TESIS - SM 142501

KARAKTERISASI PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR GHOST SURPASS ATAS ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

HERMANSYAH
NRP 1214 2010 36

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Subiono, M.S.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

TESIS - SM 142501

KARAKTERISASI PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR GHOST SURPASS ATAS ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

HERMANSYAH
NRP 1214 2010 36

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Subiono, M.S.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

THESIS – SM 142501

CHARACTERIZATION OF THE SOLUTIONS SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS GHOST SURPASS OVER INTERVAL MAX-PLUS ALGEBRA

HERMANSYAH
NRP 1214 201 036

SUPERVISOR
Dr. Subiono, M.S.

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTEMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

KARAKTERISASI PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR GHOST SURPASS ATAS ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh :
Hermansyah
NRP. 1214 201 036

Tanggal Ujian : 20 Juni 2016
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh :

1. **Dr. Subiono, M.S.** **(Pembimbing)**
   NIP. 19570411 198403 1 001

2. **Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.** **(Penguji)**
   NIP. 19660414 199102 2 001

3. **Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si.** **(Penguji)**
   NIP. 19830517 200812 1 003

4. **Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si.** **(Penguji)**
   NIP. 19730930 199702 1 001

Direktur Program Pascasarjana,

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
PROGRAM PASCASARJANA

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc, Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

KARAKTERISASI PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR GHOST SURPASS ATAS ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Nama Mahasiswa	:	Hermansyah
NRP	:	1214 2010 36
Pembimbing	:	Dr. Subiono, M.S.

ABSTRAK

Pada penelitian ini, akan dicari karakteristik dari penyelesaian sistem persamaan linear *ghost surpass* atas aljabar *max-plus* interval yaitu menentukan syarat penyelesaian *tangible* yang tunggal dan *tangible* yang tidak tunggal untuk persamaan *ghost surpass* tak homogen, dan syarat penyelesaian trivial dan tak trivial untuk persamaan *ghost surpass* homogen. Cara yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan ghost surpass menggunakan aturan Cramer dan formula Adjoin. Sebelum menentukan karakterisasi sistem persamaan linear *ghost surpass* diubah menjadi bentuk persamaan linear. Selanjutnya ditentukan oleh matriks *discrepancy* untuk mengetahui penyelesaian tunggal, penyelesaian banyak dan tidak mempunyai penyelesaian. Hasil yang didapat dibandingkan dengan yang dilakukan untuk mengetahui persamaan dan perbedaan dengan hasil-hasil dari sistem persamaan linear *ghost surpass*.

Kata kunci: *ghost surpass*, aljabar *max-plus* interval, *tangible*, matriks *discrepancy*

CHARACTERIZATION OF THE SOLUTIONS SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS GHOST SURPASS OVER INTERVAL MAX-PLUS ALGEBRA

Name	:	Hermansyah
NRP	:	1214 2010 36
Supervisor	:	Dr. Subiono, M.S.

ABSTRACT

In this study, will look for the characteristics of the solution system of linear equations algebra ghost surpass over max-plus interval that are determining the terms of the solution a single the tangible and the tangible that no single equation ghost surpass inhomogeneous, and terms of the solution trivial and not trivial to ghost surpass homogeneous equation. The methods used to resolve the ghost surpass equations using Cramer's rule and adjoin formulas. Before defining the characterization of system of linear equations ghost surpass changed into the form of a linear equation. Furthermore, the matrix is determined by the discrepancy matriks to find a unique solution, many Solution and do not have the solution. The results have finished compared with the reality to find out the and similarities with the results of the system of linear equations ghost surpass.

Keywords: ghost surpass, max-plus algebra interval, the tangible, matrix discrepancy

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

A	Matriks A pada aljabar *max-plus*
$\mathbf{A}$	Matriks interval **A**
$\underline{A}$	Elemen batas bawah dari matriks **A**
$\overline{A}$	Elemen batas atas dari matriks **A**
x	Vektor x pada aljabar *max-plus*
$\mathbf{x}$	Vektor interval **x**
$\underline{x}$	Elemen batas bawah pada vektor **x**
$\overline{x}$	Elemen batas atas pada vektor **x**
b	Vektor b pada aljabar *max-plus*
$\mathbf{b}$	Vektor interval **b**
$\underline{b}$	Elemen batas bawah pada vektor **b**
$\overline{b}$	Elemen batas atas pada vektor **b**
$\oplus$	Operasi biner ”*max*” pada aljabar *max-plus*
$\otimes$	Operasi biner ”*plus*” pada aljabar *max-plus*
$\overline{\oplus}$	Operasi biner ”*max*” pada aljabar *max-plus* interval
$\overline{\otimes}$	Operasi biner ”*plus*” pada aljabar *max-plus* interval
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
ε	Epsilon atau minus tak terhingga ”$-\infty$”
$\mathbb{R}_\varepsilon$	Himpunan bilangan real dan ε
$\mathbb{R}_{max}$	Semiring $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$
$\mathbb{R}_{max}^{1\times n}$	Himpunan vektor berukuran $1 \times n$ pada aljabar *max-plus*
$\mathbb{R}_{max}^{m\times n}$	Himpunan matriks berukuran $m \times n$ pada aljabar *max-plus*
$D_{A,b}$	Matriks ketaksesuian
$R_{A,b}$	Matriks reduksi ketaksesuian
T	*Extended* semiring *tropical*
R	Semiring *supertropical*
$\mathcal{G}$	Himpunan elemen *ghost*
$\mathcal{T}$	Himpunan elemen *tangible*
$M_n(R)$	Matrik persegi dengan ukuran $n \times n$ dalam aljabar *supertropical*
H_n	Himpunan $\{1, 2, \cdots, n\}$, dengan n adalah bilangan bulat positif

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar *max-plus* merupakan salah satu model matematika dengan sistem linear. Aljabar *max-plus* telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisa secara aljabar tentang permasalahan perencanaan, sistem antrian dengan kapasitas berhingga, komunikasi, produksi, lampu lalu lintas. Selain itu, aljabar *max-plus* merupakan subkelas dari sistem event diskrit. Dengan sistem event diskrit dapat mendeskripsikan dari beberapa masalah seperti sistem produksi, rambu lampu lalu lintas, jaringan telekomunikasi dan sistem manufaktur.

Pada jurnal (Myskova, 2012) yang berjudul ”Interval Max-Plus System of Linear Equations” menjelaskan sistem persamaan linear *max-plus* interval, bahwa analisis penyelesaian $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ pada *max-plus* interval terdapat 6 tipe penyelesaian. Dalam tesis (Yulianti, 2016) yang berjudul ”Karakterisasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Atas Aljabar *SuperTropical*” menjelaskan bahwa sistem persamaan linear tak homogen $A \otimes x \vDash b$ atas aljabar *supertropical* yang bukan interval mempunyai solusi *tangible* yang tunggal jika dan hanya jika $|A| \in \tau$ dan $(adj(A) \otimes b) \in \tau_0^n$, serta mempunyai penyelesaian tidak tunggal jika dan hanya jika $|A| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$ atau $(adj(A) \otimes b) \notin \tau_0^n$. Sedangkan sistem persamaan linear homogen $A \otimes x \vDash \varepsilon$ atas aljabar *supertropical* mempunyai penyelesaian trivial jika dan hanya jika $|A| \in \tau$ dan mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika $|A| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$.

Analisis penyelesaian $A \otimes x = b$ dari *max-plus* aljabar terdapat 3 kondisi penyelesaian x yaitu penyelesaian tunggal, penyelesaian banyak dan tidak mempunyai penyelesaian. Kemudian dihubungkan dengan aljabar *max-plus* interval, yang merupakan model dari aljabar *max-plus* yang memiliki batas bawah dan batas atas dengan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$. Berdasarkan uraian diatas, maka akan dicari sifat-sifat karakterisasi penyelesaian persamaan linear $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ dan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ atas aljabar *max-plus* interval.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, permasalahan yang akan dibahas sebagai berikut

1. Apakah penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ atas aljabar *max-plus* interval dengan menggunakan metode matriks *discrepancy* bisa ditemukan sifat-sifat penyelesaian tunggal, penyelesaian banyak dan tidak mempunyai penyelesaian.

