



TUGAS AKHIR -SM141501

PENGENDALIAN OPTIMAL FOTOBIOREAKTOR MELALUI TINGKAT PENGECERAN UNTUK MEMAKSIMALKAN PRODUKSI BIOMASSA

RIYA MAHMUDAH
NRP 1211 100 031

Dosen Pembimbing
Dr. Dra.Mardijah, M.T

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



FINAL PROJECT-SM 141501

***OPTIMAL CONTROL OF A
PHOTOBIOREACTOR THROUGH THE
DILUTION RATE TO MAXIMIZE BIOMASS
PRODUCTION***

RIYA MAHMUDAH
NRP 1211 100 031

Supervisor
Dr. Dra.Mardlijah, M.T

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

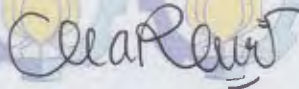
**PENGENDALIAN OPTIMAL FOTOBIOREAKTOR
MELALUI TINGKAT PENGECERAN UNTUK
MEMAKSIMALKAN PRODUKSI BIOMASSA**

***OPTIMAL CONTROL OF A PHOTOBIREACTOR THROUGH
THE DILUTION RATE TO MAXIMIZE BIOMASS
PRODUCTION***

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
RIYA MAHMUDAH
NRP. 1211 100 031


Menyetujui,
Dosen Pembimbing



Dr. Dra. Mardijah, M.T
NIP. 19670114 199102 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITS




Prof. Dr. Eka Apriliani, M.Si.
NIP. 19660914 199102 2 001
Surabaya, Juli 2015

PENGENDALIAN OPTIMAL FOOTBIOREAKTOR MELALUI TINGKAT PENGECERAN UNTUK MEMAKSIMALKAN PRODUKSI BIOMASSA

Nama : Riya Mahmudah
NRP : 1211 100 031
Jurusan : Matematika
DosenPembimbing : Dr. Dra. Mardijah, M.T.

ABSTRAK

Mikroalga merupakan mikroorganisme fotosintetik yang berpotensi sebagai sumber biodiesel dan penyerap emisi CO₂ karena pertumbuhannya yang cepat dan melimpah. Mikroalga dapat dikembangkan di dalam suatu kultivasi berupa fotobioreaktor dan menggunakan cahaya dan CO₂ sebagai pertumbuhannya. Pertumbuhan mikroalga di dalam suatu fotobioreaktor dimodelkan dengan model Monod, yang mana menghubungkan pengaruh pemberian substrat pada produksi biomassa mikroalga. Oleh sebab itu diperlukan analisis kesetimbangan biomassa untuk mendapatkan titik kestabilan sistemnya. Kemudian dilakukan pengendalian optimal pada tingkat pengencerannya dengan menggunakan PMP (*Pontryagin Maximum Principle*) dan didapatkan control berupa Bang-Singular-Bang.

Kata kunci : Model Monod, Analisis Kestabilan, PMP, Pengendalian Optimal, Bang-Singular-Bang.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

**OPTIMAL CONTROL OF A PHOTOBIOREACTOR
THROUGH THE DILUTION RATE TO MAXIMIZE
BIOMASS PRODUCTION**

Name of Student : Riya Mahmudah
NRP : 1211 100 031
Department : Matematika
Supervisor : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

ABSTRACT

Microalgae is a photosynthetic microorganism that has potentially as a source of biodiesel and CO₂ emission absorber because of it's fast growth. Microalgae can be cultivated in a photobioreactor and needs light and CO₂ for it's growth. The microalgae growth in a photobioreactor can be modeled by Monod model, which involve between substrat adding and biomass production. So, it is needed an analysis of equilibrium point to find it's system stability. Then the optimal control is done through the dilution rate by using PMP (Pontryagin Maximum Principle) and obtained Bang-Singular-Bang control.

Keyword : *Monod Model, Stability Analysisist, PMP, Optimal Control, Bang-Singular-Bang.*

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Alhamdulillahirobbil'aalamin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

“PENGENDALIAN OPTIMAL FOTOBIOREAKTOR MELALUI TINGKAT PENGENCERAN UNTUK MEMAKSIMALKAN PRODUKSI BIOMASSA”

yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama, bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Drs. Soetrisno, M.Ikom selaku Dosen Wali yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
3. Dr. Dra.Mardlijah, M.T selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan motivasi kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

4. Dr. Hariyanto, M.Si., Dra. Wahyu Fistia Doctorina, M.Si., Drs. Suharmadi S., M.Phil. dan Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran demi perbaikan Tugas Akhir.
5. Dr. Chairul Imron, M.IKom selaku Koordinator Tugas Akhir.
6. Seluruh jajaran dosen dan staf jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Juni 2015

Penulis

special thanks to

Selama proses mengerjakan Tugas Akhir ini, banyak pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan untuk penulis. Penulis sungguh ingin mengucapkan terima kasih dan apresiasi secara khusus kepada:

- Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
- *Alhamdulillah jazaakumullahu khoiro* Ibu Rubayah, Mas Jaya, Mas Hadi, Mbak Luluk dan keponakan-keponakan Galva, Kemal, Hasan, Fina, Sifa dan Prima yang senantiasa dengan ikhlas memberikan kasih sayang, semangat, doa dan nasihat-nasihat yang sungguh berarti bagi penulis.
- *Alhamdulillah jazaakumullahu khoiro* Pak Edi, Pak Ian, Pak Siroj, Pak Imam, Pak Sumarno, Mbak Ari, Mas Azi, Mbak Tira sebagai guru Pondok Pesantren Mahasiswa Khoirul Huda (PPM KH) yang selalu mengajarkan ilmu agama, menyayangi dan menasihati penulis.
- Irna, Mbak Ana, Cilipi teman seperjuangan Tugas Akhir dan semua teman santri-santriwati Pondok Pesantren Mahasiswa Khoirul Huda (PPM KH) yang selalu mendukung dan memberikan semangat bagi penulis. *Alhamdulillah jazaakumullahu khoiro*. Irna semangat ya, semoga lancar barokah karantinanya☺. Aamiin.
- Teman-teman angkatan 2011, terima kasih atas semangat, bantuan serta doanya. Tak ada arti selama 4 tahun kuliah ini tanpa canda tawa kalian. Semoga pertemanan kita awet ya. Sukses semuanya ☺

Tentu saja masih banyak pihak lain yang turut andil dalam penyelesaian Tugas Akhir ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas dengan balasan yang lebih baik bagi semua pihak yang telah membantu penulis dan semoga senantiasa diberikan kelancaran dan kebarokahan. *Amin ya rabbal 'alamin*.

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
DAFTAR TABEL	xxi
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir	3
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Fotobioreaktor	5
2.2 Respirasi	5
2.3 Redaman Cahaya pada Fotobioreaktor	6
2.4 Kestabilan Titik Tetap	6
2.5 Stabil Asimtotik Tetap	7
2.6 Masalah <i>Optimal Control</i>	7
2.7 Prinsip Maksimum Pontryagin	9
2.8 <i>Bang-bang</i> dan <i>Singular Control</i>	15
BAB III. METODE PENELITIAN	
3.1 Langkah Pengerjaan.....	17
3.2 Diagram Alur Penelitian	18

BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN	
4.1 Model Monod	19
4.2 Titik Kesetimbangan	25
4.3 Kestabilan Lokal	27
4.4 Penyelesaian dengan Kendali Optimal	29
4.5 Simulasi.....	35
4.5.1 Analisis Hasil Simulasi	36
 BAB V. PENUTUP	
5.1 Kesimpulan	39
5.2 Saran.....	40
 DAFTAR PUSTAKA	41
LAMPIRAN	43
BIODATA PENULIS	47

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1	Input Parameter 35

DAFTAR SIMBOL

S	=	substrat (konsentrasi nitrat)
S_{in}	=	konsentrasi substrat yang masuk
X	=	biomassa
D	=	tingkat pengenceran
I	=	intensitas cahaya
Q	=	aliran sel
V	=	volume reaktor
$\mu(S, I)$	=	tingkat pertumbuhan biomassa mikroalga yang bergantung S dan I
K_I, K_S	=	konstanta setengah saturasi
k	=	konstanta pertumbuhan
$\bar{\mu}$	=	pertumbuhan maksimal
r	=	respirasi
$h(x)$	=	fungsi pertumbuhan
T	=	waktu

“ Halaman sengaja dikosongkan ”

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Skema Kontrol	7
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian	18
Gambar 4.1 Diagram Model Monod.....	20
Gambar 4.2 Sistem Fotobioreaktor	20
Gambar 4.3 Variabel x , Kontrol dan ux	36
Gambar 4.4 Variabel x , Kontrol dan ux dengan u konstan	37

