TUGAS AKHIR - SM 141501

KAJIAN PENDEKATAN UNTUK MEMPERKIRAKAN KONTRIBUSI PEUBAH TERHADAP STATISTIK HOTELLING

DINI PRIHARTATI
NRP 1211 100 107

Dosen Pembimbing
Dra. Farida Agustini W., MS
Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2015

FINAL PROJECT-SM 141501

A STUDY OF AN APPROACH TO ESTIMATE VARIABLE CONTRIBUTIONS TO HOTELLING'S STATISTIC

DINI PRIHARTATI
NRP 1211 100 107

Supervisors
Dra. Farida Agustini W., MS
Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si

Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Sciences
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2015

KAJIAN PENDEKATAN UNTUK MEMPERKIRAKAN KONTRIBUSI PEUBAH TERHADAP STATISTIK HOTELLING

Nama	**:**	**DINI PRIHARTATI**
NRP	**:**	**1211 100 107**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Dosen Pembimbing	**:**	**1.Dra. Farida Agustini W., MS**
		2.Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si

Abstrak

Statistik Hotelling sering digunakan dalam pengendalian kualitas proses. Peta kendali Statistik Hotelling pada dasarnya mempunyai tujuan utama untuk peningkatan dan pemeliharaan kualitas dengan menstabilkan proses tersebut. Beberapa pendekatan berbeda pernah diusulkan untuk memperkirakan kontribusi peubah terhadap Statistik Hotelling. Pendekatan sebelumnya menggunakan *Principal Component Analysis* (PCA), menginterpretasikan hasil yang berasal dari analisis peubah laten (peubah *unobserved*). Pada Tugas Akhir ini dibahas mengenai pendekatan berdasarkan *Nearest in Control Neighbor* (NICN) terhadap titik pengamatan. Untuk mendapatkan kontribusi peubah Statistik Hotelling diggunakan perhitungan $c_{ij} = |x_{ij,NICN} - x_{ij}|$. Perbandingan yang diperoleh adalah hasil perhitungan peta kendali Statistik Hotelling menggunakan prinsip NICN terkendali secara mean proses setelah pengamatan *out of control* dihilangkan dan dapat diketahui peubah yang merupakan penyebab pengamatan *out of control*, sedangakan menggunakan Statistik Hotelling biasa tidak dapat diketahui peubah yang merupakan penyebab pengamatan *out of control*.

Kata kunci: NICN, Pengendalian Kualitas Proses, Peta Kendali, Statistik Hotelling.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

A STUDY OF AN APPROACH TO ESTIMATE VARIABLE CONTRIBUTIONS TO HOTELLING'S STATISTIC

Name : **DINI PRIHARTATI**
NRP : **1211 100 107**
Department : **Mathematics**
Supervisors : **1.Dra. Farida Agustini W., MS**
2.Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si

Abstract

Hotelling's Statistic is widely used in quality control process. The main purpose of Graphic Control of Hotelling's Statistic basically is improvement and maintenance of quality by stabilizing the process. Several different approaches have been proposed to estimate the variable value for Hotelling's Statistic. Previous approach using Principal Componen Analysis (PCA) interpreted the result derived from laten variable analysis (unobserved variable). This Final Project discusses an approach based on the nearest in-control neighbor (NICN) from the point of observation. To find the variable contributions to Hotelling's Statistic using calculation of $c_{ij} = \left| x_{ij,NICN} - x_{ij} \right|$. *The comparison were obtained is the calculation result of Hotelling's Statistic based on NICN restrained by mean process after the perception that out of control is eliminated and it can be known the variable causing out of control observation, while the calculation result of Hotelling's Statistic can not be known the variable causing out of control observation.*

Keywords: Graphic Control, Hotelling's Statistic, NICN, Quality Control Process.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

LEMBAR PENGESAHAN

KAJIAN PENDEKATAN UNTUK MEMPERKIRAKAN KONTRIBUSI PEUBAH TERHADAP STATISTIK HOTELLING

A STUDY OF AN APPROACH TO ESTIMATE VARIABLE CONTRIBUTIONS TO HOTELLING'S STATISTIC

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :
DINI PRIHARTATI
NRP. 1211 100 107

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Dian Winda S., S.Si, M.Si	Dra. Farida Agustini W., MS
NIP. 19761215 200312 2 001	NIP. 19540817 198103 2 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat dan hidayah, dan hinayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul:

“**KAJIAN PENDEKATAN UNTUK MEMPERKIRAKAN KONTRIBUSI PEUBAH TERHADAP STATISTIK HOTELLING**”.

Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik dan lancar atas kerja sama dan dukungan berbagai pihak. Sehingga pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu, dan seluruh keluarga atas motivasi, bantuan, semangat, dan doanya kepada penulis.
2. Ibu Prof. DR. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS.
3. Ibu Dra. Farida Agustini W., MS dan Ibu Dian Winda, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah banyak membantu dan membimbing penulis dalam Penyelesaian Tugas Akhir ini.
4. Ibu Nuri Wahyuningsih, M.Kes, Ibu Endah Rokhmati MP, Ph.D, Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si, dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si Selaku dosen penguji yang banyak memberikan saran serta nasihat yang membangun dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
5. Bapak Drs. Suharmadi S., M.Phil Selaku Dosen Wali.
6. Segenap Bapak dan Ibu dosen serta seluruh karyawan di Jurusan Matematika yang telah membantu selama ini.
7. Rekan-rekan Matematikan ITS angkatan 2011 yang telah menjadi elemen dalam cerita perjuangan kehidupan mahasiswa, khususnya Linda, Irna, Rimud, Chacha, Huri, Rahma, Anita, Henny, dan Aza.
8. Keluarga besar Ibnu Muqlah khususnya BPH 1314, Teteh, Zebri, Dyna, Mpip, Mbak Ifa, Aat, Singgih, Habib, Agus, Musa, dan Virama segala atas kebersamaan, perjuangan, dan semangat.

9. Keluarga Besar Radio Suara Muslim Surabaya, khususnya Mbak Ines, Mbak Sephy, Mbak Elsa, Mbak Chusnul, Mbak Icha, Mbak Zeni, Ibu Arita, Ibu Fetty, Mbak Yanti, Mbak Ais, Mbak Zahra, Mbak Dina, dan Mbak Hida atas segala kebersamaan, cerita, *support*, dan pengalaman yang luar biasa.
10. Silfi, Ilmi, Hima, Mas Tony, Mas Faris, Mbak Rika, Lia, Bella, Belbon, dan teman-teman yang telah banyak memberikan ilmu serta membantu dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
11. Teman-teman yang telah menjadi bagian dalam kehidupan ini, khususnya Friska, Alvi, Putri MK, Citra, Erika, Inez, dan Kak Marhamah atas segala *support* dan doa yang diberikan.
12. Teman-teman perjalanan Fadia, Alda, dan Mbak Rina atas pengalaman, cerita, dan kebersamaannya.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran yang membangun dari pembaca. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR SIMBOL

X_j	:	Peubah ke-*j*
x_i	:	Pengamatan sampel ke-*i*
$\bar{X}_j$	:	Rata-rata peubah ke-*j*
$\boldsymbol{\Sigma}$	:	Matriks varian kovarian data populasi
$\boldsymbol{S}$	:	Matriks varian kovarian data sampel
$\boldsymbol{\rho}$	:	Matriks korelasi data populasi
$\boldsymbol{r}$	:	Matriks korelasi data sampel
ρ_{jk}	:	Koefesien korelasi data populasi peubah ke-*j* dan peubah ke-*k*
$r_{X_j X_k}$	:	Koefisien korelasi sampel peubah ke-*j* dan peubah ke-*k*
d_i^2	:	Mahalanobis *Distance*
$T_i{}^2$	:	Nilai Statistik Hotelling
$\mathcal{L}$	:	Fungsi Lagrange
λ	:	Nilai eigen
$x_{NICN,i}$	:	Nilai *Nearest In Control Neighbor* pengamatan ke-*i*
c_{ij}	:	Nilai Kontribusi Masing-masing Pengamatan
τ_j	:	Batas Standar Kontribusi Masing-masing Pengamatan

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR TABEL

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR LAMPIRAN

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang mendasari munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah, selanjutnya dijabarkan batasan masalah untuk mendapatkan tujuan dan manfaat yang dapat diperoleh. Terakhir, diuraikan sistematika penulisan.

1.1 Latar Belakang

Meningkatnya kebutuhan masyarakat terhadap sejumlah produk barang dan jasa mendorong kegiatan industri agar dapat memenuhi kebutuhan masyarakat. Naiknya tingkat produktifitas berdampak pada proses produksi, dimana banyak ditemui hasil produksi yang tidak sesuai dengan spesifikasi.

Statistik adalah alat pengambilan keputusan tentang suatu proses berdasarkan analisis informasi yang terkandung dalam sampel. Untuk menjamin suatu proses produksi dan produk yang dihasilkan sesuai dengan spesifikasi, perlu dilakukan pemeriksaan yang berkaitan dengan proses produksi. Pemeriksaan tersebut bertujuan untuk meningkatkan dan memelihara kualitas produk agar terkendali sesuai dengan harapan.

Berdasarkan permasalahan tersebut digunakan *Statistical Process Control* (SPC). SPC merupakan metode yang dapat digunakan untuk mengontrol dan memonitor suatu proses. Salah satu alat yang dapat digunakan adalah peta kendali (*control chart*). Peta kendali secara grafis digunakan untuk memonitor apakah suatu proses berada di dalam batas terkendali atau tidak. Peta kendali ini dikenal sebagai peta *Shewart* univariat. Peta *Shewart* digunakan untuk memonitor serta mengontrol suatu proses yang hanya melibatkan satu peubah. Dalam prakteknya, permasalahan yang sering ditemui terdiri dari bemacam peubah atau dikenal dengan istilah multivariat. Penggunaan peta kendali *Shewart* untuk data multivariat menghasilkan kesimpulan yang kurang tepat. Harold Hotelling pada tahun 1947 memperkenalkan suatu statistik yang dapat menggambarkan observasi multivariat yang dikenal dengan Statistik Hotelling (Johnson dan Wichern, 2007).

Jika suatu pengamatan berada diluar batas kendali maka dilakukan penyelidikan untuk dapat menemukan penyebab tak terkendali atau *out of control*, hal ini berkaitan dengan penyelidikan peubah-peubah pada data tersebut. Mason (1997) dan Alvarez (2007) telah membahas metode untuk dapat menemukan penyebab *out of control* dengan pertimbangan sifat multivariat data. Metode lain yang digunakan adalah mendapatkan peubah laten yang pernah dilakukan pertama kali oleh Jackson (1991) yaitu mengubah Statistik Hotelling menjadi *Principle Component Analysis* (PCA). Namun dengan metode PCA tidak pasti menemukan titik yang berada diluar daerah kendali.

Pada Tugas Akhir yang berjudul "Kajian Pendekatan untuk Memperkirakan Kontribusi Peubah Terhadap Statistik Hotelling" adalah mencari tetangga terdekat dari titik pengamatan menggunakan prinsip *Nearest In Control Neighbor* (NICN). Kontribusi masing-masing peubah dihitung melalui jarak yang diperoleh dari kedua titik tersebut. Kontribusi peubah digunakan sebagai acuan penyebab *out of control*.