2. Apakah penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ atas aljabar *max-plus* interval dengan menggunakan metode aturan Cramer dan formula adjoin bisa ditemukan sifat-sifat penyelesaian tunggal dan tidak tunggal, untuk $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \varepsilon$ bisa ditemukan sifat-sifat penyelesaian trivial dan tak trivial.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi dengan matriks yang digunakan matriks persegi atas *max-plus* interval.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mendapatkan sifat-sifat karakterisasi penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ dan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \varepsilon$ atas aljabar *max-plus* interval.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Diperoleh pengetahuan karakterisasi penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ dan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \varepsilon$ atas aljabar *max-plus* interval,

2. Dapat dijadikan bahan referensi bagi peneliti yang akan datang.

BAB II
DASAR TEORI DAN TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas mengenai sistem persamaan linear aljabar *max-plus* dan aljabar *max-plus* interval.

2.1 Aljabar Max-Plus

Aljabar *max-plus* didefinisikan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$, dengan operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$. Ketika $\mathbb{R}_\varepsilon$ dioperasikan terhadap $\oplus$ dan $\otimes$ dengan diketahui $\forall p, q \in \mathbb{R}_\varepsilon$ maka diperoleh bentuk

$$p \oplus q = \max\{p, q\} \text{ dan } p \otimes q = p + q$$

Kemudian pada $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring dengan elemen netral ε dan elemen satuan $e = 0$, dikarenakan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus)$ semigrup komutatif dengan elemen netral ε dan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \otimes)$ semigrup komutatif dengan elemen satuan e, selain itu, berlaku pula elemen netral ε yang merupakan penyerapan elemen netral ε terhadap operasi $\otimes$, serta berlaku operasi $\otimes$ distributif terhadap $\oplus$. Selanjutnya semiring $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ dapat ditulis sebagai $\mathbb{R}_{\max}$.

Ketika diketahui untuk setiap $p, q \in \mathbb{R}_\varepsilon$, kemudian berlaku operasi $p \otimes q = p + q = q + p = q \otimes p$ dapat dikatakan semiring komutatif $\mathbb{R}_{\max}$. Semiring komutatif $\mathbb{R}_{\max}$ dapat dikatakan *semifield*, ketika operasi $p \otimes (-p) = p + (-p) = 0$. Sedangkan operasi $p \otimes p = \max\{p, p\} = p$ dikatakan semiring komutatif idempoten atau dioid terhadap $\mathbb{R}_{\max}$. Sehingga $\mathbb{R}_{\max}$ merupakan *semifield* idempoten. Perlu diperhatikan bahwa semiring komutatif yang idempoten dengan setiap elemen $x \neq \varepsilon$ mempunyai invers $-x$ terhadap operasi $\otimes$, akan tetapi terhadap operasi $\oplus$ tidak memiliki invers. Pada pengoperasian $\oplus$ dan $\otimes$ terdapat prioritas urutan operasi yaitu yang dioperasikan lebih dulu operasi $\otimes$ daripada operasi $\oplus$.

$\mathbb{R}_{\max}$ diperluas dengan dibentuknya vektor dan matriks, dengan kata lain, $\mathbb{R}_{\max}^{n\times 1}$ untuk vektornya dan $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ untuk matriksnya, dimana $1 \times n$ merupakan ukuran vektor dan $m \times n$ merupakan ukuran matriks dan untuk $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m \neq 0$ dan $n \neq 0$. Diketahui elemen vektor $x \in \mathbb{R}_{\max}^{1\times n}$ kolom ke-j dinotasikan oleh x_j dan elemen matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ baris ke-i, kolom ke-j dinotasikan $a_{i,j}$ atau $[A]_{i,j}$ untuk $i \in H_m$ dan $j \in H_n$.

Pada operasi $\oplus$ terhadap matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dinotasikan $A \oplus B$ serta dapat didefinisikan oleh $[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\}$ untuk $i \in H_m$ dan $j \in H_n$. Sedangkan pada operasi $\otimes$ matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times p}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ dinotasikan $A \otimes B$ didefinisikan oleh $[A \otimes B]_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{p} a_{i,k} \otimes b_{k,j} = \max\limits_{k \in H_p}\{a_{i,k} + b_{k,j}\}$ untuk $i \in H_m$ dan $j \in H_n$.

Proposisi 2.1.1. (Subiono, 2015) Beberapa sifat berikut berlaku untuk sebarang matriks A, B dan C dengan ukuran yang bersesuaian dan operasi matriks terdefinisi.

i. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

ii. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

iii. $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$

iv. $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$

v. $A \oplus A = A$

Pada matriks $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ memiliki sifat assosiatif, komutatif dan mempunyai elemen nol $\mathcal{E}(m, n)$ terhadap operasi $\oplus$. Selain itu, terdapat sifat assosiatif , distributif atas $\oplus$ dan mempunyai elemen satuan $E(n, n)$ serta elemen penyerap $\mathcal{E}(m, n)$ terhadap operasi $\otimes$. Dalam matriks $(\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dengan elemen nol $\mathcal{E}$ dan elemen satuan E, tetapi bukan dikatakan semiring komutatif sebagaimana $A \otimes B \neq B \otimes A$. Perlu diketahui, bahwa matriks $\mathcal{E}(m, n)$ merupakan matriks ukuran $m \times n$ dengan setiap elemen adalah ε serta matriks $\mathcal{E}(m, n)$ dapat ditulis $\mathcal{E}$ dan matriks $E(n, n)$ merupakan matriks ukuran $m \times n$ yang didefinisikan

$$[E(m, n)]_{i,j} = \begin{cases} e, & \text{untuk } i = j, \\ \varepsilon, & \text{untuk } i \neq j. \end{cases}$$

Ketika $m = n$, maka matriks $E(n, n)$ dinamakan matriks identitas, serta matriks $E(n, n)$ dapat ditulis E. Dalam hal ini berlaku untuk setiap matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ yaitu

$$A \oplus \mathcal{E}(m, n) = \mathcal{E}(m, n) \oplus A,$$
$$A \otimes E(n, n) = A = E(m, m) \otimes A.$$

2.2 Aljabar *Supertropical*

Pada bagian ini diuraikan aljabar *tropical* dan aljabar *supertropical* untuk mengatasi penyelesaian sistem persamaan linear atas aljabar *max-plus* interval. Aljabar *max-plus* dapat dikatakan aljabar *tropical* karena berdasarkan definisi dibawah ini.

Definisi 2.2.1. (Yulianti, 2016) Aljabar *tropical* adalah suatu semiring idempoten sekaligus semifield.

Contoh 2.2.1. Diberikan semiring aljabar *max-plus* $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ dimana $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ dan memiliki operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$, sebagaimana didefinisikan bila $\forall p, q \in \mathbb{R}_\varepsilon$ sebagai berikut :

$$p \oplus q = \max\{p, q\} \text{ dan } p \otimes q = p + q$$

Kemudian dijelaskan perluasan aljabar *tropical* pada kasus aljabar *max-plus*, bahwasanya dalam aljabar *max-plus* tidak mempunyai elemen invers terhadap operasi $\oplus$. Misal diberikan $p \in \mathbb{R}_\varepsilon$ maka tidak terdapat $q \in \mathbb{R}_\varepsilon$ sehingga $p \oplus q = q \oplus p = \varepsilon$, kecuali $p = \varepsilon$ dimana ε adalah elemen nol. Sebagaimana dijelaskan pada proposisi sebagai berikut.

Proposisi 2.2.1. (Yulianti, 2016) Diberikan semiring $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$. Idempoten terhadap $\oplus$ berakibat bahwa elemen invers terhadap operasi $\oplus$ tidak ada.

Misalkan bahwa $a \neq \varepsilon$ mempunyai suatu invers terhadap $\oplus$ yaitu b didapat

$$p \oplus q = \varepsilon$$

kedua ruas persamaan ditambahkan elemen p, diperoleh

$$p \oplus (p \oplus q) = p \oplus \varepsilon$$
$$(p \oplus p) \oplus q = p \oplus \varepsilon$$

sesuai dengan sifat idempoten maka persamaan menjadi

$$p \oplus q = p$$

hal ini tidak sesuai dengan $p \oplus q = \varepsilon$ dan $a \neq \varepsilon$.

