Kajian Pendekatan untuk Memperkirakan Kontribusi Peubah Terhadap Statistik Hotelling

Dini Prihartati, Farida Agustini W. dan Dian Winda Setyawati
Jurusan Matematika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: farida@matematika.its.ac.id

***Abstrak*—Statistik Hotelling sering digunakan dalam pengendalian kualitas proses. Peta kendali Statistik Hotelling pada dasarnya mempunyai tujuan utama untuk peningkatan dan pemeliharaan kualitas dengan menstabilkan proses tersebut. Beberapa pendekatan berbeda pernah diusulkan untuk memperkirakan kontribusi peubah terhadap Statistik Hotelling. Pendekatan sebelumnya menggunakan *Principal Component Analysis* (PCA), menginterpretasikan hasil yang berasal dari analisis peubah laten (peubah *unobserved*). Pada Tugas Akhir ini dibahas mengenai pendekatan berdasarkan *Nearest in Control Neighbor* (NICN) terhadap titik pengamatan. Untuk mendapatkan kontribusi peubah Statistik Hotelling diggunakan perhitungan $c_{ij} = |x_{ij,NICN} - x_{ij}|$. Perbandingan yang diperoleh adalah hasil perhitungan peta kendali Statistik Hotelling menggunakan prinsip NICN terkendali secara mean proses setelah pengamatan *out of control* dihilangkan dan dapat diketahui peubah yang merupakan penyebab pengamatan *out of control*, sedangakan menggunakan Statistik Hotelling biasa tidak dapat diketahui peubah yang merupakan penyebab pengamatan *out of control*.**

***Kata Kunci*—*NICN, Pengendalian Kualitas Proses, Peta Kendali, Statistik Hotelling*.**

I. PENDAHULUAN

Meningkatknya kebutuhan masyarakat terhadap jumlah produk barang dan jasa mendorong kegiatan industri untuk memproduksi barang dan jasa agar dapat memenuhi kebutuhan masyarakat. Naiknya tingkat produktifitas berdampak pada proses produksi, dimana banyak ditemui ketidak sesuaian hasil produksi dengan ketetapan standar. Berdasarkan permasalahan tersebut digunakan *Statistical Process Control (SPC)*. SPC merupakan metode yang dapat digunakan untuk mengontrol dan memonitor suatu proses. Salah satu alat yang dapat digunakan adalah peta kendali (*control chart*). Harold Hotelling pada tahun 1947 memperkenalkan suatu statistik yang dapat menggambarkan observasi multivariat, dikenal dengan Statistik Hotelling [1].

Jika suatu pengamatan berada diluar daerah kendali maka dilakukan penyelidikan untuk dapat menemukan penyebab tak terkendali atau *out of control*, dengan kata lain hal ini berkaitan dengan penyelidikan peubah-peubah pada data tersebut. Mason [2] dan Alvarez [3] telah membahas metode untuk dapat menemukan penyebab *out of control* dengan pertimbangan sifat multivariat data. Metode lain yang digunakan adalah mendapatkan peubah laten yang pernah dilakukan pertama kali oleh Jackson [4] yang mengubah Statistik Hotelling menjadi *Principle Component Analysis* (PCA). Namun dengan metode PCA tidak pasti menemukan pengamatan yang berada diluar daerah kendali.

Pada Penelitian yang berjudul "Kajian Pendekatan untuk Memperkirakan Kontribusi Peubah Terhadap Statistik Hotelling". Berdasarkan hasil perhitungan dengan studi kasus menggunakan data yang disajikan oleh Shancez [8] dapat diketahui peubah yang merupakan penyebab pengamatan *out of control*. Peubah tersebut dapat dijadikan acuan dalam proses perbaikan selanjutnya.