1.2 Rumusan Masalah

Berkaitan dengan latar belakang, disusun suatu rumusan masalah dalam Tugas Akhir ini, yaitu:

1. Bagaimana mendapatkan model pendekatan untuk memperkirakan kontribusi peubah terhadap Statistik Hotelling?
2. Bagaimana hasil perhitungan Statistik Hotelling dan Statistik Hotelling menggunakan prinsip *Nearest In Control Neighbor* (NICN) berdasarkan data studi kasus dari literatur?
3. Bagaimana perbandingan hasil perhitungan Statistik Hotelling dan Statistik Hotelling menggunakan prinsip NICN?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini antara lain:

1. Data yang dipakai berdistribusi normal multivariat.
2. Data yang digunakan berdasarkan jurnal *A New Approach to Estimate Variable Contributions to Hottelling's Statistic* (Sanchez, 2012).
3. Software yang digunakan adalah *Minitab 16* dan *Matlab R2008a*.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari model pendekatan baru untuk memperkirakan kontribusi peubah terhadap Statistik Hotelling.
2. Mendapatkan hasil perhitungan Statistik Hotelling dan Statistik Hotelling berdasarkan prinsip NICN menggunakan data studi kasus dari literatur.
3. Mendapatkan perbandingan hasil perhitungan Statistik Hotelling dan Statistik Hotelling menggunakan prinsip NICN.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diperoleh dari Tugas Akhir ini adalah sebagai rujukan untuk mengetahui kontribusi peubah terhadap Statistik Hotelling. Besar kontribusi berguna dalam mengidentifikasi peubah penyabab *out of control*, sehingga dapat digunakan sebagai acuan untuk proses perbaikan kualitas proses di masa yang akan datang.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II dijelaskan mengenai Statistik Hotelling, NICN, serta materi yang mendukung proses pengerjaan Tugas Akhir, antara lain pengertian Pengendalian Kualitas Statistik, Analisis Multivariat dan Pengali Lagrange.

BAB III METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, uji korelasi dan uji distribusi multivariat, selanjutnya melakukan perhitungan data menggunakan *Minitab 16* dan *Matlab 2008a*.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada Bab IV dibahas bagaimana model pendekatan untuk memperkirakan kontribusi peubah terhadap Statistik Hotelling menggunakan prisip NICN. Dijelaskan hasil perhitungan Statistik Hotelling dan Statistik Hotelling berdasarkan prinsip NICN menggunakan data studi kasus dari literatur. Dijelaskan perbandingan hasil perhitungan yang diperoleh.

BAB V PENUTUP

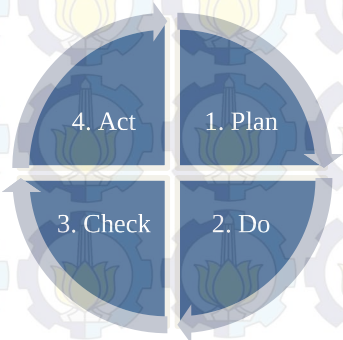
Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis dan pembahasan yang dijelaskan serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengendalian Kulitas Statistik

Pengertian kualitas mempunyai makna yang sangat luas, dalam dunia industri pada dasarnya kualitas dikatakan baik menurut perusahaan apabila produk yang dihasilkan sesuai dengan spesifikasi yang telah ditentukan perusahaan tersebut. Dalam menentukan spesifikasi suatu produk, perusahaan harus memperhatikan keinginan dan kebutuhan dari konsumen.

Pengendalian kualitas dilakukan melalui proses yang terus-menerus dan berkesinambungan. Pengendalian kualitas tersebut salah satunya dapat dilakukan melalui penerapan PDCA (*Plan-Do-Check-Action*) yang diperkenalkan oleh Dr. W. Edwards Deming. Siklus Deming (PDCA) umumnya digunakan untuk menguji dan mengimplementasikan perubahan kinerja, proses atau sistem di masa yang akan datang (Montgomery, 2002).



Gambar 2.1 *Deming Cycle*

Pengendalian kualitas statistik sering disebut pengendalian proses statistik atau *Statistical Process Control* (SPC), SPC merupakan aplikasi dari teknik statistik yang mengontrol suatu proses. Proses produksi yang berlangsung dengan baik akan mengasilkan kualitas produk yang sesuai spesifikasi. Metode pengendalian kualitas pertama dan merupakan awal dari SPC yang dipakai dibidang industri modern adalah peta kendali (*control chart*).

Dalam teori SPC, kondisi yang berada di luar batas kendali harus diketahui penyebabnya dengan pasti, penyebab umum dan khusus seperti perubahan dari bahan baku, degradasi atau penyalah gunaan mesin, pergantian operator / user dari suatu mesin, dan lain-lain. Pengamatan yang berada di luar batas kendali biasanya disebut dengan pengamatan yang *Out of control* yaitu suatu kondisi yang berakitbat pada karakteristik produk tidak sesuai dengan spesifikasi perusahaan ataupun keinginan pelanggan.

2.2 Analisis Multivariat

Analisis multivariat merupakan suatu studi secara simultan mengenai beberapa peubah acak dependen. Analisis ini merupakan pengembangan dari analisis univariat. Dengan menggunakan teknik analisis multivariat dapat dianalisis karakteristik suatu data multivariat. Data Multivariat merupakan hasil pengukuran, pengamatan, atau perhitungan terhadap p peubah $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ pada n unit sampel, setiap peubahnya memiliki nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang dapat disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

2.2.1 Matriks Varian Kovarian dan Korelasi

Varian X merupakan ukuran sebaran data dari peubah acak X, seberapa jauh data tersebar di sekitar rata-rata. Kovarian X_j dan X_k adalah ukuran asosiasi antara dua peubah acak X_j dan X_k. Nilai kovarian yang positif berarti X_j dan X_k memiliki hubungan linear positif. Nilai kovarian yang negatif berarti X_j dan X_k memiliki hubungan linear negatif. Jika mendekati nol berarti tidak ada hubungan linear matriks (Johnson dan Wichern, 2007).

Pada data multivariat terdapat matriks varian kovarian yaitu gabungan dari varian setiap peubah dan kovarian dua peubah yang berbeda. Matriks varian kovarian didefinisikan sebagai berikut (Johnson dan Wichern, 2007):

$$\boldsymbol{\Sigma} = E[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^T] \tag{2.2}$$

Sehingga matriks simetri varian kovarian data populasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} Var(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_p) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2, X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_p, X_1) & Cov(X_p, X_2) & \cdots & Var(X_p, X_p) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2{}^2 & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_p{}^2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Koefisien korelasi populasi merupakan ukuran asosiasi antara dua peubah, diperoleh dengan pembagian nilai kovarian dengan standar deviasi X_j dan X_k**,** dimana nilainya terletak antara 1 dan -1 (Johnson dan Wichern, 2007).

$$\rho_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{\sqrt{\sigma_j{}^2}\sqrt{\sigma_k{}^2}} = \frac{Cov(X_j, X_k)}{\sqrt{Var(X_j)}\sqrt{Var(X_k)}} \tag{2.4}$$

Jika $\sigma_{jk} = 0$ sehinga $\rho_{jk} = 0$ maka X_j dan X_k tidak berhubungan linear. Jika $\rho_{jk} = 1$ maka X_j dan X_k dikatakan berkorelasi positif sempurna. Jika $\rho_{jk} = -1$ maka X_j dan X_k dikatakan berkorelasi negatif sempurna.

Matriks varian kovarian data sampel didefinisikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Dengan rumusan untuk menghitung nilai varian dan kovarian yaitu (Johnson dan Wichern, 2007):

$$Var(X_j, X_j) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = s_{jj}$$

$$Cov(X_j, X_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k) = s_{jk}$$

2.2.2 Varian Kovarian Kombinasi Linear Dari Peubah Acak

Terdapat dua peubah acak X_j dan X_k, a dan b merupakan konstanta, Kombinasi linear $aX_j + bX_k$ dapat ditulis sebagai perkalian matriks. Misal $\boldsymbol{c}^T = [a \quad b]$ dan $\boldsymbol{X}^T = [X_j \quad X_k]$, kombinasi linear yang terbentuk dari perkalian matriks tersebut dapat ditulis dengan (Johnson dan Wichern, 2007):

$$[a \quad b]\begin{bmatrix} X_j \\ X_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X} \tag{2.6}$$

Apabila matriks varian kovarian dari $\boldsymbol{X}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

varian dari Persamaan (2.6) dapat ditulis dengan:

$$Var(aX_j + bX_k) = Var(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c} \tag{2.7}$$

2.2.3 Analisis Korelasi *Product Moment Pearson*

Analisis korelasi merupakan salah satu teknik statistik yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara dua peubah atau lebih yang bersifat kuantitatif. Jika dua peubah memiliki kecenderungan positif maka dapat diartikan kedua peubah memiliki hubungan yang searah, jika dua peubah memiliki kecenderungan negatif maka dapat diartikan kedua peubah memiliki hubungan yang berlawanan arah. Asumsi yang digunakan dalam analisis korelasi *Product Moment Pearson* adalah data berdistribusi normal.

Peubah dikatakan saling berkorelasi jika perubahan suatu peubah diikuti dengan perubahan peubah yang lain. Perhitungan koefisien korelasi *Product Moment Pearson* untuk data populasi yaitu berdasarkan Persamaan (2.4) (Johnson dan Wichern, 2007). Jika terdapat peubah sebanyak p, didefinisikan matriks korelasi data populasi ($\boldsymbol{\rho}$) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{X_1X_1} & \rho_{X_1X_2} & \cdots & \rho_{X_1X_p} \\ \rho_{X_2X_1} & \rho_{X_2X_2} & \cdots & \rho_{X_2X_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_pX_1} & \rho_{X_pX_2} & \cdots & \rho_{X_pX_p} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Untuk mengkaji koefisien korelasi data sampel dari data hasil pengukuran, dengan $i = 1,2,\ldots,n$ diberikan oleh persamaan (Ronald dan E Walpole, 2002):

$$r_{X_jX_k} = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, x_{ik}) - (\sum_{i=1}^{n} x_{ij})(\sum_{i=1}^{n} x_{ik})}{\sqrt{n(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}{}^2) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2}\sqrt{n(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}{}^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_{ik})^2}} \tag{2.9}$$

Nilai korelasi antar peubah terletak antara $-1 \leq r \leq 1$. Jika $r > 0$ maka terdapat korelasi antara dua peubah dengan kecenderungan positif, sedangkan jika $r < 0$ maka terdapat korelasi antara dua peubah dengan kecenderungan negatif dan apabila $r = 0$ maka tidak terdapat korelasi (saling bebas). Jika terdapat peubah sebanyak p, maka didefinisikan matriks korelasi data sampel ($\boldsymbol{r}$) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_{X_1X_1} & r_{X_1X_2} & \cdots & r_{X_1X_p} \\ r_{X_2X_1} & r_{X_2X_2} & \cdots & r_{X_2X_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{X_pX_1} & r_{X_pX_2} & \cdots & r_{X_pX_p} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Meskipun telah diperoleh nilai koefisien dan didefinisikan sebagai Persamaan (2.10). Kebenaran nilai korelasi tersebut perlu diuji secara statistik (Johnson dan Wichern, 2007). Berikut merupakan uji korelasi,

Hipotesa:

$H_0: \rho = 0$ (Tidak terdapat korelasi antar peubah)

$H_1: \rho \neq 0$ (Terdapat korelasi antar peubah)

langkah pengujian yaitu:

1. Menetapkan taraf signifikansi (α)
2. Menghitung statistik uji menggunakan persamaan:

$$T = \frac{(n-1)}{(1-\bar{r})^2}\left[\sum\sum_{j<k}\left(r_{jk} - \bar{r}\right)^2 - \hat{\gamma}\sum_{k=1}^{p}(\bar{r}_k - \bar{r})^2\right] \tag{2.11}$$

dengan:

$$\bar{r}_k = \frac{1}{p-1}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} r_{jk}\,;\ k = 1,2,\ldots,p$$

$$\bar{r} = \frac{2}{p(p-1)}\sum\sum_{j<k} r_{jk}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{(p-1)^2[1-(1-\bar{r})^2]}{p(p-2)(1-\bar{r})^2}$$

$\bar{r}_k$: Rata-rata dari elemen yang bukan elemen diagonal utama pada kolom k pada matriks korelasi sampel.
$\bar{r}$: Rata-rata keseluruhan dari elemen matriks segitiga bawah yang bukan diagonal utama pada matriks korelasi sampel.
r_{kj} : Nilai koefisien korelasi $r_{X_j X_k}$ dimana $j \neq k$
p : Banyaknya peubah

3. Mencari nilai $\chi^2_{\frac{(p+1)(p-2)}{2}}(\alpha)$ yang diperoleh dari tabel *Chi-Square*.
4. Daerah penolakan: jika statistik uji $T > \chi^2_{\frac{(p+1)(p-2)}{2}}(\alpha)$ maka H_0 ditolak, dengan kata lain dapat disimpulkan bahwa terdapat korelasi yang signifikan antar peubah.