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini, dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam laporan Tugas Akhir ini, yaitu tentang bagaimana memaksimalkan produksi biomassa mikroalga dalam fotobioreaktor dengan model Monod melalui pengontrolan tingkat pengenceran, kemudian dijabarkan juga batasan dari permasalahan untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta menjelaskan manfaat apa yang bisa diambil dari penyusunan laporan Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Mikroalga adalah mikroorganisme fotosintetik yang telah dikenal sebagai penyerap CO₂ dan sumber energi biodiesel seiring dengan isu pemanasan global dan menipisnya persediaan bahan bakar fosil [1, 2]. Biodiesel merupakan bahan bakar alternatif yang dapat diperoleh dari minyak tumbuhan, lemak binatang, minyak kelapa, minyak jelantah, dan minyak jarak melalui proses transesterifikasi[1]. Polusi yang ditimbulkan biodiesel lebih rendah dibandingkan bahan bakar berbasis fosil. Namun, bahan bakar biodiesel lebih mahal dibandingkan bahan bakar yang berbasis fosil, karena harga bahan baku yang mahal. Oleh sebab itu diperlukan usaha untuk mencari bahan baku alternatif sehingga dihasilkan biodiesel yang murah. Salah satunya adalah mikroalga. Dibandingkan dengan tanaman biasa, tingkat fotosintetik mikroalga lebih tinggi serta berpotensi menghasilkan produksi biomassa yang tinggi yaitu puluhan ton/ha setiap tahunnya[2]. Di samping itu, mikroalga juga dapat dimanfaatkan sebagai peluruh logam berat yang ada pada limbah industri yang menimbulkan gangguan keseimbangan ekosistem yang tercemari[1,2].

Kultivasi mikroalga dapat dilakukan dalam kolam terbuka dan fotobioreaktor. Dalam masalah ini proses kultur mikroalga difokuskan pada sistem fotobioreaktor yaitu sebuah sistem kultur

mikroalga yang mempunyai berbagai macam bentuk dan dirancang tembus cahaya. Fotobioreaktor menggunakan cahaya dalam proses kultur mikroalga, maka untuk mendapatkan produksi mikroalga yang maksimal diperlukan perhitungan prinsip kontrol yang diterapkan pada fotobioreaktor. Kultivasi dalam fotobioreaktor dipengaruhi oleh konsentrasi pigmen terutama klorofil yang berpengaruh pada distribusi cahaya dan aktivitas biologis dengan reaktor. Akibatnya, dengan kepadatan klorofil yang terlalu tinggi dalam fotobioreaktor akan menghambat cahaya yang masuk ke dalamnya dan pertumbuhan per kapita mikroalga pun menjadi rendah. Pengendalian optimal terhadap fotobioreaktor sudah dipelajari sebelumnya yaitu tentang produksi metabolisme, fermentasi etanol, produksi ragi, algoritma kontrol MPC (*Microalgae Process Culture*) untuk optimasi produktivitas[3] juga sudah dipelajari. Terkait dengan produksi mikroalga, proses kultur mikroalga dalam suatu sistem, baik sistem kolam maupun tertutup diawali dengan pembibitan mikroalga dengan air payau dengan salinitas akuades tertentu sesuai dengan keadaan lingkungan dan pemberian nutrisi. Kemudian pemanenan mikroalga dilakukan pada saat pertumbuhan terjadi[2]. Namun, pemanenan yang dilakukan selama ini masih dirasa kurang maksimal dalam kuantitas produksi biomasnya[2].

Berdasarkan permasalahan tersebut, disini dibahas model pertumbuhan mikrolaga dalam fotobioreaktor dengan model Monod yang menyatakan bahwa pertumbuhan mikroalga dalam fotobioreaktor dapat dipengaruhi oleh pemberian substrat[3]. Dalam upaya pemaksimalan produksi biomassa dengan model tersebut dapat dilakukan dengan mengontrol tingkat pengencerannya. Jadi di dalam Tugas Akhir ini dibahas tentang pengendalian optimal fotobioreaktor untuk memaksimalkan produksi biomassa mikroalga melalui tingkat pengencerannya.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan dalam Tugas Akhir ini adalah bagaimana pengendalian tingkat pengenceran untuk memaksimalkan produksi biomassa dalam fotobioreaktor?

1.3 Batasan Masalah

Batasan dalam permasalahan di atas adalah:

1. Pertumbuhan mikroalga dalam fotobioreaktor dengan model Monod.
2. Pertumbuhan selalu ada.
3. Volume reaktor konstan.

1.4 Tujuan

Tujuan usulan Tugas Akhir ini adalah pengendalian tingkat pengenceran untuk memaksimalkan produksi biomassa di dalam fotobioreaktor.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penulisan Tugas Akhir ini adalah :

1. Mempelajari perkembangbiakan mikroalga dalam fotobioreaktor dengan cahaya matahari.
2. Mendapatkan kendali optimal fotobioreaktor melalui tingkat pengenceran yang mempengaruhi produksi biomassa.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir ini yang meliputi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang materi-materi yang mendukung Tugas Akhir ini, antara lain model Monod fotobioreaktor dan hal-hal yang mempengaruhi produksi biomassa, masalah kendali optimal dan *Pontryagin Maximum Principle*.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dibahas tentang langkah – langkah dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang analisis model perkembangan mikroalga dalam fotobioreaktor cahaya matahari dan hal-hal yang mempengaruhinya, sehingga didapatkan generalisasi modelnya. Kemudian dicari pengendalian optimalnya yaitu pengendalian terhadap pengenceran dengan tujuan mendapatkan produksi biomassa mikroalga yang maksimal dengan *Pontryagin Maximum Principle* dan hasilnya akan disimulasikan dengan *toolbox* MATLAB.

BAB V KESIMPULAN

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan selanjutnya.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan dijelaskan mengenai tinjauan model perkembangan mikroalga dalam fotobioreaktor dan lingkungan yang mempengaruhinya, fungsi tujuan atau *performance index* dan *optimal control* yang diselesaikan dengan Prinsip Maksimum Pontryagin.

2.1 Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Fotobioreaktor

Pertumbuhan mikroalga dalam suatu bioreaktor dimodelkan dalam model Monod[1], yaitu:

$$\begin{cases} \dot{S} = D(S_{in} - S) - k\mu(S, I)X, \\ \dot{X} = \mu(S, I) - DX \end{cases} \quad (2.1)$$
$$D = \frac{Q}{V}$$

$\mu(S, I)$ dibentuk dalam Michaelis-Menten[1, 2] menjadi:

$$\mu(S, I) = \frac{\bar{\mu}S}{S + K_S} \frac{I}{I + K_I} \quad (2.2)$$
$$\frac{\bar{\mu}S}{S + K_S} = \mu_s(S)$$

K_S dan K_I adalah konstanta setengah saturasi. $\mu_s(0) = 0$ naik dan terbatas dengan $\lim_{S \rightarrow \infty} \mu_s(S) = \bar{\mu}$ [1, 2].

2.2 Respirasi

Respirasi mempengaruhi pertumbuhan dan perkembangan mikroalga dalam fotobioreaktor baik dalam keadaan terang maupun gelap. Respirasi cenderung mengurangi biomassa, dari sudut pandang karbon, respirasi mengkonversi biomassa menjadi karbondioksida[2]. Sehingga hilangnya biomassa tersebut diwakili dengan $-rX$.

2.3 Redaman Cahaya pada Fotobioreaktor

Perkembangan mikroalga dipengaruhi oleh intensitas cahaya yang masuk dalam fotobioreaktor. Intensitas cahaya matahari yang masuk dalam fotobioreaktor tidak sama di setiap permukaannya. Hal ini dapat direpresentasikan ke dalam redaman cahaya Beer-Lambert yaitu redaman cahaya dalam kedalaman z dari total biomassa Xz per satuan permukaan $[0, z]$:

$$I(Xz) = I_0 e^{-aXz} \quad (2.3)$$

Dalam kasus mikroalga, penyebab utama efek bayangan adalah klorofil, dalam model (2.1) direpresentasikan dengan kadar biomasa yang ditentukan [3], yang menghasilkan ketergantungan langsung terhadap di dalam model (2.3). Dengan hipotesis terhadap intensitas cahaya yang mencapai kedalaman z , tingkat pertumbuhan bervariasi di setiap bagian ketinggian reaktor. Intensitas cahaya yang lebih tinggi menyebabkan pertumbuhan yang lebih tinggi daripada di bagian bawahnya. Sehingga pelemahan cahaya berpengaruh terhadap laju pertumbuhan [4], tingkat pertumbuhan dalam bentuk (2.2) dengan diberikan kedalaman z kemudian dapat ditulis sebagai:

$$\mu_z(S, I(Xz)) = \frac{I(Xz)}{I(Xz) + K_I} \mu_s(S) \quad (2.4)$$

2.4 Kestabilan Titik Tetap

Pandang persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

Sebuah titik (\bar{x}_0, \bar{y}_0) merupakan titik kesetimbangan dari persamaan diferensial jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan.

$$x(t) \equiv \bar{x}_0, \text{ dan } y(t) \equiv \bar{y}_0$$

adalah penyelesaian kesetimbangan untuk semua t .