II. URAIAN PENELITIAN

1. *Pendekatan untuk Memperkirakan Kontribusi Peubah Terhadap Statistik Hotelling Menggunakan Prinsip NICN*

A. *Nearest In Control Neighbor (NICN)*

Algoritma *Nearest In Control Neighbor* (NICN) adalah sebuah metode untuk melakukan klasifikasi terhadap objek berdasarkan data yang jaraknya paling dekat dengan objek tersebut. Dengan meminimumkan Mahalanobis *Distance* yang digunakan sebagai fungsi objektif akan diperoleh titik NICN yang minimum [8]. Berikut adalah rumus Mahalanobis *Distance* :

$$\boldsymbol{d_i^2 = (x_{NICN} - x)^T S^{-1} (x_{NICN} - x)};\ i = 1,2,\dots,n \qquad (1)$$

dengan

d_i^2 : Mahalanobis *Distance*
$\boldsymbol{S}^{-1}$: Nilai invers dari matriks varian kovarian sample
$\boldsymbol{x}_{NICN}$: Vektor tetangga terdekat
$\boldsymbol{x}$: Vektor pengamatan

B. *Pengali Lagrange*

Sebagaimana dijelaskan dalam buku Desineni S. Naidu [6], langkah optimasi menggunakan Pengali Lagrange dalam proses optimasi adalah sebagai berikut:

1. Fungsi Lagrange Pembentukan
   Fungsi pengali Lagrange didefinisikan sebagai berikut:
   $$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t)$$
   Dengan fungsi objektif dan batas batas kendala (*constrain*)
   $$V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t)$$

$$g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) = 0$$

dan kondisi titik akhir

$$x_1(t_0) = x_{10}; \quad x_2(t_0) = x_{20}$$
$$x_1(t_f) = x_{1f}; \quad x_2(t_f) = x_{2f}$$

sehingga diperoleh fungsi Lagrange dengan $\lambda(t)$ adalah pengali Lagrange sebagai berikut:

$$\mathcal{L} = V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) + \lambda(t) g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) \quad (2)$$

2. Nilai optimum dari Persamaan (2) dapat dicari dengan memformulasikan masing-masing derivatif parsial pertamanya sama dengan nol, yaitu:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0$$
$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \quad (3)$$
$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}}\right) = 0$$

C. *Turunan Parsial Matriks Terhadap Vektor*

Suatu fungsi linear f terbentuk dari $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ dimana $\boldsymbol{A}$ adalah matriks simetri dan $\boldsymbol{x}$ merupakan vektor kolom dituliskan sebagai berikut:

$$y = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$$

Untuk menghitung turunan parsial dari $y = f(\boldsymbol{x})$ terhadap vektor kolom $\boldsymbol{x}$ berdasarkan Terorema yang di ambil dari buku *Miscallaneous Concepts Of Matrix Algebra* [7].

$$\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_p} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{2Ax} \quad (4)$$

dengan

$$\boldsymbol{y} = a_{12}{x_1}^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1p}x_1x_p + a_{21}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 + \cdots + a_{2p}x_2x_p + a_{p1}x_1x_p + a_{p2}x_2x_p + \cdots + a_{pp}{x_p}^2.$$

D. *Besar Kontribusi dan Batas Standar Kontribusi*

Besar kontribusi masing-masing peubah dapat dihitung dengan rumusan sebagai berikut [8]:

$$c_{ij} = |x_{ij,NICN} - x_{ij}| \quad (5)$$

dengan

c_{ij} : Kontribusi sampel ke-*i* pada peubah ke-*j*
$x_{ij,NICN}$: NICN sampel ke-*i* pada peubah ke-*j*
x_{ij} : Nilai data sampel ke-*i* pada peubah ke-*j*