2.2.4 Distribusi Normal Multivariat

Pengujian distribusi normal multivariat dilakukan untuk menguji distribusi data yang akan dianalisis telah berdistribusi normal multivariat sebagai asumsi dasar yang harus dipenuhi dalam analisis multivariat (Johnson dan Wichern, 2007). Berikut merupakan uji distribusi normal multivariat,

Hipotesa:

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat
H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat

langkah pengujian yaitu:

1. Menetapkan taraf signifikansi (α)
2. Menghitung nilai jarak kuadrat dengan rumus:

$$d_i^2 = (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{X}});\ i = 1,2,\dots,n \qquad (2.12)$$

dengan:

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{pi} \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix}$$

p : Banyak peubah
n : Banyak sampel
d_i^2 : Nilai jarak kuadrat
$\boldsymbol{S}^{-1}$: Nilai invers dari matriks varian kovarian sample
$\overline{\boldsymbol{X}}$: Vektor rata-rata peubah
$\boldsymbol{x}_i$: Vektor sampel ke-i

3. Mengurutkan nilai jarak kuadrat dari yang terkecil hingga terbesar $d_1^2 \leq d_2^2 \leq \cdots \leq d_n^2$.
4. Mencari nilai $\chi^2_{(p;\frac{i-0,5}{n})} = q_i;\ i = 1,2,\dots,n$
5. Membuat *scatter plot* dengan titik koordinat antara pasangan (d_i^2, q_i).
6. Mencari nilai $\chi^2_{(p;0,5)}$yang diperoleh dari tabel *Chi-Square*.
7. Data dikatakan berdistribusi normal multivariat atau dapat dikatakan gagal menolak H_0 apabila terdapat minimal 50% nilai $d_i^2 \leq \chi^2_{(p;0,5)}$ dan hasil dari *scatter plot* berupa garis lurus (Johnson dan Wichern, 2007).

2.2.5 Peta Kendali Multivariat Statistik Hotelling

Peta kendali adalah suatu peta yang menggambarkan karateristik kualitas hasil dari produksi yang mempunyai batas kendali atas (BKA), garis tengah, dan batas kendali bawah (BKB). Produk dikatakan terkendali jika berada didalam batas kendali atas dan batas kendali bawah (Montgomery, 2009). Penentuan batas kendali dalam peta kendali tergantung pada pengamatan.

Peta kendali digunakan untuk menganalisis proses dengan tujuan melakukan perbaikan secara terus menerus terhadap mutu. Jika terdapat pengamatan yang berada di luarbatas kendali dari peta kendali perlu dilakukan identifikasi terhadap pengamatan tersebut (*assignable cause*). Setelah penyebab diketahui maka pengamatan tersebut dikeluarkan dan selanjutnya dibuat batas kendali baru.

Dalam analisisnya untuk mengendalikan karakteristik mutu peubah data multivariat yang memiliki lebih dari satu peubah dapat digunakan peta kendali Statistik Hotelling. Peta Kendali Statistik Hotelling merupakan salah satu peta kendali yang datanya berdistribusi multivariat dan saling berhubungan antar peubah (terdapat korelasi yang signifikan antar peubah) (Montgomery, 2009). Pada peta kendali Statistik Hotelling ini dilakukan pendeteksian pergeseran mean proses dengan menggunakan vektor mean sampel dan matrik varian kovarian.

Jika data dalam pengamatan tidak terdapat subgrup atau data bersifat induvidu maka digunakan peta kendali statistik Hotelling individu. Untuk peta kendali Statistik Hotelling individu dapat di rumuskan sebagai berikut:

$$T_i^{\,2} = (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{X}})' \boldsymbol{S}^{-1} (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{X}}); \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (2.13)$$

dengan:

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{pi} \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix}$$

p : Banyak peubah
n : Banyak sampel
$T_i^{\,2}$: Statistik hitung peta kendali Statistik Hotelling
$\boldsymbol{S}^{-1}$: Nilai invers dari matriks varian kovarian sample
$\overline{\boldsymbol{X}}$: Vektor rata-rata peubah
$\boldsymbol{x}_i$: Vektor sampel ke-*i*

Batas kendali untuk individual Statistik Hotelling dengan sampel kurang dari 100, dapat di rumuskan sebagai berikut:

$$BKA = \left(\frac{p(n+1)(n-1)}{n^2 - np}\right) F_{\alpha,p,n-p} \qquad (2.14)$$

$$BKB = 0$$

dengan
p : Banyak peubah
n : Banyak sampel

α : Taraf signifikansi
F : Distribusi F
BKA : Batas Kendali Atas
BKB : Batas Kendali Bawah

2.3 Turunan Parsial Matriks Terhadap Vektor

Suatu fungsi linear f terbentuk dari $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ dimana $\boldsymbol{A}$ adalah matriks simetri dan $\boldsymbol{x}$ merupakan vektor kolom dituliskan dengan:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

Perkalian matriks yang terbentuk dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \\ &= [x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_pa_{1p} \quad x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots \\ &\quad + x_pa_{2p} \quad \cdots \quad x_1a_{1p} + x_2a_{2p} + \cdots + x_pa_{pp}] \\ &= [x_1{}^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1p}x_1x_p + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2{}^2 \\ &\quad + \cdots + a_{2p}x_2x_p + a_{1p}x_1x_p + a_{2p}x_2x_p + \cdots + a_{pp}x_p{}^2] \end{aligned}$$

Jika matriks simetri berukuran p, perkalian $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ dapat dituliskan sebagai fungsi:

$$y = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j x_k a_{jk} \tag{2.15}$$

dimana

$$\begin{aligned} y &= a_{12}x_1{}^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1p}x_1x_p + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2{}^2 \\ &\quad + \cdots + a_{2p}x_2x_p + a_{1p}x_1x_p + a_{2p}x_2x_p + \cdots + a_{pp}x_p{}^2 \end{aligned}$$

Untuk menghitung turunan parsial dari $y = f(\boldsymbol{x})$ terhadap vektor kolom $\boldsymbol{x}$ berdasarkan Terorema yang di ambil dari buku *Miscallaneous Concepts Of Matrix Algebra* (2006) dirumuskan dengan:

$$\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_p} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Sedemikian hingga turunan parsial dari $y = f(\boldsymbol{x})$ terhadap vektor kolom $\boldsymbol{x}$ dapat ditulis dengan

$$\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1p}x_p \\ 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + \cdots + 2a_{2p}x_p \\ \vdots \\ 2a_{p1}x_1 + 2a_{p2}x_2 + \cdots + 2a_{pp}x_p \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

$$= 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{2.17}$$

diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{2.18}$$

2.4 *Nearest In Control Neighbor* (NICN)

Algoritma *Nearest In Control Neighbor* (NICN) adalah sebuah metode untuk melakukan klasifikasi terhadap objek berdasarkan data yang jaraknya paling dekat dengan objek tersebut.

Menemukan tetangga terdekat dengan pendekatan NICN dapat dihitung menggunakan teori optimasi. Dengan meminimumkan Mahalanobis *Distance* yang digunakan sebagai fungsi objektif akan diperoleh titik NICN yang minimum. Berikut adalah rumus Mahalanobis *Distance*:

$$d_i^2 = (\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x})^T \mathbf{S}^{-1} (\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x});\ i = 1,2, \dots, n \qquad (2.19)$$

dengan

d_i^2 : Mahalanobis *Distance*
$\boldsymbol{S}^{-1}$: Nilai invers dari matriks varian kovarian sample
$\boldsymbol{x}_{NICN}$: Vektor tetangga terdekat
$\boldsymbol{x}$: Vektor pengamatan

2.5 Pengali Lagrange

Pengali Lagrange merupakan pengali skalar yang terkait pada setiap kendala. Pengali Lagrange memiliki peran penting dalam metode numerik dan teori optimasi untuk mendapatkan nilai optimum fungsi objektif, sehingga didapatkan nilai parameter optimum yang dicari. Dijelaskan dalam buku Desineni S. Naidu (2002), langkah optimasi menggunakan Pengali Lagrange dalam proses optimasi adalah sebagai berikut:

1. Dibentuk Fungsi Lagrange

   Fungsi pengali Lagrange didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t) \qquad (2.20)$$

   Dengan fungsi objektif dan batas batas kendala (*constrain*)

$$V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t)$$
$$g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) = 0 \qquad (2.21)$$

   dan kondisi titik akhir

$$x_1(t_0) = x_{10}; \qquad x_2(t_0) = x_{20}$$
$$x_1(t_f) = x_{1f}; \qquad x_2(t_f) = x_{2f}$$

   Sehingga didapat fungsi Lagrange dengan $\lambda(t)$ adalah pengali lagrang sebagai berikut

$$\mathcal{L} = V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t)$$
$$+\lambda(t) g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) \qquad (2.22)$$

2. Dihitung derivatif parsial pertamasama dengan nol.

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0$$
$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \qquad (2.23)$$
$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}}\right) = 0$$

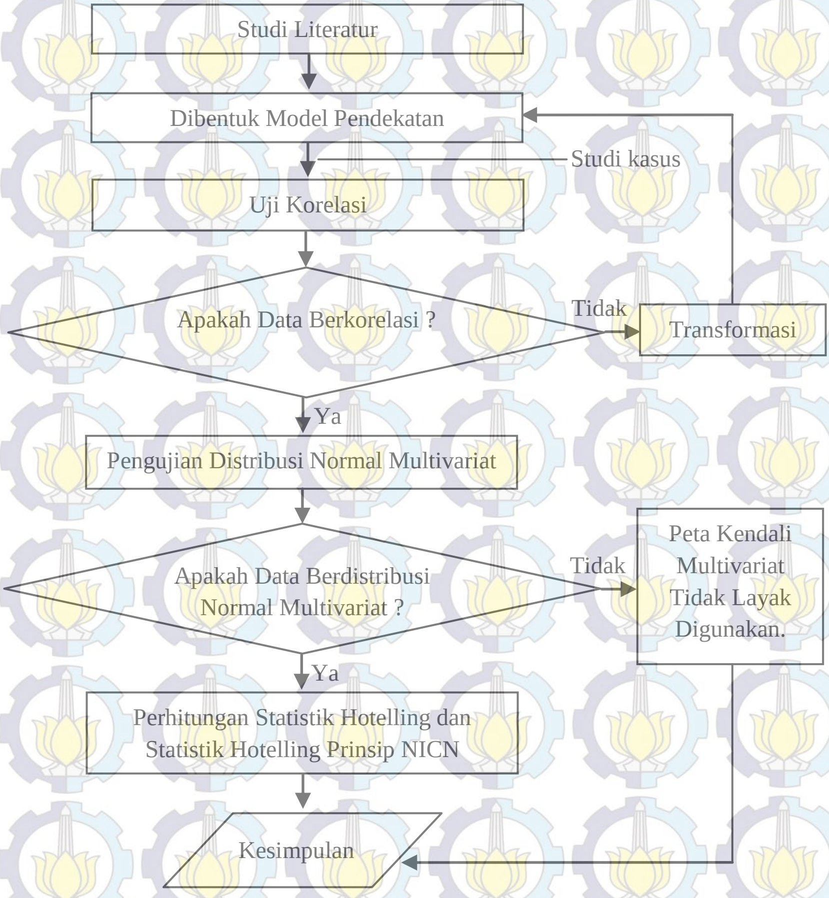
3. Setelah didapatkan hasil turunan parsial, salah satu persamaan disubsitusikan pada salah satu persamaan hasil turunan parsial yang lain sehingga didapatkan nilai pengali Lagrange.
4. Dengan didapatkannya nilai pengali langrang maka di dapatkan nilai optimum dari nilai parameter (x_1, x_2) optimum yang dicari.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Dalam bab III diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas lima tahap, yaitu:

1. Pada tahap ini dipelajari jurnal yang dikaji dan mengenai metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam Tugas Akhir ini. Materi yang dipelajari mengenai Statistik Hotelling, serta NICN bersumber dari literatur buku, jurnal, penelitian sebelumnya, dan dari website. Kemudian dibentuk model pendekatan untuk memperkirakan kontribusi peubah terhadap Statistik Hotelling berdasarkan prinsip NICN.
2. Melakukan uji korelasi untuk mengetahui hubungan antar peubah pada kasus multivariat menggunakan koefisien korelasi *Product Moment Pearson* pada data yang bersumber dari literatur.
3. Melakukan uji distribusi normal multivariat agar asumsi dasar yang harus dipenuhi dalam analisis multivariat terpenuhi.
4. Perhitungan Statistik Hotelling dan Statistik Hotelling berdasarkan prinsip NICN agar dapat diketahui pengamatan *out of control* dan titik penyebab *out of control* tersebut.
5. Menarik kesimpulan dari hasil analisis yang telah dikerjakan.