2.5 Stabil Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotis lokal pada titik keseimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.

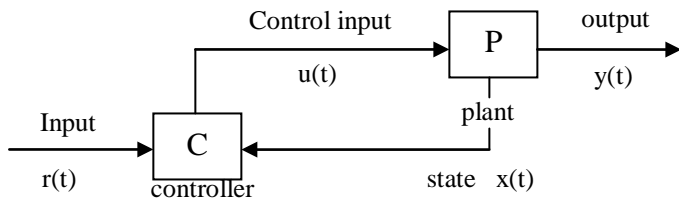
Titik setimbang (\vec{x}_0, \vec{y}_0) stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari[5]

$$\text{Matriks } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

2.6 Masalah *Optimal Control*

Pada prinsipnya, tujuan dari *optimal control* adalah menentukan signal yang akan diproses dalam plant dan memenuhi konstrain fisik. Kemudian, pada waktu yang sama dapat ditentukan ekstrim (maksimum/minimum) yang sesuai dengan kreteria *performance index*.



Gambar 2.1 Skema Kontrol

Pada **Gambar 2.1** di atas dideskripsikan bagaimana mendapatkan kendali optimal $u^*(t)$ yang akan mendorong mengatur sistem P dari keadaan awal sampai keadaan akhir dengan beberapa kendala. Kendali dengan keadaan dan waktu

yang sama dapat ditentukan nilai optimum berdasarkan fungsi tujuan (*Performance Index*) yang diberikan.

Formulasi pada masalah kendali optimal adalah sebagai berikut [6]:

1. Mendiskripsikan secara matematik artinya diperoleh metode/model matematika dari proses terjadinya pengendalian (secara umum dalam bentuk variabel keadaan).
2. Spesifikasi fungsi tujuan (*Performance Index*).
3. Menentukan kondisi batas dan konstrain fisik pada keadaan (*state*) dan atau kontrol.

Pada umumnya, masalah kendali optimal dalam bentuk ungkapan matematik dapat diformulasikan sebagai berikut, dengan tujuan mencari kendali $u(t)$ yang mengoptimalkan fungsi tujuan.

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.5)$$

dengan sistem yang dinyatakan oleh

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (2.6)$$

dan kondisi batas

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.7)$$

$$S(x(t_f), t_f) = 0 \quad (2.8)$$

Fungsi tujuan merupakan ukuran kuantitas dari suatu sistem.

Kendali $u^*(t)$ merupakan kendali optimal, jika disubstitusikan ke dalam sistem dinamik (2.6) akan diperoleh state yang optimal $x^*(t)$ dan pada saat yang sama juga mengoptimalkan fungsi tujuan (2.5) yang kemudian dinotasikan dengan $J(u^*)$ atau J^* . State optimal $x^*(t)$ dibatasi oleh kondisi batas, yaitu kondisi awal dan kondisi akhir (2.7) dan (2.8).

Fungsi tujuan J pada persamaan di atas dinyatakan dalam bentuk Bolza. Jika $S = 0$, maka disebut bentuk Lagrange

sedangkan jika $V = 0$ maka dinamakan bentuk Meyer. Fungsi tujuan tersebut merupakan indikator dari kumpulan deviasi suatu sistem dari keadaan ideal atau keadaan yang diinginkan [7].

2.7 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip Maksimum digunakan untuk memperoleh penyelesaian kendali optimal yang sesuai dengan tujuan, yaitu memaksimalkan fungsi tujuan dimana kendali $\mathbf{u}(t)$ terbatas pada $(\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U})$. Hal ini telah dikembangkan oleh L. S. Pontryagin dan rekan kerjanya pada tahun 1950 yang diaplikasikan untuk semua masalah kalkulus variasi. Oleh karena itu, prinsip ini biasa disebut dengan Prinsip Maksimum Pontryagin.

Prinsip ini menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan dimaksimalkan sepanjang \mathcal{U} yang merupakan himpunan kendali yang mungkin[8]. Hasilnya juga dapat dinamakan Prinsip Minimum Pontryagin karena mempunyai pengertian yang sama antara meminimalkan dan memaksimalkan dengan mengalikan (-1) pada fungsi tujuan.

Berikut ini, akan dibahas contoh permasalahan yang menjadi ide dasar untuk membantu mendapatkan penyelesaian kendali optimal pada suatu model. Diberikan permasalahan dengan suatu kontrol yang terbatas sebagai berikut.

Memaksimalkan (2.5) dengan kendala (2.6) dan (2.7), $a < u(t) < b$. Untuk $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ dapat ditulis $f(x(t), u(t), t) - \dot{x} = 0$ sedemikian hingga dengan menggabungkan persamaan (2.5) dan (2.6) dengan pengali Lagrange λ dapat diperoleh:

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt + \lambda^T(t)(f(x(t), u(t), t) - \dot{x}) \quad (2.9)$$

Dengan

$$- \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) \dot{x} dt = -\lambda^T(t) x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} x(t) \dot{\lambda}^T(t) dt \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
&= -\lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} x(t)\dot{\lambda}^T(t)dt
\end{aligned}$$

Didefinisikan persamaan Hamiltonian (H) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
H(x(t), u(t), \lambda, t) \\
&= V(x(t), u(t), t) \\
&\quad + \lambda^T(t)f(x(t), u(t), t)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Dengan substitusi persamaan (2.10) dan (2.11) pada persamaan (2.9) akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
J &= S(x(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} (H(x(t), u(t), \lambda, t) + \lambda^T(t)\dot{x}) dt
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Untuk J, x, u bernilai maksimum dapat ditulis J^*, x^*, u^* seperti berikut

$$\begin{aligned}
J^* &= S(x^*(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)x^*(t_f) + \lambda^T(t_0)x^*(t_0) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} (H(x^*(t), u^*(t), \lambda, t) + \lambda^T(t)\dot{x}^*) dt
\end{aligned} \tag{2.13}$$

maka, dengan mengurangkan kedua persamaan diatas akan diperoleh

$$\begin{aligned}
J - J^* &= S(x(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} (H(x(t), u(t), \lambda, t) + \lambda^T(t)\dot{x}) dt - S(x^*(t_f), t_f) \\
&\quad + \lambda^T(t_f)x^*(t_f) - \lambda^T(t_0)x^*(t_0)
\end{aligned}$$

$$- \int_{t_0}^{t_f} (H(x^*(t), u^*(t), \lambda, t) + \lambda^T(t) \dot{x}^*) dt$$

$$\begin{aligned} J - J^* &= S(x(t_f), t_f) - S(x^*(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)[x(t_f) - x^*(t_f)] \\ &\quad + \lambda^T(t_0)[x(t_0) - x^*(t_0)] + \int_{t_0}^{t_f} (V(x(t), u(t), t) \\ &\quad - V(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^T[f(x(t), u(t), t) \\ &\quad - f(x^*(t), u^*(t), t)] + \dot{\lambda}^T(t)(x - x^*)) dt \end{aligned}$$

Kemudian, dilakukan ekspansi deret Taylor terhadap persamaan di atas maka menjadi

$$\begin{aligned} J - J^* &= \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^T \right) (x - x^*) \right]_{t=t_f} + [\lambda^T (x - x^*)]_{t=t_0} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) (x - x^*) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial V}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} \right) (u - u^*) \right) dt \end{aligned}$$

Dengan mengasumsikan bahwa

$\delta J = J - J^*$, $\delta x = x - x^*$, $\delta u = u - u^*$, sehingga dapat ditulis kembali

$$\begin{aligned}
\delta J = & \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^T \right) (\delta x) \right]_{t=t_f} + [\lambda^T \delta x]_{t=t_0} \\
& + \int_{t_0}^{t_f} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial V}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u \right) dt
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Dengan memilih $\dot{\lambda}$ yang memenuhi

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.15}$$

Dengan syarat batas :

$$\lambda^T(t_f) = \frac{\partial S}{\partial x(t_f)} \tag{2.16}$$

Karena $x(t)$ mempunyai nilai awal $x(t_0) = x^*(t_0) = x_0$ sehingga $\delta x(t_0) = 0$, persamaan (2.14) dapat direduksi menjadi :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta u dt$$

Sedemikian hingga untuk x, u, λ merupakan solusi yang optimal maka

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta u dt \leq 0 \tag{2.17}$$

Untuk itu, dibutuhkan suatu kemungkinan untuk memodifikasi δu yang memenuhi Persamaan (2.17). Jika kendali

optimal adalah pada batas bawah a untuk t maka modifikasi kontrol $a - \delta u$ jadi dibutuhkan $\delta u > 0$. Dengan cara yang sama, jika kendali optimal adalah pada batas atas maka bentuk modifikasi kontrol $b - \delta u$, jadi dibutuhkan $\delta u < 0$.