Untuk menunjukkan peubah penyebab *out of control* maka dihitung batas standar kontribusi titik NICN. Batas standar kontribusi tersebut digunakan sebagai pembanding yang diperoleh menggunakan informasi dari mean $(\bar{c}_j)$, standar deviasi (s_j) dari peubah NICN dan estimator (β) [8], yaitu:

$$\tau_j = \bar{c}_j + \alpha s_j \quad (6)$$

2. *Uji Korelasi*

Untuk mengkaji koefisien korelasi sampel dari data hasil pengukuran, diberikan oleh persamaan [6]:

$$r_{x_j x_k} = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}x_{ik}) - (\sum_{i=1}^{n} x_{ij})(\sum_{i=1}^{n} x_{ik})}{\sqrt{n(\sum_{i=1}^{n} {x_{ij}}^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_{ij})^2}\sqrt{n(\sum_{i=1}^{n} {x_{ik}}^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_{ik})^2}} \quad (7)$$

Jika terdapat peubah sebanyak p, didefinisikan matriks korelasi sampel $(\boldsymbol{r})$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_{X_1X_1} & r_{X_1X_2} & \cdots & r_{X_1X_p} \\ r_{X_2X_1} & r_{X_2X_2} & \cdots & r_{X_2X_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{X_pX_1} & r_{X_pX_2} & \cdots & r_{X_pX_p} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Hipotesa:

H_0: $\boldsymbol{\rho} = 0$ (Tidak terdapat korelasi antar peubah)
H_1: $\boldsymbol{\rho} \neq 0$ (Terdapat korelasi antar peubah)

Menghitungan statistik uji menggunakan persamaan:

$$T = \frac{(n-1)}{(1-\bar{r})^2}\left[\sum\sum_{j<k}(r_{jk} - \bar{r})^2 - \hat{\gamma}\sum_{k=1}^{p}(\bar{r}_k - \bar{r})^2\right] \quad (9)$$

dimana:

$\bar{r}_k$: Rata-rata dari elemen yang bukan elemen diagonal utama pada kolom *k* pada matriks korelasi sampel.
$\bar{r}$: Rata-rata keseluruhan dari elemen matriks segitiga bawah yang bukan diagonal utama pada matriks korelasi sampel
r_{kj} : Nilai koefisien korelasi $r_{X_jX_k}$ dimana $j \neq k$
p : Banyaknya peubah

Daerah penolakan adalah jika statistik uji $T > \chi^2_{\frac{(p+1)(p-2)}{2}}(\alpha)$ maka H_0 ditolak, dengan kata lain dapat disimpulkan bahwa terdapat korelasi yang signifikan antar peubah.

3. *Uji Distribusi Normal Multivariat*

Berikut merupakan pengujian distribusi normal multivariat.

Hipotesa:

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat
H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat

Dihitung nilai jarak kuadrat dengan rumus:

$$d_i^2 = (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{X}})'\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{X}});\ i = 1,2,\ldots,n \quad (10)$$

dan dihitung nilai $\chi^2_{(p;\frac{i-0,5}{n})} = q_i;\ i = 1,2,\ldots,n$

dengan

p : Banyak peubah
n : Banyak sampel
d_i^2 : Mahalanobis *Distance*
$\boldsymbol{S}^{-1}$: Nilai invers dari matriks varian kovarian sample
$\overline{\boldsymbol{X}}$: Vektor rata-rata peubah
$\boldsymbol{x}_i$: Vektor sampel ke-*i*

Data dikatakan berdistribusi normal multivariat atau dapat dikatakan gagal menolak H_0 apabila terdapat minimal 50% nilai $d_i^2 \leq \chi^2_{(p;0,5)}$ dan hasil dari *scatter plot* berupa garis lurus [8].

4. *Peta Kendali Multivariat Statistik Hotelling*

Jika data dalam pengamatan tidak terdapat subgrup atau data bersifat induvidu maka digunakan peta kendali statistik Hotelling individu. sebagai berikut [6]:

$${T_i}^2 = (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{X}})'\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{X}});\ i = 1,2,\ldots,n \quad (11)$$

dengan

n : Banyak sampel yang terkendali secara *variance*
${T_i}^2$: Statistik hitung peta kendali Statistik Hotelling
$\boldsymbol{S}^{-1}$: Nilai invers dari matriks varian kovarian sample
$\overline{\boldsymbol{X}}$: Vektor rata-rata peubah
$\boldsymbol{x}_i$: Vektor sampel ke-*i*

