tabel 4.3: Perbandingan BS_1, V_1, V_2 dan BS_2 terhadap r

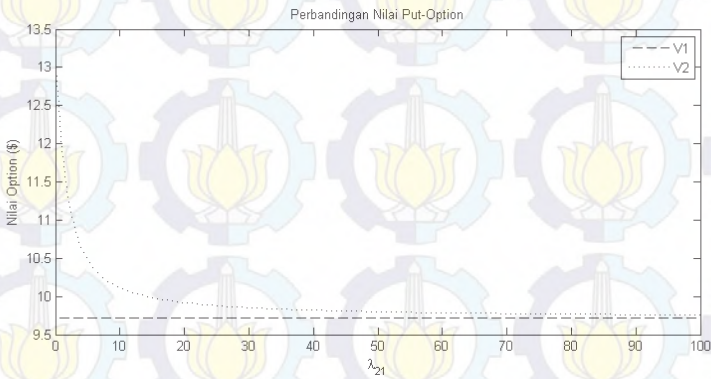
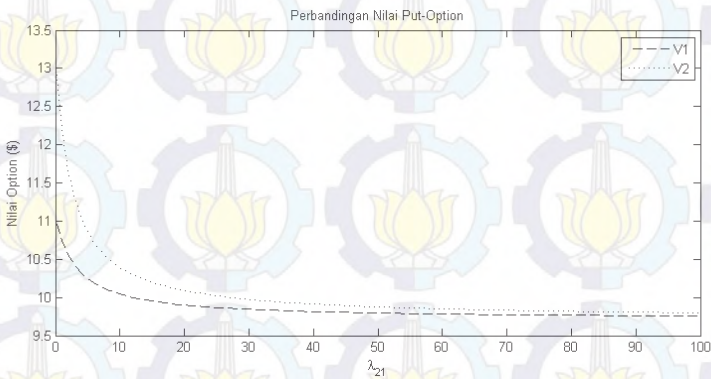
r	BS_1	V_1	V_2	BS_2
0.1	9.6818	10.7514	12.2179	12.9951
0.15	7.0362	8.1098	9.5764	10.3531
0.2	4.9348	5.9616	7.3690	8.1177
0.25	3.3308	4.2670	5.5628	6.2590
0.3	2.1583	2.9721	4.1172	4.7417



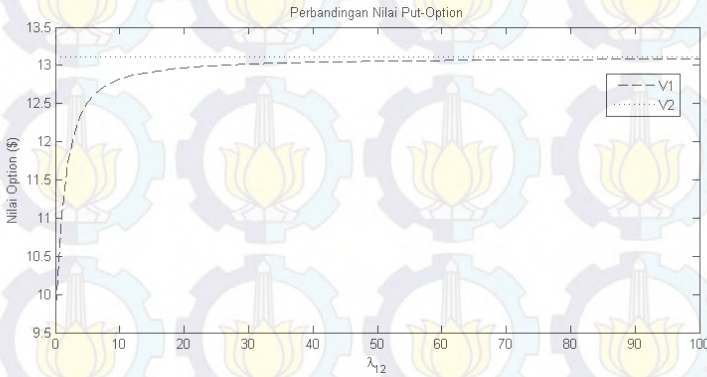
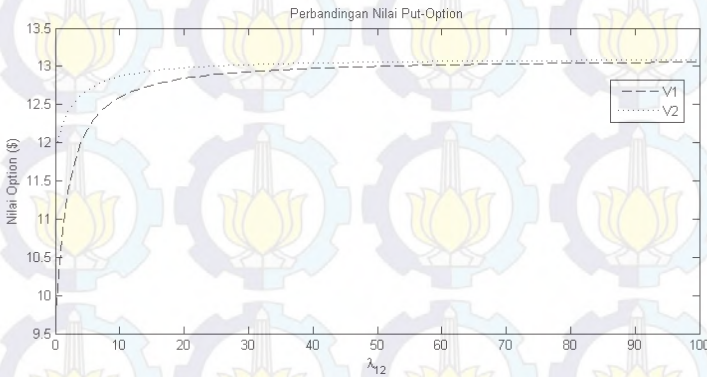
Gambar 4.5: Nilai *Option* vs *Interest Rate* (r)

4. Perubahan Nilai *Option* terhadap λ

Pertama, perhatikan perubahan nilai option bila $\lambda_{12} = 0$ dan $\lambda_{12} = 1$. Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi adalah sebagai berikut: $S = \$90$, $E = \$100$, $T - t = 1$, $r = 0.1$, $D = 0.05$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, dan $\lambda_{21} = 1$. Hasil simulasi untuk $\lambda_{12} = 0$ ditunjukkan oleh Gambar 4.6 dan untuk $\lambda_{12} = 1$ ditunjukkan oleh Gambar 4.7. Dari Gambar 4.6 dan Gambar 4.7 terlihat bahwa ketika nilai λ_{21} semakin besar, maka nilai V_2 semakin mendekati nilai V_1 . Sementara itu dengan nilai parameter yang sama, bila $\lambda_{21} = 0$ dan $\lambda_{21} = 1$ maka nilai V_1 semakin mendekati nilai V_2 ketika nilai λ_{12} semakin besar. Hasil simulasi untuk $\lambda_{21} = 0$ ditunjukkan oleh Gambar 4.8 dan untuk $\lambda_{21} = 1$ ditunjukkan oleh Gambar 4.9.