Sehingga,

$$\begin{array}{ll} \delta u > 0 & \text{jika } u(t) = a \\ \delta u < 0 & \text{jika } u(t) = b \\ \delta u = \text{tidak dibatasi} & \text{jika } a < u(t) < b \end{array}$$

Supaya Persamaan (2.15) konsisten untuk semua δu , karena itu dipilih

$$\begin{array}{ll} u(t) = a & \text{jika dan hanya jika } V_u + \lambda^T f_u \geq 0 \\ a < u(t) < b & \text{jika dan hanya jika } V_u + \lambda^T f_u = 0 \\ u(t) = b & \text{jika dan hanya jika } V_u + \lambda^T f_u \leq 0 \end{array} \quad (2.18)$$

Berarti, jika x^*, u^* penyelesaian Persamaan (2.9) – (2.11) maka harus terdapat fungsi λ sedemikian hingga x^*, u^*, λ memenuhi Persamaan (2.10), (2.11), (2.16), dan (2.18).

Syarat-syarat kondisi tersebut dapat digeneralisasi atau diperluas dengan persamaan Hamiltonian (2.11) dan supaya optimal maka harus memenuhi persamaan

$$\frac{\partial H}{\partial u} > 0 \text{ jika } u = a$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \text{ jika } a < u(t) < b$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} < 0 \text{ jika } u = b$$

dengan Persamaan keadaan (State dan Co-State)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

dengan

$$x(t_0) = x_0 \text{ dan } \lambda(t_f) = 0$$

Untuk kondisi pada persamaan Hamiltonian tersebut digeneralisasi dengan memaksimalkan persamaan (2.9) yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{Maks } H_k = H(u, x, \lambda, t) + \eta k \quad (2.19)$$

$$\text{Kendala } a < u(t) < b \quad (2.20)$$

Supaya (2.20) optimal maka harus memenuhi persamaan

1. Kondisi stasioner

$$\frac{\partial H_k}{\partial u} = V_u(x, u, t) + \lambda^T f_u(x, u, t) - w_1 + w_2 \quad (2.21)$$

2. Persamaan keadaan

$$\dot{x} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H_k}{\partial x}$$

dengan

$$x(t_0) = x_0 \text{ dan } \lambda(t_f) = 0$$

Dari Persamaan (2.21) dapat diperoleh bentuk kendali optimal (u^*).

2.8 Bang – bang dan Singular control

Kesulitan dalam menerapkan prinsip Pontryagin dapat diatasi dengan menggunakan *singular control* dan *bang – bang control*. Hal ini muncul ketika persamaan Hamiltonian bergantung secara linear dengan kontrol u , dapat dinyatakan dalam bentuk [9]

$$H(u) = \phi(x, \lambda, t)u + \dots$$

Jika kontrol mempunyai batas atas dan batas bawah $u_{min} \leq u \leq u_{max}$, maka untuk memaksimalkan $H(u)$, diperlukan untuk membuat u sebesar atau sekecil mungkin, bergantung pada tanda $\phi(x, \lambda, t)$ yang didefinisikan sebagai fungsi *switching*, yang dapat ditulis :

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{jika } \phi(x, \lambda, t) > 0 \\ u_{sing} & \text{jika } \phi(x, \lambda, t) = 0 \\ u_{min} & \text{jika } \phi(x, \lambda, t) < 0 \end{cases}$$

Fungsi *switching* ϕ dapat bernilai positif dan negative serta nol. Sehingga penyelesaian ini disebut dengan *Bang – bang Control*. Perubahan kontrol dari u_{max} ke u_{min} terjadi ketika ϕ berubah dari nilai negatif ke positif. Dalam kasus ini, ϕ bernilai nol pada interval waktu terbatas $t_1 < t < t_2$ yang disebut sebagai *singular control*. Pada interval tersebut, kontrol u dapat dicari dari hasil derivatif berulang $\frac{\partial H}{\partial u}$ yang bergantung terhadap waktu, sampai kontrol u tampak secara eksplisit.

Kontrol akan menghasilkan busur singular yang optimal jika :

1. Persamaan Hamiltonian (H) $\equiv 0$

2. Kondisi Kelley yang dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{2k} H_u \right] \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.22)$$

Kondisi ini disebut juga kondisi *Generalisasi Legendre-Clebs*. Dengan kata lain, *Generalisasi Legendre-Clebs* akan menjamin bahwa di sepanjang busur, persamaan Hamiltonian akan optimal.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan untuk memecahkan permasalahan dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

3.1 Langkah Pengerjaan

1. Studi Pendahuluan

Studi pendahuluan mengenai model pertumbuhan mikroalga dalam suatu fotobioreaktor, mempelajari model pengaruh lingkungan yang mempengaruhi produksi biomassa yang berkaitan dengan *optimal control* dan studi tentang metode *Pontryagin Maximum Principle*. Konsep – konsep ini didapat baik dari buku-buku literatur, paper, jurnal, maupun beberapa artikel dari internet.

2. Penyelesaian dengan Kendali Optimal

Kendali optimal diselesaikan menggunakan *Pontryagin Maximum principle* yang dikombinasi dengan *bang-bang control*. Langkah-langkah penyelesaian kendali optimal dapat diuraikan sebagai berikut :

- a. Mendapatkan generalisasi model Monod pertumbuhan mikroalga dalam fotobioreaktor yang dipengaruhi lingkungan yang berakibat pada produksi biomassa mikroalga.
- b. Membentuk persamaan Hamiltonian
- c. Menentukan persamaan co-state dengan menggunakan kondisi perlu *Pontryagin Maximum Principle*
- d. Menentukan bentuk *optimal control* u^*

3. Simulasi

Kendali Optimal diselesaikan dengan menggunakan *toolbox* pada MATLAB dengan langsung mendefinisikan parameter-parameter terlebih dahulu beserta syarat-syarat yang harus dipenuhi dalam *toolbox* tersebut berdasarkan penelitian yang telah dilakukan.

4. Analisis Hasil Simulasi

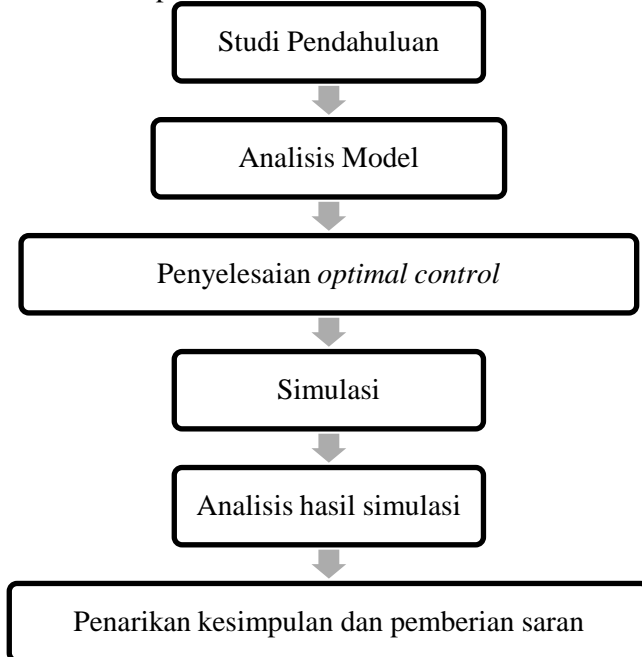
Pada tahap ini, penulis melakukan analisis terhadap hasil yang telah diperoleh dari simulasi.

5. Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

Pada tahap ini, dilakukan penarikan kesimpulan mengenai pengendalian produksi biomassa mikroalga dalam fotobioreaktor melalui tingkat pengencerannya.

3.2 Diagram Alur Penelitian

Alur penelitian yang dilakukan dalam Tugas Akhir ini diperlihatkan pada Gambar 3.1 berikut :



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

BAB IV

ANALISIS MODEL DAN PEMBAHASAN

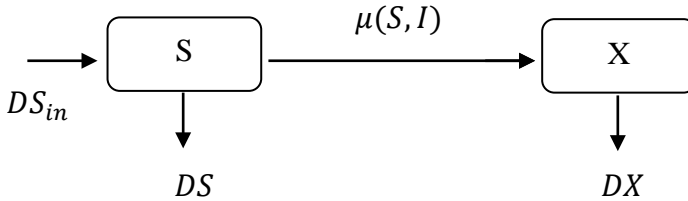
Pada bagian ini akan ditentukan kestabilan model dan penyelesaian kendali optimal menggunakan *Pontryagin Maximum Principle*. Langkah awal yang dilakukan adalah menentukan titik setimbang dari model pemanenan mikroalga, selanjutnya menentukan kestabilan dari setiap titik setimbang tersebut. Pada sub bab berikutnya akan dicari kesetimbangan model dan penyelesaian kendali optimal dari sistem dengan menggunakan *Pontryagin Maximum Principle*, kemudian hasilnya hasil analisisnya disimulasikan.