Batas kendali untuk individual Statistik Hotelling dengan sampel kurang dari 100, dapat di rumuskan sebagai berikut:

$$BKA = \left(\frac{p(n+1)(n-1)}{n^2 - np}\right) F_{\alpha,p,n-p} \quad (12)$$

$$BKB = 0$$

p merupakan banyak peubah, dengan $n - s$ampel menggunakan distribusi F.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Pendekatan untuk Memperkirakan Kontribusi Peubah Terhadap Statistik Hotelling menggunakan prinsip NICN

Penelitian yang telah dilakukan oleh Sanchez (2012), tetangga terdekat dari titik pengamatan tersebut diperoleh berdarkan prinsip NICN yang dinyatakan sebagai masalah optimasi. Teori optimasi yang digunakan adalah pengali Lagrange. Dengan meminimumkan Mahalanobis *Distance* dapat diperoleh titik NICN yang minimum. Fungsi objektif dalam penyelesaian masalah optimasi ini yaitu:

$$\min(\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x})^T \boldsymbol{\psi}^{-1}(\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x}) \quad (13)$$

fungsi kendala

$$\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} = BKA$$

$$BKA - \boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} = 0 \quad (14)$$

dengan

$\boldsymbol{x}_{NICN}$: Vektor tetangga terdekat x_{NICN}
$\boldsymbol{x}$: Vektor sampel x
$\boldsymbol{\psi}^{-1}$: Matriks invers varian kovarian sampel
$\boldsymbol{R}^{-1}$: Matriks invers korelasi
BKA : Batas kendali atas Statistik Hotelling Pesamaan (11)

Pada kasus optimasi parameter Statistik Hotelling, diasumsikan $\psi = R$, jika data yang digunakan data sampel dengan matriks varian kovarian sampel ψ. Fungsi Lagrange yang terbentuk merujuk pada Persamaan (2) adalah

$$\mathcal{L} = (\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x})^T \psi^{-1}(\boldsymbol{x}_{NICN} - \boldsymbol{x}) + \lambda(BKA - \boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN})$$

dapat ditulis juga sebagai:

$$\mathcal{L} = x_{NICN}{}^T \psi^{-1} x_{NICN} + x^T \psi^{-1} x - 2x^T \psi^{-1} x_{NICN}$$

$$-\lambda(\boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} - BKA)$$

Karena parameter optimum yang dicari adalah x_{NICN} maka dihitung turunan parsial pertama terhadap peubah x_{NICN} dan pengali Lagrange. Pada kasus ini tidak terdapat $\dot{x}_{NICN}$, merujuk pada Persamaan (3), sehingga:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{NICN}} = 0 \text{ dan } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Menggunakan Persamaan (4), diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{NICN}} = 2\psi^{-1} x_{NICN} - 2\lambda R^{-1} x_{NICN} - 2\psi^{-1} x = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \boldsymbol{x}_{NICN}{}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} - BKA = 0 \quad (16)$$

Nilai tetangga terdekat dari titik pengamatan disebut titik NICN, dipilih berdasarkan prinsip jarak Mahalanobis dan diasumsikan $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{R}$. Persamaan (15) dapat ditulis dengan:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{NICN}} = 2R^{-1} x_{NICN} - 2\lambda R^{-1} x_{NICN} - 2R^{-1} x = 0$$

$$2(1-\lambda) R^{-1} \boldsymbol{x}_{NICN} - 2R^{-1} x =$$

$$(1-\lambda) x_{NICN} R^{-1} = x R^{-1}$$

sedemikian hingga

$$(1-\lambda) x_{NICN} = x$$

$$x_{NICN} = \frac{x}{(1-\lambda)}$$

Jika dimisalkan

$$b = \frac{1}{(1-\lambda)}$$

maka x_{NICN} dinyatakan dalam vektor sampel dan pengali Lagrange yaitu:

$$x_{NICN} = bx. \quad (17)$$

Dengan mensubsitusikan Persamaan (17) ke Persamaan (16),

$$bx^T R^{-1} bx - BKA = 0$$

$$b^2 (x^T R^{-1} x) = BKA$$

dengan

$$x^T R^{-1} x = BKA \quad (18)$$

maka

$$b^2 (T_x^2) = BKA$$

$$b^2 = \frac{BKA}{T_x^2} \quad (19)$$

Nilai optimum Statistik Hotelling dihitung menggunakan Persamaan (13) dengan titik NICN yang diperoleh menggunakan Persamaan (17). Besar kontribusi peubah Statistik Hotelling dan batas standar kontribusi masing-masing peubah dihitung berdasarkan Persamaan (5) dan Persamaan (16).

2. Uji Korelasi

Matriks korelasi data sampel yang ada pada Lampiran, diperoleh berdasarkan Persamaan (7) dan Persamaan (8) adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}728 & 0{,}000 & 0{,}129 \\ 0{,}728 & 1 & 0{,}147 & 0{,}436 \\ 0{,}000 & 0{,}147 & 1 & 0{,}528 \\ 0{,}129 & 0{,}436 & 0{,}528 & 1 \end{bmatrix}$$

Statistik uji yang diperoleh berdasarkan Persamaan 9 $T = 11{,}359 > \chi_5^2(0{,}05) = 11{,}07$ dapat disimpulkan bahwa terdapat korelasi yang signifikan antar peubah $X_1, X_2, X_3,$ dan X_4.

3. Uji Distribusi Normal Multivariat

Berdasarkan pengujian distribusi normal multivariat nilai d_i^2 yang kurang dari $\chi^2_{(4;0,5)}$ lebih besar dari 50% yaitu 90% dan hasil dari plot berupa garis lurus maka dapat disimpulkan data peubah $X_1, X_2, X_3,$ dan X_4 mengikuti sebaran distribusi normal multivariat.

4. Peta Kendali Statistik Hotelling

Pada peta kendali Statistik Hotelling batas kendali yang digunakan adalah sesuai dengan Persamaan 12, dengan $p = 4,\ n = 20,$ dan $F_{0,05,4,16} = 3{,}01$

$$BKA = \left(\frac{4(21)(19)}{20^2 - (20)(4)}\right) 3{,}01 = 15{,}02$$

$$BKB = 0$$

dan nilai median sebesar 3,61. Pada peta kendali Statistik Hotelling tidak terdapat data yang *out of control* atau dengan kata lain peta kendali Statistik Hotelling telah terkendali secara *mean* proses sehingga tidak perlu penghapusan pengamatan *out of control*.

5. *Studi Kasus*

Pendekatan Baru Untuk Memperkirakan Kontribusi Peubah Statistik Hotelling menggunakan prinsip NICN

Pada pendekatan baru untuk estimasi peubah Statistik Hotelling dengan prinsip NICN, dihitung melalui 4 tahap yaitu:

1. Dihitung T_x^2 masing-masing sampel menggunakan Persamaan (18). Misal untuk sampel pertama,

$$T_x^2 = [4 \quad 3 \quad 1 \quad 2]\begin{bmatrix}4{,}9211 & 2{,}5000 & 0{,}0000 & 0{,}2842\\ 2{,}5000 & 2{,}3974 & 0{,}4461 & 0{,}6703\\ 0{,}0000 & 0{,}4461 & 3{,}8493 & 1{,}0280\\ 0{,}2842 & 0{,}6703 & 1{,}0280 & 0{,}9847\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\\1\\2\end{bmatrix}$$
$$= 18{,}7947$$

