



FINAL PROJECT - SM 141501

EFFECT OF MAGNETOHYDRODYNAMIC FLOW FROM NANO FLUID THROUGH POROUS CYLINDER

DEVIANA ARYANY
NRP 1212 100 042

Supervisors

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016



TUGAS AKHIR - SM 141501

PENGARUH ALIRAN HIDRODINAMIKA MAGNET DARI FLUIDA NANO YANG MELEWATI MEDIUM BERPORI BERBENTUK SILINDER

DEVIANA ARYANY
NRP 1212 100 042

Dosen Pembimbing
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

PENGARUH ALIRAN HIDRODINAMIKA
MAGNET DARI FLUIDA NANO YANG MELEWATI
MEDIUM BERBORI BERBENTUK SILINDER

*EFFECT OF MEGNETOHYDRODYNAMIC FLOW FROM
NANO FLUID THROUGH POROUS CYLINDER*


Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Matematika Terapan
Program Studi S-I Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

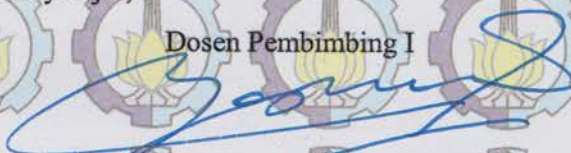
Oleh :
DEVIANA ARYANY
NRP. 1212 100 042

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II

Dosen Pembimbing I


Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
NIP. 19630623-198903 1 001


Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
NIP. 19650605 198903 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
EMIRA ITS


Dr. Imam Mukdalash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2016



PENGARUH ALIRAN HIDRODINAMIKA MAGNET DARI FLUIDA NANO YANG MELEWATI MEDIUM BERPORI BERBENTUK SILINDER

Nama : Deviana Aryany
NRP : 1212 100 042
Jurusan : Matematika ITS
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

Abstrak

Pada tugas akhir ini dibahas tentang analisis pengaruh aliran hidrodinamika magnet pada fluida nano yang melewati silinder berpori horizontal pada kondisi *steady* dan *incompressible*. Aliran fluida pada permasalahan ini diasumsikan mengalir berlawanan dengan arah gravitasi dan diinduksi oleh medan magnet. Silinder berpori diasumsikan memiliki kedalaman pori sama dan tidak memiliki daya serap. Hal pertama yang dilakukan dalam tugas akhir ini adalah memodelkan aliran fluida sehingga diperoleh persamaan pembangun dimensional yang meliputi persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Selanjutnya persamaan pembangun dimensional diubah ke bentuk persamaan non-dimensional menggunakan parameter non-dimensional dan variabel non-dimensional yang selanjutnya ditransformasi ke persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir dan diselesaikan menggunakan metode Keller-Box. Solusi numerik yang dihasilkan selanjutnya disimulasikan dengan variasi parameter non-dimensional yaitu parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter porositas, dan *volume fraction*. Hasil simulasi menunjukkan semakin besar parameter magnetik dan parameter porositas mengakibatkan semakin tinggi profil kecepatan dan semakin menurunnya profil temperatur. Sedangkan semakin besar bilangan Prandtl dan *volume fraction* mengakibatkan semakin menurunnya profil kecepatan dan meningkatnya profil temperatur.

Kata kunci : Fluida nano, hidrodinamika magnet, silinder berpori horisontal, Keller-Box

EFFECT OF MAGNETO HYDRODYNAMIC FLOW FROM NANO FLUID THROUGH POROUS CYLINDER

Name : Deviana Aryany
NRP : 1212 100 042
Department : Matematika ITS
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

Abstract

This final project is researched about the analysis of the effect of magnetohydrodynamic nano fluid through horizontal porous cylinder on steady and incompressible condition. Fluid flow is assumed to through opposite to gravity and induced by the magnet field. Porous cylinder is assumed to have the same depth of porous and has not absorptive. The First thing to do in this final project is build the model of fluid flow in order to build the dimentional governing equations. The dimentional governing equations are consist of the continuity equation, momentum equation, and energy equation. Furthermore, the dimensional governing equations are converted to the non-dimensional governing equation by using non-dimensional parameters and non-dimensional variables. Then, the non-dimensional governing equations are transformed into similarity equations using stream function and solved using Keller-Box method. The result of numerical solution is simulated using variation of non-dimensional parameters which consist of magnetic parameter, Prandtl number, porosity parameter, and volume fraction. The simulation results show that velocity profiles increase and temperature profiles decrease when both of magnetic parameter and porosity parameter increase. However, velocity profiles decrease and temperature profiles increase when both of magnetic parameter and porosity parameter increase.

Keywords : ***Nanofluids, magnetohydrodynamics, horizontal porous cylinder, Keller-Box***

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Asumsi	4
1.5 Tujuan	4
1.6 Manfaat	4
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Fluida	6
2.2.1. Fluida Newtonian	7
2.2.2. Fluida Non-Newtonian	7
2.3 Fluida Nano	7
2.4 <i>Magnetohydrodynamic</i> (MHD)	8
2.5 Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>)	10
2.6 Persamaan Pembangun	12
2.6.1 Persamaan Kontinuitas	12
2.6.2 Persamaan Momentum	12
2.6.3 Persamaan Energi	13
2.7 Porositas dan Permeabilitas	13
2.8 Persamaan Similaritas	13

2.8 Metode Keller-Box	14
BAB III. METODE PENELITIAN	
3.1 Tahapan Penelitian	15
3.2 Diagram Alir Metode Penelitian.....	18
BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN	
4.1 Pembentukan persamaan pembangun	19
4.2 Pembentukan persamaan non-dimensional...	22
4.3 Pembentukan persamaan similaritas.....	25
4.4 Penyelesaian numerik	27
4.4.1 Pembentukan Persamaan orde satu.....	27
4.4.2 Diskritasi.....	28
4.4.3 Linierisasi	31
4.4.4 Teknik eliminasi blok	34
4.5 Simulasi dan Analisis	40
4.5.1 Analisis hasil pengaruh bilangan magnetik.	41
4.5.2 Analisis hasil pengaruh bilangan Prandtl	43
4.5.3 Analisis hasil pengaruh parameter porositas	45
4.5.4 Analisis hasil pengaruh <i>volume fraction</i>	47
BAB V. PENUTUP	
5.1 Kesimpulan	51
5.2 Saran	52
DAFTAR PUSTAKA	55
LAMPIRAN	59
BIODATA PENULIS	79

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1	Model fisik dari sistem koordinat aliran fluida pada permukaan silinder berpori 5
Gambar 2.2	Lapisan batas pada pelat datar 11
Gambar 2.3	Lapisan batas yang terbentuk dari fluida yang melewati suatu permukaan lengkung.... 11
Gambar 3.1	Model fisik aliran fluida pada titik stagnasi permukaan silinder berpori..... 15
Gambar 3.2	Diagram alur penelitian 18
Gambar 4.1	Skema Keller-Box 28
Gambar 4.2	Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik 41
Gambar 4.3	Profil temperatur dengan variasi parameter magnetik 42
Gambar 4.4	Profil kecepatan dengan variasi bilangan Prandtl..... 43
Gambar 4.5	Profil temperatur dengan variasi bilangan Prandtl..... 44
Gambar 4.6	Profil kecepatan dengan variasi parameter porositas..... 45
Gambar 4.6	Profil temperatur dengan variasi parameter porositas..... 46

Gambar 4.8	Profil kecepatan dengan variasi <i>volume fraction</i>	47
Gambar 4.9	Profil temperatur dengan variasi volume fraction	48

DAFTAR SIMBOL

τ	Tegangan geser fluida
μ	Viskositas Dinamik
V	Kecepatan fluida
x	Koordinat arah gerak permukaan silinder
y	Koordinat arah gerak lapisan batas
t	Waktu
J	Kerapatan arus
B	Gaya magnet
p	tekanan
E	Medan listrik
ρ	Kerapatan
μ	Viskositas Dinamik
K^*	Permeabilitas dari media berpori
g	Gravitasi
g_x	Gravitasi pada sumbu x
g_y	Gravitasi pada sumbu y
u	Komponen kecepatan fluida pada sumbu x
v	Komponen kecepatan fluida pada sumbu y
u_e	Kecepatan di luar lapisan batas
B_0	Medan magnet
σ	Konduktivitas listrik
β	Koefisien perpindahan panas
T	Temperatur fluida
T_∞	Temperatur ambien
T_w	Temperatur dinding silinder
k	Konduktivitas panas
a	Jari-jari silinder
α_{nf}	Difusivitas panas fluida nano
α_s	Difusivitas panas partikel
α_f	Difusivitas panas fluida dasar

μ_{nf}	Viskositas dinamis fluida nano
μ_f	Viskositas dinamis fluida dasar
ρ_{nf}	Kerapatan fluida nano
ρ_s	Kerapatan partikel
ρ_f	Kerapatan fluida dasar
β_{nf}	Koefisien perpindahan panas fluida nano
β_s	Koefisien perpindahan panas partikel
β_f	Koefisien perpindahan panas fluida dasar
Re	Bilangan Reynolds
χ	<i>Volume fraction</i>
U_∞	Kecepatan aliran bebas
M	Parameter magnetik
ϕ	Parameter porositas
\times	Parameter konveksi
Gr	Bilangan Grashof
k_{nf}	Konduktivitas panas fluida nano
k_s	Konduktivitas panas partikel
k_f	Konduktivitas panas fluida dasar
Pr	Bilangan Prandtl
ψ	Fungsi alir
I	Matriks identitas
C_p	Kapasitas panas
$C_{p_{nf}}$	Kapasitas panas fluida nano
C_{p_f}	Kapasitas panas fluida dasar
C_{p_s}	Kapasitas panas partikel
δ	Selisih dua titik pada tahap iterasi newton

DAFTAR LAMPIRAN

LAMPIRAN 1	Pengubahan Persamaan Pembangun ke Persamaan Non-Dimensional	59
LAMPIRAN 2	Transformasi Persamaan Non-Dimensional ke Persamaan Similaritas.....	67
LAMPIRAN 3	<i>Source Code</i> Program Menggunakan <i>Software</i> MATLAB	71

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam tugas akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun ke dalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan asumsi dan batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh.

1.1 Latar Belakang Masalah

Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun kecilnya tegangan geser tersebut. Fluida sendiri berdasarkan viskositasnya dibagi menjadi dua yaitu fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian. Fluida non-Newtonian merupakan fluida yang memiliki kurva tegangan yang tidak linier. Apabila terdapat gaya yang bekerja pada fluida non-Newtonian maka viskositasnya tidak konstan. Contoh dari fluida non-Newtonian adalah fluida visco-elastic. Sedangkan Fluida Newtonian merupakan fluida yang memiliki kurva tegangan yang linier. Viskositas dari fluida Newtonian bernilai konstan apabila terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Contoh dari fluida Newtonian adalah fluida nano.

Fluida nano merupakan fluida yang terdiri dari fluida dasar yang mengandung dispersi dari nano partikel. Fluida dasar yang digunakan bisa berupa air, oli, minyak dan sebagainya. Fluida nano banyak digunakan berbagai industri besar yang sangat membutuhkan peran perpindahan panas. Industri yang menggunakan fluida nano antara lain transportasi, pasokan energi, elektronik, tekstil, dan industri kertas. Fluida nano memiliki kelebihan dapat meningkatkan efektivitas konduktivitas termal dan meningkatkan viskositas fluida dasar. Oleh karena itu,

akhir-akhir ini fluida nano dipandang sebagai teknologi baru yang penting untuk diteliti. Penelitian tentang pengaruh aliran hidrodinamikamagnet pada fluida nano yang melewati silinder berpori sangat penting dalam proses yang melibatkan suhu tinggi dan dalam banyak aplikasi teknik seperti sistem reaktor nuklir pendinginan, teknik panas bumi, pemanasan dan pendinginan ruang, proses pembakaran bahan bakar fosil dan energi, penguapan besar penampungan air terbuka, teknologi tenaga surya dan teknologi ruang angkasa. Salah satu contoh dari fluida nano adalah logam cair. Logam cair merupakan fluida yang dapat menghantarkan arus listrik sehingga dapat disebut dengan fluida yang memiliki karakteristik *magnetohydrodynamic*. Fluida yang memiliki karakteristik magnetohidrodinamik (MHD) memiliki kemampuan mengendalikan separasi aliran, memanipulasi aliran fluida itu sendiri dan mengoptimumkan perpindahan panas dari fluida penghantar listrik. Sehingga dengan demikian aliran MHD adalah penelitian yang penting dalam aplikasi bidang teknik dan industri, pengembangan dari bidang MHD diantaranya yaitu power generator dan pendingin reaktor nuklir.

Penelitian tentang fluida telah banyak dilakukan. Pada tahun 2015 Widodo *dkk* telah meneliti aliran lapisan batas dari fluida viskoelastik yang mampat dan stabil dengan adanya medan magnet melewati media berpori berbentuk silinder. Selain itu Widodo *dkk* juga telah meneliti aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental magnetohidrodinamik yang melewati silinder eliptik pada tahun 2015. Sedangkan pada tahun 2015, Alkawasbeh juga telah meneliti aliran konveksi campuran pada fluida nano yang mengalir melewati bola berpori.

Berdasarkan pentingnya penelitian tentang fluida nano dan MHD, maka dalam tugas akhir ini akan diteliti pengaruh aliran hidrodinamika magnet dari fluida nano yang melalui medium

berpori berbentuk silinder dengan menggunakan penyelesaian numerik metode Keller-Box.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah

1. Bagaimana model matematika dari aliran hidrodinamika magnet dari fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder
2. Bagaimana penyelesaian model matematika dari aliran hidrodinamika magnet dari fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder
3. Bagaimana hasil simulasi pengaruh parameter non-dimensional dari aliran hidrodinamika magnet dari fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder terhadap temperatur dan kecepatan

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang akan digunakan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut

1. Jenis fluida yang diamati adalah fluida nano dalam bentuk cair.
2. Objek penelitian adalah silinder berpori horisontal
3. Silinder berpori tidak memiliki daya serap terhadap fluida
4. Partikel nano yang digunakan pada simulasi adalah Cu dengan fluida dasar adalah air
5. Bagian yang diteliti yaitu pada titik stagnasi terdekat dengan *bluff body* ($x \approx 0$)
6. Penyelesaian numerik menggunakan metode Keller-Box
7. Visualisasi hasil penelitian menggunakan *software* MATLAB

1.4 Asumsi

Asumsi yang akan digunakan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut

1. Aliran yang diamati bersifat *incompressible*
2. Aliran yang diamati dalam kondisi *steady*
3. Aliran fluida bersifat seragam
4. Fluida diinduksi oleh medan magnet
5. Temperatur dinding konstan
6. Kedalaman pori pada silinder sama

1.5 Tujuan

Tujuan dari tugas akhir ini adalah

1. Mengetahui model matematika dari aliran hidrodinamika magnet dari fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder
2. Mengetahui penyelesaian model matematika dari aliran hidrodinamika magnet dari fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder
3. Mengetahui hasil simulasi pengaruh parameter non-dimensional dari aliran hidrodinamika magnet dari fluida nano yang melalui medium berpori berbentuk silinder terhadap temperatur dan kecepatan

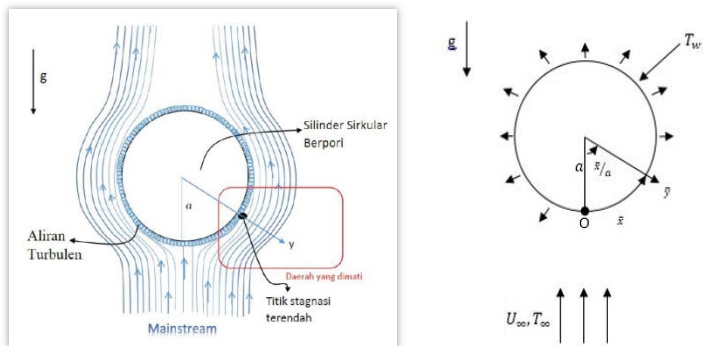
1.6 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari tugas akhir ini adalah sebagai bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan, khususnya aplikasi metode Keller-Box pada permasalahan aliran fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder dengan pengaruh hidrodinamika magnet pada fluida nano dengan area penelitian pada lapisan batas.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai penelitian-penelitian yang telah dilakukan, *magneto hydrodynamics*, lapisan batas, fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian, fluida nano, porositas dan permeabilitas, persamaan pembangun, persamaan kontinuitas, persamaan massa, persamaan energi, persamaan similaritas, dan metode Keller-Box.