Adapun urutan kerja Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :



Gambar 3.1 Diagram Alir Langkah Penelitian

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas mengenai model pendekatan untuk memperkirakan kontribusi peubah terhadap Statistik Hotelling berdasarkan prinsip NICN, serta dijelaskan hasil perhitungan yang diperoleh dan dibandingkan dengan hasil perhitungan Statistik Hotelling biasa.

4.1 Pendekatan Untuk Memperkirakan Kontribusi Peubah Terhadap Statistik Hotelling Berdasarkan Prinsip NICN

Pendekatan untuk memperkirakan kontribusi peubah Statistik Hotelling diperoleh berdasarkan tetangga terdekat titik pengamatan. Merujuk pada Persamaan (2.13) merupakan nilai jarak (Mahalanobis *Distance*) pengamatan terhadap rata-rata masing-masing peubah, dapat dihitung juga nilai Mahalanobis *Distance* tetangga terdekat terhadap titik pengamatan, besar Mahalanobis *Distance* tetangga terdekat terhadap titik pengamatan menunjukkan besarnya kontribusi dari peubah.

Penelitian yang telah dilakukan oleh Sanchez (2012), tetangga terdekat dari titik pengamatan tersebut diperoleh berdarkan prinsip NICN yang dinyatakan sebagai masalah optimasi. Teori optimasi yang digunakan adalah pengali Lagrange. Dengan meminimumkan Mahalanobis *Distance* dapat diperoleh titik NICN yang minimum. Fungsi objektif dalam penyelesaian masalah optimasi ini yaitu:

$$\min(\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x})^T \boldsymbol{\psi}^{-1}(\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x}) \qquad (4.1)$$

dengan fungsi kendala

$$\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} = BKA$$

$$BKA - \boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} = 0 \qquad (4.2)$$

dengan

$\boldsymbol{x}_{NICN}$: Vektor tetangga terdekat x_{NICN}
$\boldsymbol{x}$: Vektor sampel x
$\boldsymbol{\psi}^{-1}$: Matriks invers varian kovarian sampel
$\boldsymbol{R}^{-1}$: Matriks invers korelasi

BKA : Batas kendali atas Statistik Hotelling merujuk pada Persamaan (2.13).

Pada kasus optimasi parameter Statistik Hotelling, diasumsikan $\psi = R$, jika data yang digunakan data sampel dengan matriks varian kovarian sampel ψ. Langkah optimasi yang dilakukan adalah menggunakan pengali Lagrange, yaitu:

1. Berdasarkan Persamaan (2.22) fungsi Lagrange yang terbentuk dari Persamaan (4.1) dan Persamaan (4.2) adalah:

$$\mathcal{L} = (\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x})^T \psi^{-1} (\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x}) + \lambda (BKA - \boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN}) \quad (4.3)$$

dengan

$$\boldsymbol{x}_{NICN} = \begin{bmatrix} x_{NICN,1} \\ x_{NICN,2} \\ \vdots \\ x_{NICN,p} \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{\psi}^{-1} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{L}$ dengan persamaan berupa matriks sebagai berikut:

$$\mathcal{L} = \left(\begin{bmatrix} x_{NICN,1} \\ x_{NICN,2} \\ \vdots \\ x_{NICN,p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_{NICN,1} \\ x_{NICN,2} \\ \vdots \\ x_{NICN,p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \right)$$
$$-\lambda (\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} - BKA) \quad (4.4)$$

Disederhanakan bentuk $\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x}$ pada Persamaan (4.4) diperoleh:

$$\mathcal{L} = \left(\begin{bmatrix} x_{NICN,1} - x_1 \\ x_{NICN,2} - x_2 \\ \vdots \\ x_{NICN,p} - x_p \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_{NICN,1} - x_1 \\ x_{NICN,2} - x_2 \\ \vdots \\ x_{NICN,p} - x_p \end{bmatrix} \right)$$
$$-\lambda (\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} - BKA) \quad (4.5)$$

Dijabarkan bentuk transpose dari $(\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x})$ pada Persamaan (4.5), sedemiakan hingga fungsi Lagrange menjadi:

$$\mathcal{L} = [x_{NICN,1} - x_1 \quad x_{NICN,2} - x_2 \quad \dots \quad x_{NICN,p} - x_p] \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{NICN,1} - x_1 \\ x_{NICN,2} - x_2 \\ \vdots \\ x_{NICN,p} - x_p \end{bmatrix} - \lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} - BKA) \tag{4.6}$$

Berdasarkan prinsip perkalian matriks, Persamaan (4.6) dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = [&(x_{NICN,1} - x_1)s_{11} + (x_{NICN,2} - x_2)s_{21} + \cdots + (x_{NICN,p} - x_p)s_{p1} \\ &(x_{NICN,1} - x_1)s_{12} + (x_{NICN,2} - x_2)s_{22} + \cdots + (x_{NICN,p} - x_p)s_{p2} \\ &\qquad\qquad\qquad \cdots \\ &(x_{NICN,1} - x_1)s_{1p} + (x_{NICN,2} - x_2)s_{2p} + \cdots + (x_{NICN,p} - x_p)s_{pp}] \\ &\begin{bmatrix} x_{NICN,1} - x_1 \\ x_{NICN,2} - x_2 \\ \vdots \\ x_{NICN,p} - x_p \end{bmatrix} - \lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} - BKA) \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = [&(x_{NICN,1} - x_1)(x_{NICN,1} - x_1)s_{11} + (x_{NICN,1} - x_1)(x_{NICN,2} - x_2)s_{21} \\ &+ \cdots + (x_{NICN,1} - x_1)(x_{NICN,p} - x_p)s_{p1} \\ &+(x_{NICN,1} - x_1)(x_{NICN,2} - x_2)s_{12} \\ &+(x_{NICN,2} - x_2)(x_{NICN,2} - x_2)s_{22} \\ &+ \cdots + (x_{NICN,2} - x_2)(x_{NICN,p} - x_p)s_{p2} \\ &+ \cdots + (x_{NICN,1} - x_1)(x_{NICN,p} - x_p)s_{1p} \\ &+(x_{NICN,2} - x_2)(x_{NICN,p} - x_p)s_{2p} \\ &+ \cdots + (x_{NICN,p} - x_p)(x_{NICN,p} - x_p)s_{pp}] \\ &-\lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} - BKA) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bentuk $(x_{NICN,j} - x_j)(x_{NICN,j} - x_j)$ disederhanakan menjadi $(x_{NICN,j} - x_j)^2$, dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = [&(x_{NICN,1} - x_1)^2 s_{11} + (x_{NICN,1} - x_1)(x_{NICN,2} - x_2)s_{21} \\ &+ \cdots + (x_{NICN,1} - x_1)(x_{NICN,p} - x_p)s_{p1} \\ &+(x_{NICN,1} - x_1)(x_{NICN,2} - x_2)s_{12} + (x_{NICN,2} - x_2)^2 s_{22} \\ &+ \cdots + (x_{NICN,2} - x_2)(x_{NICN,p} - x_p)s_{p2} \end{aligned}$$

$$+\cdots+(x_{NICN,1}-x_1)(x_{NICN,p}-x_p)s_{1p}$$
$$+(x_{NICN,2}-x_2)(x_{NICN,p}-x_p)s_{2p}$$
$$+\cdots+(x_{NICN,p}-x_p)^2 s_{pp}]$$
$$-\lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x}_{NICN}-BKA) \quad (4.9)$$

Persamaan (4.9) disederhanakan menjadi:

$$\mathcal{L}=[(x_{NICN,1}{}^2+x_1{}^2-2x_{NICN,1}x_1)s_{11}$$
$$+(x_{NICN,1}x_{NICN,2}+x_1x_2-x_{NICN,1}x_2-x_{NICN,2}x_1)s_{21}$$
$$+\cdots+(x_{NICN,1}x_{NICN,p}+x_1x_p-x_{NICN,1}x_p-x_{NICN,p}x_1)s_{p1}$$
$$+(x_{NICN,1}x_{NICN,2}+x_1x_2+x_{NICN,1}x_2-x_{NICN,2}x_1)s_{12}$$
$$+(x_{NICN,2}{}^2+x_2{}^2-2x_{NICN,2}x_2)^2 s_{22}$$
$$+\cdots+(x_{NICN,2}x_{NICN,p}+x_2x_p-x_{NICN,2}x_p-x_{NICN,p}x_2)s_{p2}$$
$$+\cdots+(x_{NICN,1}x_{NICN,p}+x_1x_p-x_{NICN,1}x_p-x_{NICN,p}x_1)s_{1p}$$
$$+(x_{NICN,2}x_{NICN,p}+x_2x_p-x_{NICN,2}x_p-x_{NICN,p}x_2)s_{2p}$$
$$+\cdots+(x_{NICN,p}{}^2+x_p{}^2-2x_{NICN,p}x_p)s_{pp}]$$
$$-\lambda(x_{NICN}{}^T R^{-1}x_{NICN}-BKA) \quad (4.10)$$

Langkah perkalian matriks pada Persamaan (4.5) dijabarkan Pada Persamaan (4.6) hingga Persamaan (4.10), hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\mathcal{L}=[x_{NICN,1}{}^2s_{11}+x_1{}^2s_{11}-2x_{NICN,1}x_1s_{11}+x_{NICN,1}x_{NICN,2}s_{21}$$
$$+x_1x_2s_{21}-x_{NICN,1}x_2s_{21}-x_{NICN,2}x_1s_{21}+\cdots+x_{NICN,1}x_{NICN,p}s_{p1}$$
$$+x_1x_ps_{p1}-x_{NICN,1}x_ps_{p1}-x_{NICN,p}x_1s_{p1}+x_{NICN,1}x_{NICN,2}s_{12}$$
$$+x_1x_2s_{12}+x_{NICN,1}x_2-x_{NICN,2}x_1s_{12}+x_{NICN,2}{}^2s_{22}+x_2{}^2s_{22}$$
$$-2x_{NICN,2}x_2s_{22}+\cdots+x_{NICN,2}x_{NICN,p}s_{p2}+x_2x_ps_{p2}-x_{NICN,2}x_ps_{p2}$$
$$-x_{NICN,p}x_2s_{p2}+\cdots+x_{NICN,1}x_{NICN,p}s_{1p}+x_1x_ps_{1p}-x_{NICN,1}x_ps_{1p}$$
$$-x_{NICN,p}x_1s_{1p}+x_{NICN,2}x_{KNN,p}s_{2p}+x_2x_ps_{2p}-x_{NICN,2}x_ps_{2p}$$
$$-x_{NICN,p}x_2s_{2p}+\cdots+x_{NICN,p}{}^2s_{pp}+x_p{}^2s_{pp}-2x_{NICN,p}x_ps_{pp}]$$
$$-\lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x}_{NICN}-BKA) \quad (4.11)$$