Berdasarkan Proposisi 2.2.1 maka struktur semiring aljabar *max-plus* diperluas menjadi *extended* semiring *tropical* dengan memunculkan elemen baru yaitu elemen *ghost*. Untuk mengetahui lebih lanjut tentang *extended* semiring *tropical* maka perhatikan beberapa definisi sebagai berikut.

Definisi 2.2.2. (Yulianti, 2016) *Extended* semiring *tropical* dinotasikan sebagai $(T, \oplus, \otimes)$ dengan $T = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \mathbb{R}^v$, dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\mathbb{R}^v = a^v : a \in \mathbb{R}$. Elemen netral pada T adalah $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$ dan elemen satuan $e \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Dalam hal ini $\mathbb{R}^v_{-\infty} = \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ merupakan ideal dari T disebut ideal *ghost*. Sedangkan pemetaan $v : T \longrightarrow \mathbb{R}^v_{-\infty}$ disebut pemetaan *ghost*. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}^v_{-\infty}$ maka $v(x) = x$ merupakan pemetaan identitas dan untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ maka $v(a) = a^v$.

Definisi 2.2.3. (Yulianti, 2016) Diberikan *Extended* semiring *tropical* T. Didefinisikan relasi urutan parsial $\prec$ pada T sebagai berikut :

Untuk $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall a^v, b^v \in \mathbb{R}^v$ dan $\forall x, y \in T$ berlaku :

1. $-\infty \prec x, \forall x \in T \backslash \{-\infty\}$.
2. Untuk setiap bilangan real $a \prec b$ maka $a \prec b, a \prec b^v$, dan $a^v \prec b^v$.
3. $a \prec a^v$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya, dibahas aljabar *supertropical* merupakan *extended* semiring *tropical*. Diberikan semiring $R \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T} \cup \{-\infty\} \cup \mathcal{G}$ dan suatu ideal $\mathcal{G}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G} \cup \{-\infty\}$ disebut ideal *ghost* yang merupakan ideal dari semiring R. Pemetaan $v : R \longrightarrow \mathcal{G}_0$ disebut pemetaan *ghost*, pemetaan v merupakan pemetaan homomorfisma idempoten yang memenuhi $v(x) = x \oplus x, \forall x \in R$ dan $v^2(x) = v(x)$. Dalam hal ini $\mathcal{T} = R \backslash \mathcal{G}_0$ adalah himpunan yang anggotanya elemen *tangible*, sedangkan $\mathcal{G}$ adalah himpunan yang anggotanya merupakan elemen *ghost*.

Definisi 2.2.4. (Yulianti, 2016) Semiring dengan *ghost* $(R, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring R (dengan elemen netral 0_R dan elemen satuan 1_R). $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \cup 0_R$ disebut ideal ghost, sedangkan $v : R \longrightarrow \mathcal{G}_0$ disebut pemetaan *ghost* yang memenuhi :

$$v(x) = x \oplus x, \forall x \in R$$

Untuk $\forall x \in \mathcal{G}_0$, pemetaan *ghost* merupakan pemetaan identitas yang memenuhi

$$v(x) = x, \forall x \in \mathcal{G}_0$$

Pemetaan *ghost* merupakan pemetaan homomorfisma idempoten yang memenuhi

$$v^2(x) = v(x), \forall x \in R$$

Definisi 2.2.5. (Yulianti, 2016) Semiring *supertropical* merupakan semiring dengan ghost $(R, \mathcal{G}_0, v)$ yang memenuhi beberapa sifat tambahan yaitu $\forall p, q \in R$ berlaku :

$$\text{jika } p^v = q^v \text{ maka } p \oplus q = p^v$$

dan

$$\text{jika } p \neq q \text{ maka } p \oplus q \in \{p, q\}$$

Dalam hal ini himpunan $\mathbb{R}$ diidentifikasi sebagai $\mathcal{T}$ yaitu himpunan yang anggotanya merupakan elemen *tangible*. $\mathbb{R}^v$ diidentifikasi sebagai $\mathcal{G}$ yaitu himpunan yang anggotanya merupakan elemen *ghost* dan *extended* semiring *tropical* T diidentifikasi sebagai R. Dengan demikian *extended* semiring *tropical* T adalah kasus dari semiring *supertropical* R.

Pada semiring *supertropical* R, untuk setiap $p \in R$ maka $p \oplus p = -\infty$ hanya berlaku untuk $p = -\infty$ sedangkan untuk setiap $p \in \mathcal{T}$ maka $p \oplus p = p^v$ dan untuk setiap $p \in \mathcal{G}$ maka $p \oplus p = p$. Selanjutnya akan diperkenalkan suatu relasi *ghost surpass* pada R berikut ini.

Definisi 2.2.6. (Yulianti, 2016) Diberikan *supertropical* R. Relasi $\models$ merupakan relasi *ghost surpass* pada R yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\text{bila } p = q \oplus r, \text{ untuk beberapa } r \in \mathcal{G}_0, \text{ maka } p \models q.$$

Catatan bahwa dalam Definisi 2.2.6, banyaknya $r \in \mathcal{G}_0$ bisa lebih dari satu. Selanjutnya untuk lebih memahami Definsi 2.2.6 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.2.2. Diberikan *supertropical* di R dengan relasi *ghost surpass* maka berlaku sebagai berikut :

1. Untuk $r \in \mathcal{G}_0$ banyaknya satu, karena $7^v = 5 \oplus 7^v$ dan $7^v \in \mathcal{G}_0$, maka $7^v \models 5$. Dalam hal ini ada $r = 7^v$ hanya satu-satu yang memenuhi $7^v \models 5$.

2. Untuk $r \in \mathcal{G}_0$ banyaknya lebih dari satu, karena $6 = 6 \oplus \varepsilon$ dan $\varepsilon \in \mathcal{G}_0$, maka $6 \models 6$, dalam hal ini $r = \varepsilon$. Adapun nilai r yang lain bisa diperoleh sebagai berikut, $6 = 6 \oplus r$, dengan $r \prec_v 6$ dan $r \in \mathcal{G}_0$. Terlihat bahwa banyaknya r lebih dari satu.

Selain itu diberikan kasus yang tidak berlaku untuk Definisi 2.2.6, misal karena $9 = 8 \oplus r$, maka yang mungkin nilai dari $r = 9 \notin \mathcal{G}_0$, jadi $9 \nvDash 8$.

Berikutnya dibahas sifat-sifat relasi *ghost surpass* pada R, untuk setiap $p, q, r, s \in R$ berlaku :

1. Sifat antisimetri jika $p \vDash q$ dan $q \vDash p,$ maka $p = q$.
2. Sifat transitif jika $p \vDash q$ dan $r \vDash s,$ maka $p \oplus r \vDash q \oplus s$ dan $p \otimes r \vDash q \otimes s$.
3. Sifat tidak simetri untuk setiap $p \in \mathcal{T}, p^v \vDash p$ akan tetapi $p \nvDash p^v$.

Selanjutnya sebagai pengganti relasi dalam aljabar *supertropical* digunakan relasi *ghost surpass* "$\vDash$".