2.1 Penelitian Terdahulu



Gambar 2. 1 Model fisik dan sistem koordinat aliran fluida pada permukaan silinder berpori

Penelitian mengenai pengaruh hidrodinamika magnet telah dilakukan oleh Widodo *dkk* (2015) yang mempertimbangkan masalah magnetohydrodynamics, yaitu aliran lapisan batas dari fluida viskoelastik yang mampat dan stabil dengan adanya medan magnet melewati media berpori berbentuk silinder. Diberikan pengaruh medan magnet yang bekerja pada fluida dan diasumsikan mengalir dalam media berpori. Efek dari parameter viskoelastik, parameter konveksi, campuran dan bilangan Prandtl pada karakteristik aliran telah diteliti. Hasil penelitian menunjukkan bahwa profil kecepatan menurun ketika parameter viskoelastik meningkat sedangkan profil kecepatan meningkat

bila parameter konveksi campuran meningkat. Profil temperatur meningkat ketika parameter viskoelastik dan parameter konveksi campuran ditingkatkan. profil temperatur menurun bila jumlah Prandtl meningkat.

Pada tahun 2015, Widodo *dkk* juga telah melakukan penelitian tentang analisa aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental *magnetohidrodinamik* (MHD) yang melewati silinder eliptik. Penyelesaian dicari dengan menggunakan metode Keller-Box dan simulasi dilakukan dengan mengubah parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi, sumbu vertikal, dan sumbu horisontal silinder eliptik. Hasil simulasi menunjukkan semakin besarnya parameter magnetik, parameter konveksi, dan panjang sumbu vertikal silinder eliptik menyebabkan semakin bertambahnya profil kecepatan dan menurunnya profil temperatur. Apabila panjang sumbu horisontal semakin besar maka profil kecepatan yang dihasilkan semakin menurun dan profil temperaturnya semakin meningkat. Sedangkan semakin bertambahnya bilangan Prandtl maka menyebabkan profil kecepatan menurun namun tidak signifikan dan profil temperatur menjadi menurun.

Alkasasbeh (2015) juga telah melakukan penelitian tentang aliran konveksi campuran pada fluida nano yang mengalir melewati bola berpori. Metode yang digunakan untuk penyelesaian numerik adalah metode Keller-Box dan simulasi dilakukan dengan memvariasi parameter konveksi, *volume fraction* pada dua fluida yaitu fluida *Cu* dan Al_2O_3 . Hasil simulasi menunjukkan semakin bertambahnya parameter konveksi menyebabkan semakin menurunnya koefisien *skin friction* dan Al_2O_3 memiliki koefisien *skin friction* lebih tinggi dibandingkan dengan *Cu*. Semakin bertambahnya *volume fraction* dan parameter konjugat menyebabkan koefisien *skin friction* dan profil temperatur menjadi meningkat.

2.2 Fluida

Terdapat tiga fase zat yang tersebar di alam, yaitu fase padat, gas dan cair. Karena fase gas dan cair tidak dapat mempertahankan bentuk tetap, maka keduanya mempunyai

kemampuan untuk mengalir dengan demikian keduanya disebut sebagai fluida. Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun tegangan geser tersebut (Widodo, 2012). Pada fluida dikenal adanya viskositas atau kekentalan. Berdasarkan karakteristiknya fluida dibagi menjadi dua yaitu fluida Newtonian dan fluida non Newtonian.

2.2.1. Fluida Newtonian

Fluida Newtonian adalah suatu fluida yang memiliki kurva tegangan atau rengangan yang linier. Contoh umum dari fluida yang berkarakteristik Newtonian adalah air. Keunikan dari fluida Newtonian adalah fluida ini akan terus mengalir sekalipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Hal ini disebabkan karena viskositas dari suatu fluida Newtonian tidak berubah ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Viskositas dari suatu fluida Newtonian hanya bergantung pada temperatur dan tekanan. Viskositas sendiri merupakan suatu konstanta yang menghubungkan besar tegangan geser dan gradien kecepatan pada persamaan

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x}$$

2.2.2. Fluida Non-Newtonian

Fluida non-Newtonian adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini menyebabkan fluida non-Newtonian tidak memiliki viskositas yang konstan dan laju deformasi berlangsung tak linier.

2.3 Fluida Nano

Fluida nano merupakan fluida yang terdiri dari fluida dasar yang mengandung dispersi dari nano partikel. Fluida dasar yang

digunakan bisa berupa air, oli, minyak dan sebagainya sedangkan nano partikel yang digunakan adalah partikel berukuran 1-100 nm (Albadr *dkk*, 2013). Partikel nano biasanya terbuat dari logam yang secara kimia stabil, oksida logam atau karbon dalam berbagai bentuk. Fluida nano banyak digunakan berbagai industri besar yang sangat membutuhkan peran perpindahan panas. Industri yang menggunakan fluida nano antara lain transportasi, pasokan energi, elektronik, tekstil, dan industri kertas. Fluida nano memiliki kelebihan dapat meningkatkan efektivitas konduktivitas termal dan meningkatkan viskositas fluida dasar.

2.4 Magnetohydrodynamic (MHD)

Magnetohydrodynamics (MHD) (hidrodinamika fluida magnet atau *hydromagnetics*) adalah karakteristik fluida konduksi listrik akibat medan magnet. Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. MHD diperkenalkan dan dikembangkan pertama kali oleh Hannes Alfvén seorang fisikawan yang mendapatkan nobel dalam fisika pada tahun 1970. Konsep dasar MHD adalah medan magnet dapat menginduksi arus listrik pada fluida konduktif yang bergerak, yang pada gilirannya menciptakan gaya pada fluida dan juga mengubah medan magnet itu sendiri. Himpunan persamaan yang menggambarkan MHD adalah kombinasi dari persamaan Navier-Stokes pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik.

Bentuk ideal persamaan MHD terdiri dari persamaan fluida, yakni persamaan kontinuitas, persamaan momentum, persamaan energi, dan persamaan Maxwell. Berikut adalah persamaan MHD:

Persamaan kontinu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Persamaan momentum:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla \right) V = J \times B - \nabla p$$

Persamaan energi diberikan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{\rho^{\gamma}} \right) = 0$$

Persamaan Maxwell meliputi:

1. Hukum Faraday:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E$$

2. Hukum Ampere

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

3. Hukum Gauss

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

4. Hukum Gauss untuk Magnetik

$$\nabla \cdot B = 0$$

Pada permasalahan *magnetohydrodynamics*, hukum Gauss tidak berlaku sehingga dapat dihilangkan sedangkan hukum Gauss untuk magnetik hanya digunakan pada kondisi awal. Selain itu, untuk frekuensi atau pada kecepatan rendah, perpindahan arus bisa diabaikan. Sehingga persamaan umum MHD dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= -\nabla \times E \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla \right) V &= J \times B - \nabla p \\ \nabla \times B &= \mu_0 J \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{\rho^{\gamma}} \right) = 0$$

Dan untuk mencari besar medan listrik, digunakan hukum Ohm yaitu

$$E + V \times B = \mu J$$

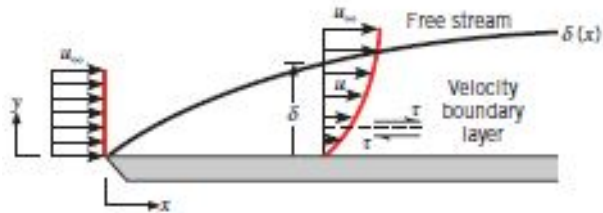
Jika $\mu = 0$ maka persamaan MHD tersebut dikatakan sebagai persamaan MHD ideal.

Gaya Lorentz dengan suku $J \times B$ dapat diberikan sebagai berikut:

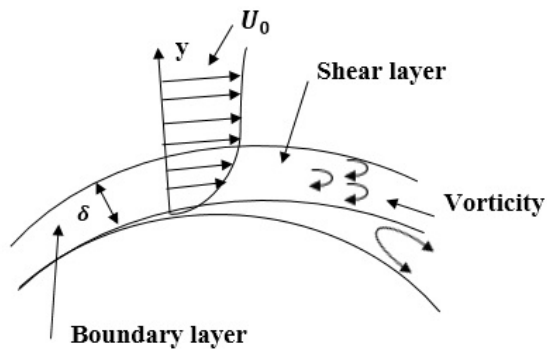
$$J \times B = \frac{(B \cdot \nabla) B}{\mu_0} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

2.5 Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Pada saat ini perkembangan ilmu mekanika fluida dari waktu ke waktu semakin pesat. Ditengah perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, studi tentang lapisan batas adalah salah satu yang sangat bermanfaat untuk dikembangkan. Teori lapisan batas berperan penting dalam menganalisis karakteristik profil kecepatan dan profil temperatur pada aliran fluida. Peneliti-peneliti terdahulu telah mempelajari permasalahan ini pada geometri yang berbeda seperti pelat datar, kerucut, silinder, dan bola dengan jenis fluida Newtonian dan non-Newtonian. Penelitian tentang lapisan batas diarahkan untuk dapat mengurangi efek negatif yang ditimbulkan oleh aliran fluida yang melewati permukaan benda guna mengoptimalkan kinerjanya, ada beberapa penerapannya antara lain yaitu pada pesawat terbang, kereta api, kereta listrik, kapal selam, kapal laut, mobil, dsb.



Gambar 2. 2. Lapisan Batas Pada Pelat Datar



Gambar 2. 3 Lapisan Batas Pada Permukaan Lengkung

Lapisan batas adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat tempat fluida mengalir, dimana di dalam lapisan tersebut pengaruh viskositas maupun gaya inersia sangat berpengaruh. Untuk menggambarkan konsep lapisan batas, lihat Gambar 2.2 lapisan batas pada pelat datar. Ketika partikel fluida melewati permukaan pelat, maka kecepatan berkurang. Pada keadaan tersebut telah banyak diasumsikan bahwa kecepatan partikel adalah nol. Partikel-partikel ini kemudian menghambat gerakan partikel pada lapisan fluida yang berdekatan, kemudian juga menghambat gerakan partikel pada lapisan berikutnya, dan seterusnya sampai pada jarak $y = \delta$ dari permukaan. Perlambatan dari gerakan fluida ini berkaitan dengan tegangan

geser (shear stresses) τ pada bidang yang sejajar dengan kecepatan fluida. Dengan meningkatnya jarak y dari permukaan, x komponen kecepatan dari fluida, u harus meningkat hingga mendekati nilai aliran bebas u_∞ . Simbol ∞ digunakan untuk menunjukkan bahwa kondisi aliran bebas (free stream) berada di luar lapisan batas.

2.6 Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun untuk permasalahan aliran fluida pada tugas akhir ini menggunakan persamaan aliran fluida *viscous* dengan efek MHD pada kondisi *unsteady* dan *incompressible* yang terdiri dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi.

2.6.1 Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas adalah hasil penurunan dari hukum kekekalan massa. Konsep hukum kekekalan massa adalah laju perubahan massa sistem terhadap waktu bernilai nol. Persamaan kontinuitas yang digunakan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

2.6.2 Persamaan Momentum

Persamaan momentum merupakan hasil penurunan dari hukum kedua Newton. Konsep hukum kedua Newton adalah jumlahan gaya-gaya luar yang bekerja pada sistem sama dengan laju perubahan terhadap waktu dari jumlah momentum pada sistem. Persamaan kontinuitas yang digunakan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \sigma u B_0^2 - \rho \beta (T - T_\infty) g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \sigma v B_0^2 - \rho \beta (T - T_\infty) g_y$$

2.6.3 Persamaan Energi

Persamaan energi adalah persamaan hasil penurunan dari hukum I termodinamika. Persamaan kontinuitas yang digunakan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

2.7 Porositas dan Permeabilitas

Porositas adalah kemampuan suatu benda atau media berpori (misalnya batuan atau tanah) untuk menyerap dan menahan suatu fluida di dalamnya. Porositas suatu benda erat kaitannya dengan permeabilitas (biasanya dilambangkan dengan K^*) adalah kemampuan suatu benda atau media berpori (misalnya batuan dan tanah) untuk memungkinkan suatu fluida mengalir melewatinya. Semakin tinggi permeabilitas suatu benda berpori akan memungkinkan fluida dapat bergerak lebih cepat saat melaluinya. Menurut Hukum Darcy, permeabilitas berhubungan dengan debit (laju aliran) dan sifat fisik fluida (misalnya viskositas), untuk mengukur besar gradien tekanan pada media berpori diterapkan (Mahdi *dkk*, 2015):

$$V = - \frac{K^*}{\mu} \nabla p$$

2.8 Persamaan Similaritas

Persamaan similaritas merupakan persamaan yang diperoleh dari pengubahan persamaan berdimensi $n + 1$ menjadi

persamaan berdimensi n dengan menggunakan fungsi alir yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\psi = xf(x, \eta) \text{ dan } T = \theta(x, \eta)$$

Dan

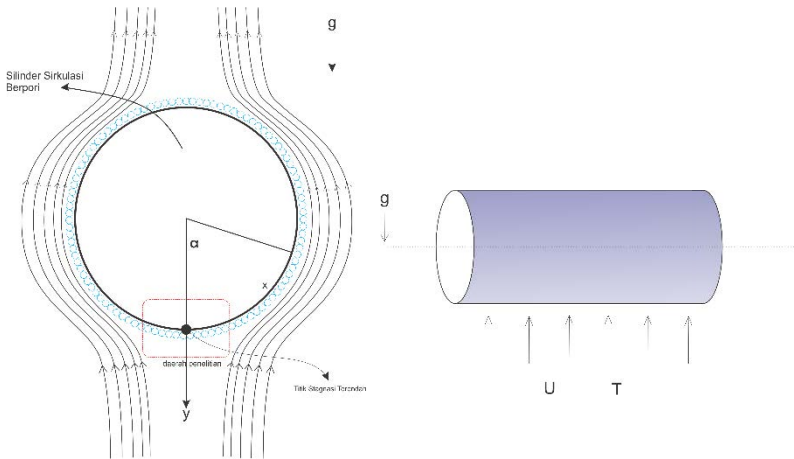
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \text{ dan } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

2.9 Metode Keller-Box

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan differensial parabolik. Menurut Alkasashbeh (2015), metode Keller-Box merupakan metode yang tepat dan efisien untuk penyelesaian lapisan batas. Metode ini merupakan metode beda hingga implisit. Penerapan metode Keller-Box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan differensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan differensial orde satu. Selanjutnya dilakukan diskritisasi dan linierisasi menggunakan metode Newton. Setelah itu dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok.