Setiap $x_{NICN,j}$, x_j, dan $x_{NICN,j}x_j$ dikelompokkan, Persamaan (4.11) ditulis menjadi:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = [&x_{NICN,1}{}^2 s_{11} + x_{NICN,1}x_{NICN,2}s_{21} + \cdots + x_{NICN,1}x_{NICN,p}s_{p1} \\
&+x_{NICN,1}x_{NICN,2}s_{12} + x_{NICN,2}{}^2 s_{22} + \cdots + x_{NICN,2}x_{NICN,p}s_{p2} + \cdots \\
&+x_{NICN,1}x_{NICN,p}s_{1p} + x_{NICN,2}x_{NICN,p}s_{2p} + \cdots + x_{NICN,p}{}^2 s_{pp}] \\
&+[x_1{}^2 s_{11} + x_1x_2s_{21} + \cdots + x_1x_ps_{p1} + x_1x_2s_{12} + x_2{}^2 s_{22} + \cdots \\
&+x_2x_ps_{p2} + \cdots + x_1x_ps_{1p} + x_2x_ps_{2p} + \cdots + x_p{}^2 s_{pp}] \\
&-[2x_{NICN,1}x_1s_{11} + 2x_{NICN,1}x_2s_{12} + \cdots + 2x_{NICN,1}x_ps_{p1} \\
&+2x_{NICN,2}x_1s_{21} + 2x_{NICN,2}x_2s_{22} + \cdots + 2x_{NICN,2}x_ps_{2p} + \cdots \\
&+2x_{NICN,p}x_1s_{p1} + 2x_{NICN,p}x_2s_{2p} + \cdots + 2x_{NICN,p}x_ps_{pp}] \\
&-\lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x}_{NICN} - BKA)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Dari Persamaan (4.12) dapat dibentuk perkalian matriks yang baru sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = [&x_{NICN,1}s_{11} + x_{NICN,2}s_{21} + \cdots + x_{NICN,p}s_{p1} \\
&x_{NICN,1}s_{12} + x_{NICN,2}s_{22} + \cdots + x_{NICN,p}s_{p2} \\
&\ldots x_{NICN,1}s_{1p} + x_{NICN,2}s_{2p} + \cdots + x_{NICN,p}s_{pp}]\begin{bmatrix} x_{NICN,1} \\ x_{NICN,2} \\ \vdots \\ x_{NICN,p} \end{bmatrix} \\
&+[x_1s_{11} + x_2s_{21} + \cdots + x_ps_{p1}x_1s_{12} + x_2s_{22} + \cdots + x_ps_{p2} \\
&\ldots x_1s_{1p} + x_2s_{2p} + \cdots + x_ps_{pp}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \\
&\quad -2[x_1s_{11} + x_2s_{12} + \cdots + x_ps_{p1}x_1s_{21} + x_2s_{22} + \cdots + x_ps_{2p} \\
&\ldots x_1s_{p1} + x_2s_{2p} + \cdots + x_ps_{pp}]\begin{bmatrix} x_{NICN,1} \\ x_{NICN,2} \\ \vdots \\ x_{NICN,p} \end{bmatrix} \\
&-\lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x}_{NICN} - BKA)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} x_{NICN,1} \\ x_{NICN,2} \\ \vdots \\ x_{NICN,p} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{NICN,1} \\ x_{NICN,2} \\ \vdots \\ x_{NICN,p} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

$$-2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{NICN,1} \\ x_{NICN,2} \\ \vdots \\ x_{NICN,p} \end{bmatrix}$$

$$-\lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} - BKA) \tag{4.14}$$

Persamaan (4.14) dapat dapat ditulis dengan:

$$\mathcal{L} = x_{NICN}{}^T \psi^{-1} x_{NICN} + x^T \psi^{-1} x - 2x^T \psi^{-1} x_{NICN}$$
$$-\lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} - BKA) \tag{4.15}$$

Sehingga Persamaan (4.3) dapat ditulis menjadi Persamaan (4.15).

2. Karena parameter yang dioptimumkan adalah x_{NICN} maka dihitung turunan parsial pertama terhadap peubah x_{NICN} dan pengali Lagrange menggunakan Persamaan (2.23). Karena pada kasus ini tidak terdapat $\dot{x}_{NICN}$ sedemikaian hingga,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{x}_{NICN}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{NICN,1}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{NICN,2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{NICN,p}} \end{bmatrix} = 0 \text{ dan} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \tag{4.16}$$

Menggunakan $\mathcal{L}$ pada Persamaan (4.15), turunan parsial pertamanya terhadap $\boldsymbol{x}_{NICN}$ didefinisikan:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{x}_{NICN}} = \frac{\partial\,(x_{NICN}{}^T \psi^{-1} x_{NICN})}{\partial \boldsymbol{x}_{NICN}} + \frac{\partial\,(x^T \psi^{-1} x)}{\partial \boldsymbol{x}_{NICN}} - 2\frac{\partial\,(x^T \psi^{-1} x_{NICN})}{\partial \boldsymbol{x}_{NICN}}$$
$$-\lambda \frac{\partial(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN})}{\partial \boldsymbol{x}_{NICN}} + \frac{\partial T_c^2}{\partial \boldsymbol{x}_{NICN}} = 0$$

Turunan parsial pertama untuk ${x_{NICN}}^T\psi^{-1}x_{NICN}$ diperoleh menggunakan Persamaan (2.18), adalah:

$$\frac{\partial\,({x_{NICN}}^T\psi^{-1}x_{NICN})}{\partial \boldsymbol{x}_{NICN}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial({x_{NICN}}^T\psi^{-1}x_{NICN})}{\partial x_{NICN,1}}\\ \frac{\partial({x_{NICN}}^T\psi^{-1}x_{NICN})}{\partial x_{NICN,2}}\\ \vdots\\ \frac{\partial({x_{NICN}}^T\psi^{-1}x_{NICN})}{\partial x_{NICN,p}}\end{bmatrix}$$

Berdasarkan Persamaan (4.12), dapat dijabarkan persamaan ${x_{NICN}}^T\psi^{-1}x_{NICN}$ menjadi:

$$\begin{aligned}{x_{NICN}}^T\psi^{-1}x_{NICN} = {}& {x_{NICN,1}}^2s_{11}+x_{NICN,1}x_{NICN,2}s_{21}+\cdots\\ &+x_{NICN,1}x_{NICN,p}s_{p1}+x_{NICN,1}x_{NICN,2}s_{12}\\ &+{x_{NICN,2}}^2s_{22}+\cdots+x_{NICN,2}x_{NICN,p}s_{p2}\\ &+\cdots+x_{NICN,1}x_{NICN,p}s_{1p}+x_{NICN,2}x_{NICN,p}s_{2p}\\ &+\cdots+{x_{NICN,p}}^2s_{pp}\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_{NICN}}({x_{NICN,1}}^2s_{11}+x_{NICN,1}x_{NICN,2}s_{21}+\cdots+x_{NICN,1}x_{NICN,p}s_{p1}\\ &+x_{NICN,1}x_{NICN,2}s_{12}+{x_{NICN,2}}^2s_{22}+\cdots+x_{NICN,2}x_{NICN,p}s_{p2}\\ &+\cdots+x_{NICN,1}x_{NICN,p}s_{1p}+x_{NICN,2}x_{NICN,p}s_{2p}+\cdots\\ &+{x_{NICN,p}}^2s_{pp})\\ &=\begin{bmatrix}2x_{NICN,1}s_{11}+2x_{NICN,2}s_{12}+\cdots+2x_{NICN,p}s_{1p}\\ 2x_{NICN,1}s_{21}+2x_{NICN,2}s_{22}+\cdots+2x_{NICN,p}s_{2p}\\ \vdots\\ 2x_{NICN,1}s_{p1}+2x_{NICN,2}s_{p2}+\cdots+2x_{NICN,p}s_{pp}\end{bmatrix}\\ &=2\begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}&\cdots&s_{1p}\\ s_{21}&s_{22}&\cdots&s_{2p}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ s_{p1}&s_{p2}&\cdots&s_{pp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{NICN,1}\\ x_{NICN,2}\\ \vdots\\ x_{NICN,p}\end{bmatrix}\\ &=2\psi^{-1}x_{NICN}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Turunan parsial pertama untuk $2x^T\psi^{-1}x_{NICN}$ diperoleh menggunakan Persamaan (2.18),

$$2\frac{\partial\,(x^T\psi^{-1}x_{NICN})}{\partial \boldsymbol{x}_{NICN}} = 2\begin{bmatrix} \dfrac{\partial(x^T\psi^{-1}x_{NICN})}{\partial x_{NICN,1}} \\ \dfrac{\partial(x^T\psi^{-1}x_{NICN})}{\partial x_{NICN,2}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial(x^T\psi^{-1}x_{NICN})}{\partial x_{NICN,p}} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Persamaan (4.12), dapat dijabarkan persamaan $2x^T\psi^{-1}x_{NICN}$ menjadi:

$$\begin{aligned} 2x^T\psi^{-1}x_{NICN} = 2(&x_{NICN,1}x_1s_{11} + x_{NICN,1}x_2s_{12} + \cdots + x_{NICN,1}x_ps_{p1} \\ &+x_{NICN,2}x_1s_{21} + x_{NICN,2}x_2s_{22} + \cdots + x_{NICN,2}x_ps_{2p} \\ &+ \cdots + x_{NICN,p}x_1s_{p1} + x_{NICN,p}x_2s_{2p} + \cdots \\ &+x_{NICN,p}x_ps_{pp}) \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial}{\partial x_{NICN}}(&x_{NICN,1}x_1s_{11} + x_{NICN,1}x_2s_{12} + \cdots + x_{NICN,1}x_ps_{p1} \\ &+x_{NICN,2}x_1s_{21} + x_{NICN,2}x_2s_{22} + \cdots + x_{NICN,2}x_ps_{2p} + \cdots \\ &+x_{NICN,p}x_1s_{p1} + x_{NICN,p}x_2s_{2p} + \cdots + x_{NICN,p}x_ps_{pp}) \\ &= 2\begin{bmatrix} x_1s_{11} + x_2s_{12} + \cdots + x_ps_{1p} \\ x_2s_{21} + x_2s_{22} + \cdots + x_ps_{2p} \\ \vdots \\ x_ps_{p1} + x_ps_{p2} + \cdots + x_ps_{pp} \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \\ &= 2\psi^{-1}x \end{aligned} \tag{4.18}$$

diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{NICN}} = 2\psi^{-1}x_{NICN} - 2\lambda R^{-1}x_{NICN} - 2\psi^{-1}x = 0 \tag{4.19}$$

Turunan parsial pertama terhadap pengali Lagrange yaitu:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(x_{NICN}{}^T\psi^{-1}x_{NICN} + x^T\psi^{-1}x - 2x^T\psi^{-1}x_{NICN}$$

$$-\lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^{T}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x}_{NICN} - BKA)) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \boldsymbol{x}_{NICN}{}^{T}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x}_{NICN} - BKA = 0 \tag{4.20}$$

Nilai tetangga terdekat dari titik pengamatan disebut titik NICN, dipilih berdasarkan prinsip jarak Mahalanobis dan diasumsikan $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{R}$. Persamaan (4.19) dapat ditulis dengan:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{NICN}} = 2R^{-1}x_{NICN} - 2\lambda R^{-1}x_{NICN} - 2R^{-1}x = 0$$

$$2(1-\lambda)R^{-1}x_{NICN} - 2R^{-1}x = 0 \tag{4.21}$$

$2R^{-1}x$ dipindahruaskan sehingga diperoleh

$$\cancel{2}(1-\lambda)R^{-1}x_{NICN} = \cancel{2}R^{-1}x$$

$$(1-\lambda)R^{-1}x_{NICN} = R^{-1}x$$

$$(1-\lambda)x_{NICN}R^{-1} = xR^{-1}$$

sehingga

$$(1-\lambda)x_{NICN} = x$$

$$x_{NICN} = \frac{x}{(1-\lambda)} \tag{4.22}$$

Jika dimisalkan

$$b = \frac{1}{(1-\lambda)} \tag{4.23}$$

maka x_{NICN} dinyatakan dalam vektor pengamatan dan pengali Lagrange yaitu:

$$x_{NICN} = bx \tag{4.24}$$

Persamaan (4.24) disubsitusi ke Persamaan (4.20) sehingga:

$$x_{NICN}{}^{T}R^{-1}x_{NICN} - BKA = 0$$

$$bx^{T}R^{-1}bx - BKA = 0$$

$$bb(x^{T}R^{-1}x) - BKA = 0$$

$$b^{2}(x^{T}R^{-1}x) = BKA$$

dengan

$$x^{T}R^{-1}x = BKA \tag{4.25}$$

maka

$$b^2(T_x^2) = BKA$$

$$b^2 = \frac{BKA}{T_x^2} \tag{4.26}$$

3. Nilai x_{NICN} dihitung menggunakan Persamaan (4.24).
4. Menggunakan nilai x_{NICN} yang diperoleh, dapat dihitung nilai optimum Persamaan (4.10).
5. Besar kontribusi masing-masing peubah dapat dihitung dengan rumusan sebagai berikut:

$$c_{ij} = |x_{ij,NICN} - x_{ij}| \tag{4.27}$$

dengan

c_{ij} : Kontribusi sampel ke-*i* pada peubah ke-*j*
$x_{ij,NICN}$: Nilai NICN sampel ke-*i* pada peubah ke-*j*
x_{ij} : Nilai data asli sampel ke-*i* pada peubah ke-*j*

6. Batas standar kontribusi masing-masing peubah menggunakan informasi dari mean ($\bar{c}_j$), standar deviasi (s_j) dari nilai kontribusi c_{ij} dan estimator (β) (Sanchez, 2012), didefinisikan dengan rumusan sebagai berikut:

$$\tau_j = \bar{c}_j + \beta s_j \tag{4.28}$$

7. Besar kontribusi masing-masing sampel c_{ij} dibandingkan dengan batas standar kontribusi τ_j, jika nilai c_{ij} lebih besar dari τ_j menunjukkan titik NICN diluar batas standar τ_j, dengan kata lain nilai tersebut merupakan penyebab *out of control* (Sanchez, 2012).