Beberapa definisi menjelaskan mengenai relasi *ghost surpass* pada aljabar *supertropical* R :

Definisi 2.2.7. (Yulianti, 2016) Diberikan $p \in R$ dan $q \in \mathcal{T}$ maka

$$p \vDash q \Leftrightarrow p \otimes q \in \mathcal{G}_0$$

dan

$$p \vDash \varepsilon \Leftrightarrow p \in \mathcal{G}_0$$

Definisi 2.2.8. (Yulianti, 2016) Diberikan $p, q \in \mathcal{T}$ maka

$$p \vDash q \Leftrightarrow p = q$$

Definisi 2.2.9. (Yulianti, 2016) Diberikan $p \in \mathcal{G}_0$ dan $b \in R$ maka

$$p \vDash q \Leftrightarrow p \succcurlyeq_v q$$

Definisi 2.2.10. (Yulianti, 2016) Diberikan $p \in R$, maka

$$p \vDash \varepsilon \Leftrightarrow p = \varepsilon \otimes r \text{ untuk beberapa } r \in \mathcal{G}_0.$$

Definisi 2.2.11. (Yulianti, 2016) Diberikan $p \in R$, maka

$$p \vDash \varepsilon \Leftrightarrow p \in \mathcal{G}_0.$$

Berikutnya, diuraikan mengenai himpunan penyelesaian persamaan pada R dengan menggunakan relasi *ghost surpass*. Diberikan $p \in \mathcal{T}$ dan $x \in R$ sebagai berikut (Yulianti, 2016) :

1. $x \vDash p$, maka himpunan penyelesaian dari x adalah

$$\{p\} \cup \{c^v | c \in \mathcal{T} \text{ dan } c \succcurlyeq_v p\}$$

2. $x \vDash p^v$, maka himpunan penyelesaian dari x adalah

$$\{c^v | c \in \mathcal{T} \text{ dan } c \succcurlyeq_v p\}$$

3. $x \vDash \varepsilon$, maka himpunan penyelesaian dari x adalah

$$\{\varepsilon\} \cup \{c^v | c \in \mathcal{T}\}$$

Contoh 2.2.3. Diberikan persamaan dari R dengan relasi *ghost surpass* mempunyai himpunan penyelesaian sebagai berikut :

1. $x \vDash 2$, maka himpunan penyelesaian dari x adalah

$$\{2\} \cup \{c^v | c \in \mathcal{T} \text{ dan } c \succcurlyeq_v 2\}$$

2. $x \vDash 7^v$, maka himpunan penyelesaian dari x adalah

$$\{c^v | c \in \mathcal{T} \text{ dan } c \succcurlyeq_v 7\}$$

3. $x \vDash \varepsilon$, maka himpunan penyelesaian dari x adalah

$$\{\varepsilon\} \cup \{c^v | c \in \mathcal{T}\}$$

Selanjutnya, akan dibahas vektor di R, namun sebelumnya diketahui vektor dari $\mathbb{R}^n_{\max}$ pada aljabar *tropical*, selanjutnya diperluas menjadi vektor pada aljabar *supertropical* yang dinotasikan R^n sebagaimana yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.12. (Yulianti, 2016) Diberikan $a \in R^n$ dan $b \in \mathcal{T}_0^n$, dengan

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n)^T \in R^n$$

dan

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in \mathcal{T}_0^n.$$

maka

$$a \vDash b \leftrightarrow a \oplus b \in \mathcal{G}_0^n$$

ekuivalen dengan

$$a_i \vDash b_i \leftrightarrow (a_i \oplus b_i) \in \mathcal{G}_0 \text{ untuk setiap } i \in \underline{n}.$$

Contoh 2.2.4. Diberikan $a \in R^3$ dan $b \in \mathcal{T}_0^3$ dengan

$$a = \begin{bmatrix} 2^v \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

maka berlaku

$$\begin{bmatrix} 2^v \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \vDash \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2^v \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^v \\ 3^v \\ 4^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

Berdasarkan Definisi 2.2.12 dengan relasi *ghost surpass* maka berlaku :

1. Jika $a \in \mathcal{T}_0^n$ maka untuk setiap $i \in n$, $a_i \vDash b_i \leftrightarrow a_i = b_i$.
2. Jika $a \in \mathcal{G}_0^n$ maka untuk setiap $i \in n$, $a_i \vDash b_i \leftrightarrow a_i \succcurlyeq_v b_i$.

Contoh 2.2.5. Diberikan beberapa kasus dengan $b \in \mathcal{T}_0^3$ sebagai berikut :

1. Diberikan $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_0^3$ dan $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

   maka $a \vDash b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \vDash \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. Diberikan $a = \begin{bmatrix} 1^v \\ 2^v \\ 3^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$ dan $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

   maka $a \vDash b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1^v \\ 2^v \\ 3^v \end{bmatrix} \vDash \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1^v \\ 2^v \\ 3^v \end{bmatrix} \succcurlyeq_v \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Selanjtunya, mengikuti pembahasan vektor maka matriks dari $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ pada aljabar *tropical* menjadi matriks pada semiring *supertropical* yang dinotasikan $M_n(R)$ untuk matriks persegi yang berukuran $n \times n$ dan $M_{m\times n}(R)$ untuk matriks tak persegi yang berukuran $m \times n$, dimana entri-entri matriks merupakan elemen dari R. Adapun operasi biner pada R yaitu $\oplus$ dan $\otimes$. Selanjutnya, relasi *ghost surpass* pada R juga dapat diperluas pada matriks $M_n(R)$ dan $M_{m\times n}(R)$, misal $A \vDash B$ maka $a_{ij} \vDash b_{ij}$ untuk setiap $i \in H_m$ dan $j \in H_m$.

Definisi 2.2.13. (Yulianti, 2016) Determinan *supertropical* $|A|$ dari $A = (a_{i,j}) \in M_n(R)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$|A| = \bigoplus_{\sigma\in S_n} a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes a_{3,\sigma(3)} \otimes \cdots \otimes a_{n,\sigma(n)}$$

dimana $\sigma \in S_n$ dengan S_n adalah himpunan semua permutasi $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Contoh 2.2.6. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 4^v & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ dimana $A \in M_3(R)$.

Ukuran matriks 3 dengan permutasi $\{1, 2, 3\}$ sehingga ada 3! = 6 permutasi, selanjutnya diperoleh permutasi $\{1, 2, 3\}$ sebagai berikut :

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

maka determinan dari matriks A

$$\begin{aligned}
|A| =& \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
=&(a_{11} \otimes a_{22} \otimes a_{33}) \oplus (a_{11} \otimes a_{23} \otimes a_{32}) \oplus (a_{12} \otimes a_{21} \otimes a_{33}) \\
&\oplus (a_{12} \otimes a_{23} \otimes a_{31}) \oplus (a_{13} \otimes a_{21} \otimes a_{32}) \oplus (a_{13} \otimes a_{22} \otimes a_{31}) \\
|A| =& \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 4^v & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \\
=&(5 \otimes 4^v \otimes 6) \oplus (5 \otimes 7 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 2 \otimes 6) \oplus (3 \otimes 7 \otimes 1) \\
&\oplus (7 \otimes 2 \otimes 2) \oplus (7 \otimes 4^v \otimes 1) \\
=&15^v \oplus 14 \oplus 11 \oplus 11 \oplus 11 \oplus 12^v \\
|A| =&15^v
\end{aligned}$$

Contoh 2.2.7. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ dimana $A \in M_3(R)$.

Ukuran matriks 3 dengan permutasi $\{1, 2, 3\}$ sehingga ada 3! = 6 permutasi, selanjutnya diperoleh permutasi $\{1, 2, 3\}$ sebagai berikut :

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

maka determinan dari matriks A

$$\begin{aligned}
|A| =& \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
=&(a_{11} \otimes a_{22} \otimes a_{33}) \oplus (a_{11} \otimes a_{23} \otimes a_{32}) \oplus (a_{12} \otimes a_{21} \otimes a_{33}) \\
&\oplus (a_{12} \otimes a_{23} \otimes a_{31}) \oplus (a_{13} \otimes a_{21} \otimes a_{32}) \oplus (a_{13} \otimes a_{22} \otimes a_{31}) \\
|A| =& \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \\
=&(5 \otimes 4 \otimes 6) \oplus (5 \otimes 7 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 2 \otimes 6) \oplus (3 \otimes 7 \otimes 1) \\
&\oplus (7 \otimes 2 \otimes 2) \oplus (7 \otimes 4 \otimes 1) \\
=&15 \oplus 14 \oplus 11 \oplus 11 \oplus 11 \oplus 12 \\
|A| =&15
\end{aligned}$$

Definisi 2.2.14. (Yulianti, 2016) Diberikan matriks $A \in M_n(R)$, minor entri $a_{i,j}$ dinyatakan dengan $M_{i,j}$ dan didefinisikan sebagai determinan dari matriks setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Sedangkan kofaktor dari $a_{i,j}$ dituliska sebagai $\mathrm{cof}_{i,j} = M_{i,j}$. Matriks kofaktor dari A ditulis sebagai berikut :

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{bmatrix} \mathrm{cof}_{11} & \cdots & \mathrm{cof}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cof}_{m1} & \cdots & \mathrm{cof}_{mn} \end{bmatrix}$$

Sedangkan adjoin A dinyatakan sebagai $\mathrm{adj}(A) = (\mathrm{Cof}(A))^T$.