BAB III

METODE PENELITIAN



Gambar 3.1 model fisik aliran fluida pada titik stagnasi permukaan silinder berpori

Bab ini menguraikan metode yang akan digunakan pada tugas akhir ini secara rinci sehingga tugas akhir dapat disusun secara sistematis.

3.1. Tahapan Penelitian

Berikut ini adalah tahapan-tahapan dalam mengerjakan tugas akhir ini:

1. Kajian pustaka
Pada tahap ini akan dicari referensi-referensi yang dapat menunjang pengerjaan tugas akhir ini
2. Memodelkan aliran fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder
Pada tahap ini digunakan persamaan pembangun untuk membentuk model matematika dari aliran fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder.

Adapun persamaan pembangun yang digunakan yaitu persamaan massa, persamaan momentum, dan persamaan energi.

3. Mengubah persamaan pembangun ke bentuk non-dimensional

Pada tahap ini persamaan pembangun akan diubah dari bentuk dimensional menjadi bentuk non-dimensional menggunakan variabel non dimensional dan parameter non dimensional. Ini dilakukan untuk menjadikan persamaan pembangun tidak berpengaruh terhadap satuan.

4. Mentransformasikan persamaan pembangun non dimensional menjadi persamaan similaritas

Pada tahap ini persamaan pembangun ditransformasikan ke persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi aliran (*stream function*). Hal ini dilakukan untuk menjadikan persamaan tiga dimensi menjadi persamaan dua dimensi. Sehingga nantinya dapat diselesaikan dengan metode Keller-Box.

5. Penyelesaian numerik

Pada tahap ini akan dilakukan penyelesaian numerik model matematika dari aliran fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder menggunakan metode Keller-Box.

6. Pembuatan program

Pada tahap ini akan dibuat program dari penyelesaian numerik metode Keller-Box.

7. Simulasi

Pada tahap ini akan dilakukan simulasi dengan menggunakan beberapa nilai pada parameter-parameter yang berhubungan dengan temperatur dan kecepatan pada aliran fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder.

8. Analisis hasil dan pembahasan

Pada tahap ini akan dianalisis hasil simulasi pengaruh parameter-parameter yang berhubungan dengan

temperatur dan kecepatan pada aliran fluida nano yang melewati medium berpori berbentuk silinder.

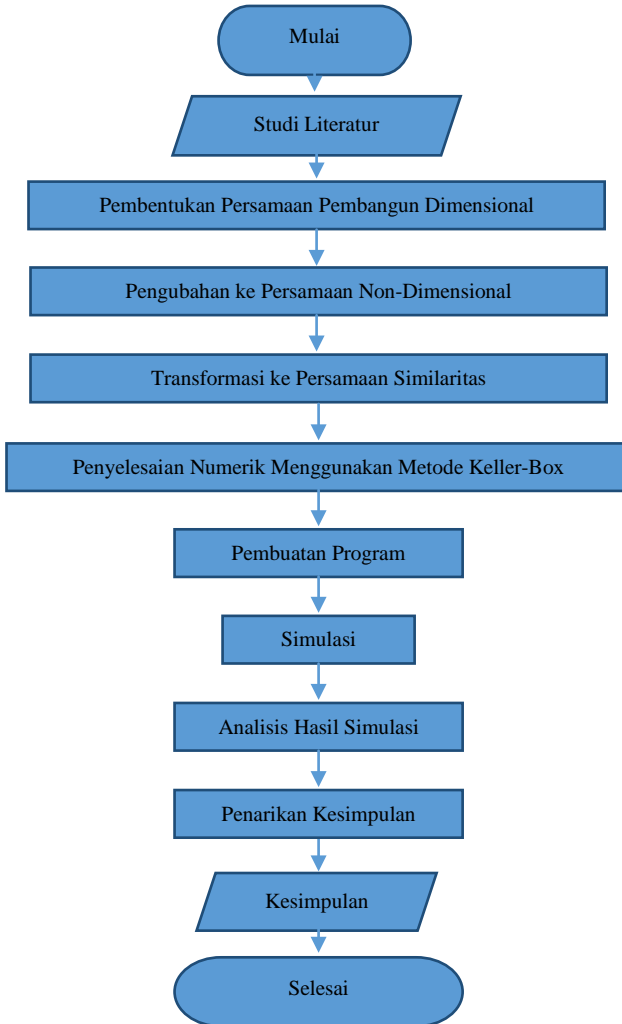
9. Penarikan kesimpulan

Pada tahap ini akan ditarik kesimpulan dari hasil analisis yang telah dilakukan dari tahap sebelumnya.

10. Penyusunan laporan

3.2. Diagram Alir Metode Penelitian

Secara umum tahapan-tahapan dalam penyelesaian tugas akhir ini ditampilkan pada Gambar 3. 2.



Gambar 3. 2 Diagram Alur Penelitian

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai proses pembentukan persamaan pembangun dimensional, perubahan menjadi persamaan non-dimensional, transformasi ke persamaan similaritas, metode Keller-Box, dan hasil analisis simulasi.

4.1 Pembentukan Persamaan Pembangun

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai pembentukan persamaan pembangun pada fluida nano yang melewati media berpori berbentuk silinder dengan adanya pengaruh *magnetohydrodynamic* yang terdiri dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi pada kondisi *steady* dan *incompressible*. Pada tugas akhir ini digunakan persamaan pembangun untuk aliran fluida *viscos* dengan efek *magnetohydrodynamic* pada kondisi *unsteady* dan *incompressible* (Widodo dkk, 2015) sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \sigma u B_0^2 - \rho \beta (T - T_\infty) g_x \quad (4.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \sigma v B_0^2 - \rho \beta (T - T_\infty) g_y \quad (4.3)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.4)$$

Persamaan (4.1) sampai Persamaan (4.4) merupakan persamaan aliran fluida dengan pengaruh hidrodinamika magnet pada kondisi *unsteady* dan *incompressible*. Pengaruh medan magnet yang diberikan ditunjukkan pada persamaan momentum yang mengandung σ konduktivitas listrik dan B_0 medan magnet.

Menurut Galuh (2015), pada permasalahan fluida yang melewati media berpori berpori sangat dipengaruhi hukum Darcy yaitu $-\frac{\mu}{K^*}V$ dengan $V = (u, v)$. Sedangkan menurut Kasim (2014), percepatan gravitasi didefinisikan sebagai berikut:

$$g_x = -g \sin\left(\frac{x}{a}\right) \text{ dan } g_y = g \cos\left(\frac{x}{a}\right)$$

Selanjutnya Persamaan (4.1) sampai (4.4) ditambahkan hukum darcy sehingga dapat diubah menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \sigma u B_0^2 + \rho \beta (T - T_\infty) \sin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\mu}{K^*} u \quad (4.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \sigma v B_0^2 - \rho \beta (T - T_\infty) \cos\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\mu}{K^*} v \quad (4.7)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.8)$$

Pada tugas akhir ini fluida diasumsikan pada kondisi *steady* dan *incompressible* sehingga Persamaan (4.5) sampai Persamaan (4.8) selanjutnya akan diubah pada kondisi *steady* yaitu tidak bergantung terhadap waktu dan *incompressible* yaitu ρ konstan. Persamaan (4.5) sampai Persamaan (4.8) selanjutnya berubah menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.9)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\sigma u B_0^2}{\rho} + \beta (T - T_\infty) g \sin \chi a - \mu \rho K^* u \quad (4.10)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\sigma v B_0^2}{\rho} - \beta (T - T_\infty) g \cos \chi a - \mu \rho K^* v \quad (4.11)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.12)$$

$$\text{Dengan } \alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

Persamaan (4.9) sampai Persamaan (4.12) merupakan persamaan pembangun untuk fluida *viscos* sedangkan pada tugas akhir ini fluida yang digunakan adalah fluida nano. Oleh karena itu Persamaan (4.9) sampai Persamaan (4.12) harus dibawa ke bentuk fluida nano dengan memasukkan hubungan antara fluida nano dengan fluida dasar yaitu (Rabeti, 2014):

$$\begin{aligned}
\text{Kerapatan} & : \rho_{nf} = (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s \\
\text{Viskositas dinamik} & : \mu_{nf} = \mu_f \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \\
\text{Spesifik panas} & : (\rho C_p)_{nf} = (1 - \chi)(\rho C_p)_f + \chi(\rho C_p)_s \\
\text{Konduktivitas panas} & : k_{nf} = \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} k_f \\
\text{Koefisien perpindahan panas} & : \beta_{nf} = \chi\rho_s\beta_s + (1 - \chi)\rho_f\beta_f
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan aliran fluida nano dengan efek hidrodinamika magnet yang melewati silinder berpori pada kondisi *steady* dan *incompressible* sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\sigma u B_0^2}{\rho_{nf}} + \\
& \beta_{nf} (T - T_\infty) g \sin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} u \quad (4.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\sigma v B_0^2}{\rho_{nf}} - \\
& \beta_{nf} (T - T_\infty) g \cos\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} v \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.16)$$

Dari Persamaan (4.13) sampai Persamaan (4.16) maka diperoleh persamaan pembangun dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\sigma \bar{u} B_0^2}{\rho_{nf}} + \\
& \beta_{nf} (\bar{T} - T_\infty) g \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{u} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = & -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\sigma \bar{v} B_0^2}{\rho_{nf}} - \\
& \beta_{nf} (\bar{T} - T_\infty) g \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{v} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.20)$$

Dengan kondisi batas (Widodo *dkk*, 2015) yaitu:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ dan } \bar{T} = T_w \text{ untuk } y = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(x), \text{ dan } \bar{T} = T_\infty \text{ untuk } y \rightarrow \infty \quad (4.21)$$

Dimana tanda $\bar{\quad}$ menunjukkan bahwa variabel merupakan variabel dimensional.

4.2 Pembentukan Persamaan Non-Dimensional

Persamaan pembangun dimensional yang telah diperoleh dari bab 4.1 yaitu Persamaan (4.17) sampai Persamaan (4.20) selanjutnya akan diubah ke bentuk persamaan pembangun non dimensional dimana satuan dapat diabaikan. Perubahan persamaan dimensional menjadi persamaan non-dimensional adalah dengan menggunakan variabel non-dimensional dan parameter non-dimensional seperti berikut (Alkawasbeh, 2015):

Variabel non-dimensional

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{y}}{a} \right), u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}, p = \frac{\bar{p}}{\rho_f U_{\infty}^2}, v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}},$$

$$u_e = \frac{\bar{u}_e(x)}{U_{\infty}}, T = \frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}$$

$$\text{Dengan } Re = \frac{U_{\infty} \rho_f a}{\mu_f} \quad (4.22)$$

Parameter non-dimensional (Widodo *dkk*, 2015)

$$M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho_f U_{\infty}}$$

$$\phi = \frac{\mu_f a}{\rho_f K^* U_{\infty}}$$

$$Pr = \frac{1}{\alpha_f} \frac{\mu_f}{\rho_f}$$

$$\lambda = \frac{Gr}{Re^2}$$

Dengan

$$Gr = \frac{g \beta_f (T_w - T_{\infty}) a^3 \rho_f^2}{\mu_f^2} \quad (4.23)$$

Substitusikan variabel non dimensional dan Parameter non dimensional (4.22) sampai (4.23) ke Persamaan (4.17) sampai Persamaan (4.20) sehingga diperoleh persamaan pembangun non-dimensional (lampiran 1):

Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.24)$$

Persamaan Momentum sumbu x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} Mu + \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f}{\beta_f \rho_{nf}} \right) T \times \sin(x) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} u \phi \quad (4.25)$$

Persamaan Momentum sumbu y :

$$\frac{1}{Re} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{vM}{Re} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} - \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f}{\beta_f \rho_{nf}} \right) T \times \cos(x) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{Re} \phi \quad (4.26)$$

Persamaan Energi

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.27)$$

Dengan kondisi batas yaitu:

$$u = v = 0 \text{ dan } T = 1 \text{ untuk } y = 0 \\ u = u_e(x) \text{ dan } T = 0 \text{ untuk } y \rightarrow \infty \quad (4.28)$$

Dengan menggunakan pendekatan lapisan batas yaitu $Re \rightarrow \infty$ maka persamaan (4.24) sampai Persamaan (4.27) menjadi:

Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.29)$$

Persamaan Momentum sumbu x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} Mu + \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f}{\beta_f \rho_{nf}} \right) T \times \sin(x) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} u \phi \quad (4.30)$$

Persamaan Momentum sumbu y :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.31)$$

Persamaan Energi

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.32)$$

Pada Persamaan (4.31) terlihat bahwa p tidak bergantung pada variabel y sehingga dapat disimpulkan bahwa p hanya bergantung pada variabel x . Sehingga persamaan momentum yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M u + \left(\frac{\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + (1-\chi) \rho_f}{\rho_{nf}} \right) T \times \sin(x) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} u \phi \quad (4.33)$$

Dari Persamaan (4.33) dapat diperoleh persamaan momentum di luar lapisan batas yaitu:

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M u_e + \left(\frac{\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + (1-\chi) \rho_f}{\rho_{nf}} \right) T \times \sin(x) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} u_e \phi \quad (4.34)$$

Menurut Alkawasbeh (2015), diasumsikan bahwa kecepatan aliran bebas $u_e = \sin x$ sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial u_e}{\partial y} = 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \quad (4.35)$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (4.35) ke Persamaan (4.34) diperoleh:

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M u_e + \left(\frac{\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + (1-\chi) \rho_f}{\rho_{nf}} \right) T \times \sin(x) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} u_e \phi \quad (4.36)$$

Pada saat $T = 0$ maka diperoleh

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -u_e \frac{\rho_{nf}}{\rho_f} \frac{\partial u_e}{\partial x} - M u_e - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} u_e \phi \quad (4.37)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.37) ke Persamaan (4.33) maka diperoleh:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M(u - u_e) + \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f}{\beta_f \rho_{nf}} \right) T \times \sin(x) - \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \phi(u - u_e) \quad (4.38)$$

Berikut adalah persamaan pembangun non-dimensional:

Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.39)$$

Persamaan Momentum:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M(u - u_e) + \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f}{\beta_f \rho_{nf}} \right) T \times \sin(x) - \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \phi(u - u_e) \quad (4.40)$$

Persamaan Energi:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.41)$$

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u = v = 0 \text{ dan } T = 1 \text{ untuk } y = 0 \\ u = u_e(x) \text{ dan } T = 0 \text{ untuk } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.3 Pembentukan Persamaan Similaritas

Penyelesaian dari persamaan pembangun non-dimensional (4.39) sampai Persamaan (4.41) dapat diperoleh dengan terlebih dahulu mengubah menjadi bentuk similaritas dengan menggunakan fungsi alir. Menurut Sarif *dkk* (2013), diberikan bahwa fungsi alir (ψ) adalah sebagai berikut:

$$\psi = x f(x, \eta) \text{ dan } T = \theta(x, \eta)$$

Menurut Alkasasbeh (2015), diasumsikan bahwa kecepatan aliran bebas $u_e = \sin x$

Dan didefinisikan:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \text{ dan } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dengan mensubstitusikan fungsi alir ke persamaan pembangun non-dimensional (4.39) sampai Persamaan (4.41) maka akan diperoleh persamaan similaritas non-dimensional sebagai berikut (lampiran 2):