4.2 Uji Korelasi

Uji korelasi digunakan untuk menguji keterkaitan antar peubah X_1, X_2, X_3, dan X_4 sebanyak 20 pengamatan pada data studi kasus dari literatur, data lengkap dapat dilihat pada Lampiran A. Apabila keempat peubah tersebut saling berkorelasi maka analisis pengendalian kualitas statistika multivariat dapat digunakan pada data.

Dalam pengujian korelasi digunakan koefisien korelasi *Product Moment Pearson* untuk data sampel merujuk pada Persamaan (2.9), misal minghitung korelasi untuk peubah X_1, X_2 dengan:

$n = 20$

$$\sum_{i=1}^{20} x_{i1} x_{i2} = 689,5$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_{i1} = 120$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_{i2} = 107$$

$$\sum_{i=1}^{20} {x_{i1}}^2 = 813,5$$

$$\sum_{i=1}^{20} {x_{i2}}^2 = 618$$

dapat dihitung sebagai berikut:

$$r_{X_1X_2} = \frac{(20)(689,5) - (120)(107)}{\sqrt{(20)(813,5) - (120)^2}\sqrt{(20)(618) - (107)^2}}$$

$$= \frac{(950)}{(43,24)(30,18)}$$

$$= 0,7279$$

Koefisien korelasi *Product Moment Pearson* empat peubah yang lainnya disusun dalam matriks korelasi sebagai berikut

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0,728 & 0,000 & 0,129 \\ 0,728 & 1 & 0,147 & 0,436 \\ 0,000 & 0,147 & 1 & 0,528 \\ 0,129 & 0,436 & 0,528 & 1 \end{bmatrix}$$

Meskipun telah diperoleh nilai koefisien korelasi darihasil perhitungan dengan Persamaan (2.9), kebenaran nilai korelasi tersebut perlu diuji secara statistik (Johnson dan Wichern, 2007). Berikut merupakan uji korelasi,

Hipotesa:

$H_0 : \rho = 0$ (Tidak terdapat korelasi antar peubah)

$H_1 : \rho \neq 0$ (Terdapat korelasi antar peubah)

Langkah pengujian yaitu:

1. Digunakan taraf signifikansi standar 5% ($\alpha = 0{,}05$)
2. Statistik uji menggunakan Persamaan (2.11),
   dengan:

   Rata-rata dari elemen yang bukan elemen diagonal utama pada kolom k matriks korelasi data sampel adalah:

$$\bar{r}_1 = \frac{1}{p-1}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} r_{1j};\ j = 1,2,\dots,4\ ;$$

$$= \frac{1}{4-1}(0{,}728 + 0 + 0{,}129)$$

$$= \frac{1}{3}(0{,}857)$$

$$= 0{,}286$$

Menggunakan cara yang sama untuk mecari $\bar{r}_2, \bar{r}_3,$ dan$\bar{r}_4$. Didapatkan $\bar{r}_2 = 0{,}437;\ \bar{r}_3 = 0{,}225;\ \bar{r}_4 = 0{,}074$.

Rata-rata keseluruhan dari elemen matriks segitiga bawah yang bukan diagonal utama pada matriks korelasi data sampel adalah:

$$\bar{r} = \frac{2}{p(p-1)}\sum\sum_{k<j} r_{kj};\ j = 1,2,\dots,4$$

$$\bar{r} = \frac{2}{4(3)}(0{,}728 - 0 + 0{,}129 + 0{,}147$$

$$+0{,}436 + 0{,}528)$$

$$= \frac{1}{6}(1{,}968) = 0{,}328$$

$$\sum\sum_{k<j}(r_{kj} - \bar{r})^2 =$$

$= 0{,}400^2 + (-0{,}328)^2 + (-0{,}199)^2 + (0{,}181)^2$
$+0{,}108^2 + 0{,}200^2$
$= 0{,}160 + 0{,}108 + 0{,}040 + 0{,}033 + 0{,}012 + 0{,}040$
$= 0{,}392$

$$\sum_{k=1}^{p} (\bar{r}_k - \bar{r})^2 =$$

$= (-0{,}042)^2 + 0{,}109^2 + (-0{,}103)^2 + (-0{,}254)^2$
$= 0{,}002 + 0{,}012 + 0{,}011 + 0{,}065$
$= 0{,}089$

untuk $p = 4$ dan $\bar{r} = 0{,}328$ dihitung

$$\hat{\gamma} = \frac{(p-1)^2[1-(1-\bar{r})^2]}{p(p-2)(1-\bar{r})^2}$$

sehingga

$$\hat{\gamma} = \frac{(4-1)^2[1-(1-0{,}323634)^2]}{4(4-2)(1-0{,}323634)^2}$$

$$= \frac{4{,}936}{3{,}613}$$

$$= 1{,}366.$$

Diperoleh nilai statistik uji T sebagai berikut:

$$T = \frac{(20-1)}{(1-0{,}323634)^2}[(0{,}390) - (1{,}334)(0{,}091)]$$

$$= (41{,}533)(0{,}268)$$

$$= 11{,}359$$

3. Daerah penolakan yaitu jika statistik uji $T > \chi_v^2(\alpha)$ dimana $v = \frac{(p+1)(p-2)}{2}$ maka H_0 ditolak. Dengan $p = 4$ maka nilai $\chi_5^2(0{,}05) = 11{,}07$ sehingga statistik uji $T = 11{,}359 > \chi_5^2(0{,}05) = 11{,}07$ dapat disimpulkan bahwa terdapat korelasi

yang signifikan antar peubah $X_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$, dan X_4 pada data studi kasus dari leteratur.

4.3 Uji Distribusi Normal Multivariat

Berikut merupakan pengujian distribusi normal multivariat menggunakan data studi kasus dari literatur dengan pengamatan sebanyak 20, data lengkap dapat dilihat pada Lampiran A.

Hipotesa:

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat

H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat

Pengujian distribusi normal multivariat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Digunakan taraf signifikansi standar 5% ($\alpha = 0{,}05$)
2. Statistik uji diperoleh menggunakan nilai jarak kuadrat merujuk berdasarkan Persamaan (2.12). Untuk $i = 1$, dihitung nilai d_1^2, dengan:

$$(\boldsymbol{x}_1 - \overline{\boldsymbol{X}}) = \begin{bmatrix} 4 - 6 \\ 3 - 5{,}35 \\ 1 - 3{,}125 \\ 2 - 3{,}245 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}000 \\ -2{,}350 \\ -2{,}125 \\ -1{,}245 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{x}_1 - \overline{\boldsymbol{X}})' = [4-6 \quad 3-5{,}35 \quad 1-3{,}125 \quad 2-3{,}245]$$

$$= [-2{,}000 \quad -2{,}350 \quad -2{,}125 \quad -1{,}245]$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}477 & -0{,}566 & 0{,}004 & 0{,}252 \\ -0{,}566 & 1{,}192 & 0{,}047 & -0{,}697 \\ 0{,}005 & 0{,}037 & 0{,}036 & -0{,}375 \\ 0{,}243 & -0{,}686 & -0{,}379 & 1{,}806 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$d_1^2 = [-2{,}000 \quad -2{,}350 \quad -2{,}125 \quad -1{,}245]$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}477 & -0{,}566 & 0{,}004 & 0{,}252 \\ -0{,}566 & 1{,}192 & 0{,}047 & -0{,}697 \\ 0{,}005 & 0{,}037 & 0{,}036 & -0{,}375 \\ 0{,}243 & -0{,}686 & -0{,}379 & 1{,}806 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2{,}000 \\ -2{,}350 \\ -2{,}125 \\ -1{,}245 \end{bmatrix} = 3{,}1$$

Hasil $d_2^2, d_3^2, \dots, d_{20}^2$ dapat dilihat pada Tabel 4.1. Data dikatakan berdistribusi normal multivariat atau dapat dikatakan menerima H_0 apabila terdapat minimal 50% nilai $d_i^2 \leq \chi^2_{(p;0,5)}$

dan hasil dari *scatter plot* berupa garis lurus. Berdasarkan pengujian distribusi normal multivariat pada data, diketahui bahwa nilai di bawah *Chi Square* atau nilai d_i^2 yang lebih dari $\chi^2_{(4;0,5)} = 9{,}487729$ sebesar 5%. Perbandingan Nilai d_i^2 dengan $\chi^2_{(4;0,5)}$ dapat dilihat pada Tabel 4.2.

Scatter plot dengan titik koordinat pasangan (d_i^2, q_i) dapat dilihat pada lampiran B2. Karena nilai d_i^2 yang kurang dari $\chi^2_{(4;0,5)}$ lebih besar dari 50% yaitu 90% dan hasil dari plot berupa garis lurus maka dapat disimpulkan data peubah X_1, X_2, X_3, dan X_4 mengikuti sebaran distribusi normal multivariat.

Tabel 4.1. Nilai d_i^2 Uji Distribusi Normal Multivariat

Sampel	d_i^2	Sampel	d_i^2
1	3,0916	11	2,3509
2	2,3874	12	3,0804
3	1,5195	13	4,5262
4	2,3227	14	9,5095
5	2,2819	15	6,3493
6	7,2026	16	3,4829
7	0,7674	17	5,0387
8	4,4727	18	7,4334
9	5,2758	19	1,4118
10	0,9130	20	2,5825

Tabel 4.2. Perbandingan Nilai d_i^2 dengan $\chi^2_{(4;0,5)}$

Sampel	d_i^2	Ket
1	3,0916	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
2	2,3874	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
3	1,5195	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
4	2,3227	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
5	2,2819	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
6	7,2026	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
7	0,7674	$<\chi^2_{(4;0,5)}$

8	4,4727	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
9	5,2758	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
10	0,9130	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
11	2,3509	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
12	3,0804	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
13	4,5262	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
14	9,5095	$>\chi^2_{(4;0,5)}$
15	6,3493	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
16	3,4829	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
17	5,0387	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
18	7,4334	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
19	1,4118	$<\chi^2_{(4;0,5)}$
20	2,5825	$<\chi^2_{(4;0,5)}$

4.4 Hasil Perhitungan

Perhitungan Statistik Hotelling dan Perkiraan kontribusi peubah terhadap Statistik Hotelling berdasarkan prinsip NICN, dijabarkan pada sub bab berikut.