Cara lain untuk medapatkan determinan dari matriks A dengan menghitung ekpansi kofaktor sepanjang baris ke-i atau sepanjang kolom ke-j sebagai berikut :

1. Ekspansi baris ke-i

$$|A| = \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes \mathrm{cof}_{ij}(A)$$

2. Ekspansi kolom ke-j

$$|A| = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ij} \otimes \mathrm{cof}_{ij}(A)$$

Contoh 2.2.8. Berdasarkan Contoh 2.2.6 dengan matriks $A \in M_3(R)$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 4^v & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

diperoleh kofaktor dari A sebagai berikut :

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{bmatrix} 10 & 8^v & 5^v \\ 9^v & 11 & 7 \\ 11^v & 12 & 9^v \end{bmatrix}$$

maka ditemukan adjoin A sebagai berikut :

$$\mathrm{adj}(A) = (\mathrm{Cof}(A))^T = \begin{bmatrix} 10 & 9^v & 11^v \\ 8^v & 11 & 12 \\ 5^v & 7 & 9^v \end{bmatrix}$$

selanjutnya determinan A dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i pada baris kedua sebagai berikut :

$$|A| = (a_{21} \otimes \mathrm{cof}_{21}) \oplus (a_{22} \otimes \mathrm{cof}_{22}) \oplus (a_{23} \otimes \mathrm{cof}_{23})$$
$$|A| = (2 \otimes 9^v) \oplus (4^v \otimes 11) \oplus (7 \otimes 7)$$
$$|A| = 11^v \oplus 15^v \oplus 14 = 15^v$$

adapun determinan A dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j pada kolom ketiga sebagai berikut :

$$|A| = (a_{13} \otimes \mathrm{cof}_{13}) \oplus (a_{23} \otimes \mathrm{cof}_{23}) \oplus (a_{33} \otimes \mathrm{cof}_{33})$$
$$|A| = (7 \otimes 5^v) \oplus (7 \otimes 7) \oplus (6 \otimes 9^v)$$
$$|A| = 12^v \oplus 14 \oplus 15^v = 15^v$$

Definisi 2.2.15. (Yulianti, 2016) Suatu matriks persegi $A \in M_n(R)$ atas aljabar *supertropical* disebut non singular jika $|A| \in \mathcal{T}_0$ dan singular jika $|A| \in \mathcal{G}_0$.

Contoh 2.2.9. Berdasarkan Contoh 2.2.6 bahwa matriks A mempunyai nilai $|A| = 15^v$, maka hal ini $|A| \in \mathcal{G}_0$ sehingga matriks A singular.

Contoh 2.2.10. Berdasarkan Contoh 2.2.7 bahwa matriks A mempunyai nilai $|A| = 15$, maka hal ini $|A| \in \mathcal{T}_0$ sehingga matriks A non singular.

2.3 Aljabar *Max-Plus* Interval

Pada bagian ini dijelaskan konsep dasar aljabar *max-plus* interval. Dalam (Rudhito, 2011) menjelaskan tentang aljabar *max-plus* interval merupakan Interval (tertutup) dalam $\mathbb{R}_\varepsilon$ yang terbentuk $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_\varepsilon | \underline{x} \preceq_{\max} x \preceq_{\max} \overline{x}\}$. Elemen $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dapat dinyatakan sebagai interval $\mathbf{x} = [x, x]$. Didefinisikan $\mathbb{I}(\mathbb{R})_\varepsilon = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] | \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}, \varepsilon \prec_{\max} \underline{x} \preceq_{\max} \overline{x}\} \cup \{\varepsilon, \varepsilon\}$. Pada $\mathbb{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ oleh

$$\mathbf{x} \,\overline{\oplus}\, \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}] \text{ dan } \mathbf{x} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}], \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$$

Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{I}(\mathbb{R}_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $\mathbf{0} = [0, 0]$. Lebih lanjut $\mathbb{I}(\mathbb{R}_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif. Kemudian $\mathbb{I}(\mathbb{R}_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut dengan aljabar *max-plus* interval yang cukup dituliskan dengan $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$.

Contoh 2.3.1.
1. $[-2\ ,\ 5] \,\overline{\oplus}\, [1\ ,\ 3] = [-2 \oplus 1\ ,\ 5 \oplus 3] = [1\ ,\ 5]$.
2. $[-2\ ,\ 5] \,\overline{\otimes}\, [1\ ,\ 3] = [-2 \otimes 1\ ,\ 5 \otimes 3] = [-1\ ,\ 8]$.

$\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$ diperluas menjadi vektor interval dan matriks interval sebagai pokok bahasan dalam menyelesaikan persamaan linear aljabar *max-plus* interval, untuk mengenal lebih dekat akan dibahas beberapa definisi dan proposisi sebagai berikut.

Definisi 2.3.1. (Rudhito, 2011) Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen dalam $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$ dinotasikan dengan $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m \times n}$ yaitu $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m \times n} = \{\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{i,j}] | \mathbf{A}_{i,j} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$, untuk $i \in H_m$ dan $j \in H_n\}$. Matriks anggota $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m \times n}$ disebut matriks interval *max-plus*. Selanjutnya matriks interval *max-plus* cukup disebut dengan matriks interval.

Definisi 2.3.2. (Rudhito, 2011) Untuk $\mathbf{A} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan matriks $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}], \underline{A} = [\underline{A}_{i,j}]$ dan $\overline{A} = [\overline{A}_{i,j}]$, untuk setiap $\underline{A}_{i,j}, \overline{A}_{i,j} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, masing-masing disebut matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks interval $\mathbf{A}$.

Contoh 2.3.2. Diberikan matriks $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [2\ ,\ 4] & [-1\ ,\ 3] \\ [0\ ,\ 5] & [1\ ,\ 2] \end{bmatrix}, \text{maka } \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3.3. (Rudhito, 2011) Diberikan matriks interval $\mathbf{A} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m \times n}$, dengan $\underline{A}$ batas bawah dan $\overline{A}$ batas atas. Didefinisikan interval matriks $\mathbf{A} = \{[\underline{A}, \overline{A}] | \underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}, \underline{A} \preceq_{\max} A \preceq_{\max} \overline{A}\}$.

Contoh 2.3.3. Diberikan matriks $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [2\ ,\ 4] & [-1\ ,\ 3] \\ [0\ ,\ 5] & [1\ ,\ 2] \end{bmatrix}, \text{maka } [\underline{A}\ ,\ \overline{A}] = \left[\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ ,\ \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

Definisi 2.3.4. (Siswanto, 2014) Himpunan $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai himpunan $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{1 \times n}$. Didefinisikan $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{n} = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] = [\mathbf{x}_j] | \mathbf{x}_j \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{n}, j = 1, 2, \cdots, n\}$. Unsur-unsur dalam $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{n}$ disebut vektor interval dalam $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{n}$.

Diketahui $\alpha \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m \times n}$. Kemudian didefinisikan operasi perkalian skalar $\overline{\otimes}$ dengan $\alpha \overline{\otimes} \mathbf{A}$ adalah matriks unsur ke-ij-nya : $(\alpha \overline{\otimes} \mathbf{A}_{ij}) = \alpha \overline{\otimes} \mathbf{A}_{ij}$ dan operasi $\overline{\oplus}$ dengan $\mathbf{A} \overline{\oplus} \mathbf{B}$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya : $(\mathbf{A} \overline{\oplus} \mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ij} \overline{\oplus} \mathbf{B}_{ij}$ untuk $i \in H_m$ dan $j \in H_n$. Diketahui $\mathbf{A} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{mxp}, \mathbf{B} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{nxp}$. Kemudian didefinisikan operasi $\overline{\otimes}$ dengan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B}$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya : $(\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ij} = \overline{\bigoplus}_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{ik} \overline{\otimes} \mathbf{B}_{kj}$ untuk $i \in H_m$ dan $j \in H_n$.