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \\ \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \left(x \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M \left(x \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\sin x}{x} \right) + \\ \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f}{\rho_{nf}} \right) \theta \times \frac{\sin x}{x} - \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \phi \left(x \frac{\partial f}{\partial \eta} - \sin x \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$x \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (4.44)$$

Pada tugas akhir ini penelitian karakteristik fluida yaitu pada titik stagnasi terendah. Kecepatan dari fluida bernilai nol pada titik stagnasi terendah dari silinder berpori yaitu $x \approx 0$ sehingga Persamaan (4.43) dan Persamaan (4.44) menjadi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 1 + \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \\ \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f}{\rho_{nf}} \right) \theta \times -\frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \phi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$0 = f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (4.46)$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (f')^2 - f f'' = 1 + \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} (f''') - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M (f' - 1) + \\ \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f}{\rho_{nf}} \right) \theta \times -\frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \phi (f' - 1) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$0 = f\theta' + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \theta'' \quad (4.48)$$

Dari Persamaan (4.47) dan Persamaan (4.48) maka diperoleh persamaan similaritas yaitu:

$$0 = -(f')^2 + ff'' + 1 + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} (f''') - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M(f' - 1) +$$

$$\left(\frac{\frac{\chi \rho_s \beta_s + (1-\chi) \rho_f}{\beta_f}}{\rho_{nf}} \right) \theta \succ - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \phi(f' - 1)$$

dan

$$0 = f\theta' + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \theta''$$

Tanda ‘ adalah menunjukkan turunan terhadap η

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ dan } \theta = 1 \text{ untuk } \eta = 0$$

$$f'(\infty) = 1 \text{ dan } \theta = 0 \text{ untuk } \eta \rightarrow \infty$$

4.4 Penyelesaian Numerik

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai penyelesaian numerik pada model fluida nano yang melewati media berpori berbentuk silinder dengan adanya pengaruh *magnetohydrodynamic* yang terdiri dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi dalam kondisi *steady* dan *incompressible* menggunakan metode Keller-Box. Penyelesaian Keller-Box terdiri dari 4 tahap yaitu diawali dengan mengubah persamaan similaritas yang merupakan persamaan orde tinggi menjadi persamaan orde pertama, lalu dilakukan diskritisasi persamaan orde satu menggunakan beda hingga pusat, selanjutnya dilakukan linierisasi persamaan dengan menggunakan metode Newton dan bentuk hasil matriks vektor, dan terakhir adalah hasil matriks vektor akan dieliminasi menggunakan matriks blok tridiagonal.

4.4.1 Pembentukan Persamaan Orde Satu

Pada tahap ini Persamaan (4.47) dan Persamaan (4.48) yang merupakan persamaan orde tinggi akan diubah menjadi

persamaan orde satu. Pembentukan persamaan orde satu diawali dengan melakukan pemisalan untuk disubstitusi ke Persamaan (4.47) dan Persamaan (4.48) sebagai berikut:

$$f' = r \tag{4.49}$$

$$u' = s \tag{4.50}$$

$$\theta' = q \tag{4.51}$$

sehingga diperoleh persamaan orde satu yaitu:

$$0 = -(r)^2 + fs + 1 + \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} (s') - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M(r - 1) + \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s + (1 - \chi) \rho_f}{\rho_{nf}} \right) \theta \times - \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \phi(r - 1) \tag{4.52}$$

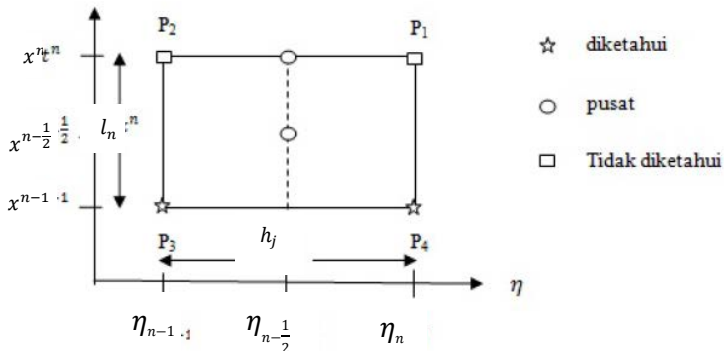
dan

$$0 = fq + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} q' \tag{4.53}$$

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x, 0) = r(x, 0) = 0 \text{ dan } \theta(x, 0) = 1 \\ r(x, \infty) = 1 \text{ dan } \theta(x, \infty) = 0 \end{aligned} \tag{4.54}$$

4.4.2 Diskritisasi



Gambar 4.1 Skema Keller-Box

Setelah dilakukan pembentukan persamaan orde satu, langkah selanjutnya adalah dilakukan diskritisasi menggunakan beda hingga pusat sesuai skema pada Gambar 4.1. Dimana untuk

Persamaan (4.49) sampai Persamaan (4.51) menggunakan titik tengah $(y_{j-\frac{1}{2}}, x^n)$ pada ruas P_1P_2 dengan menggunakan beda hingga pusat, sedangkan untuk bentuk non linier pada Persamaan (4.52) dan Persamaan (4.53) digunakan titik tengah $(y_{j-\frac{1}{2}}, x^{n-\frac{1}{2}})$ pada segiempat $P_1P_2P_3P_4$. Dengan diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
 x^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(x^n + x^{n-1}) \\
 y_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(y_j + y_{j-1}) \\
 ()_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}[()_j^n + ()_{j-1}^{n-1}] \\
 ()_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}[()_j^n + ()_{j-1}^n] \\
 \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{(r)_{j-\frac{1}{2}}^n - (r)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{l_n} \\
 \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{(r)_j^{n-\frac{1}{2}} - (r)_{j-1}^{n-\frac{1}{2}}}{h_j} \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

Dengan l_n adalah jarak dari Δx dan h_j adalah jarak dari Δy .

Selanjutnya substitusi Persamaan (4.55) ke Persamaan (4.49) sampai Persamaan (4.51) sehingga didapatkan:

$$\frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{h_j} = \frac{1}{2}(r_j^n + r_{j-1}^n) = r_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.56)$$

$$\frac{r_j^n - r_{j-1}^n}{h_j} = \frac{1}{2}(s_j^n + s_{j-1}^n) = s_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.57)$$

$$\frac{\theta_j^n - \theta_{j-1}^n}{h_j} = \frac{1}{2}(q_j^n + q_{j-1}^n) = q_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.58)$$

Untuk persamaan momentum dan energi menggunakan persamaan berikut:

$$\frac{1}{2} \left[(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = 0 \quad (4.59)$$

$$\frac{1}{2} \left[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = 0 \quad (4.60)$$

Dengan memisalkan bahwa

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} = \frac{\rho_f}{(1-\chi)\rho_f + \chi\rho_s} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \\
 B &= \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M = \frac{\rho_f}{(1-\chi)\rho_f + \chi\rho_s} M \\
 C &= \left(\frac{\frac{\chi\rho_s\beta_s + (1-\chi)\rho_f}{\beta_f}}{\rho_{nf}} \right) \lambda \\
 D &= \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \phi = \frac{\rho_f}{(1-\chi)\rho_f + \chi\rho_s} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \phi
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Untuk persamaan momentum berdasarkan Persamaan (4.52) dan Permisalan (4.61) maka diperoleh:

$$(L_1)^n = \frac{-(r^2)^n + (fs)^n + 1 + A(s')^n - B(r^n - 1) + C\theta^n - D(r^n - 1)}{D(r^n - 1)} \tag{4.62}$$

dan

$$(L_1)^{n-1} = \frac{-(r^2)^{n-1} + (fs)^{n-1} + 1 + A(s')^{n-1} - B(r^{n-1} - 1) + C\theta^{n-1} - D(r^{n-1} - 1)}{B(r^{n-1} - 1) + C\theta^{n-1} - D(r^{n-1} - 1)} \tag{4.63}$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (4.62) dan Persamaan (4.63) ke Persamaan (4.59) sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}
 &-(r^2)^n + (fs)^n + 1 + A(s')^n - B(r^n - 1) + C\theta^n - \\
 &D(r^n - 1) - (r^2)^{n-1} + (fs)^{n-1} + 1 + A(s')^{n-1} - \\
 &B(r^{n-1} - 1) + C\theta^{n-1} - D(r^{n-1} - 1) = 0
 \end{aligned}$$

Dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned}
 &-(r^2)^n + (fs)^n + 1 + A(s')^n - B(r^n - 1) + C\theta^n - \\
 &D(r^n - 1) = (r^2)^{n-1} - (fs)^{n-1} - 1 - A(s')^{n-1} + \\
 &B(r^{n-1} - 1) - C\theta^{n-1} + D(r^{n-1} - 1)
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Untuk persamaan energi menggunakan Persamaan (4.53)

Dan dengan memisalkan bahwa

$$E = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} = \frac{1}{Pr} \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{[k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)] \left[(1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right]} \tag{4.65}$$

Berdasarkan Persamaan (4.53) dan permisalan (4.65) maka diperoleh:

$$(L_2)^n = f^n q^n + E(q')^n \tag{4.66}$$

$$(L_2)^{n-1} = f^{n-1} q^{n-1} + E(q')^{n-1} \tag{4.67}$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (4.66) dan (4.67) ke Persamaan (4.60) didapatkan:

$$f^n q^n + E(q')^n + f^{n-1} q^{n-1} + E(q')^{n-1} = 0$$

Dapat ditulis dengan

$$f^n q^n + E(q')^n = -f^{n-1} q^{n-1} - E(q')^{n-1} \quad (4.68)$$

Pada titik $(x^{n-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}})$ maka Persamaan (4.64) dan Persamaan

(4.68) berubah menjadi:

$$\begin{aligned} & -\left(r_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n + 1 + A\left(\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{h_j}\right) - B\left(r_{j-\frac{1}{2}}^n - 1\right) + \\ & C\theta_{j-\frac{1}{2}}^n - D\left(r_{j-\frac{1}{2}}^n - 1\right) = \left(r_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2 - f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1 - \\ & A\left(\frac{s_j^{n-1} - s_{j-1}^{n-1}}{h_j}\right) + B\left(r_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1\right) - C\theta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + D\left(r_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1\right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n + E\left(\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{h_j}\right) = -f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - E\left(\frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{h_j}\right) \quad (4.70)$$

Dengan kondisi batas adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_0^n &= r_0^n = 0, \theta_0^n = 1 \\ r_j^n &= 1, \text{ dan } \theta_j^n = 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

4.4.3 Linierisasi

Setelah dilakukan diskritisasi pada persamaan orde satu, langkah selanjutnya adalah dilakukan linierisasi menggunakan metode Newton pada Persamaan (4.56) sampai (4.58), (4.69), dan (4.70).

Menurut Alkawasbeh (2015), Misalkan terdapat variabel $f_j^{n-1}, r_j^{n-1}, s_j^{n-1}, \theta_j^{n-1}$, dan q_j^{n-1} yang diketahui untuk saat $0 \leq j \leq Z$ maka solusi dari variabel yang tidak diketahui $(f_j^n, r_j^n, s_j^n, \theta_j^n, q_j^n)$ untuk $j = 0, 1, \dots, Z$ harus ditentukan. variabel yang tidak diketahui $(f_j^n, r_j^n, s_j^n, \theta_j^n, q_j^n)$ pada titik $x = x^{n-1}$ dapat ditulis dengan $(f_j, u_j, v_j, s_j, t_j)$. Sehingga dengan menggunakan Persamaan (2.55) maka Persamaan (4.56) sampai Persamaan (4.58), Persamaan (4.69), dan Persamaan (4.70) dapat ditulis:

$$f_j - f_{j-1} - \frac{h_j}{2}(r_j + r_{j-1}) = 0 \quad (4.72)$$

$$r_j - r_{j-1} - \frac{h_j}{2}(s_j + s_{j-1}) = 0 \quad (4.73)$$

$$\theta_j - \theta_{j-1} - \frac{h_j}{2}(q_j + q_{j-1}) = 0 \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{h_j}{4}(r_j + r_{j-1})^2 + \frac{h_j}{4}(f_j + f_{j-1})(s_j + s_{j-1}) + h_j + \\ & A(s_j^n - s_{j-1}^n) - B\left(\frac{h_j}{2}(r_j + r_{j-1}) - h_j\right) + C\frac{h_j}{2}(\theta_j + \theta_{j-1}) - \\ & D\left(\frac{h_j}{2}(r_j + r_{j-1}) - h_j\right) = (R_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\frac{h_j}{4}(f_j + f_{j-1})(q_j + q_{j-1}) + E(q_j^n - q_{j-1}^n) = (R_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (4.76)$$

$$(R_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = -h_j(1 + B + D) \quad (4.77)$$

$$(R_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = 0 \quad (4.78)$$

Berikut adalah bentuk iterasi untuk metode Newton:

$$\begin{aligned} f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\ r_j^{(i+1)} &= r_j^{(i)} + \delta r_j^{(i)} \\ s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\ \theta_j^{(i+1)} &= \theta_j^{(i)} + \delta \theta_j^{(i)} \\ q_j^{(i+1)} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Selanjutnya Iterasi (4.79) disubstitusikan pada Persamaan (4.72) sampai Persamaan (4.76) sehingga didapatkan:

$$\left(f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)}\right) - \left(f_{j-1}^{(i)} + \delta f_{j-1}^{(i)}\right) - \frac{h_j}{2}\left(r_j^{(i)} + \delta r_j^{(i)} + r_{j-1}^{(i)} + \delta r_{j-1}^{(i)}\right) = 0 \quad (4.80)$$

$$\left(r_j^{(i)} + \delta r_j^{(i)}\right) - \left(r_{j-1}^{(i)} + \delta r_{j-1}^{(i)}\right) - \frac{h_j}{2}\left(s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} + s_{j-1}^{(i)} + \delta s_{j-1}^{(i)}\right) = 0 \quad (4.81)$$

$$\left(\theta_j^{(i)} + \delta \theta_j^{(i)}\right) - \left(\theta_{j-1}^{(i)} + \delta \theta_{j-1}^{(i)}\right) - \left(q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} + q_{j-1}^{(i)} + \delta q_{j-1}^{(i)}\right) = 0 \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{h_j}{4}\left(r_j^{(i)} + \delta r_j^{(i)} + r_{j-1}^{(i)} + \delta r_{j-1}^{(i)}\right)^2 + \frac{h_j}{4}\left(f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} + f_{j-1}^{(i)} + \delta f_{j-1}^{(i)}\right) \\ & \left(s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} + s_{j-1}^{(i)} + \delta s_{j-1}^{(i)}\right) + h_j + A\left(\left(s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)}\right) - \right. \end{aligned}$$

$$\left(s_{j-1}^{(i)} + \delta s_{j-1}^{(i)}\right) - B \left(\frac{h_j}{2} \left(r_j^{(i)} + \delta r_j^{(i)} + r_{j-1}^{(i)} + \delta r_{j-1}^{(i)}\right) - h_j\right) + C \frac{h_j}{2} \left(\theta_j^{(i)} + \delta \theta_j^{(i)} + \theta_{j-1}^{(i)} + \delta \theta_{j-1}^{(i)}\right) - D \left(\frac{h_j}{2} \left(r_j^{(i)} + \delta r_j^{(i)} + r_{j-1}^{(i)} + \delta r_{j-1}^{(i)}\right) - h_j\right) = (R_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (4.83)$$

$$\frac{h_j}{4} \left(f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} + f_{j-1}^{(i)} + \delta f_{j-1}^{(i)}\right) \left(q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} + q_{j-1}^{(i)} + \delta q_{j-1}^{(i)}\right) + \delta q_{j-1}^{(i)} + E q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} - q_{j-1}^{(i)} + \delta q_{j-1}^{(i)} = R_2 j - 12n - 1 \quad (4.84)$$