4.4.1 Perhitungan Statistik Hotelling

Berdasarkan hasil pengujian data peubah telah memenuhi asumsi saling berkorelasi dan berdistribusi normal multivariat sehingga dapat dilanjutkan pada perhitungan Statistik Hotelling. Menggunakan Persamaan (2.13), untuk pengamatan pertama diperoleh:

$$(\boldsymbol{x}_1 - \overline{\boldsymbol{X}}) = \begin{bmatrix} 4 \quad - \quad 6 \\ 3 \ - \ 5{,}35 \\ 1 - 3{,}125 \\ 2 - 3{,}245 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}000 \\ -2{,}350 \\ -2{,}125 \\ -1{,}245 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{x}_1 - \overline{\boldsymbol{X}})' = [4-6 \quad 3-5{,}35 \quad 1-3{,}125 \quad 2-3{,}245]$$

$$= [-2{,}000 \quad -2{,}350 \quad -2{,}125 \quad -1{,}245]$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,477 & -0,566 & 0,004 & 0,252 \\ -0,566 & 1,192 & 0,047 & -0,697 \\ 0,005 & 0,037 & 0,036 & -0,375 \\ 0,243 & -0,686 & -0,379 & 1,806 \end{bmatrix}$$

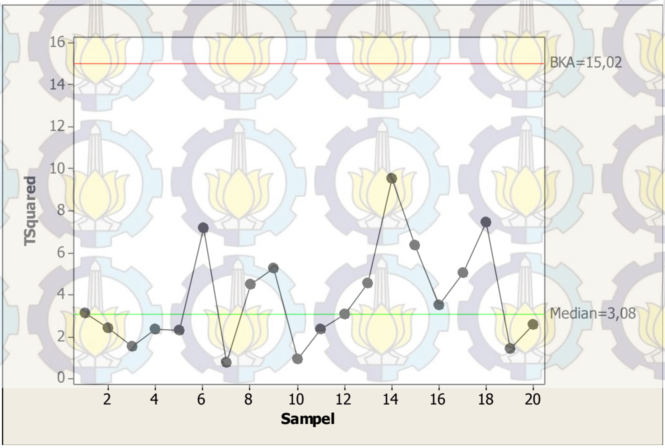
sehingga

$$T_1^2 = [-2,000 \quad -2,350 \quad -2,125 \quad -1,245]$$

$$\begin{bmatrix} 0,477 & -0,566 & 0,004 & 0,252 \\ -0,566 & 1,192 & 0,047 & -0,697 \\ 0,005 & 0,037 & 0,036 & -0,375 \\ 0,243 & -0,686 & -0,379 & 1,806 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,000 \\ -2,350 \\ -2,125 \\ -1,245 \end{bmatrix} = 3,1$$

Nilai T_1^2 s.d. T_{20}^2 dapat dilihat pada Tabel 4.3. Statistik Hotelling merupakan pengendalian kualitas berdasarkan rata-rata dari keempat peubah. Nilai horizontal pada peta kendali Statistik Hotelling merupakan banyak pengamatan yaitu sebanyak 20 data pengamatan. BKA yang digunakan yaitu berdasarkan pada Persamaan (2.14) sebesar 15,02 dan nilai median sebesar .

Dengan perhitungan Statistik Hotelling tidak terdapat pengamatan yang *out of control* atau dengan kata lain peta kendali Statistik Hotelling telah terkendali secara *mean* proses dengan BKA 15,02 sehingga tidak perlu penghapusan titik yang *out of control*. Berikut peta kendali Statistik Hotelling data peubah $X_1, X_2, X_3,$ dan X_4.



Gambar4.1 Peta Kendali Statistik Hotelling

Tabel 4.3. Nilai T_i^2 Pengamatan 1 s.d. 20

Sampel	T_i^2	Sampel	T_i^2
1	3,0916	11	2,3509
2	2,3874	12	3,0804
3	1,5195	13	4,5262
4	2,3227	14	9,5095
5	2,2819	15	6,3493
6	7,2026	16	3,4829
7	0,7674	17	5,0387
8	4,4727	18	7,4334
9	5,2758	19	1,4118
10	0,9130	20	2,5825

4.4.2 Perhitungan Statistik Hotelling berdasarkan prinsip NICN

Pendekatan untuk memperkirakan kontribusi peubah Statistik Hotelling dengan prinsip NICN dihitung melalui 6 tahap yaitu:

1. Dihitung T_x^2 masing-masing pengamatan menggunakan Persamaan (4.25). Untuk sampel pertama,

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,9211 & 2,5000 & 0,0000 & 0,2842 \\ 2,5000 & 2,3974 & 0,4461 & 0,6703 \\ 0,0000 & 0,4461 & 3,8493 & 1,0280 \\ 0,2842 & 0,6703 & 1,0280 & 0,9847 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 18,7947$$

Nilai T_x^2 sampel ke-1 s.d. sampel ke-20 dapat dilihat pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4. T_x^2 Masing-masing Pengamatan

i	$T_{x,i}^2$
1	18,7947
2	34,6518
3	75,8499
4	90,4754
5	85,9226

6	72,0825
7	45,0839
8	104,7003
9	14,6441
10	26,4238
1	73,5324
2	45,4375
3	108,2379
4	27,9869
5	43,8894
6	53,3314
7	50,0233
8	81,6751
9	51,6784
10	78,8796

2. Menghitung nilai b yang memuat nilai pengali Lagrange dengan menggunakan Persamaan (4.26). Untuk pengamatan pertama,

$$b_1 = \sqrt{\frac{15{,}02}{18{,}7947}} = 0{,}9084;\ BKA = 15{,}02$$

Nilai b yang digunakan adalah bernilai positif agar diperoleh nilai Statistik Hotelling yang minimum. Hasil perhitungan b_1 s.d. b_{20} dapat dilihat pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5. Nilai b_i Pengamatan 1 s.d. 20

No.	b_i	No.	b_i	No.	b_i	No.	b_i
1	0,8940	6	0,4565	11	0,4520	16	0,5307
2	0,6584	7	0,5772	12	0,5749	17	0,5480
3	0,4450	8	0,3788	13	0,3725	18	0,4288
4	0,4074	9	1,0128	14	0,7326	19	0,5391
5	0,4181	10	0,7539	15	0,5850	20	0,4364

3. Nilai x_{NICN} yang optimum diperoleh menggunakan Persamaan (4.24). Untuk pengamatan pertama,

$$\boldsymbol{x}_{NICN,1} = 0{,}9084 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}5758 \\ 2{,}6819 \\ 0{,}8940 \\ 1{,}7879 \end{bmatrix}$$

Nilai x_{NICN} yang optimum untuk pengamatan ke-1 s.d. ke-20 dapat dilihat pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6. Nilai x_{NICN} Pengamatan ke-1 s.d. ke-20

i	$x_{NICNi,1}$	$x_{NICNi,2}$	$x_{NICNi,3}$	$x_{NICNi,4}$
1	3,5758	2,6819	0,8940	1,7879
2	3,2919	2,6335	1,3167	2,3043
3	3,5600	3,1150	1,3350	1,7800
4	3,2596	2,4447	2,0372	1,6298
5	3,7629	2,9267	0,8362	1,2543
6	2,7389	1,3694	2,2824	1,3694
7	3,4632	2,8860	1,7316	1,4430
8	3,7876	3,0301	0,7575	1,1363
9	2,0255	3,0383	1,5191	3,4434
10	3,0158	3,0158	2,2618	2,2618
11	2,7117	2,7117	2,7117	1,8078
12	3,7372	2,5873	0,0000	1,1499
13	3,3526	2,9801	1,8626	1,8626
14	2,9303	3,6629	0,7326	0,7326
15	2,3400	3,5100	1,7550	2,9250
16	3,1842	3,7149	1,0614	2,1228
17	1,3699	2,4658	3,2878	2,1918
18	2,1442	2,3586	3,0018	1,2865
19	3,7738	2,9651	0,5391	1,3478
20	3,4909	2,1818	1,3091	1,3091

4. Dihitung nilai minimum Statistik Hotelling berdasarkan Persamaan (4.1). Untuk pengamatan pertama,

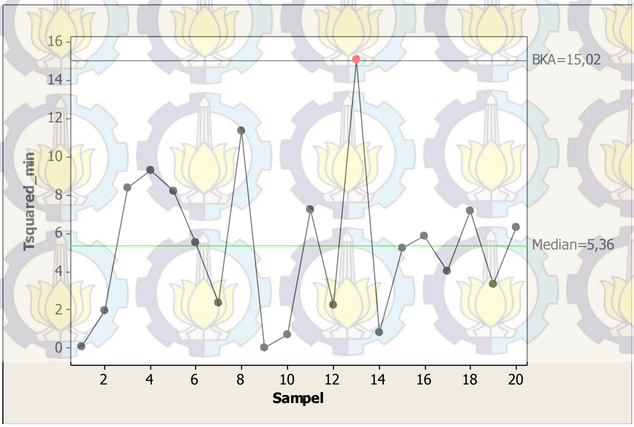
$$T^2_{min,1} = \begin{bmatrix} 3,5758-4 \\ 2,6819-3 \\ 0,8940-2 \\ 1,7879-1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4,9211 & 2,5000 & 0,0000 & 0,2842 \\ 2,5000 & 2,3974 & 0,4461 & 0,6703 \\ 0,0000 & 0,4461 & 3,8493 & 1,0280 \\ 0,2842 & 0,6703 & 1,0280 & 0,9847 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,5758-4 \\ 2,6819-3 \\ 0,8940-2 \\ 1,7879-1 \end{bmatrix} = 0,056721$$

Nilai T^2_{min} pengamatan ke-1 s.d. ke-20 dapat dilihat pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7. Nilai T^2_{min} pengamatan ke-1 s.d. ke-20

i	$T^2_{min,i}$	i	$T^2_{min,i}$	i	$T^2_{min,i}$	i	$T^2_{min,i}$
1	0,0761	6	5,5116	11	7,2262	16	5,8703
2	1,9361	7	2,3375	12	2,2515	17	4,0255
3	8,4077	8	11,3796	13	15,1259	18	7,2109
4	9,3041	9	0,0022	14	0,8359	19	3,3391
5	8,2240	10	0,6921	15	5,2154	20	6,3258

Batas kendali atas untuk peta kendali Statistik yang digunakan yakni 15,02. Terdapat Nilai T^2_{min} yang melebih batas kendali atas yaitu pada titik pengamatan ke-13 dengan nilai $T^2_{min} = 15,12$. Peta kendali yang terbentuk yaitu,



Gambar 4.2 Peta Kendali Statistik Hotelling Berdasarkan Prinsip NICN

Prinsip NICN digunakan untuk menemukan tetangga terdekat dari data pengamatan dapat mendeteksi proses yang menunjukkan *out of control*. Dengan menggunakan nilai kontribusi masing-masing peubah pada suatu pengamatan dapat diketahui peubah yang merupakan penyabab *out of control* atau penyebab titik yang berada di luar batas kendali Statistik Hotelling.