4.1 Model Monod

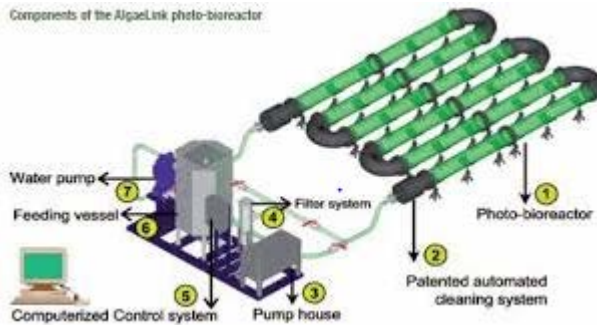
Dalam penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Jacques Monod terhadap pertumbuhan mikroalga dalam suatu fotobioreaktor sehingga didapatkan model yang bertujuan agar memudahkan dalam perhitungan dan model tersebut biasa disebut Model Monod. Dalam model Monod terdapat berbagai asumsi-asumsi sebagai berikut :

1. Jumlah konsentrasi anorganik yaitu nitrat yang masuk ke fotobioreaktor (S_{in}).
2. Jumlah nitrat yang keluar(S).
3. Terjadi pertumbuhan mikroalga yang dipengaruhi oleh cahaya, CO_2 dan substrat.
4. Menghasilkan biomassa di dalam fotobioreaktor dengan laju pengenceran (D) biomassa dapat dipanen secara kontinu dimana pengenceran adalah aliran sel mikroalga yang mengalir dalam fotobioreaktor sehingga paparan cahaya efektif mengenai mikroalga dalam memproduksi biomassa, laju pertumbuhan maksimum ($\bar{\mu}$), konstanta pertumbuhan (K_s), konstanta intensitas(K_I) dan intensitas cahaya (I).

Dari asumsi-asumsi diatas didapat model Monod sebagai berikut :



Gambar 4.1 Diagram Model Monod



Gambar 4.2 Sistem Fotobioreaktor

Dari gambar 4.1 dan 4.2 dapat dijelaskan bahwa nutrisi yang masuk ke dalam fotobioreaktor yaitu S_{in} dengan tingkat pengencerannya dan pertumbuhan mikroalga akan dilepaskan menuju ke tempat penyimpanan biomassa (X) dan sisa nitrat S akan dikeluarkan. Setelah pertumbuhan mikroalga masuk ke dalam tempat penyimpanan biomassa (X), di dalam X akan menghasilkan biomassa dan nantinya mengeluarkan biomassa yang tidak terpakai.

Sehingga model Monod dapat dituliskan sebagai berikut seperti pada persamaan (2.1) :

$$\begin{cases} \dot{S} = D(S_{in} - S) - k\mu(S, I)X, \\ \dot{X} = \mu(S, I) - DX \end{cases}$$

dengan $D = \frac{Q}{V}$

Pertumbuhan mikroalga dalam fotobioreaktor dipengaruhi oleh intensitas cahaya yang mengenai mikroalga di dalamnya. Selain perbedaan intensitas cahaya yang mengenai mikroalga pada setiap permukaan $[0, z]$, dari sudut pandang karbon respirasi juga mempengaruhi produksi biomassa karena hal tersebut mengurangi biomassa yaitu dengan adanya konversi biomassa menjadi karbondioksida. Dari persamaan (2.2), (2.3) dan (2.4) dan dengan mempertimbangkan kedalaman reaktor L didapatkan pertumbuhan di setiap permukaannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mu(S, I(Xz)) &= \mu_s(S) \frac{I(Xz)}{I(Xz) + K_I} \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \mu(S, I(Xz)) dz \end{aligned}$$

dengan persamaan (2.2), maka didapatkan:

$$\begin{aligned} \mu(S, I(Xz)) &= \frac{1}{L} \int_0^L \mu_s(S) \frac{I(Xz)}{I(Xz) + K_I} dz \\ &= \frac{\mu_s(S)}{L} \int_0^L \mu(S, I(Xz)) dz \end{aligned}$$

Kemudian dengan intensitas cahaya yang masuk I_0 , diperoleh

$$\begin{aligned}\mu(S, I_0(Xz)) &= \frac{\mu_s(S)}{L} \int_0^L \mu(S, I_0(Xz)) dz \\ &= \frac{\mu_s(S)}{L} \int_0^L \frac{I_0 e^{-axz}}{I_0 e^{-axz} + K_I} dz\end{aligned}$$

Untuk memudahkan perhitungan, maka dilakukan substitusi:

$$\begin{aligned}u &= I_0 e^{-axz} + K_I \\ du &= -ax I_0 e^{-axz} dz\end{aligned}$$

$z = 0$, maka $u = I_0 + K_I$

$z = L$, maka $u = I_0 e^{-axL} + K_I$

$$\begin{aligned}\mu(S, I_0(Xz)) &= \frac{\mu_s(S)}{L} \int_0^L \mu(S, I_0(Xz)) dz \\ &= \frac{\mu_s(S)}{L} \int_0^L \frac{I_0 e^{-axz}}{u} \frac{du}{-ax I_0 e^{-axz}} \\ &= \frac{\mu_s(S)}{-axL} \int_0^L \frac{du}{u} \\ &= \frac{\mu_s(S)}{-axL} \ln u \Big|_0^L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(S, I_0(Xz)) &= \frac{\mu_s(S)}{-aXL} \left[\ln(I_0 e^{-aXL} + K_I) \right. \\
&\quad \left. - \ln(I_0 + K_I) \right] \\
&= \frac{\mu_s(S)}{-aXL} \ln \left(\frac{I_0 e^{-aXL} + K_I}{I_0 + K_I} \right) \\
&= \frac{\mu_s(S)}{aXL} \ln \left(\frac{I_0 + K_I}{I_0 e^{-aXL} + K_I} \right)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Dengan $\lim_{S \rightarrow \infty} \mu_s(S) = \bar{\mu}$. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Monod, dengan pemberian substrat yang tinggi maka pertumbuhan yang maksimal bisa dicapai [3]. Sehingga persamaan (4.1) maka model (2.1) menjadi:

$$\begin{cases} \dot{S} = D(S_{in} - S) - k \frac{\bar{\mu}}{aL} \ln \left(\frac{I_0 + K_I}{I_0 e^{-aXL} + K_I} \right) \\ \dot{X} = \frac{\bar{\mu}}{aL} \ln \left(\frac{I_0 + K_I}{I_0 e^{-aXL} + K_I} \right) - DX - rX \end{cases} \tag{4.2}$$

Selanjutnya dihitung kepadatan permukaan substrat dan biomassa, dengan memperhatikan kedalaman permukaan L yaitu $s = SL$, $x = XL$ [3]. Maka model (4.2) menjadi:

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= \frac{d(SL)}{dt} \\
&= L \frac{dS}{dt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= L \left[D(S_{in} - S) - k \frac{\bar{\mu}}{aL} \ln \left(\frac{I_0 + K_I}{I_0 e^{-aXL} + K_I} \right) \right] \\
&= D(s_{in} - s) - k \frac{\bar{\mu}}{a} \ln \left(\frac{I_0 + K_I}{I_0 e^{-ax} + K_I} \right) \\
\dot{x} &= \frac{d(XL)}{dt} \\
&= L \frac{dX}{dt} \\
&= L \left[\frac{\bar{\mu}}{aL} \ln \left(\frac{I_0 + K_I}{I_0 e^{-aXL} + K_I} \right) - DX - rX \right] \\
&= \frac{\bar{\mu}}{a} \ln \left(\frac{I_0 + K_I}{I_0 e^{-ax} + K_I} \right) - Dx - rx
\end{aligned}$$

Didapatkan generalisasi model

$$\begin{cases} \dot{s} = D(s_{in} - s) - k \frac{\bar{\mu}}{a} \ln \left(\frac{I_0 + K_I}{I_0 e^{-ax} + K_I} \right) \\ \dot{x} = \frac{\bar{\mu}}{a} \ln \left(\frac{I_0 + K_I}{I_0 e^{-ax} + K_I} \right) - Dx - rx \end{cases} \quad (4.3)$$

Kemudian model (4.3) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{cases} \dot{s} = D(s_{in} - s) - kh(x) \\ \dot{x} = h(x) - Dx - rx \end{cases} \quad (4.4)$$

dengan fungsi pertumbuhan :

$$h(x) = \frac{\bar{\mu}}{a} \ln \left(\frac{I_0 + K_I}{I_0 e^{-ax} + K_I} \right) \quad (4.5)$$

dan fungsi pertumbuhan $h(x)$ pada (4.5) dapat dibentuk dengan bentuk yang lebih sederhana yaitu [3] :

$$h(x) = \frac{\bar{\mu}x}{k + x} \quad (4.6)$$

4.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan menyamadengankan nol *state-state* yang ada yaitu $\dot{s} = 0$ dan $\dot{x} = 0$.