Secara sederhana dengan menghilangkan orde tinggi pada $\delta f_j^{(i)}$, $\delta r_j^{(i)}$, $\delta s_j^{(i)}$, $\delta \theta_j^{(i)}$, dan $\delta q_j^{(i)}$ didapatkan

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{h_j}{2} (\delta r_j + \delta s_{j-1}) = (w_1)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.85)$$

$$(\delta r_j - \delta r_{j-1}) - \frac{h_j}{2} (\delta s_j + \delta s_{j-1}) = (w_2)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.86)$$

$$(\delta \theta_j - \delta \theta_{j-1}) - \frac{h_j}{2} (\delta q_j + \delta q_{j-1}) = (w_3)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.87)$$

$$(a_1)_j \delta s_j + (a_2)_j \delta s_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + (a_5)_j \delta r_j + (a_6)_j \delta r_{j-1} + (a_7)_j \delta \theta_j + (a_8)_j \delta \theta_{j-1} = (w_4)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.88)$$

$$(b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} = (w_5)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.89)$$

Dengan

$$(a_1)_j = \frac{h_j}{2} f_{j-\frac{1}{2}} + A$$

$$(a_2)_j = \frac{h_j}{2} f_{j-\frac{1}{2}} - A = (a_1)_j - 2A$$

$$(a_3)_j = \frac{h_j}{2} s_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(a_4)_j = \frac{h_j}{2} s_{j-\frac{1}{2}} = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = -\frac{h_j}{2} r_{j-\frac{1}{2}} - B \frac{h_j}{2} - D \frac{h_j}{2}$$

$$(a_6)_j = -\frac{h_j}{2} r_{j-\frac{1}{2}} - B \frac{h_j}{2} - D \frac{h_j}{2} = (a_5)_j$$

$$(a_7)_j = C \frac{h_j}{2}$$

$$(a_8)_j = C \frac{h_j}{2} = (a_7)_j \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} (b_1)_j &= \frac{h_j}{2} f_{j-\frac{1}{2}} + E \\ (b_2)_j &= \frac{h_j}{2} f_{j-\frac{1}{2}} - E = (b_1)_j - 2E \\ (b_3)_j &= \frac{h_j}{2} q_{j-\frac{1}{2}} \\ (b_4)_j &= \frac{h_j}{2} q_{j-\frac{1}{2}} = (b_3)_j \\ (w_1)_{j-\frac{1}{2}} &= (f_{j-1} - f_j) + h_j r_{j-\frac{1}{2}} \\ (w_2)_{j-\frac{1}{2}} &= (r_{j-1} - r_j) + h_j s_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} (w_3)_{j-\frac{1}{2}} &= (\theta_{j-1} - \theta_j) + h_j q_{j-\frac{1}{2}} \\ (w_4)_{j-\frac{1}{2}} &= (R_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + h_j \left(r_{j-\frac{1}{2}} \right)^2 - h_j f_{j-\frac{1}{2}} s_{j-\frac{1}{2}} - h_j - \\ &\quad A(s_j - s_{j-1}) + B \left(h_j r_{j-\frac{1}{2}} - h_j \right) - C h_j \theta_{j-\frac{1}{2}} + \\ &\quad D \left(h_j r_{j-\frac{1}{2}} - h_j \right) \\ (w_5)_{j-\frac{1}{2}} &= -h_j f_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}} - E(q_j - q_{j-1}) \end{aligned} \quad (4.92)$$

Persamaan (4.85) sampai (4.92) bergantung pada kondisi batas

$$\begin{aligned} f_0 = r_0 = 0, \theta_0 = 1 \\ r_j = 1 \text{ dan } \theta_j = 0 \end{aligned} \quad (4.93)$$

Menurut Alkawasbeh (2015), untuk mempertahankan nilai yang benar pada semua iterasi, akan diambil nilai berdasarkan kondisi batas yaitu:

$$\delta f_0 = 0, r_0 = 0, \delta \theta_0 = 0, \delta r_j = 0, \delta \theta_j = 0 \quad (4.94)$$

4.4.4 Teknik Eliminasi Blok

Setelah dilakukan linierisasi maka telah diperoleh Persamaan linier (4.85) sampai Persamaan (4.89). persamaan tersebut mempunyai struktur tridiagonal blok yaitu seluruh elemennya bernilai nol kecuali tiga diagonal utamanya yang elemennya berisikan matriks. Persamaan yang mempunyai

struktur tridiagonal blok dapat diselesaikan menggunakan teknik eliminasi blok (Widodo *dkk*, 1979). Biasanya, struktur tridiagonal blok terdiri dari banyak banyak variabel dan konstanta. Pada metode Keller-Box, struktur tridiagonal blok terdiri dari matriks blok sehingga untuk menyelesaikan persamaan yang memiliki struktur tersebut terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks tridiagonal blok pada Persamaan (4.85) sampai Persamaan (4.89) dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu ketika $j = 1$, $j = Z - 1$, dan $j = Z$

ketika $j = 1$ maka Persamaan (4.85) sampai Persamaan (4.89) menjadi

$$\begin{aligned}(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{h_1}{2}(\delta r_1 + \delta r_0) &= (w_1)_{1-\frac{1}{2}} \\(\delta r_1 - \delta r_0) - \frac{h_1}{2}(\delta s_1 + \delta s_0) &= (w_2)_{1-\frac{1}{2}} \\(\delta T_1 - \delta T_0) - \frac{h_1}{2}(\delta q_1 + \delta q_0) &= (w_3)_{1-\frac{1}{2}} \\(a_1)_1 \delta s_1 + (a_2)_1 \delta s_0 + (a_3)_1 \delta f_1 + (a_4)_1 \delta f_0 + (a_5)_1 \delta r_1 + \\(a_6)_1 \delta r_0 + (a_7)_1 \delta \theta_1 + (a_8)_1 \delta \theta_0 &= (w_4)_{1-\frac{1}{2}} \\(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 &= (w_5)_{1-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Dengan dimisalkan bahwa $d_1 = -\frac{h_1}{2}$ dan menggunakan Nilai (4.94) maka sistem persamaan linier di atas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & d_1 \\ (a_2)_1 & (a_8)_1 & (a_3)_1 & (a_1)_1 & 0 \\ 0 & 0 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta s_0 \\ \delta \theta_0 \\ \delta f_1 \\ \delta s_1 \\ \delta q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_1 & (a_7)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_1 \\ \delta \theta_1 \\ \delta f_2 \\ \delta s_2 \\ \delta q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (w_1)_{1-\frac{1}{2}} \\ (w_2)_{1-\frac{1}{2}} \\ (w_3)_{1-\frac{1}{2}} \\ (w_4)_{1-\frac{1}{2}} \\ (w_5)_{1-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Atau dapat ditulis menjadi $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [w_1]$.

Ketika $j = Z - 1$ maka Persamaan (4.85) sampai Persamaan (4.89) menjadi

$$\begin{aligned} (\delta f_{Z-1} - \delta f_{Z-2}) - \frac{h_{Z-1}}{2} (\delta r_{Z-1} + \delta r_{Z-2}) &= (w_1)_{(Z-1)-\frac{1}{2}} \\ (\delta r_{Z-1} - \delta r_{Z-2}) - \frac{h_{Z-1}}{2} (\delta s_{Z-1} + \delta s_{Z-2}) &= (w_2)_{(Z-1)-\frac{1}{2}} \\ (\delta \theta_{Z-1} - \delta \theta_{Z-2}) - \frac{h_{Z-1}}{2} (\delta q_{Z-1} + \delta q_{Z-2}) &= (w_3)_{(Z-1)-\frac{1}{2}} \\ (a_1)_{Z-1} \delta s_{Z-1} + (a_2)_{Z-1} \delta s_{Z-2} + (a_3)_{Z-1} \delta f_{Z-1} + \\ (a_4)_{Z-1} \delta f_{Z-2} + (a_5)_{Z-1} \delta r_{Z-1} + (a_6)_{Z-1} \delta r_{Z-2} + \\ (a_7)_{Z-1} \delta \theta_{Z-1} + (a_8)_{Z-1} \delta \theta_{Z-2} &= (w_4)_{(Z-1)-\frac{1}{2}} \\ (b_1)_{Z-1} \delta q_{Z-1} + (b_2)_{Z-1} \delta q_{Z-2} + (b_3)_{Z-1} \delta f_{Z-1} + \\ (b_4)_{Z-1} \delta f_{Z-2} &= (w_5)_{(Z-1)-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dengan dimisalkan bahwa $d_{Z-1} = -\frac{h_{Z-1}}{2}$ dan menggunakan Nilai (4.94) maka sistem persamaan linier di atas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{Z-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{Z-1} \\ 0 & 0 & (a_4)_{Z-1} & (a_2)_{Z-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_{Z-1} & 0 & (b_2)_{Z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_{Z-3} \\ \delta \theta_{Z-3} \\ \delta f_{Z-2} \\ \delta s_{Z-2} \\ \delta q_{Z-2} \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} d_{Z-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & d_{Z-1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & d_{Z-1} \\ (a_6)_{Z-1} & (a_8)_{Z-1} & (a_3)_{Z-1} & (a_1)_{Z-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_3)_{Z-1} & 0 & (b_1)_{Z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_{Z-2} \\ \delta \theta_{Z-2} \\ \delta f_{Z-1} \\ \delta s_{Z-1} \\ \delta q_{Z-1} \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} d_{Z-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_{Z-1} & (a_7)_{Z-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_{Z-1} \\ \delta \theta_{Z-1} \\ \delta f_Z \\ \delta s_Z \\ \delta q_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (w_1)_{(Z-1)-\frac{1}{2}} \\ (w_2)_{(Z-1)-\frac{1}{2}} \\ (w_3)_{(Z-1)-\frac{1}{2}} \\ (w_4)_{(Z-1)-\frac{1}{2}} \\ (w_5)_{(Z-1)-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga untuk $j = 2, 3, \dots, Z - 1$ dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} [\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], & j &= 2, 3, \dots, Z \\ [\alpha_j][\Gamma_j] &= [C_j], & j &= 2, 3, \dots, Z - 1 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.96) ke Persamaan (4.95) maka akan diperoleh

$$LU\delta = \mathbf{w} \quad (4.97)$$

Dengan mendefinisikan bahwa

$$U\delta = \mathbf{W} \quad (4.98)$$

Maka Persamaan (4.97) menjadi

$$LW = \mathbf{w} \quad (4.99)$$

Dengan

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{Z-1}] \\ [W_Z] \end{bmatrix}$$

Dengan $[W_j]$ merupakan matriks berukuran 5×1 yang elemen-elemennya diperoleh dari Persamaan (4.99) yaitu:

$$\begin{aligned} [\alpha_1][W_1] &= [w_1] \\ [\alpha_j][W_j] &= [w_j] - [B_j][W_{j-1}], \quad 2 \leq j \leq Z \end{aligned}$$

Setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks \mathbf{W} selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari δ pada Persamaan (4.98) dengan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [\delta_Z] &= [W_Z] \\ [\delta_j] &= [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq Z - 1 \end{aligned}$$

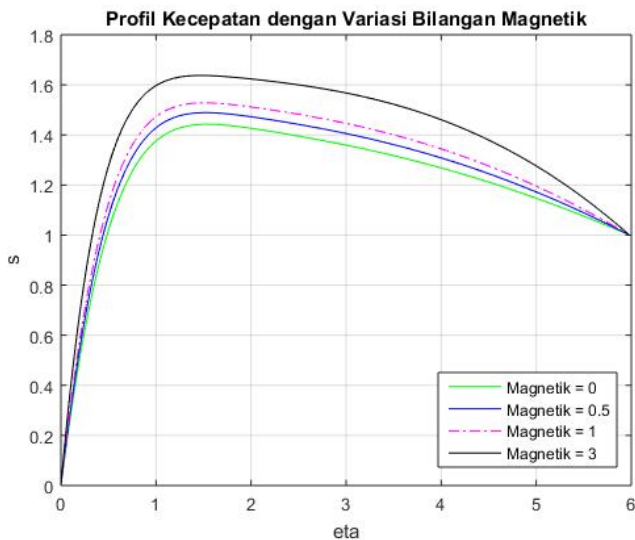
Dengan didapatkan nilai δ maka Persamaan (4.80) sampai Persamaan (4.84) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian Iterasi (4.79) dengan melakukan iterasi sampai memenuhi kriteria konvergen. Menurut Alkawasbeh (2015), kriteria konvergen menggunakan $s(0, t)$ dan iterasi berhenti saat didapatkan $|\delta s(0, t)| < \varepsilon$, dimana pada tugas akhir ini digunakan $\varepsilon = 10^{-5}$ yang memberikan nilai presisi sampai empat desimal.

4.5 Simulasi dan Analisis Hasil

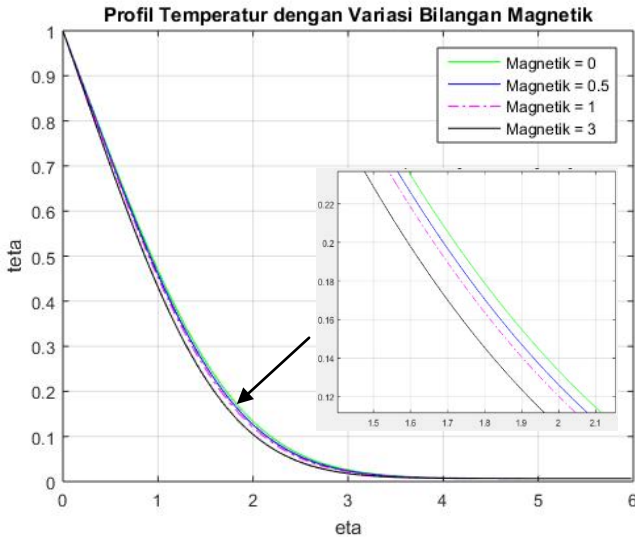
Pada sub bab ini akan dibahas tentang simulasi dari model yang telah dikerjakan menggunakan software MATLAB

(lampiran 3). Simulasi dilakukan dengan $\Delta y = 0.02$, partisi y sebanyak 300 dan memvariasikan parameter-parameter non-dimensional yaitu parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter porositas, dan *volume fraction*. Berikut adalah uraian hasil analisis simulasi dari masing-masing variasi parameter.