5. Nilai kontribusi masing-masing pengamatan diperoleh menggunakan Persamaan (4.27). Dapat dilihat nilai kontribusi masing-masing pengamatan pada Tabel 4.8.
6. Nilai batas standar kontribusi masing-masing peubah diperoleh menggunakan Persamaan (4.28), dengan:

   $\beta \quad = 2$
   $s_j \quad = [1{,}7825 \quad 1{,}3936 \quad 1{,}2165 \quad 0{,}7949]$
   $\bar{c}_j \quad = [2{,}9268 \quad 2{,}5399 \quad 1{,}5153 \quad 1{,}4920]$

   diperoleh nilai τ_j sebagai berikut:

$$\tau_j = [6{,}4917 \quad 5{,}3270 \quad 3{,}9482 \quad 3{,}0819]$$

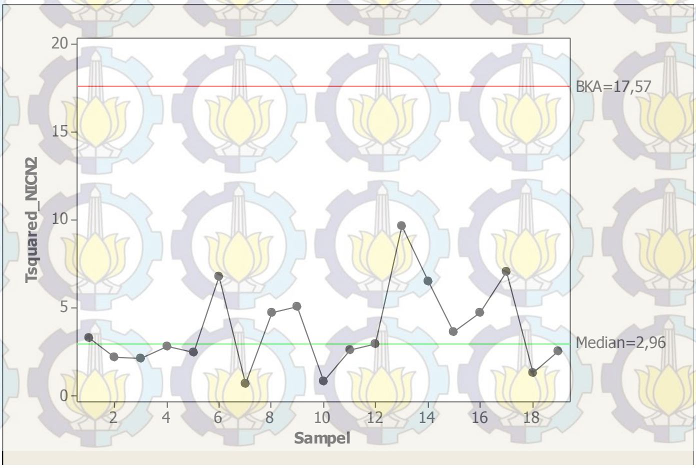
Tabel 4.8. Nilai Kontribusi Masing-masing Peubah

i	c_{i1}	c_{i2}	c_{i3}	c_{i4}
1	0,4242	0,3181	0,1060	0,2121
2	1,7081	1,3665	0,6833	1,1957
3	4,4400	3,8850	1,6650	2,2200
4	4,7404	3,5553	2,9628	2,3702
5	5,2371	4,0733	1,1638	1,7457
6	3,2611	1,6306	2,7176	1,6306
7	2,5368	2,1140	1,2684	1,0570
8	6,2124	4,9699	1,2425	1,8637
9	0,0255	0,0383	0,0191	0,0434
10	0,9842	0,9842	0,7382	0,7382
11	3,2883	3,2883	3,2883	2,1922
12	2,7628	1,9127	0,0000	0,8501
13	5,6474	5,0199	3,1374	3,1374

14	1,0697	1,3371	0,2674	0,2674
15	1,6600	2,4900	1,2450	2,0750
16	2,8158	3,2851	0,9386	1,8772
17	1,1301	2,0342	2,7122	1,8082
18	2,8558	3,1414	3,9982	1,7135
19	3,2262	2,5349	0,4609	1,1522
20	4,5091	2,8182	1,6909	1,6909

Dari seluruh perbandingan nilai Statistik Hotelling berdasarkan NICN dengan batas kendali atas 15,02 terdapat 1 titik yang terdeteksi berada diluar batas kendali. Titik yang terdeteksi yaitu pengamatan ke-13. Berdasarkan prinsip NICN dapat diketahui peubah yang menjadi penyebab pengamatan ke-13 berada diluar batas kendali, yaitu pada peubah X_4. Titik tersebut dapat digunakan sebagai referensi perbaikan proses pengendalian kualitas berikutnya.

Selanjutnya data yang *out of control* tersebut harus dihilangkan dan dibuat peta kendali baru agar terkendali dalam *mean* proses, berikut disajikan peta kendali Statistik Hotelling setalah pengamatan yang *out of control* dihilangkan.



Gambar4.3 Peta Kendali Statistik Hotelling Dengan Prinsip NICN Setalah Titik 13 Dihilangkan

Pada peta kendali Statistik Hotelling dengan estimasi peubah berdasarkan prinsip NICN setalah pengamatan *out of control* dihilangkan, banyaknya data adalah sebanyak 19 data pengamatan yang ditunjukkan pada nilai horizontal peta kendali Statistik Hotelling. Batas kendali yang digunakan adalah rumus batas kendali dari peta kendali Statistik Hotelling berdasarkan Persamaan (2.46), dengan BKA 17,57 dan nilai median 2,96. Pada peta kendali Statistik Hotelling ditunjukkan bahwa tidak terdapat pengamatan yang *out of control*, sehingga disimpulkan bahwa peta kendali Statistik Hotelling berdasarkan prinsip NICN telah terkendali dalam *mean* proses dengan BKA 17,57.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan Analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dapat diperoleh kesimpulan:

1. Pendekatan untuk memperkirakan kontribusi peubah Statistik Hotelling menggunakan $c_{ij} = \left| x_{ij,NICN} - x_{ij} \right|$.
2. Dari hasil perhitungan Statistik Hotelling menggunakan data studi kasus dari literatur sebanyak 20 pengamatan dan empat peubah, peta kendali terkendali secara *mean* proses tanpa penghapusan pengamatan yang *out of control* dengan BKA sebesar 15.02. Perhitungan Statistik Hotelling berdasarkan prinsip NICN terkendali secara *mean* proses setelah satu pengamatan *out of control* dihilangkan dengan BKA sebesar 17.57.
3. Perbandingan yang diperoleh adalah perhitungan menggunakan Statistik Hotelling biasa tidak dapat diketahui peubah yang merupakan penyebab dari pengamatan *out of control*, sedangkan hasil perhitungan Statistik Hotelling menggunakan prinsip NICN dapat diketahui peubah yang merupakan penyebab pengamatan *out of control*. Peubah tersebut dapat dijadikan acuan dalam proses perbaikan selanjutnya.

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan dari hasil penilitian Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Dalam pengendalian kualitas menggunakan Statistik Hotelling dianjurkan menggunakan prinsip NICN agar dapat diketahui peubah yang berkontribusi terhadap nilai Statistik Hotelling.
2. Melakukan perhitungan menggunakan data pengamatan dari populasi dan menganalisa hasil yang diperoleh agar dapat diketahui kebenaran peubah yang berkontribusi terhadap Statistik Hotelling.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. 2006. “*Miscallaneous Concepts Of Matrix Algebra*”. (https://www.google.co.id/Matrix_Algebra.pdf&ei=hiJuVZuXDJShuQTnuoHQAg&usg=AFQjCNEuHY7jesuCOLUhuydNPXljRaTalA&bvm=bv.94911696,d.c2E /, diakses pada tangal 30 April 2015 pukul 17.51).

Jonhson, Richard. Dean Wichern. 2007. *Applied Multivariat Statistical Analysis, 5th ed*.New Jersey : Prentice Hall.

Montgomery, D. C. 2009. *Introduction to Statistical Quality Control*. America: Arizona State University.

Naidu, D.S. 2003. *Optimal Control Systems.* America: CRC Press LLC

Ronal, E Walpole. 2002. *Probability and Statistics for Engineers and Scientist 7th.* Prentice Hall, Inc: Upple Saddle River, New Jersey 017458

Sanchez, M. C. 2012. “A New Approach to Estimate Variable Contributions to Hottelling’s Statistic”. *Jurnal of Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*. 118, 120-126.

Subiono. 2012. *Aljabar Linear*. Indonesia: Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

LAMPIRAN

Lampiran A : Data oleh De Maesschalck (Sanchez , 2012)

Sampel	X_1	X_2	X_3	X_4
1	4,00	3,00	1,00	2,00
2	5,00	4,00	2,00	3,50
3	8,00	7,00	3,00	4,00
4	8,00	6,00	5,00	4,00
5	9,00	7,00	2,00	3,00
6	6,00	3,00	5,00	3,00
7	6,00	5,00	3,00	2,50
8	10,00	8,00	2,00	3,00
9	2,00	3,00	1,50	3,40
10	4,00	4,00	3,00	3,00
11	6,00	6,00	6,00	4,00
12	6,50	4,50	0,00	2,00
13	9,00	8,00	5,00	5,00
14	4,00	5,00	1,00	1,00
15	4,00	6,00	3,00	5,00
16	6,00	7,00	2,00	4,00
17	2,50	4,50	6,00	4,00
18	5,00	5,50	7,00	3,00
19	7,00	5,50	1,00	2,50
20	8,00	5,00	3,00	3,00

Lampiran B1 : Listing Program Uji Distribusi Normal Mutivariat

M-File dengan judul **Normal_Multivariat.m**

```
x = xlsread('TA_Matlab.xlsx','Data','A1:D20');
    x_bar = mean(x);

    for i=1:size(x,1)
        d_kuadrat(i) = (x(i,:)-
x_bar)*inv(cov(x))*(x(i,:)-x_bar)';
    end
    d_kuadrat
```

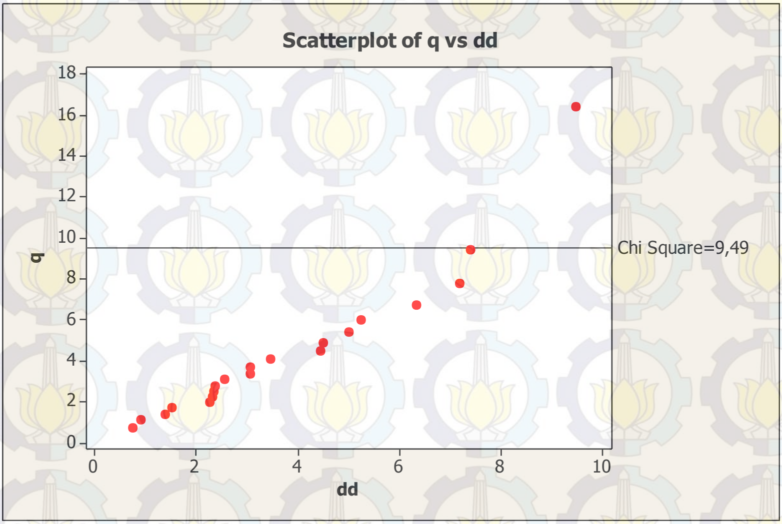
Lampiran B2: Hasil Uji Distribusi Normal Multivariat Dengan *Scutter Plot*

Listing Program Uji Distribusi Normal Multivariat

```
macro
qq x.1-x.p
mconstant i n p t chis
mcolumn d x.1-x.p dd pi q ss tt
mmatrix s sinv ma mb mc md
let n=count(x.1)
cova x.1-x.p s
invert s sinv
do i=1:p
let x.i=x.i-mean(x.i)
enddo
do i=1:n
copy x.1-x.p ma;
use i.
transpose ma mb
multiply ma sinv mc
multiply mc mb md
copy md tt
let t=tt(1)
let d(i)=t
enddo
set pi
1:n
end
let pi=(pi-0.05)/n
sort d dd
invcdf pi q;
chis p.
plot q*dd
```

```
invcdf 0.05 chis;
chis p.
let ss=dd<chis
let t=sum(ss)/n
print t
if t>=0.05
note distribusi data multinormal
endif
if t<0.05
note distribusi data tidak multinomial
endif
endmacro
```

Scutterplot of d_i^2 vs q_i



Lampiran C : Listing Program Perhitungan Peta Kendali Statistik Hotelling Berdasarkan Prinsip NICN

M-File dengan judul **TA_Hotelling.m**

```
clc; clear all; close all;
Jawab = input('Apakah anda ingin masuk program
(Y/N)? ','s');
while Jawab=='Y'

    x = xlsread('TA new
Autosaved).xlsx','Sheet3','C3:F22');
    x_bar = mean(x);

    for i=1:size(x,1)
        Tc_kuadrat = 15,02
        T_kuadrat(i) = (x(i,:)-
x_bar)*inv(cov(x))*(x(i,:)-x_bar)';
        Tx(i) =(x(i,:))*inv(corr(x))*(x(i,:))';
    end
    T_kuadrat
    Tx

    b = sqrt(Tc_kuadrat./Tx)

    for i=1:size(x,1)
        x_NICN(i,:) = b(i)*x(i,:);
    end
    x_NICN

    for i=1:size(x,1)
        J_Min(i) = (x_NICN(i,:)-
x(i,:))*inv(cov(x))*(x_NICN(i,:)-x(i,:))';
    end
    J_Min

    plot(J_Min,'r*');
    title('Nilai Fungsi
Objektif','fontweight','b');
    ylabel('J Min');
    c = abs(x_NICN-x)
```

```
    c_bar = mean(c);
    beta = 2;
    stdev = [1.83919 1.41056 1.31564 0.801438];
    tj = (c_bar)+(beta*stdev);
    tj

    Jawab = input('Apakah anda ingin masuk
program (Y/N)? ','s');
end
```

BIODATA PENULIS

Penulis dilahirkan di Bukittinggi pada 14 Desember 1992. Pendidikan formal yang pernah ditempuh yaitu TK Jamiyyatulhujjat Bukittinggi (tahun 1998-1999), SDN 01 Bukittinggi (tahun 1999-2005), SMPI Zainuddin Waru, (tahun 2005-2008) dan SMAN 1 Waru (tahun 2008-2011). Penulis diterima sebagai mahasiswi Matematika FMIPA ITS dengan NRP.1211100107 setelah mengikuti SNMPTN tulis pada tahun 2011 dan diterima sebagai mahasiswi Jurusan Matematika ITS. Selama menjadi mahasiswi penulis pernah mengikuti beberapa organisasi diantaranya LDK JMMI (periode 2011/2012), LDJ Ibnu Muqlah (periode 2012/2013 dan periode 2013/2014), serta HIMATIKA ITS di Departemen Pengabdian Masyarakat (periode 2012/2013 dan periode 2013/2014).

Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke diniprita@gmail.com.