Dalam permasalahan ini diharapkan suatu kondisi adanya produksi biomassa dari sistem yang ada atau dengan kata lain biomassa tidak nol. Kondisi ini bisa dicari titik kesetimbangan biomassa dari persamaan (4.4)

Sebelum menentukan titik kesetimbangan model, yang dilakukan adalah membentuk persamaan (4.4) dan dengan persamaan (4.6).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \frac{\bar{\mu}x}{k + x} - Dx - rx &= 0 \\ x \left(\frac{\bar{\mu}}{k + x} - D - r \right) &= 0 \\ x = 0 \vee x &= \frac{\bar{\mu}}{D + r} - k \end{aligned} \quad (4.7)$$

dari persamaan (4.7) ditunjukkan bahwa untuk biomassa tidak nol didapatkan $x = \frac{\bar{\mu}}{D+r} - k$.

Kemudian dengan cara yang sama dicari kesetimbangan substrat, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= 0 \\ D(s_{in} - s) - k \frac{\bar{\mu}x}{k+x} &= 0 \\ D(s_{in} - s) &= k \frac{\bar{\mu}x}{k+x} \\ s_{in} - s &= \frac{k}{D} \frac{\bar{\mu}x}{k+x} \\ s &= s_{in} - \frac{k}{D} \frac{\bar{\mu}x}{k+x} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Lalu dengan substitusi x tidak nol pada persamaan (4.7) ke dalam persamaan (4.8) didapatkan:

$$\begin{aligned} s &= s_{in} - \frac{k}{D} \frac{\bar{\mu}x}{k+x} \\ &= s_{in} - \frac{k}{D} \frac{\bar{\mu}[\bar{\mu} - k(D+r)]}{D+r} \frac{D+r}{\bar{\mu}} \\ &= s_{in} - \frac{k}{D} [\bar{\mu} - k(D+r)] \\ &= s_{in} + \frac{k}{D} [k(D+r) - \bar{\mu}] \end{aligned} \quad (4.9)$$

dari persamaan (4.9) dan (4.7) didapatkan titik kesetimbangan

$$E = \left(s_{in} + \frac{k}{D} [k(D+r) - \bar{\mu}], \frac{\bar{\mu}}{D+r} - k \right) \quad (4.10)$$

4.3 Kestabilan Lokal

Setelah diperoleh titik kesetimbangan maka dilakukan analisis kestabilan. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui kestabilan pada suatu persamaan. Analisis ini dilakukan pada titik setimbang biomassa, yaitu pada kondisi adanya biomassa.

Model interaksi dinamis merupakan model persamaan yang tak linier sehingga perlu dilakukan linierisasi, maka persamaan (4.4) menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= f(s, x) \\ \dot{x} &= g(s, x) \end{aligned}$$

Dari pemisalan di atas didapatkan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f(s, x)}{\partial s} & \frac{\partial f(s, x)}{\partial x} \\ \frac{\partial g(s, x)}{\partial s} & \frac{\partial g(s, x)}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -D & \frac{-k(\bar{\mu}k)}{(k+x)^2} \\ 0 & \frac{-k(\bar{\mu}k)}{(k+x)^2} - D - r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya dicari kestabilan lokal titik setimbang biomassa, yaitu suatu kondisi dihasilkan biomassa atau biomassa tidak sama dengan nol. Berdasarkan hasil kesetimbangan pada (4.10), maka diperoleh:

$$J(E) = \begin{bmatrix} -D & -k \frac{(\bar{\mu}k)}{\left(\frac{\bar{\mu}}{D+r}\right)^2} \\ 0 & -k \frac{(\bar{\mu}k)}{\left(\frac{\bar{\mu}}{D+r}\right)^2} - D - r \end{bmatrix}$$

$$J(E) = \begin{bmatrix} -D & -k^2 \frac{(D+r)^2}{\bar{\mu}} \\ 0 & -k^2 \frac{(D+r)^2}{\bar{\mu}} - D - r \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J(E)| = 0$$

Sehingga

$$\begin{vmatrix} \lambda + D & -k^2 \frac{(D+r)^2}{\bar{\mu}} \\ 0 & \lambda + k^2 \frac{(D+r)^2}{\bar{\mu}} + D + r \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + D) \left(\lambda + k^2 \frac{(D+r)^2}{\bar{\mu}} + D + r \right) = 0$$

didapatkan persamaan karakteristik atau nilai λ sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -D$$

$$\lambda_2 = -k^2 \frac{(D+r)^2}{\bar{\mu}} - D - r$$

Titik kesetimbangan E dikatakan stabil jika semua bagian riil dari λ bernilai negatif. Karena $k, D, r, \bar{\mu}$ bernilai positif [3], maka titik kesetimbangan E stabil asimtotik.

4.4 Penyelesaian dengan Kendali Optimal

Pengendalian pada suatu sistem bertujuan untuk memperoleh sifat-sifat sistem, yaitu adanya kestabilan titik kesetimbangan. Karena didapatkan E stabil asimtotik, maka masalah dapat diselesaikan dengan pengendalian optimal. Penyelesaian kendali optimal pada masalah ini digunakan untuk memaksimalkan produksi biomassa mikroalga dalam suatu fotobioreaktor melalui kontrol pada pengencerannya.

Diberikan fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J = \max_{u \in [2,7]} \int_0^T ux \, dt \quad (4.11)$$

dengan u adalah tingkat pengenceran dan x adalah biomassa. Fungsi pertumbuhan mikroalga $h(x)$ yang membutuhkan cahaya, CO_2 dan juga dapat dipengaruhi oleh substrat yang diberikan. Dalam masalah ini, tidak dibahas tentang kontrol pemberian nutrisi berupa nitrat yang diberikan dalam fotobioreaktor. Akibatnya nutrisi yang masuk ke dalam fotobioreaktor sama dengan nutrisi yang keluar atau tidak terjadi perubahan jumlah substrat dalam reaktor pada setiap waktunya. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut:
dari Persamaan (4.4) diketahui

$$\begin{cases} \dot{s} = D(s_{in} - s) - kh(x) \\ \dot{x} = h(x) - Dx - rx \end{cases}$$

dengan kontrol pada D dan asumsi tersebut, maka model (4.4) dapat direduksi menjadi:

$$\dot{x} = \frac{\bar{\mu}x}{k+x} - ux - rx \quad (4.12)$$

Langkah awal yang dilakukan untuk menyelesaikan model pertumbuhan mikroalga dalam fotobioreaktor dengan menggunakan teori kendali optimal adalah menentukan fungsi Hamiltonian.

Nilai fungsi Hamiltonian $H(u(t), x(t), \lambda(t), t)$ dari fungsi tujuan (4.11) dan *state* (4.12) adalah:

$$\begin{aligned} H(u(t), x(t), \lambda(t), t) &= f(x, t, u) + \lambda' g(x, t, u) \\ &= ux + \lambda(f(x) - ux - rx) \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan kondisi optimal, maka dibutuhkan kondisi perlu yang dibentuk oleh PMP. Agar $x^*(t)$, $u^*(t)$ menjadi optimal untuk masalah di atas, diperlukan adanya konstanta λ_0 dan fungsi kontinu $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ dimana untuk semua $t_0 \leq t \leq t_f$, $\lambda_0 \neq 0$, dan $\lambda(t) \neq 0$. Dan diperoleh kondisi optimal yaitu pada saat kontrol $u(t)$ optimal yaitu $u^*(t)$ dan keadaan $x(t)$ optimal yaitu $x^*(t)$.