4.5.1 Analisis Hasil Pengaruh Parameter Magnetik



Gambar 4. 2 Profil kecepatan dengan pengaruh parameter magnetik

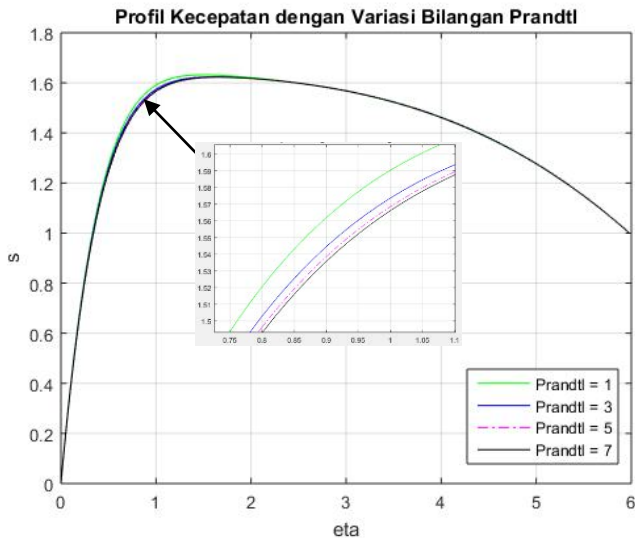


Gambar 4. 3 Profil temperatur dengan variasi parameter magnetik

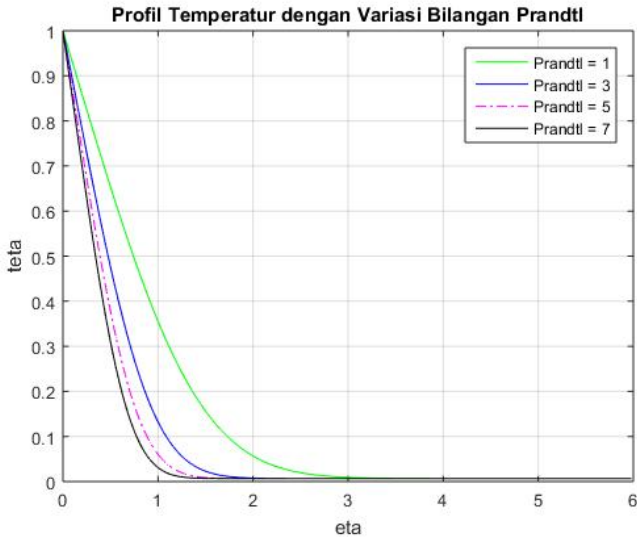
Hasil simulasi yang menunjukkan adanya pengaruh dari parameter magnetik ditunjukkan pada Gambar 4.2 dan Gambar 4.3. Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai parameter porositas, konveksi campuran, bilangan Prandtl dan *volume fraction* yaitu masing-masing sebesar $\phi = 0.3$, $\lambda = 1$, $Pr = 0.7$ dan $\chi = 0.1$. Sedangkan nilai parameter magnetik divariasikan $M = 0, 0.5, 1$ dan 3 . Gambar 4.2 merupakan hasil simulasi dari profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik yang menunjukkan bahwa dengan semakin besarnya parameter magnetik yang diberikan maka mengakibatkan semakin naik profil kecepatan pada aliran fluida. Hal ini disebabkan karena adanya gaya Lorentz yang semakin besar seiring dengan bertambahnya besar medan magnet pada aliran fluida. Semakin besar gaya Lorentz maka akan mengakibatkan peningkatan gerak dari muatan listrik dalam medan magnet. Peningkatan gerak dari muatan listrik akan

menyebabkan kecepatan fluida juga semakin meningkat dikarenakan fluida diinduksi oleh medan magnet. Medan magnet akan membuat energi internal yang digunakan fluida untuk mengalir semakin meningkat sehingga menyebabkan temperatur fluida akan semakin berkurang seperti Gambar 4.3.

4.5.2 Analisis Hasil Simulasi Pengaruh Bilangan Prandtl



Gambar 4. 4 Profil kecepatan dengan variasi bilangan Prandtl

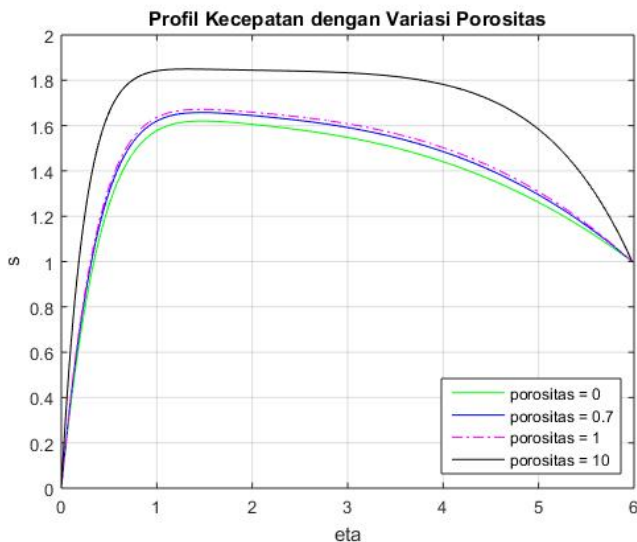


Gambar 4. 5 Profil temperatur dengan variasi bilangan Prandtl

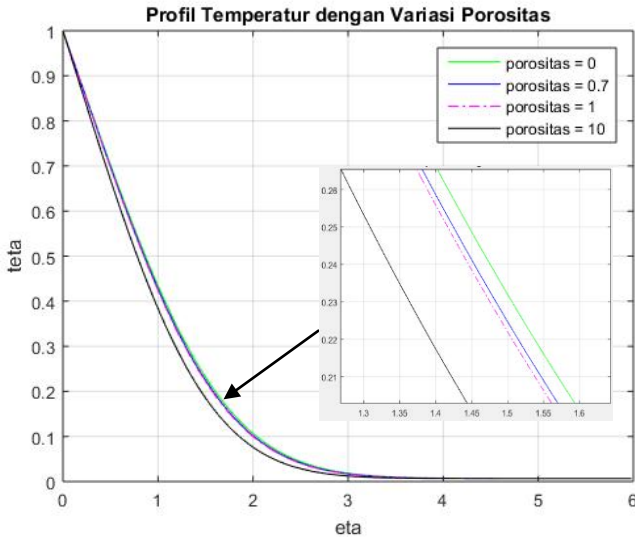
Hasil simulasi yang menunjukkan adanya pengaruh bilangan Prandtl ditunjukkan pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.5. Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai parameter porositas, konveksi campuran, parameter magnetik dan *volume fraction* yaitu masing-masing sebesar $\phi = 0.3$, $\lambda = 1$, $M = 3$ dan $\chi = 0.1$. Sedangkan nilai bilangan Prandtl divariasikan yaitu $Pr = 1, 3, 5$ dan 7 . Nilai bilangan Prandtl yang diberikan adalah $Pr \geq 1$. Hal ini dikarenakan apabila nilai Pr yang diberikan $0 < Pr < 1$ maka kecepatan aliran fluida akan menjadi sangat besar hal ini dikarenakan nilai viskositas kinematik lebih kecil dari diffusivitas panas sehingga kecepatan aliran fluida akan bernilai sangat besar. Sedangkan apabila $Pr = 0$ maka temperatur akan bernilai tidak berhingga. Pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.5 terlihat bahwa semakin besar bilangan Prandtl pada suatu fluida akan menyebabkan menurunnya profil temperatur dan profil kecepatan aliran fluida tersebut. Hal ini dikarenakan

hubungan bilangan Prandtl dengan viskositas kinematik dan difusivitas panas yaitu bilangan Prandtl berbanding lurus dengan besar viskositas kinematik dan berbanding terbalik dengan difusivitas panas. Oleh karena itu dengan semakin besarnya bilangan Prandtl yang diberikan pada suatu fluida maka akan menyebabkan semakin besarnya viskositas kinematik pada fluida tersebut sehingga kekentalan fluida juga akan semakin meningkat. Akibat dari meningkatnya kekentalan fluida maka menyebabkan semakin kecil pula kecepatan aliran fluida tersebut. Sedangkan dengan semakin besarnya bilangan Prandtl yang diberikan pada suatu aliran fluida menyebabkan semakin rendahnya nilai difusivitas panas dari fluida tersebut sehingga menyebabkan temperatur fluida menjadi menurun.

4.5.3 Analisis Hasil Simulasi Pengaruh Parameter Porositas



Gambar 4. 6 Profil kecepatan dengan variasi parameter porositas

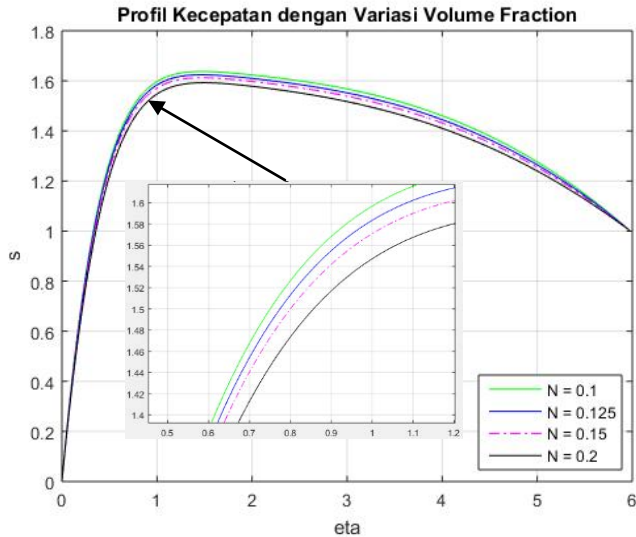


Gambar 4. 7 Profil temperatur dengan variasi parameter porositas

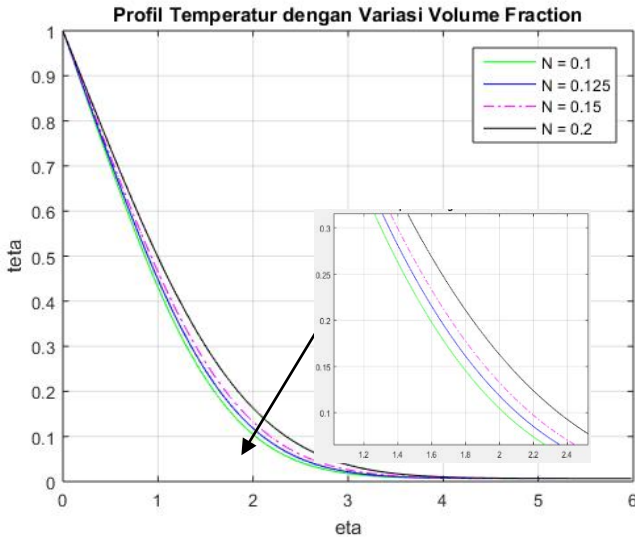
Hasil simulasi yang menunjukkan adanya pengaruh dari parameter porositas ditunjukkan pada Gambar 4.6 dan Gambar 4.7. Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai parameter magnetik, konveksi campuran, bilangan Prandtl dan *volume fraction* yaitu masing-masing sebesar $M = 3$, $\lambda = 1$, $Pr = 0.7$ dan $\chi = 0.1$. Sedangkan nilai parameter porositas divariasi yaitu $\phi = 0, 0.7, 1$ dan 10 . Gambar 4.6 dan Gambar 4.7 menunjukkan bahwa semakin besar parameter porositas menyebabkan meningkatnya profil kecepatan fluida tersebut dan sebaliknya menyebabkan semakin menurunnya profil temperatur fluida tersebut. Hal tersebut dikarenakan bahwa semakin besar parameter porositas menyebabkan permeabilitas semakin kecil. Menurut hukum darcy, semakin tinggi permeabilitas maka kecepatan aliran akan menjadi besar. sedangkan semakin tinggi parameter porositas menyebabkan kerapatan fluida semakin kecil sehingga gesekan

yang dihasilkan juga kecil maka panas yang dihasilkan akan menjadi kecil sehingga temperatur akan semakin menurun.

4.5.4 Analisis Hasil Simulasi Pengaruh *Volume Fraction*



Gambar 4. 8 Profil kecepatan dengan variasi *volume fraction*



Gambar 4. 9 Profil temperatur dengan variasi volume fraction

Hasil simulasi yang menunjukkan adanya pengaruh dari *volume fraction* ditunjukkan pada Gambar 4.8 dan Gambar 4.9. Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai konstan pada parameter magnetik, konveksi campuran, bilangan Prandtl dan porositas yaitu masing-masing sebesar $M = 3$, $\lambda = 1$, $Pr = 0.7$ dan $\phi = 0.1$. Sedangkan nilai parameter porositas divariasi dengan inputan yaitu $\chi = 0.1$, 0.125 , 0.15 dan 0.2 . Parameter *volume fraction* yang diberikan adalah sebesar $0.1 \leq \chi \leq 0.2$ dikarenakan partikel nano yang digunakan pada simulasi yaitu partikel *Cu* dengan fluida dasar adalah air. Gambar 4.8 dan Gambar 4.9 menunjukkan bahwa semakin besarnya *volume fraction* dari suatu aliran fluida menyebabkan semakin menurunnya profil kecepatan karena dengan semakin bertambahnya *volume fraction* berarti semakin banyak pula partikel yang ada pada fluida. Hal tersebut menyebabkan semakin besar gesekan yang dihasilkan antar

partikel yang ada pada fluida. Gesekan yang semakin besar itulah yang menyebabkan profil kecepatan fluida semakin menurun. Sedangkan pada profil temperatur, semakin besar *volume fraction* maka profil temperatur yang dihasilkan akan semakin tinggi karena gesekan yang dihasilkan dari partikel yang ada pada fluida menyebabkan temperatur dari fluida juga akan meningkat sehingga profil temperatur yang dihasilkan juga akan semakin meningkat.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Pengubahan Persamaan Pembangun ke Persamaan Non-Dimensional

Persamaan pembangun non-dimensional didapatkan dengan langkah awal yaitu mengubah persamaan pembangun ke bentuk persamaan pembangun dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\sigma \bar{u} B_0^2}{\rho_{nf}} + \\ &\quad \beta_{nf} (\bar{T} - T_\infty) g \sin \left(\frac{\bar{x}}{a} \right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{u} \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\sigma \bar{v} B_0^2}{\rho_{nf}} - \\ &\quad \beta_{nf} (\bar{T} - T_\infty) g \cos \left(\frac{\bar{x}}{a} \right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{v} \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \alpha_{nf} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \end{aligned}$$

Dengan kondisi batas yaitu:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ dan } T = T_w \text{ untuk } y = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(x), \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, \text{ dan } T = T_\infty \text{ untuk } y \rightarrow \infty$$

variabel non-dimensional adalah sebagai berikut:

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{y}}{a} \right), u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, p = \frac{\bar{p}}{\rho_f U_\infty^2}, v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_\infty},$$

$$u_e = \frac{\bar{u}_e(x)}{U_\infty}, T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \beta_{nf} = \chi \rho_s \beta_s + (1 - \chi) \rho_f \beta_f,$$

$$Re = \frac{U_\infty \rho_f a}{\mu_f}$$

Menurut Rabeti (2014), Hubungan antara fluida nano dengan fluida dasar diberikan sebagai berikut:

$$\text{Kerapatan} \quad : \rho_{nf} = (1 - \chi) \rho_f + \chi \rho_s$$

$$\text{Viskositas dinamik} \quad : \mu_{nf} = \mu_f \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5}}$$

$$\text{Spesifik panas} \quad : (\rho C_p)_{nf} = (1 - \chi)(\rho C_p)_f + \chi(\rho C_p)_s$$

$$\text{Konduktivitas panas} : k_{nf} = \frac{k_s + 2k_f + 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \chi(k_s - k_f)} k_f$$

Persamaan kontinuitas

Persamaan kontinuitas dimensional diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

Berikut adalah perhitungan untuk persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(xa)} + \frac{\partial\left(\frac{vU_\infty}{Re\bar{z}}\right)}{\partial\left(\frac{ya}{Re\bar{z}}\right)} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\frac{U_\infty}{a}}{Re\bar{z}} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan kontinuitas non-dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Persamaan Momentum

Persamaan momentum dimensional sumbu x diperoleh sebagai berikut

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\sigma \bar{u} B_0^2}{\rho_{nf}} + \beta_{nf} (\bar{T} - T_\infty) g \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{u}$$