Contoh 2.3.4. Diberikan skalar interval dan matriks interval sebagai berikut :

$$\begin{aligned}[-1\ ,\ 5] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [2\ ,\ 7] & [-4\ ,\ -1] \\ [0\ ,\ 2] & [-2\ ,\ 3] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [-1 \otimes 2\ ,\ 5 \otimes 7] & [-1 \otimes -4\ ,\ 5 \otimes -1] \\ [-1 \otimes 0\ ,\ 5 \otimes 2] & [-1 \otimes -2\ ,\ 5 \otimes 3] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [1\ ,\ 12] & [-5\ ,\ 4] \\ [-1\ ,\ 7] & [-3\ ,\ 8] \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Proposisi 2.3.1. (Rudhito, 2011) Pernyataan-pernyataan berikut berlaku sebarang skalar interval α dan β, dan sebarang matriks interval $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dan $\mathbf{C}$ asalkan operasi yang dimaksud terdefinisi.

1. $(\mathbf{A} \overline{\oplus} \mathbf{B}) \overline{\oplus} \mathbf{C} = \mathbf{A} \overline{\oplus} (\mathbf{B} \overline{\oplus} \mathbf{C})$

2. $\mathbf{A} \overline{\oplus} \mathbf{B} = \mathbf{B} \overline{\oplus} \mathbf{A}$

3. $(\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B}) \overline{\otimes} \mathbf{C} = \mathbf{A} \overline{\otimes} (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{C})$

4. $\mathbf{A} \overline{\otimes} (\mathbf{B} \overline{\oplus} \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B}) \overline{\oplus} (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{C})$

5. $(\mathbf{A} \overline{\oplus} \mathbf{B}) \overline{\otimes} \mathbf{C} = (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{C}) \overline{\oplus} (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{C})$

6. $\alpha \overline{\otimes} \mathbf{A} = \mathbf{A} \overline{\otimes} \alpha$

7. $\alpha \overline{\otimes} (\beta \overline{\otimes} \mathbf{A}) = (\alpha \overline{\otimes} \beta) \overline{\otimes} \mathbf{A}$

8. $\alpha \overline{\otimes} \mathbf{A} = \mathbf{A} \overline{\otimes} \alpha$

9. $\alpha \overline{\otimes} (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B}) = (\alpha \overline{\otimes} \mathbf{A}) \overline{\otimes} \mathbf{B} = \mathbf{A} \overline{\otimes} (\alpha \overline{\otimes} \mathbf{B})$

10. $(\alpha \overline{\oplus} \beta) \overline{\otimes} \mathbf{A} = (\alpha \overline{\otimes} \mathbf{A}) \overline{\oplus} (\beta \overline{\otimes} \mathbf{A})$

11. $\alpha \overline{\otimes} (\mathbf{A} \overline{\oplus} \mathbf{B}) = (\alpha \overline{\otimes} \mathbf{A}) \overline{\oplus} (\alpha \overline{\otimes} \mathbf{B})$

12. $\mathbf{A} \overline{\oplus} \mathbf{A} = \mathbf{A}$

Definisi 2.3.5. (Rudhito, 2011) Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}]$ dan $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m\times n}$ dikatakan sama jika $\underline{A} = \underline{B}$ dan $\overline{A} = \overline{B}$.

Berdasarkan sifat kekonsistenan relasi urutan $\preceq_{\max}$ dalam matriks, didefiniskan operasi-operasi interval matriks sebagai berikut :

1. Diketahui $\alpha \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}, [\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m\times n}$. Didefinisikan $\alpha \overline{\otimes} [\underline{A}, \overline{A}] = [\alpha \otimes \underline{A}, \alpha \otimes \overline{A}]$ dan $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$.

2. Diketahui $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m\times p}, [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{p\times n}$. Didefinisikan $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Proposisi 2.3.2. (Rudhito, 2011) Pernyataan-pernyataan berikut berlaku untuk sebarang skalar interval α dan β, dan sebarang interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}]$ dan $[\underline{C}, \overline{C}]$, yang berturut-turut merupakan interval matriks dari matriks $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dan $\mathbf{C}$, asalkan operasi yang dimaksud terdefinisi.

1. $([\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}]) \overline{\oplus} [\underline{C}, \overline{C}] = [\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} ([\underline{B}, \overline{B}] \overline{\oplus} [\underline{C}, \overline{C}])$

2. $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{B}, \overline{B}] \overline{\oplus} [\underline{A}, \overline{A}]$

3. $([\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}]) \overline{\otimes} [\underline{C}, \overline{C}] = [\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} ([\underline{B}, \overline{B}] \overline{\otimes} [\underline{C}, \overline{C}])$

4. $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} ([\underline{B}, \overline{B}] \overline{\oplus} [\underline{C}, \overline{C}]) = [([\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}]) \overline{\oplus} ([\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{C}, \overline{C}])$

5. $([\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}]) \overline{\otimes} [\underline{C}, \overline{C}] = ([\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{C}, \overline{C}]) \overline{\oplus} ([\underline{B}, \overline{B}] \overline{\otimes} [\underline{C}, \overline{C}])$

6. $\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}] = [\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\otimes}\, \alpha$

7. $\alpha \,\overline{\otimes}\, (\beta \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}]) = (\alpha \,\overline{\otimes}\, \beta) \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}]$

8. $\alpha \,\overline{\otimes}\, ([\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{B}, \overline{B}]) = (\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}]) \,\overline{\otimes}\, [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\otimes}\, (\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{B}, \overline{B}])$

9. $(\alpha \,\overline{\oplus}\, \beta) \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}] = (\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}]) \,\overline{\oplus}\, (\beta \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}])$

10. $\alpha \,\overline{\otimes}\, ([\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\oplus}\, [\underline{B}, \overline{B}]) = (\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}]) \,\overline{\oplus}\, (\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{B}, \overline{B}])$

11. $[\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\oplus}\, [\underline{A}, \overline{A}] = [\underline{A}, \overline{A}]$.

2.4 Sistem Persamaan Linear Aljabar *Max-Plus*

Sebelum menjelaskan sistem persamaan linear dalam aljabar *supertropical*, perlu diketahui sistem persamaan linear aljabar *max-plus* dengan menggunakan matriks *discrepancy* sebagai berikut.
Persamaan $A \otimes x = b$ dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

untuk $A \in (\mathbb{R})_{\max}^{m \times n}$ dan $x, b \in (\mathbb{R})_{\max}^{n}$. Dalam penyelesaian persamaan $A \otimes x = b$, untuk semua elemennya berhingga maka diperoleh penyelesaian x yaitu

$$a_{i,j} + x_j \leq b_i, \text{ untuk semua } i \in H_m \text{ dan } j \in H_n.$$

Pertaksamaan ini dapat diperlakukan secara terpisah untuk setiap j, didapat

$$a_{i,1} + x_1 \leq b_i \text{ atau } x_1 \leq b_i - a_{i,1}$$

atau

$$x_1 \leq \min\{(b_1 - a_{1,1}), (b_2 - a_{2,1}), \cdots, (b_m - a_{m,1})\}$$

Jadi, bila sistem mempunyai penyelesaian haruslah memenuhi

$$x_1 \leq \min\{(b_1 - a_{1,1}), (b_2 - a_{2,1}), \cdots, (b_m - a_{m,1})\}$$

Dengan demikian penyelesaian x yang mungkin memenuhi

$$\begin{aligned}
x_1 &\leq \min\{(b_1 - a_{1,1}), (b_2 - a_{2,1}), \cdots, (b_m - a_{m,1})\} \\
x_2 &\leq \min\{(b_1 - a_{1,2}), (b_2 - a_{2,2}), \cdots, (b_m - a_{m,2})\} \\
&\vdots \\
x_n &\leq \min\{(b_1 - a_{1,n}), (b_2 - a_{2,n}), \cdots, (b_m - a_{m,n})\}
\end{aligned}$$