Maka PMP untuk permasalahan ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H(u^*(t), x^*(t), \lambda(t), t) = \\ \max_{u \in [u_{min}, u_{max}]} H(u(t), x(t), \lambda(t), t) \end{aligned}$$

Kontrol optimal $u^*(t)$ diperoleh dengan memaksimalkan $H(u(t), x(t), \lambda(t), t)$ terhadap semua kontrol $u(t)$ dalam daerah kontrol u , sedangkan variabel yang lain dianggap sebagai konstanta atau dengan kata lain dicari titik stasionernya. Jadi kondisi perlu yang dibentuk oleh *Pontryagin Maximum Principle* adalah kondisi stasioner dari $H(u(t), x(t), \lambda(t), t)$, persamaan state $\dot{x}(t)$ dan co-state $\dot{\lambda}(t)$. Sehingga dari Persamaan (4.11) dan (4.12) dapat dibentuk Hamiltonian:

$$H = ux + \lambda \dot{x}$$

$$H = ux + \lambda \left(\frac{\mu x}{k+x} - rx - ux \right)$$

Kondisi Stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$x(1 - \lambda) = 0$$

$$1 - \lambda = 0$$

Kendali $u(t)$ muncul secara linier dalam Hamiltonian sehingga $u(t)$ yang optimal tidak dapat ditentukan dari kondisi $H_u = 0$.

Kendali $u(t)$ terbatas oleh $u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}$ dan kondisi optimal dapat dipenuhi dengan menggunakan *bang-bang* dan *singular control*:

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{jika } H_u > 0, & \lambda < 1 \\ u_{sing} & \text{jika } H_u = 0, & \lambda = 1 \\ u_{min} & \text{jika } H_u < 0, & \lambda > 1 \end{cases}$$

Kemudian dicari persamaan *state* dan *co-state*

Persamaan state:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

$$= \frac{\bar{\mu}x}{k+x} - rx - ux$$

Persamaan co-state:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= \lambda \left(-\frac{k\bar{\mu}}{(k+x)^2} + r + u \right) - u\end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - \lambda$$

$H_u = (1 - \lambda)$ disebut sebagai fungsi *switching*.

a) Kondisi ketika $H_u > 0$

$$u(t) = u_{\max}$$

$$H_u = (1 - \lambda) > 0$$

$$\lambda < 1$$

yaitu ketika $\lambda < 1$, maka kontrol $u(t) = u_{\max} = 7$

b) Kondisi ketika $H_u < 0$

$$u(t) = u_{\min}$$

$$H_u = (1 - \lambda) < 0$$

$$\lambda > 1$$

yaitu ketika $\lambda > 1$, maka kontrol $u(t) = u_{\min} = 2$

c) Singular pada saat $H_u = 0$

$$u(t) = u_{\text{sing}}$$

$$H_u = (1 - \lambda) = 0$$

$$\lambda = 1$$

yaitu ketika $\lambda = 1$, maka kontrol $u(t) = u_{\text{sing}}$

Selanjutnya dicari kontrol u_{sing} dengan cara sebagai berikut:

- $H_u = 0$
 $H_u = 0$
 $1 - \lambda = 0$
 $\lambda = 1$
- $\frac{dH_u}{dt} = 0$

$$\frac{d(1 - \lambda)}{dt} = 0$$

$$-\dot{\lambda} = 0$$

$$\lambda \left(\frac{k\bar{\mu}}{(k+x)^2} - r - u \right) + u = 0$$

$$\lambda \left(\frac{k\bar{\mu}}{(k+x)^2} - r \right) = u(\lambda - 1)$$

$$u_{sing} = \frac{\lambda \left(\frac{k\bar{\mu}}{(k+x)^2} - r \right)}{(\lambda - 1)}$$

Selanjutnya kontrol singular akan menjamin persamaan Hamiltonian optimal secara lokal di sepanjang busur singular jika memenuhi syarat cukup (*sufficient condition*) yaitu memenuhi kondisi *Generalisasi Legendre-Clebsh order dua* yang dinyatakan oleh persamaan (2.22).

Pertama yang dilihat adalah adanya nilai $H_u = 0$ dan kemudian dihitung turunan terhadap waktunya.

$$H_u = 1 - \lambda = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH_u}{dt} \right|_{\lambda=1} &= \left. \frac{d}{dt} (1 - \lambda) \right|_{\lambda=1} \\ &= -\dot{\lambda} \Big|_{\lambda=1} \\ &= \left(\frac{k\bar{\mu}}{(k+x)^2} - r \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_u}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{k\bar{\mu}}{(k+x)^2} - r \right) \\ &= - \left(\frac{2k\bar{\mu}}{(k+\dot{x})^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^1 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2 H_u}{dt^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2k\bar{\mu}}{(k+\dot{x})^3} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2k\bar{\mu}}{\left(k+x \left(\frac{k\bar{\mu}}{k+x} - r - u \right) \right)^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (-1)^1 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2 H_u}{dt^2} \right) &= \frac{6\bar{\mu}kx}{\left(k + x \left(\frac{\bar{\mu}}{k+x} - r - u \right) \right)^4} \\
 &= \frac{6k\bar{\mu}x}{(k + \dot{x})^4} \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Sehingga memenuhi kesingularan kondisi Kelley (2.22), maka Hamiltonian optimal secara lokal di sepanjang busur singular.

4.5 Simulasi

Pada bagian ini ditunjukkan grafik dari hasil biomassa dengan pertumbuhan mikroalga dalam fotobioreaktor dengan model Monod. Grafik ini merupakan hasil simulasi fungsi objektif (4.11) dan state (4.12):

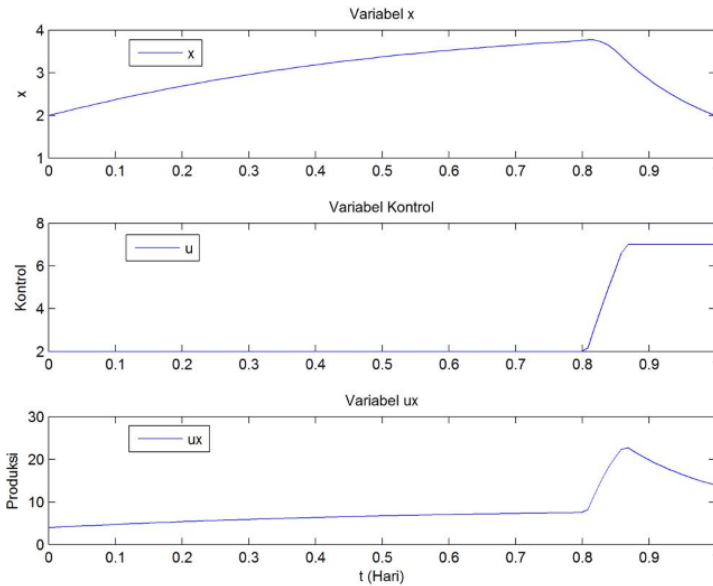
Tabel 4.1. Input Parameter

Simbol	Keterangan	Nilai
k	Konstanta pertumbuhan	1
$\bar{\mu}$	Pertumbuhan maksimum pada mikroalga	14
r	Respirasi	0.7
T	Waktu	1

Berdasarkan pada penelitian yang dilakukan oleh Olivier Bernard[3], didapatkan nilai-nilai parameter yang mempengaruhi produksi mikroalga dalam suatu fotobioreaktor. Kemudian dilakukan simulasi dengan memasukkan nilai parameter pada tabel 4.1, pendefinisian fungsi objektif, *state* dan juga kondisi batasnya.

4.5.1 Analisis Hasil Simulasi

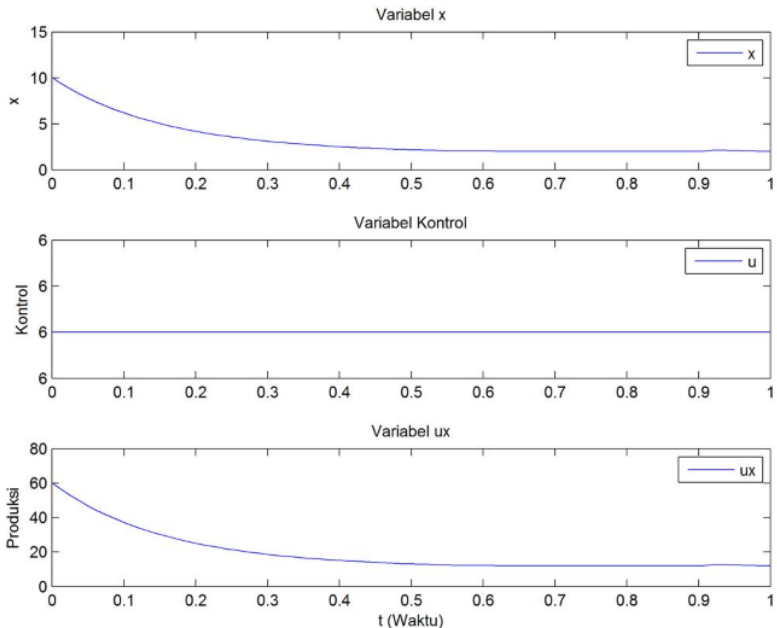
Simulasi yang pertama merupakan simulasi dari persamaan (4.11) dan (4.12) dan nilai parameter pada tabel 4.1 serta dengan kondisi batas $2 \leq x \leq 10$, $2 \leq u \leq 7$.