Perhitungan untuk ruas kiri

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= u U_{\infty} \frac{\partial (u U_{\infty})}{\partial (x a)} + \frac{v U_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (u U_{\infty})}{\partial \left(\frac{y a}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \\
&= u \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{U_{\infty}^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{U_{\infty}^2}{a} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Perhitungan untuk ruas kanan

$$\begin{aligned}
&= \\
&\quad - \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\sigma \bar{u} B_0^2}{\rho_{nf}} + \\
&\quad \beta_{nf} (\bar{T} - T_{\infty}) g \sin \left(\frac{\bar{x}}{a} \right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{u} \\
&= - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{U_{\infty} Re}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{U_{\infty}}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\sigma u U_{\infty} B_0^2}{\rho_{nf}} + \\
&\quad (\chi \rho_s \beta_s + (1 - \chi) \rho_f \beta_f) T (T_w - T_{\infty}) g \sin(x) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} u U_{\infty} \\
&= - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{U_{\infty}}{a^2} \left(Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\sigma u U_{\infty} B_0^2}{\rho_{nf}} + \\
&\quad (\chi \rho_s \beta_s + (1 - \chi) \rho_f \beta_f) T (T_w - T_{\infty}) g \sin \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{u U_{\infty}}{K^*}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan kedua ruas yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{U_{\infty}^2}{a} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{U_{\infty}}{a^2} \left(Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \\
&\quad \frac{\sigma u U_{\infty} B_0^2}{\rho_{nf}} + (\chi \rho_s \beta_s + (1 - \chi) \rho_f \beta_f) T (T_w - \\
&\quad T_{\infty}) g \sin x - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{u U_{\infty}}{K^*}
\end{aligned}$$

Selanjutnya kedua ruas dibagi dengan $\frac{U_{\infty}^2}{a}$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{1}{U_{\infty} a} \left(Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\sigma u B_0^2}{\rho_{nf}} \frac{a}{U_{\infty}} + \\
&\quad \frac{a}{U_{\infty}^2} (\chi \rho_s \beta_s + (1 - \chi) \rho_f \beta_f) T (T_w - T_{\infty}) g \sin(x) - \\
&\quad \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{u}{K^*} \frac{a}{U_{\infty}}
\end{aligned}$$

Dengan $Re = \frac{U_\infty \rho_f a}{\mu_f}$ maka diperoleh:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sigma u B_0^2}{\rho_{nf}} \frac{a}{U_\infty} + \frac{a}{U_\infty^2} (\chi \rho_s \beta_s + (1 - \chi) \rho_f \beta_f) T (T_w - T_\infty) \sin \chi - \mu_{nf} \rho_{nf} \nu K^* a U_\infty$$

Persamaan momentum dimensional sumbu y diperoleh sebagai berikut:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\sigma \bar{v} B_0^2}{\rho_{nf}} - \beta_{nf} (\bar{T} - T_\infty) g \cos \left(\frac{\bar{x}}{a} \right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{v}$$

Perhitungan untuk ruas kiri

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= \frac{u U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (v U_\infty)}{\partial (x a)} + \frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \left(\frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)}{\partial \left(\frac{y a}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \\ &= \frac{u U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Perhitungan untuk ruas kanan

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\sigma \bar{v} B_0^2}{\rho_{nf}} - \beta_{nf} (\bar{T} - T_\infty) g \cos \left(\frac{\bar{x}}{a} \right) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \bar{v} \\ &= -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{U_\infty}{a^2} \left(Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\sigma v U_\infty B_0^2}{\rho_{nf}} - \beta_{nf} T (T_w - T_\infty) g \cos(\chi) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{v U_\infty}{K^*} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan kedua ruas yaitu:

$$\frac{U_\infty^2}{aRe^{\frac{1}{2}}} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{U_\infty}{a^2} \left(Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \right. \\ \left. 1Re12\partial 2v\partial x2 - 1Re12\sigma vU\infty B02\rho_{nf} - TT \right. \\ \left. w - T\infty g \cos x - \mu_{nf} \rho_{nf} K^* 1Re12vU\infty K^* \right)$$

Selanjutnya kedua ruas dibagi dengan $\frac{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a}$ sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{Re} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{1}{aU_\infty} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\ \frac{1}{Re} \frac{a}{U_\infty} \frac{\sigma v B_0^2}{\rho_{nf}} - \\ \frac{a}{Re^{\frac{1}{2}} U_\infty^2} \beta_{nf} (\bar{T} - T_\infty) g \cos(x) - \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \frac{1}{Re} \frac{a}{U_\infty}$$

Dengan $Re = \frac{U_\infty \rho_f a}{\mu_f}$ maka diperoleh:

$$\frac{1}{Re} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\ \frac{1}{Re} \frac{a}{U_\infty} \frac{\sigma v B_0^2}{\rho_{nf}} - \frac{a}{Re^{\frac{1}{2}} U_\infty^2} \beta_{nf} T (T_w - T_\infty) g \cos(x) - \\ \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} K^*} \frac{1}{Re} \frac{a}{U_\infty}$$

Didefinisikan bahwa parameter non-dimensional sebagai berikut:

$$M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho_f U_\infty} \\ \phi = \frac{\mu_f a}{\rho_f K^* U_\infty} \\ \lambda = \frac{Gr}{Re^2}$$

Dengan

$$Gr = \frac{g \beta_f (T_w - T_\infty) a^3 \rho_f^2}{\mu_f^2}$$

diperoleh

$$\lambda = \frac{g\beta_f(T_w - T_\infty)a^3\rho_f^2}{\mu_f^2}$$

$$\lambda = \frac{\left(\frac{U_\infty\rho_f a}{\mu_f}\right)^2}{g\beta_f(T_w - T_\infty)a}$$

$$\lambda = \frac{g\beta_f(T_w - T_\infty)a}{U_\infty^2}$$

Sehingga persamaan momentum non-dimensional sumbu x menjadi:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} Mu +$$

$$\left(\frac{\chi\rho_s\beta_s}{\beta_f} + (1 - \chi)\rho_f\right) T \lambda \sin(x) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} u\phi$$

persamaan momentum non-dimensional sumbu y menjadi:

$$\frac{1}{Re} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) -$$

$$\frac{vM}{Re} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} - \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\chi\rho_s\beta_s}{\beta_f} + (1 - \chi)\rho_f\right) T \lambda$$

$$\cos(x) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{Re} \phi$$

Persamaan Energi

Persamaan energi dimensional diperoleh sebagai berikut:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

Perhitungan ruas kiri

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = uU_\infty \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(xa)} + \frac{vU_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial\left(\frac{ya}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)}$$

$$= \frac{uU_\infty}{a} \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty))}{\partial x} + \frac{\partial T_\infty}{\partial x}\right) + \frac{vU_\infty}{a} \left(\frac{\partial(\theta(T_w - T_\infty))}{\partial y} + \frac{\partial T_\infty}{\partial y}\right)$$

$$\partial T_\infty \partial y$$

$$= \frac{U_{\infty}}{a} \left(u \left(\frac{\partial(T(T_w - T_{\infty}))}{\partial x} + \frac{\partial T_{\infty}}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial(T(T_w - T_{\infty}))}{\partial y} + \frac{\partial T_{\infty}}{\partial y} \right) \right)$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned} \alpha_{nf} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) &= \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \left(\frac{\partial^2(T(T_w - T_{\infty}) + T_{\infty})}{\partial(xa)^2} + \frac{\partial^2(T(T_w - T_{\infty}) + T_{\infty})}{\partial \left(\frac{ya}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \right) \\ &= \frac{\alpha_{nf}}{a^2} \left(\left(\frac{\partial^2(T(T_w - T_{\infty}))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{\infty}}{\partial x^2} \right) + Re \left(\frac{\partial^2(T(T_w - T_{\infty}))}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_{\infty}}{\partial y^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan kedua ruas yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{U_{\infty}}{a} \left(u \left(\frac{\partial(T(T_w - T_{\infty}))}{\partial x} + \frac{\partial T_{\infty}}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial(T(T_w - T_{\infty}))}{\partial y} + \frac{\partial T_{\infty}}{\partial y} \right) \right) &= \\ \frac{\alpha_{nf}}{a^2} \left(\left(\frac{\partial^2(T(T_w - T_{\infty}))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{\infty}}{\partial x^2} \right) + Re \left(\frac{\partial^2(T(T_w - T_{\infty}))}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_{\infty}}{\partial y^2} \right) \right) & \end{aligned}$$

Karena T_w dan T_{∞} konstanta maka turunan terhadap x dan y bernilai nol sehingga persamaan kedua ruas menjadi

$$\begin{aligned} U_{\infty}(T_w - T_{\infty}) \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\alpha_{nf}}{a} (T_w - T_{\infty}) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\alpha_{nf}}{a U_{\infty}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Dengan memasukkan $Re = \frac{U_{\infty} \rho_f a}{\mu_f}$ maka akan diperoleh:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Didefinisikan bahwa parameter dimensional yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$Pr = \frac{1}{\alpha_f} \frac{\mu_f}{\rho_f}$$

sehingga diperoleh persamaan energi non-dimensional sebagai berikut:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Lampiran 2. Transformasi Persamaan Non-Dimensional ke Persamaan Similaritas

Persamaan pembangun non-dimensional adalah sebagai berikut:

1. Persamaan Kontinuitas: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
2. Persamaan Momentum:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M(u - u_e) + \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + (1 - \chi) \rho_f \right) T \succ \sin(x) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \phi(u - u_e)$$
3. Persamaan Energi : $u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

Diberikan bahwa fungsi alir (ψ) adalah sebagai berikut:

$$\psi = xf(x, \eta) \text{ dan } T = \theta(x, \eta)$$

Dan didefinisikan:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \text{ dan } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Sedangkan dari fungsi alir dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= x \frac{\partial f}{\partial \eta}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} &= x \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, & \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} &= x \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}, & \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} &= x \frac{\partial^4 f}{\partial \eta^4} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= f + x \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + f \frac{\partial f}{\partial x} + x f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta}, & \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \eta^2} \end{aligned}$$

Menurut Alkasasbeh (2015), diasumsikan bahwa $u_e = \sin x$.

Sehingga dengan mensubstitusikan fungsi alir ke persamaan pembangun non-dimensional maka akan diperoleh:

Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) &= \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right)\end{aligned}$$

Karena pada proses penyederhanaan persamaan kontinuitas bernilai nol maka persamaan kontinuitas dapat dihilangkan.

Persamaan momentum

$$\begin{aligned}u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M(u - \sin x) + \\ &\quad \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + (1 - \chi) \rho_f \right) T \lambda \sin(x) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \phi (u - \\ &\quad \sin x \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) &= \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right) - \\ &\quad \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \sin x \right) + \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + \right. \\ &\quad \left. 1 - \chi \rho_f \theta \lambda \sin x - \mu_{nf} \mu_f \rho_f \rho_{nf} \phi \partial \psi \partial \right. \\ &\quad \left. \eta - \sin x \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(x \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) &= \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x} + \\ &\quad \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \left(x \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M \left(x \frac{\partial f}{\partial \eta} - \right. \\ &\quad \left. \sin x + \chi \rho_s \beta_s \beta_f + 1 - \chi \rho_f \theta \lambda \sin x - \mu_{nf} \right. \\ &\quad \left. f \mu_f \rho_f \rho_{nf} \phi x \partial f \partial \eta - \sin x \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \left(f x \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \sin x \cos x + \\ &\quad \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \left(x \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M \left(x \frac{\partial f}{\partial \eta} - \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin x) + \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + (1 - \chi) \rho_f \right) \theta \times \\
& \sin(x) - \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \phi \left(x \frac{\partial f}{\partial \eta} - \sin x \right) \\
\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial x} \right) = & \\
\frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \left(x \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) - & \\
\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M \left(x \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\sin x}{x} \right) + \left(\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + & \\
1 - \chi \rho_f \theta \times \sin x x - \mu_{nf} \mu_f \rho_f \rho_{nf} \phi x \frac{\partial f}{\partial \eta} - \sin x x &
\end{aligned}$$

Pada dinamika fluida, kecepatan lokal dari fluida bernilai nol pada titik stagnasi terendah dari silinder berpori yaitu $x \approx 0$ sehingga diperoleh persamaan momentum similaritas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 1 + \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \\
\left(\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + (1 - \chi) \rho_f \right) \theta \times - \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \phi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
(f')^2 - f f'' = 1 + \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} (f''') - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M(f' - 1) + \\
\left(\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + (1 - \chi) \rho_f \right) \theta \times - \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \phi(f' - 1)
\end{aligned}$$

Persamaan energi

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

Pada dinamika fluida, kecepatan lokal dari fluida bernilai nol pada titik stagnasi terendah dari silinder berpori yaitu $x \approx 0$ sehingga diperoleh persamaan energi similaritas sebagai berikut:

$$0 = f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

Atau dapat ditulis

$$0 = f\theta' + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \theta''$$

Telah diperoleh persamaan similaritas yaitu:

$$(f')^2 - ff'' = 1 + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} (f''') - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M(f' - 1) +$$

$$\left(\frac{\chi \rho_s \beta_s}{\beta_f} + (1 - \chi) \rho_f \right) \theta \times - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \phi (f' - 1)$$

dan

$$0 = f\theta' + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \theta''$$

Dimana ' adalah turunan terhadap η

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$f = f' = 0 \text{ dan } \theta = 1 \text{ untuk } \eta = 0$$

$$xf' = \sin x \text{ dan } \theta = 0 \text{ untuk } \eta \rightarrow \infty$$

Lampiran 3. *Source Code* program menggunakan software MATLAB

```

clear all
clc
close all
format long
np = 300;
nr=np+1;

%parameter non dimensional
phi=0.3;      %input('input parameter porositas =
');eps=1;
lamda=1;      %input('input parameter konveksi
campuran = ');
%pr=0.7;      %input('input the Magnetik number =
');
M=100;
N=0.1;

%nano
rhos=8933;    %input('input density of the solid
fraction = ');
rhof=997.1;   %input('input density of the base
fluid fraction = ');
Bs=0.0000167; %input('input thermal
expansion coefficient of the solid fraction =
');
Bf=0.00021;   %input('input thermal expansion
coefficient of the base fluid fraction = ');
ks=400;       %input('input thermal conductivity
of the solid = ');
kf=0.613;     %input('input thermal conductivity
of the base fluid = ');
cs=385;       %input('input heat capacity of the
solid = ');
cn=4179;      %input('input heat capacity of the
base fluid = ');

dely = 0.02;