Nilai T_x^2 sampel ke-2 s.d. sampel ke-20 dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil Perhitungan Tahap 1 dan Tahap 2

i	$T_{x,i}^2$	b_i	i	$T_{x,i}^2$	b_i
1	18,7947	0,9084	11	73,5324	0,4593
2	34,6518	0,6690	12	45,4375	0,5843
3	75,8499	0,4522	13	108,2379	0,3785
4	90,4754	0,4140	14	27,9869	0,7444
5	85,9226	0,4249	15	43,8894	0,5945
6	72,0825	0,4639	16	53,3314	0,5393
7	45,0839	0,5865	17	50,0233	0,5568
8	104,7003	0,3849	18	81,6751	0,4358
9	14,6441	1,0291	19	51,6784	0,5478
10	26,4238	0,7661	20	78,8796	0,4434

2. Dihitung nilai b yang memuat nilai pengali Lagrange menggunakan Persamaan (19). Untuk sampel pertama, hasil perhitungan b_1 s.d. b_{20} dapat dilihat pada Tabel 1.
3. Dihitung x_{NICN} optimum, merujuk pada Persamaan (17), untuk pengamatan pertama,

$$\boldsymbol{x}_{NICN,1} = 0{,}9084\begin{bmatrix}4\\3\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3{,}5735\\2{,}6801\\0{,}8934\\1{,}7867\end{bmatrix}$$

4. Dihitung nilai minimum Statistik Hotelling berdasarkan Persamaan (13). Terdapat Nilai T_{min}^2 yang melebih BKA 12,05 yaitu pada pengamatan ke-13 dengan nilai $T_{min}^2 = 15{,}12$ dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai kontribusi masing-masing peubah dan nilai T^2

i	c_{i1}	c_{i2}	c_{i3}	c_{i4}	T^2
1	0,3663	0,2747	0,0916	0,1832	0,0761
2	1,6549	1,3239	0,6619	1,1584	1,9361
3	4,3824	3,8346	1,6434	2,1912	8,4077
4	4,6877	3,5158	2,9298	2,3438	9,3041
5	5,1762	4,0259	1,1503	1,7254	8,2240
6	3,2168	1,6084	2,6807	1,6084	5,5116
7	2,4808	2,0673	1,2404	1,0337	2,3375
8	6,1511	4,9209	1,2302	1,8453	11,3796
9	0,0583	0,0874	0,0437	0,0991	0,0022
10	0,9354	0,9354	0,7016	0,7016	0,6921
11	3,2444	3,2444	3,2444	2,1629	7,2262
12	2,7024	1,8709	0,0000	0,8315	2,2515
13	5,5931	4,9716	3,1073	**3,1073**	**15,1259**
14	1,0223	1,2778	0,2556	0,2556	0,8359
15	1,6221	2,4332	1,2166	2,0277	5,2154
16	2,7643	3,2250	0,9214	1,8429	5,8703
17	1,1079	1,9943	2,6590	1,7727	4,0255
18	2,8211	3,1032	3,9496	1,6927	7,2109
19	3,1651	2,4869	0,4522	1,1304	3,3391
20	4,4526	2,7829	1,6697	1,6697	6,3258

${T_{c=0,05}}^2 = 15{,}02$. Nilai yang dihitamkan merupakan titik yang *out of control.*

Selanjutnya dihitung nilai kontribusi masing-masing peubah menggunakan Persamaan (5) dan digunakan Persamaan (6) untuk menghitung batas standar kontribusi setiap peubah ke-*j* (*j = 1,2, ..., p*. Nilai τ_j diperoleh sebagai berikut

$$\tau_j = [6{,}4917 \quad 5{,}3270 \quad 3{,}9482 \quad 3{,}0819].$$

Dengan menggunakan prinsip NICN dapat diketahui penyebab pengamatan ke-13 berada diluar batas kendali, yaitu pada peubah X_4. Peubah X_4 dapat dijadikan acuan dalam proses perbaikan selanjutnya. Setalah pengamatan *out of control* dihilangkan, banyaknya data adalah sebanyak 19 data dan telah terkendali dalam *mean* proses dengan BKA sebesar 17,57.