Jadi, calon penyelesaian dari $A \otimes x = b$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{dengan} \begin{cases} x_1 & = \min\{(b_1 - a_{1,1}), (b_2 - a_{2,1}), \cdots, (b_m - a_{m,1})\} \\ x_2 & = \min\{(b_1 - a_{1,2}), (b_2 - a_{2,2}), \cdots, (b_m - a_{m,2})\} \\ & \vdots \\ x_n & = \min\{(b_1 - a_{1,n}), (b_2 - a_{2,n}), \cdots, (b_m - a_{m,n})\} \end{cases}$$

Selanjutnya didefinisikan matriks **discrepancy** (ketidaksamaan) dinotasikan oleh $D_{A,b}$ dengan

$$D_{A,b} = \begin{bmatrix} b_1 - a_{1,1} & b_1 - a_{1,2} & \cdots & b_1 - a_{1,n} \\ b_2 - a_{2,1} & b_2 - a_{2,2} & \cdots & b_2 - a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_m - a_{m,1} & b_m - a_{m,2} & \cdots & b_m - a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Catatan bahwa, minimum dari setiap kolom $D_{A,b}$ adalah elemen dari x. Selanjutnya didefinisikan matriks tereduksi ketaksesuaian $R_{A,b}$ oleh

$$R_{A,b} = [r_{i,j}] \text{ dengan } r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{bila } d_{i,j} = \text{minimum dari kolom ke } j \\ 0, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Proposisi 2.4.1. (Subiono, 2015) Diberikan persamaan $A \otimes x = b$ dengan ukuran A adalah $m \times n$, x berukuran $n \times 1$ dan b berukuran $m \times 1$ yang semua elemennya berhingga. Bila suatu baris dari matriks $R_{A,b}$ semua elemennya bernilai 0, maka $A \otimes x = b$ tidak punya penyelesaian. Bila setidaknya pada setiap baris matriks $R_{A,b}$ memuat elemen bernilai 1, maka x adalah suatu penyelesaian dari $A \otimes x = b$.

Namun hasil penyelesaian $A \otimes x = b$ pada Proposisi 2.4.1 belum menunjukkan penyelesaian tunggal atau penyelesaian tidak tunggal. Untuk hal ini diperlukan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.4.1. (Subiono, 2015) Elemen bernilai 1 pada suatu baris $R_{A,b}$ dinamakan elemen **peubah ubah** bila

- bila nilai 1 hanya satu-satunya pada baris tersebut atau
- bila nilai tersebut pada kolom yang sama seperti halnya hanya satu-satunya nilai 1.

Sisa nilai 1 lainnya dinamakan elemen **slack**.

Proposisi 2.4.2. (Subiono, 2015) Diberikan persamaan $A \otimes x = b$ dengan ukuran A adalah $m \times n$, x berukuran $n \times 1$ dan b berukuran $m \times 1$ yang semua elemennya berhingga. Tambahan pula, persamaan $A \otimes x = b$ mempunyai penyelesaian. Bila setiap baris dari matriks $R_{A,b}$ hanya ada satu bernilai 1, maka penyelesaian $A \otimes x = b$ tunggal. Bila ada elemen slack pada matriks $R_{A,b}$, maka penyelesaian dari $A \otimes x = b$ adalah tidak tunggal.

Selanjutnya diberikan ilustrasi mengenai penyelesaian $A \otimes x = b$ aljabar *max-plus* sebagaimana pada contoh berikut :

Contoh 2.4.1. Selesaikan $A \otimes x = b$, bila

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matriks ketaksesuaian

$$D_{A,b} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

dan

$$R_{A,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

perhatikan bahwa setiap kolom matriks $R_{A,b}$ hanya terdapat tepat satu elemen bernilai 1 dan setiap baris memenuhi setidaknya satu elemen bernilai 1. Hal ini mengisyaratkan $A \otimes x = b$ hanya mempunyai tepat satu penyelesaian x dengan elemen-elemen adalah minimum dari setiap kolom matriks $D_{A,b}$, yaitu

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselediki bahwa

$$\begin{aligned} A \otimes x &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix} = b \end{aligned}$$

Perhatikan matriks $R_{A,b}$

$$R_{A,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

semua elemen 1 adalah peubah tetap. Persamaan baris pertama menetapkan elemen $x_1 = 4$ dan persamaan baris kedua menetapkan elemen $x_3 = 3$. Persamaan baris ketiga menetapkan elemen $x_4 = 2$ serta persamaan baris keempat menetapkan elemen $x_2 = 6$. Setiap elemen-elemen yang telah dipilih ini tidak bisa diubah, bila diubah yang lain akan membentuk pertaksamaan.

Contoh 2.4.2. Selesaikan $A \otimes x = b$, bila

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & -1 \\ -3 & -5 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Matriks ketaksesuaian

$$D_{A,b} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 11 & 8 \\ 8 & 10 & 2 & 12 \\ 8 & 9 & 4 & 9 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } R_{A,b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa setiap kolom matriks $R_{A,b}$ hanya terdapat setidaknya satu elemen bernilai 1, sedangkan baris ke-1, ke-2 dan ke-4 terdapat nilai 1 lebih dari satu. Hal ini mengisyarakatkan $A \otimes x = b$ mempunyai lebih dari satu (tak hingga) penyelesaian x dengan elemen adalah minimum dari setiap kolom matriks $D_{A,b}$, yaitu

$$x = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$\begin{aligned} A \otimes x &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & -1 \\ -3 & -5 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} = b \end{aligned}$$

Bisa diselidiki bahwa penyelesaian yang lain adalah

$$x = \begin{bmatrix} 8 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

dengan $c_1 \leq 5, c_2 \leq 2$ dan $c_3 \leq 7$.

Perhatikan matriks $R_{A,b}$

$$R_{A,b} = \begin{bmatrix} ① & 1 & 0 & 0 \\ ① & 0 & 1 & 0 \\ ① & 0 & 0 & 0 \\ ① & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

semua elemen ① adalah peubah tetap sedangkan semua elemen sisa lainnya yang bernilai 1 adalah elemen slack. Ada empat elemen slack. Persamaan baris pertama dua cara menetapkan elemen yaitu $x_1 = 8$ dan $x_2 = 5$. Elemen penyelesaian persamaan baris kedua juga ada dua cara yaitu $x_1 = 8$ dan $x_3 = 2$. Pada persamaan baris ketiga hanya satu cara yaitu $x_1 = 8$. Sedangkan persamaan baris keempat ada tiga cara yaitu $x_1 = 8$ dan $x_2 = 5$ dan $x_4 = 7$. Jadi untuk $x_2 \leq 5$ dan $x_3 \leq 2$ tidak akan mengubah persamaan pada baris lainnya. Dengan demikian, dengan menetapkan $x_1 = 8$ dan untuk $x_2 \leq 5$ dan $x_3 \leq 2$ persamaan semua baris selalu benar.

Contoh 2.4.3. Selesaikan $A \otimes x = b$, bila

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & -2 \\ -4 & -3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Matriks ketaksesuaian

$$D_{A,b} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 10 & 9 \\ 6 & 10 & 5 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 8 \\ 8 & 3 & 11 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } R_{A,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

perhatikan bahwa setiap kolom matriks $R_{A,b}$ memuat satu elemen bernilai 1, sedangkan pada baris ke-1 dan ke-3 semua elemennya bernilai 0. Hal ini mengisyarakatkan$A \otimes x = b$ tidak mempunyai penyelesaian, akan tetapi mempunyai subpenyelesaian optimal x dengan elemen adalah minimum dari setiap kolom matriks $D_{A,b}$, yaitu

$$x = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$A \otimes x = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & -2 \\ -4 & -3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \leq b = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Perhatikan matriks $R_{A,b}$

$$R_{A,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ ① & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ① & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pada baris ke-2 dan ke-4 yang hanya memiliki elemen ① sebagai peubah tetap sedangkan baris ke-1 dan ke-3 tidak memiliki elemen ①, maka pada persamaan ini tidak mempunyai penyelesaian.