```

```
y(1) = 0.0;
yc(1) = 0.0;
etu(1)=0.0;

%% Variasi Bilangan Magnetik
% Magnet(1)=0;
% Magnet(2)=10;
% Magnet(3)=50;
% Magnet(4)=100;

Prandtl(1)=0.1;
Prandtl(2)=0.3;
Prandtl(3)=0.5;
Prandtl(4)=0.7;

% porositas(1)=0.01;
% porositas(2)=0.1;
% porositas(3)=0.5;
% porositas(4)=0.8;

% Nano(1)=0.1;
% Nano(2)=0.125;
% Nano(3)=0.15;
% Nano(4)=0.2;

for j = 2:nr
    y(j) = y(j-1) + dely;
    yc(j) = 0.5*(y(j) + y(j-1));
end
for j=1:np
    etu(j)=y(j);
end

for i=1:4
    %M=Magnet(i);
    pr=Prandtl(i);
    %phi=porositas(i);
    %N=Nano(i);
    k=1;
    stop = 1;
```

```

while stop > 0.00001
A=(rhof/((1-N)*rhof+N*rhos))*(1/((1-N)^2.5));
B=rhof/((1-N)*rhof+N*rhos)*M;
C=(N*rhos*Bs/Bf+(1-N)*rhof)/((1-N)*rhof+N*rhos)*lamda;
D=(rhof/((1-N)*rhof+N*rhos))*(1/((1-N)^2.5))*phi;
E=1/pr*((ks+2*kf+2*N*(ks-kf))/((ks+2*kf-N*(ks-kf))*((1-N)+N*((rhos*cs)/(rhof*cn)))));
for j=1:np
    % Initial Condition
f(j,1) = (1/4)*(((y(j))^2)/y(j+1))*(3-0.5*((y(j)/y(j+1))^2));
u(j,1) = (1/2)*(y(j)/y(j+1))*(3-((y(j)/y(j+1))^2));
v(j,1) = (3/2)*(1/y(j+1))*(1-((y(j)/y(j+1))^2));
s(j,1) = -((y(j)/y(j+1))^2)+1;
t(j,1) = -2*(y(j)/y(j+1))*(1/(y(j+1)));

end
for j = 2:np
    fb(j,k) = 0.5*(f(j,k)+f(j-1,k));
    ub(j,k) = 0.5*(u(j,k)+u(j-1,k));
    vb(j,k) = 0.5*(v(j,k)+v(j-1,k));
    sb(j,k) = 0.5*(s(j,k)+s(j-1,k));
    tb(j,k) = 0.5*(t(j,k)+t(j-1,k));
    dervb(j,k) = (v(j,k)-v(j-1,k))/dely;
    fvfvb(j,k) = fb(j,k)*vb(j,k);
    unb(j,k) = (ub(j,k))^2;
    dertb(j,k) = (t(j,k)-t(j-1,k))/dely;
    ftftb(j,k) = fb(j,k)*tb(j,k);

    a1(j,k) = (dely/2*fb(j,k))+A;
    a2(j,k) = a1(j,k) sampai (2*A) ;
    a3(j,k) = dely/2*vb(j,k);
    a4(j,k) = a3(j,k);
    a5(j,k) = (-dely*ub(j,k)) sampai
(B*dely) sampai (D*dely);
    a6(j,k) = a5(j,k);
    a7(j,k) = C*dely/2;
    a8(j,k) = a7(j,k);

```

```

        b1(j,k) = (dely/2*fb(j,k))+E;
        b2(j,k) = b1(j,k)-2*E ;
        b3(j,k) = dely/2*tb(j,k);
        b4(j,k) = b3(j,k);

        r1(j,k) = -f(j,k)+f(j-
1,k)+(dely*ub(j,k));
        r2(j,k) = -u(j,k)+u(j-
1,k)+(dely*vb(j,k));
        r3(j,k) = -s(j,k)+s(j-
1,k)+(dely*tb(j,k));
        r4(j,k) = (-
dely*(1+B+D))+(dely*unb(j,k) sampai
(dely*fvfvb(j,k))-dely-A*(v(j,k)-v(j-
1,k))+B*((dely*ub(j,k))-dely) sampai
(C*dely*sb(j,k))+D*(dely*ub(j,k)-dely));
        r5(j,k) = (-dely*ftftb(j,k))-E*(t(j,k)-
t(j-1,k));

end
% Matrices
a{2,k} = [ 0 0 1 0 0; -0.5*dely 0 0 -
0.5*dely 0; 0 -1 0 0 -0.5*dely; a2(2,k) a8(2,k)
a3(2,k) a1(2,k) 0; 0 0 b3(2,k) 0 b1(2,k)];
for j = 3:np
    a{j,k} = [-0.5*dely 0 1 0 0; -1 0 0 -
0.5*dely 0; 0 -1 0 0 -0.5*dely; a6(j,k) a8(j,k)
a3(j,k) a1(j,k) 0; 0 0 b3(j,k) 0 b1(j,k)];
    b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -0.5*dely 0;
0 0 0 0 -0.5*dely; 0 0 a4(j,k) a2(j,k) 0; 0 0
b4(j,k) 0 b2(j,k)];
end;
for j = 2:np
    c{j,k} = [-0.5*dely 0 0 0 0; 1 0 0 0 0;
0 1 0 0 0; a5(j,k) a7(j,k) 0 0 0; 0 0 0 0 0];
end;
alfa{2,k} = a{2,k};
gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
for j = 3:np
    alfa{j,k} =a{j,k}-(b{j,k}*gamma{j-1,k});

```

```

        gamma{j,k} = inv(alfa{j,k})*c{j,k};
    end;
    for j = 2:np
        rr{j,k} =
[r1(j,k);r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
    end;
    ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j = 3:np
        ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}-
(b{j,k}*ww{j-1,k}));
    end;
    %% backward sweep
    %%kondisi batas
    delf(1,k) = 0;
    delu(1,k) = 0;
    dels(1,k) = 0;
    delu(np,k) = 0;
    dels(np,k) = 0;
    dell{np,k} = ww{np,k};

    for j = np-1:-1:2
        dell{j,k} = ww{j,k} -
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end;
    delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
    delt(1,k) = dell{2,k}(2,1);
    delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
    delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
    delt(2,k) = dell{2,k}(5,1);

    for j = np:-1:3
        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        dels(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
        delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
        delt(j,k) = dell{j,k}(5,1);
    end;

    %% Newton's Method
    for j = 1:np

```

```

        f(j,k+1) = f(j,k) + delf(j,k);
        u(j,k+1) = u(j,k) + delu(j,k);
        v(j,k+1) = v(j,k) + delv(j,k);
        s(j,k+1) = s(j,k) + dels(j,k);
        t(j,k+1) = t(j,k) + delt(j,k);

    end;
    stop = abs(delv(1,k));
    kmax = k;
    k = k + 1;
end
for j = 1:np
    ff(j) = f(j,k);
    uu(j) = u(j,k);
    vv(j) = v(j,k);
    ss(j) = s(j,k);
    tt(j) = t(j,k);
end
for j=1:np
    ffb(j) = fb(j,kmax);
    uub(j) = ub(j,kmax);
    vvb(j) = vb(j,kmax);
    ssb(j) = sb(j,kmax);
    ttb(j) = tb(j,kmax);
    ddervb(j) = dervb(j,kmax);
    ddertb(j) = dertb(j,kmax);
end

if(i==1)
figure(1)
plot(etu,u(:,kmax),'-g')
hold on;
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-g')
hold on;

elseif(i==2)
figure(1)
plot(etu,u(:,kmax),'-b')
hold on;

```

```

figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-b')
hold on;

elseif(i==3)
figure(1)
plot(etu,u(:,kmax),'-m')
hold on;
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-m')
hold on;

elseif(i==4)
figure(1)
plot(etu,u(:,kmax),'-black')
hold on;
grid on;
%title('Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan
Magnetik')
title('Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan
Prandtl')
%title('Profil Kecepatan dengan Variasi
Porositas')
%title('Profil Kecepatan dengan Variasi Volume
Fraction')
%legend('Magnetik = 0','Magnetik = 10','Magnetik
= 50','Magnetik = 100')
legend('Prandtl = 0.1','Prandtl = 0.3','Prandtl
= 0.5','Prandtl = 0.7')
%legend('porositas = 0.1','porositas =
0.3','porositas = 0.5','porositas = 0.7')
%legend('N = 0.1','N = 0.125','N = 0.15','N =
0.2')
xlabel('y')
ylabel(' Kecepatan ')
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-black')
hold on;
grid on;
%title('Profil Temperatur dengan Variasi
Bilangan Magnetik')

```



```
title('Profil Temperatur dengan Variasi Bilangan  
Prandtl')  
%title('Profil Temperatur dengan Variasi  
Porositas')  
%title('Profil Temperatur dengan Variasi Volume  
Fraction')  
%legend('Magnetik = 0','Magnetik = 10','Magnetik  
= 50','Magnetik = 100')  
legend('Prandtl = 0.1','Prandtl = 0.3','Prandtl  
= 0.5','Prandtl = 0.7')  
%legend('porositas = 0.1','porositas =  
0.3','porositas = 0.5','porositas = 0.7')  
%legend('N = 0.1','N = 0.125','N = 0.15','N =  
0.2')  
xlabel('y')  
ylabel('Temperatur')  
end  
end
```

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilakukan serta saran yang diberikan jika tugas akhir ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

Dari analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab IV, dapat disimpulkan bahwa :

1. Model matematika dari aliran fluida nano dengan pengaruh hidrodinamika magnet yang melewati silinder berpori pada kondisi steady di titik stagnasi adalah terdiri dari persamaan momentum dan persamaan energi.

$$0 = -(f')^2 + ff'' + 1 + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} (f''') - \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} M(f' - 1 + \chi \rho_s \beta_s \beta_f + 1 - \chi \rho_f \rho_{nf} T) - \mu_{nf} \mu_f \rho_f \rho_{nf} \phi f' - 1$$

dan

$$0 = fT' + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} T''$$

2. Hasil simulasi dengan memberikan variasi nilai parameter non-dimensional diperoleh bahwa:
 - a. Pemberian nilai parameter porositas $\phi = 0.3$, konveksi campuran $\lambda = 1$, bilangan Prandtl $Pr=0.7$, volume fraction $\chi = 0.1$ dengan partikel yang digunakan adalah Cu dan fluida dasar yang digunakan adalah air serta variasi parameter magnetik $M = 0, 0.5, 1$ dan 3 menunjukkan semakin besar parameter magnetik maka menyebabkan profil kecepatan fluida semakin meningkat dan profil temperatur semakin menurun.

- b. Pemberian nilai parameter porositas $\phi = 0.3$, konveksi campuran $\lambda = 1$, parameter magnetik $M=3$ dan *volume fraction* $\chi = 0.1$ dengan partikel yang digunakan adalah *Cu* dan fluida dasar yang digunakan adalah air serta variasi bilangan Prandtl $Pr = 1, 3, 5$ dan 7 . Semakin besar bilangan Prandtl maka menyebabkan profil kecepatan dan profil temperatur menjadi menurun
- c. Pemberian nilai bilangan Prandtl $Pr = 0.7$, konveksi campuran $\lambda = 1$, parameter magnetik $M = 3$, *volume fraction* $\chi = 0.1$ dan variasi parameter porositas $\phi = 0, 0.7, 1$ dan 10 dengan partikel yang digunakan adalah *Cu* dan fluida dasar yang digunakan adalah air serta. Semakin besar parameter porsitas maka menyebabkan profil kecepatan semakin meningkat dan profil temperatur semakin menurun.
- d. Pemberian nilai bilangan Prandtl $Pr = 0.7$, konveksi campuran $\lambda = 1$, parameter magnetik $M = 3$ dan parameter porositas $\phi = 0.1$ dengan partikel yang digunakan adalah *Cu* fluida dasar yang digunakan adalah air serta dengan fluida dasar adalah air dan variasi *volume fraction* $\chi = 0.1, 0.125, 0.15$ dan 0.2 . Semakin besar *volume fraction* maka menyebabkan profil kecepatan semakin menurun dan profil temperatur menjadi naik.

5.2 Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah

1. Daerah penelitian dalam tugas akhir ini adalah pada titik stagnasi $x \approx 0$, diharapkan penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan daerah penelitian $x \neq 0$ sehingga dapat diamati profil temperatur dan profil kecepatan di sekeliling permukaan silinder
2. Pada penelitian ini diasumsikan benda yang dilewati fluida tidak memiliki daya serap, diharapkan pada

penelitian selanjutnya dapat dikembangkan penelitian pada benda yang memiliki daya serap dan dikembangkan pada silinder berpori vertikal

3. Penelitian ini diasumsikan pada kondisi *steady*, sehingga pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat dilakukan dengan kondisi *unsteady*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Albadr, J., Tayal, S., dan Alasadi, M. (2013). *Heat Transfer Through Heat Exchanger Using Al_2O_3 Nanofluid At Different Concentrations*. Case Studies in Thermal Engineering 1 38-44.
- [2] Alkasasbeh, Hamzeh T. S (2015). *Numerical Solution for Convective Boundary Layer Flow Over A Solid Sphere Of Newtonian and Non-Newtonian Fluid*, PhD. Universiti Malaysia Pahang..
- [3] Das, Sarit K, Choi, Stephen U.S., Yu, Wenhua, dan Pradeep, T. (2007) *Nano Fluids Science and Technology*. Wiley, USA.
- [4] Kasim, Abdul Rahman Muhd. (2014). *Convective Boundary Layer flow of Viscoelastic Fluid*. PhD. Universiti Teknologi Malaysia.
- [5] Mahdi, RA., Muhammed, HA., Munisamy, KM. dan Saeid, NH. (2015). *Review of convection heat transfer and fluid flow in porous media with nanofluid*. Renewable and Sustainable Energy Reviews 41, 715-734
- [6] Mohammed, MKA, Salleh, MZ, Hussanan, A., Sarif, NM, Noar, NAZM, Ishak, A., dan Widodo, B. (2016). *Mathematical Model of Free Convection Boundary Layer Flow on Solid Sphere with Viscous Dissipation and Thermal Radiation*. International Journal of Computing Science and Applied Mathematics, Volume 2, Number 2.

- [7] Rabeti, M. (2014). *Mixed Convection Heat Transfer of Nanofluids about a Horizontal Circular Cylinder in Porous Media*. SOP Transaction on Nano Technology, volume 1, number 1.
- [8] Sarif, NM., Salleh, MZ., Tahar, RM (2013). *Numerikal Solution Of The Free Convection Boundary Layer Flow Over A Horizontal Circular Cylinder With Convective Boundary Conditions*, PhD. Universiti Malaysia Pahang
- [9] Siswono, G. O. (2015). *Analisa Aliran Konveksi Campuran Pada Fluida Viskoelastik Magnetohydrodynamics (MHD) yang Melewati Silinder Sirkular Berpori*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- [10] Widodo, B. (2012). *Pemodelan Matematika*. ITSPress. Surabaya.
- [11] Widodo, B., Anggriani, I., Khalimah, DA., Zainal, FDS., dan Imron, C. (2016). *Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics In Micropolar Fluid Past A Sphere*. Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) Volume 100, Number 2, pp 291-299
- [12] Widodo, B., Khalimah, DA., dan Imron, C. (2015). *Viscous Fluid Flow With Presence Of Magnetic Field Past An Elliptical Cylinder*. The 6th Annual Basic Science International Conference.
- [13] Widodo, B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, G. O., dan Purbadini. (2016). *Viscoelastic Fluid Flow Pass A Porous Circular Cylinder When The Magnetic Field Included*. Far

East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) Volume 99,
Number 2, pp 173-186

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Deviana Aryany. Dilahirkan di Tuban pada tanggal 3 April 1995 dan merupakan anak terakhir dari 9 bersaudara. Pendidikan formal yang telah ditempuh yaitu SDN Ronggomulyo 1 Tuban, SMPN 6 Tuban. Setelah menyelesaikan pendidikannya di SMAN 1 Tuban, penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN Tulis pada tahun 2012. Pada masa perkuliahan penulis memilih Matematika Terapan sebagai bidang keahliannya.

Selama menjadi mahasiswa ITS, penulis aktif mengikuti organisasi intra kampus yaitu Himpunan Mahasiswa Matematika sebagai *staff* Perekonomian pada periode 2013-2014. Penulis juga aktif di organisasi PLH SIKLUS ITS mulai tahun 2013.

Selama penulisan Tugas Akhir ini, penulis tidak lepas dari kekurangan. Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke devianaaryany@gmail.com.