Gambar 4.6: V_1 dan V_2 untuk $\lambda_{12} = 0$ Gambar 4.7: V_1 dan V_2 untuk $\lambda_{12} = 1$

Pada grafik hasil simulasi ketiga *Greek*, yaitu *Theta*, *Delta*, dan *Rho* (Gambar 4.3, Gambar 4.4, dan Gambar 4.5), dapat dilihat bahwa nilai *European put option* yang dihasilkan dari Persamaan (4.64) berada di antara nilai *European put option* yang diperoleh dari model Black-Scholes klasik (tanpa *regime-switching*) disertai dividen yang diberikan oleh Persamaan

Gambar 4.8: V_1 dan V_2 untuk $\lambda_{21} = 0$ Gambar 4.9: V_1 dan V_2 untuk $\lambda_{21} = 1$

(2.2) ($BS_1 < V_1 < V_2 < BS_2$). Hal ini disebabkan oleh hasil kombinasi volatilitas dari kedua *state* (σ_1 dan σ_2 , dimana $\sigma_1 < \sigma_2$). Perbedaan antara nilai V_1 dengan BS_1 menyatakan pertambahan nilai *option* akibat volatilitasnya (σ_1) dikombinasikan dengan volatilitas *state* yang nilainya lebih besar (σ_2). Sementara perbedaan antara nilai V_2 dengan

BS_2 menyatakan penurunan nilai *option* akibat volatilitasnya (σ_2) dikombinasikan dengan volatilitas *state* yang nilainya lebih kecil (σ_1).



Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

- a. Diperoleh solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* menggunakan transformasi Fourier yang diberikan oleh Persamaan (4.64).
- b. Berdasarkan hasil simulasi dapat dilihat bahwa nilai *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* cenderung mengalami penurunan ketika *time to expiry* bertambah, mengalami penurunan (bahkan menuju nol) ketika harga saham meningkat, dan mengalami penurunan ketika *interest rate* meningkat.
- c. Berdasarkan hasil simulasi dapat dilihat bahwa ketika suatu parameter laju dari suatu *state* semakin besar maka nilai *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* dari *state* tersebut konvergen ke *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* dari *state* lainnya.
- d. Kombinasi volatilitas dari kedua *state* menyebabkan nilai *European put option* disertai dividen dengan