Gambar 4.3 Variabel x , Kontrol dan ux

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa kontrol yang dihasilkan merupakan *bang-singular-bang*. Pada waktu $t = 0$ sampai dengan $t = 0.8$ kontrol yang bekerja adalah $u_{min} = 2$, berikutnya adalah u_{sing} dan pada $t = 0.86$ sampai $t = 1$ kontrol yang bekerja adalah $u_{max} = 7$. Di dalam simulasi ditunjukkan pula hasil x dan ux yang merupakan biomassa yang diproduksi.

Selanjutnya dilakukan simulasi kedua, yaitu dengan mensimulasikan kontrol pengenceran konstan, yaitu $u = 6$.



Gambar 4.4 Variabel x , Kontrol dan ux dengan u konstan

Hasil simulasi kedua yang ditunjukkan pada gambar 4.4 menunjukkan bahwa dengan nilai parameter yang sama, yaitu nilai parameter pada tabel 4.1 dan kontrol konstan $u = 6$ dalam sehari[3] dan ditunjukkan hasil x dan produksi ux .

Berdasarkan hasil dari kedua simulasi, yaitu yang ditunjukkan pada gambar 4.3 dan 4.4 dapat dilihat bahwa pengontrolan dengan *bang-singular-bang* lebih efektif daripada pengontrolan konstan.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

Dari analisa dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa :

1. Diperoleh titik kesetimbangan dan kestabilan asimtotik lokal pada perkembangan mikroalga dalam fotobioreaktor model Monod sebagai berikut:

Titik setimbang biomassa:

$$E = \left(s_{in} - \frac{\bar{\mu} - (u + r)k}{u}, \frac{\bar{\mu}}{u + r} - k \right)$$

2. Kendali optimal yang diperoleh pada upaya pemaksimalan produksi biomassa dalam fotobioreaktor dengan model Monod mempunyai bentuk yang tidak tunggal. Kontrol yang diperoleh adalah berupa *bang - singular-bang* yang bergantung pada nilai fungsi *switching* pada interval waktu yang berbeda – beda. Kontrolnya dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$u(t) \begin{cases} 7, & \text{jika } H_u > 0 \\ u_{sing} & \text{jika } H_u = 0 \\ 2, & \text{jika } H_u < 0 \end{cases}$$

dengan fungsi *switching* $H_u = 1 - \lambda$ dan

$$u_{sing} = \frac{\lambda \left(\frac{k\bar{\mu}}{(k+x)^2} - r \right)}{\lambda - 1}$$

Jika dibandingkan dengan kontrol konstan yaitu $u = 6$, kontrol *bang-singular-bang* lebih menguntungkan karena dapat memproduksi biomassa yang lebih banyak.

5.2 Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan model pertumbuhan mikroalga dalam fotobioreaktor dengan model Droop.
2. Dikembangkan dengan upaya kontrol atau pengendalian optimal pada bagian lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Z. Hussein, N. Gita, H.M. Ang and M.O. Tade, 2012, **CO2 Biomitigation and Biofuel Production Using Microalgae**, Curtin University, Australia.
- [2] Y. Chisti, 2007, **Biodisel from microalgae**, *Biotechnology Advances*, vol. 26, pp. 126– 131..
- [3] G. Frederic, Akmetzhanov, B. Olivier, 2013, **Optimal strategies for biomass productivity maximization using natural light**, Canada.
- [4] T. Bayen, F. Mairet, P. Martinon, M. Sebbah, 2010, **Analysis of a periodic optimal control problem connected to microalgae anaerobic digestion**, Inria Biocore: John Wiley & Sons.
- [5] Naidu, D. S. 2002. “Optimal Control Systems”. USA : CRC Presses LC.
- [6] Subchan, S. dan Zbikowski, R. 2009. “Computational Optimal Control: Tools and Practice”. UK: John Wiley & Sons Ltd.
- [7] Bryson, A. E. dan Ho, Y. C. 1975. **Applied Optimal Control**.New York: Taylor & Francis Group.
- [8] R. P Enid, 1993, **Optimal Control and the Calculus of Variation**, Oxford University Press: Manchester, GBR.
- [9] Lenhart, S. 2010. “Bang-bang and Singular Control”. University of Tennessee, Knoxville.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

LAMPIRAN

SIMULASI

```
%%%%%%%%%% Simulasi dengan  $2 \leq u \leq 7$  %%%%%%%%%%%
t = tom('t');
p = tomPhase('p',t,0,1,40);
setPhase(p);
x = tomState('x');

%u = tomControl('u');
u = tomControl('u');

% Various constants and expressions
mu = 14;
k = 1;
r = 0.7;

%objective = integrate(u*x);
objective = integrate(u.*final(x));

% constraints
constraints = {
    collocate(2<=x<=10)
    collocate(dot(x) == (mu*x)/(k+x)-u*x-r*x)

    %collocate(2<=u<=7)
    collocate(2<=u<=7)

};

% guess
guess = {
    icollocate(x==2.^t)

    %collocate(u==14/(1+x)-0.7)
    collocate(u==(mu)/(k+x)-r)
```

```
};

solution = ezsolve(objective, constraints,
guess);

tt = linspace(0,1,100);
xx = subs(atPoints(tt,x),solution);

%uu = subs(atPoints(tt,u),solution);
uu = subs(atPoints(tt,u),solution);
ux = subs(atPoints(tt,u*x),solution);

% plot
subplot(3,1,1)
plot(tt, xx );
legend('x');
% xlabel('t (Waktu)');
ylabel('x');
title('Variabel x');

subplot(3,1,2)
plot(tt, uu);
legend('u');
% xlabel('t (Waktu)');
ylabel('Kontrol');
title('Variabel Kontrol');

subplot(3,1,3)
plot(tt, ux);
legend('ux');
xlabel('t (Hari)');
ylabel('Produksi');
title('Variabel ux');
```

```

%%%%%%%%%%%%%% Simulasi dengan u=6 %%%%%%%%%%%%%%%
t = tom('t');
p = tomPhase('p',t,0,1,40);
setPhase(p);
x = tomState('x');

%u = tomControl('u');
u = tomControl('u');

% Various constants and expressions
mu = 14;
k = 1;
r = 0.7;

%objective = integrate(u*x);
objective = integrate(u.*final(x));

% constraints
constraints = {
    collocate(2<=x<=10)
    collocate(dot(x) == (mu*x)/(k+x)-u*x-r*x)

    %collocate(u=6)
    collocate(u==6)

};

% guess
guess = {
    icollocate(x==2.^t)

    %collocate(u==14/(1+x)-0.7)
    collocate(u==(mu)/(k+x)-r)

};

solution = ezsolve(objective, constraints,
guess);

```

```
tt = linspace(0,1,100);
xx = subs(atPoints(tt,x),solution);

%uu = subs(atPoints(tt,u),solution);
uu = subs(atPoints(tt,u),solution);
ux = subs(atPoints(tt,u*x),solution);

% plot
subplot(3,1,1)
plot(tt, xx );
legend('x');
% xlabel('t (Waktu)');
ylabel('x');
title('Variabel x');

subplot(3,1,2)
plot(tt, uu);
legend('u');
% xlabel('t (Waktu)');
ylabel('Kontrol');
title('Variabel Kontrol');

subplot(3,1,3)
plot(tt, ux);
legend('ux');
xlabel('t (Hari)');
ylabel('Produksi');
title('Variabel ux');
```

BIODATA PENULIS



Penulis bernama Riya Mahmudah, lahir di Lamongan pada tanggal 28 Oktober 1994. Penulis adalah anak terakhir dari empat bersaudara dari Bapak Tarijo dan Ibu Rubayah. Sampai saat ini penulis tinggal di Desa Ngayung RT.04/RW.01, Kec. Maduran, Kab. Lamongan. Penulis lulus dari TK Pertiwi, SDN Ngayung, SMP Negeri 1 Maduran, dan SMA Negeri 1 Sekaran lulus tahun 2011 dan pada tahun yang sama penulis melanjutkan kuliah ke Jurusan Matematika ke ITS dan terdaftar di Jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN Undangan dengan NRP 1211 100 031. Penulis selama kuliah di Jurusan Matematika ITS mengambil bidang studi Matematika Terapan. Selain menjalani studi formal di jurusan Matematika ITS, penulis juga mencari ilmu di Pondok Pesantren Mahasiswa Khoirul Huda, Nginden, mengingat dalil bahwa sebaik-baiknya hamba Allah adalah hamba yang bercita-cita untuk kehidupan dunia dan akhiratnya. Untuk kritik, saran dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini bisa menghubungi penulis melalui alamat e-mail riya.mahmudah@gmail.com. Semoga bermanfaat, *Amiiin*.