IV. Lampiran

Tabel 3. Data oleh De Maesschalck (Sanchez , 2012)

i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1
1	4,00	3,00	1,00	2,00	4,00
2	5,00	4,00	2,00	3,50	5,00
3	8,00	7,00	3,00	4,00	8,00
4	8,00	6,00	5,00	4,00	8,00
5	9,00	7,00	2,00	3,00	9,00
6	6,00	3,00	5,00	3,00	6,00
7	6,00	5,00	3,00	2,50	6,00
8	10,00	8,00	2,00	3,00	10,00
9	2,00	3,00	1,50	3,40	2,00
10	4,00	4,00	3,00	3,00	4,00
11	6,00	6,00	6,00	4,00	6,00
12	6,50	4,50	0,00	2,00	6,50
13	9,00	8,00	5,00	5,00	9,00
14	4,00	5,00	1,00	1,00	4,00
15	4,00	6,00	3,00	5,00	4,00
16	6,00	7,00	2,00	4,00	6,00
17	2,50	4,50	6,00	4,00	2,50
18	5,00	5,50	7,00	3,00	5,00
19	7,00	5,50	1,00	2,50	7,00
20	8,00	5,00	3,00	3,00	8,00

V. Kesimpulan

Berdasarkan Analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dapat diperoleh kesimpulan:

1. Pendekatan untuk memperkirakan kontribusi peubah Statistik Hotelling menggunakan $c_{ij} = |x_{ij,NICN} - x_{ij}|$.
2. Dari hasil perhitungan Statistik Hotelling menggunakan data studi kasus dari literatur sebanyak 20 pengamatan dan empat peubah, peta kendali terkendali secara *mean* proses tanpa penghapusan pengamatan yang *out of control* dengan BKA sebesar 15.02. Perhitungan Statistik Hotelling berdasarkan prinsip NICN terkendali secara *mean* proses setelah satu pengamatan *out of control* dihilangkan dengan BKA sebesar 17.57.
3. Perbandingan yang diperoleh adalah perhitungan menggunakan Statistik Hotelling biasa tidak dapat diketahui peubah yang merupakan penyebab dari pengamatan *out of control*, sedangkan hasil perhitungan Statistik Hotelling menggunakan prinsip NICN dapat diketahui peubah yang merupakan penyebab pengamatan *out of control.* Peubah tersebut dapat dijadikan acuan dalam proses perbaikan selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Aliansyah, M.I. 2013. *Statistika Pengendalian Buku Mutu Dengan Metode T^2 Hotelling Data Subgroup.* Universitas Pendidikan Indonesia.

[2] R.I. Mason, N.D Tracy, J.C. Young. 1997. "A Pratical Approach for Interpreting Multivariate T^2Control Chart Signals". *Journal of Quality Technology*. 29, 396-406.

[3] R.I. Alvarez, A. Brandolin, M.C. Sanchez. 2007. "On The Variable Contributions to The D-statistic". *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*. 88, 189-196.

[4] J.E. Jackson. 1991. "A User's Guide To Principal Components". Jon Willey & Sons, Inc. United States of America.

[5] Sanchez, M. C. 2012. "A New Approach to Estimate Variable Contributions to Hottelling's Statistic". *Jurnal of Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems.* 118, 120-126.

[6] Naidu, D.S. 2003. *Optimal Control Systems.*America: CRC Press LLC

[7] Anonim. 2006. "*Miscallaneous Concepts Of Matrix Algebra*". (https://www.google.co.id/Matrix_Algebra.pdf&ei=hiJuVZuXDJShuQTnuoHQAg&usg=AFQjCNEuHY7jesuCOLUhuydNPXljRaTalA&bvm=bv.94911696,d.c2E /, diakses pada tangal 30 April 2015 pukul 17.51). 2006.

[8] America: Arizona State University.Jonhson, Richard. Dean Wichern. 2002. *Applied Multivariat Statistical Analysis*, *5th ed.*New Jersey : Prentice Hall.