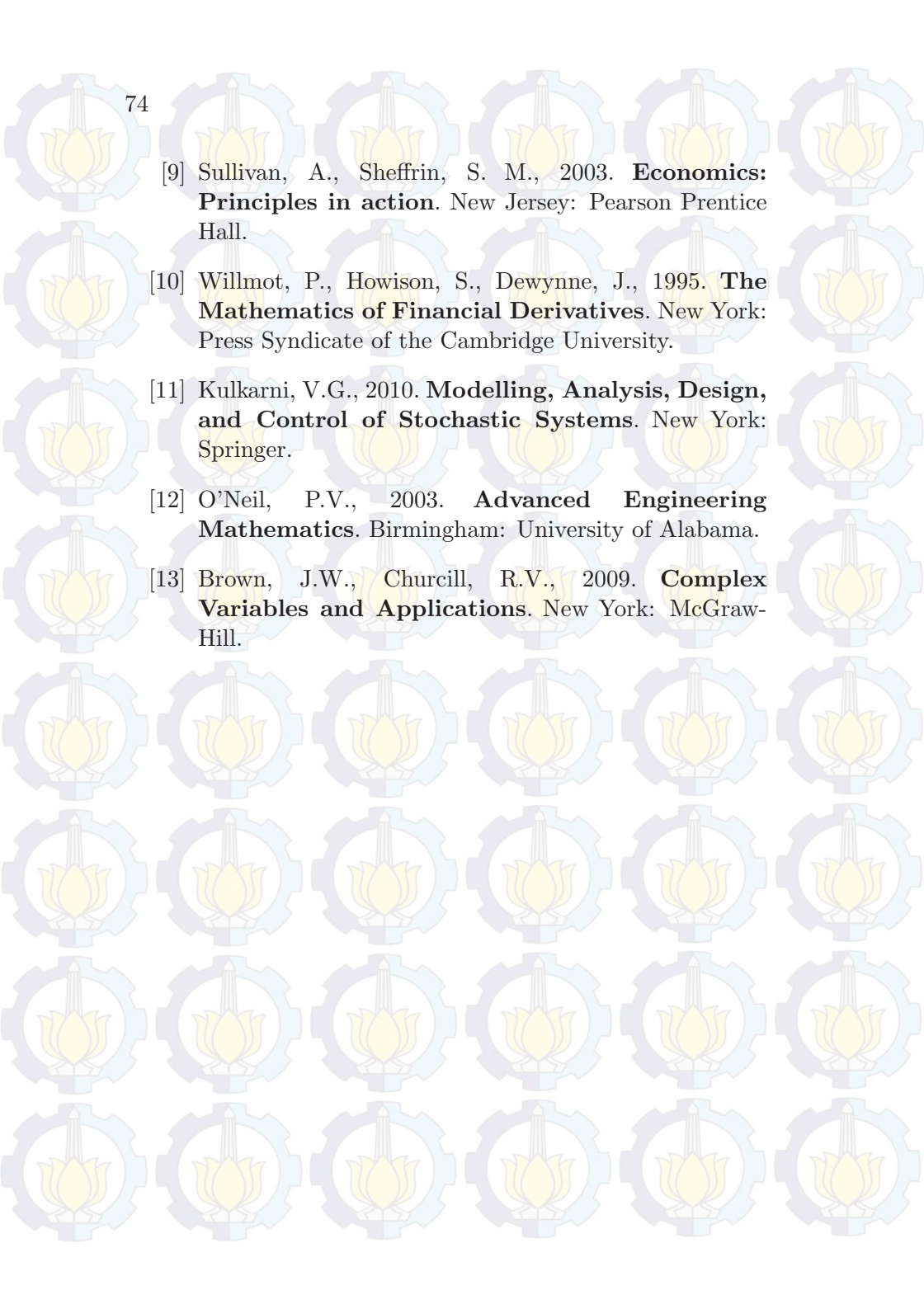
regime-switching berada diantara nilai *European put option* dengan model Black-Scholes klasik (tanpa *regime-switching*) disertai dividen.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini belum dijabarkan solusi analitik *European put option* disertai dividen dengan *regime-switching* jika *interest rate* antara kedua *state* berbeda. Oleh sebab itu, penulis menyarankan agar penelitian dapat dilanjutkan pada pembahasan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ross, S.M., 2011. **An Elementary Introduction to Mathematical Finance**. New York: Cambridge University Press.
- [2] Zhu, S., Badran, A., Lu, X., 2012. A New Exact Solution for Pricing European Options in a two state regime-switching economy. **Journal of Computers and Mathematics with Applications**, 64:2744-2755.
- [3] Naik, V., 1993. Option valuation and hedging strategies with jumps in the volatility of asset returns. **Journal of Finance**, 48:1969-1984.
- [4] Di Masi, G.B., Kabanov, Y.M., Runggaldier, W.J., 1994 . Mean-variance hedging of options on stocks with Markov volatilities. **Theory of Probability and its Applications**, 39:172-182.
- [5] Guo, X., 2001. Information and option pricings. **Journal of Quantitative Finance**, 1:38-44.
- [6] Sepp, A., Skachkov, I., 2006 . **Option pricing with jumps**. Wilmott Magazine.
- [7] Salim, L., 2003 . **Derivatif : "Option & Warrant"**. Jakarta: Elex Media Komputindo.
- [8] Hull, J.C., 2002 . **Option, Future and Other Derivatives**. New Jersey: Prentice Hall.

- 
- [9] Sullivan, A., Sheffrin, S. M., 2003. **Economics: Principles in action**. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- [10] Willmot, P., Howison, S., Dewynne, J., 1995. **The Mathematics of Financial Derivatives**. New York: Press Syndicate of the Cambridge University.
- [11] Kulkarni, V.G., 2010. **Modelling, Analysis, Design, and Control of Stochastic Systems**. New York: Springer.
- [12] O'Neil, P.V., 2003. **Advanced Engineering Mathematics**. Birmingham: University of Alabama.
- [13] Brown, J.W., Churchill, R.V., 2009. **Complex Variables and Applications**. New York: McGraw-Hill.

LAMPIRAN A Biodata Penulis



Penulis bernama Maruli Manurung, lahir di Pakis, Malang, 5 Oktober 1993. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Nirartha Benoa (1998-1999), SD Katolik Soverdi Tuban (1999-2005), SMP Negeri 1 Kuta (2005-2008), dan SMA Negeri 5 Denpasar (2008-2011). Setelah lulus dari SMA, pada tahun 2011 penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di

Jurusan Matematika ITS Surabaya melalui jalur SNMPTN dengan NRP 1211 100 063. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: marruleeotupe@gmail.com