2.5 Sistem Persamaan Linear Aljabar *Supertropical*

Sistem persamaan linear $A \otimes x \ \vDash \ b$ pada aljabar *supertropical* dengan $A \in M_n(R), b \in \mathcal{T}_0^n$ dan $x \in R^n$ mempunyai penyelesaian *tangible* , *ghost* dan nol. Selain itu, sistem persamaan aljabar *supertropical* terbagi menjadi sistem persamaan tak homogen dan sistem persamaan homogen. Pada sistem persamaan tak homogen $A \otimes x \vDash b$ dengan $A \in M_n(R), b \in \mathcal{T}_0^n$ dan $x \in R^n$ mempunyai penyelesaian *tangible* yang tunggal jika dan hanya jika $\mid A \mid \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(A) \otimes b) \in \mathcal{T}_0^n$, selain itu, mempunyai penyelesain *tangible* yang tidak tunggal jika dan hanya jika $\mid A \mid \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$ atau $(\mathrm{adj}(A) \otimes b) \notin \mathcal{T}_0^n$. Sedangkan, sistem persamaan homogen $A \otimes x \vDash \varepsilon$ dengan $A \in M_n(R)$ dan $x \in R^n$ mempunyai penyelesaian trivial jika dan hanya jika $\mid A \mid \in \mathcal{T}$, Selain itu, mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika $\mid A \mid \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$ (Yulianti, 2016).

Selanjutnya, dibahas aturan Cramer sebagai metode penyelesaian pada kasus-kasus aljabar *supertropical* R, adapun langkah-langkah aturan Cramer pada $A \otimes x \vDash b$ sebagai berikut :

1. Menentukan determinan dari matriks A yakni $|A|$.

2. Menentukan determinan dari matriks A dengan kolom ke-i diganti dengan vektor b yang dinotasikan $|A_{b,j}|$.

3. Menentukan penyelesaian x_j, dengan

$$x_j = \frac{|A_{b,j}|}{|A|}$$

Sebagai ilustrasi diberikan beberapa contoh sebagai berikut :

Contoh 2.5.1. Diberikan matriks $A \in M_3(R)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Selesaikan $A \otimes x \vDash b$.

$$\begin{aligned} |A| = &\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ =&(1 \otimes 0 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 3 \otimes 0) \oplus (-4 \otimes 1 \otimes 4) \oplus (-4 \otimes 3 \otimes -1) \\ &\oplus (2 \otimes 1 \otimes 0) \oplus (2 \otimes 0 \otimes -1) \\ =&5 \oplus 4 \oplus 1 \oplus -2 \oplus 3 \oplus 1 = 5 \in \mathcal{T} \\ |A_{b,1}| = &\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ =&(4 \otimes 0 \otimes 4) \oplus (4 \otimes 3 \otimes 0) \oplus (-4 \otimes 1 \otimes 6) \oplus (-4 \otimes 5 \otimes -1) \\ &\oplus (2 \otimes 5 \otimes 0) \oplus (2 \otimes 0 \otimes 6) \\ =&8 \oplus 7 \oplus 3 \oplus 0 \oplus 7 \oplus 8 = 8^v \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A_{b,2}| =& \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \end{vmatrix} \\ =&(1 \otimes 5 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 3 \otimes 6) \oplus (4 \otimes 1 \otimes 4) \oplus (4 \otimes 3 \otimes -1) \\ &\oplus (2 \otimes 1 \otimes 6) \oplus (2 \otimes 5 \otimes -1) \\ =&10 \oplus 10 \oplus 9 \oplus 6 \oplus 9 \oplus 6 = 10^v \in \mathcal{G} \\ |A_{b_3}| =& \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\ =&(1 \otimes 0 \otimes 6) \oplus (1 \otimes 5 \otimes 0) \oplus (-4 \otimes 1 \otimes 6) \oplus (-4 \otimes 5 \otimes -1) \\ &\oplus (4 \otimes 1 \otimes 0) \oplus (4 \otimes 0 \otimes -1) \\ =&7 \oplus 6 \oplus 3 \oplus 0 \oplus 5 \oplus 3 = 7 \in \mathcal{T}\end{aligned}$$

maka diperoleh penyelesaian dari persamaan tersebut

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{|A_{b,1}|}{|A|} = \frac{8^v}{5} = -5 \otimes 8^v = 3^v \\ x_2 &= \frac{|A_{b,2}|}{|A|} = \frac{10^v}{5} = -5 \otimes 10^v = 5^v \\ x_3 &= \frac{|A_{b,3}|}{|A|} = \frac{7}{5} = -5 \otimes 7 = 2\end{aligned}$$

sehingga

$$x = \begin{bmatrix} 3^v \\ 5^v \\ 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$A \otimes x = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3^v \\ 5^v \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^v \oplus 1^v \oplus 4 \\ 4^v \oplus 5^v \oplus 5 \\ 2^v \oplus 5^v \oplus 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^v \\ 5^v \\ 6 \end{bmatrix} \vDash \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = b$$

karena $|A| \in \mathcal{T}$ dan terdapat $|A_{b,i}| \in \mathcal{G}$ untuk beberapa i, maka persamaan $A \otimes x \vDash b$ pada aljabar *supertropical* mempunyai penyelesaian tidak tunggal.

Perhatikan penyelesaian yang lain *tangible* sebagai berikut :

$$x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

untuk $c_1 \preccurlyeq_v 4$ dan setiap $c_2 \preccurlyeq_v 5$, dengan $c_1, c_2 \in \mathcal{T}$.

Contoh 2.5.2. Diberikan matriks $A \in M_3(R)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Selesaikan $A \otimes x \vDash \varepsilon \leftrightarrow A \otimes x \in \mathcal{G}_0^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} (1 \otimes x_1) \oplus (-4 \otimes x_2) \oplus (2 \otimes x_3) \in \mathcal{G}_0 \\ (1 \otimes x_1) \oplus (0 \otimes x_2) \oplus (3 \otimes x_3) \in \mathcal{G}_0 \\ (-1 \otimes x_1) \oplus (0 \otimes x_2) \oplus (4 \otimes x_3) \in \mathcal{G}_0 \end{aligned}$$

menentukan determinan matriks A sebagai berikut :

$$\begin{aligned} |A| = & \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ = & (1 \otimes 0 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 3 \otimes 0) \oplus (-4 \otimes 1 \otimes 4) \oplus (-4 \otimes 3 \otimes -1) \\ & \oplus (2 \otimes 1 \otimes 0) \oplus (2 \otimes 0 \otimes -1) \\ = & 5 \oplus 4 \oplus 1 \oplus -2 \oplus 3 \oplus 1 = 5 \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

diperoleh $|A| = 5 \in \mathcal{T}$, maka penyelesaian dari $A \otimes x \in \mathcal{G}_0^3$ sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

selanjutnya, dapat diselidiki bahwa

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon) \\ (\varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon) \\ (\varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

oleh karena $|A| \in \mathcal{T}$ pada persamaan $A \otimes x \vDash \varepsilon$ maka diperoleh penyelesaian trivial.

2.6 Sistem Persamaan Linear Aljabar *Max-Plus* Interval di *Supertropical*

Pada sistem persamaan linear aljabar *max-plus* interval di *supertropical* merupakan gabungan sistem persamaan linear aljabar *supertropical* dan aljabar *max-plus* interval. Selain itu, sistem persamaan aljabar *max-plus* interval mempunyai beberapa kasus yang tidak mempunyai penyelesaian, sehingga diperlukan aljabar *supertropical* untuk memberikan solusi penyelesaian pada sistem persamaan aljabar *max-plus* interval. Perluasan sistem persamaan linear aljabar *max-plus* interval di *supertropical* dengan notasi persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ meliputi batas bawah $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{b}$ dan batas atas $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \overline{b}$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada Bab ini dijelaskan metode yang dipakai dalam mencapai tujuan penelitian.

3.1 Tahapan Penelitian

1. Studi literatur

   Pada tahap ini dilakukan identifikasi dan mengkaji permasalahan dan pemahaman teori tentang penyelesaian persamaan linear $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ atas aljabar max-plus interval dengan mencari referensi dari beberapa buku, jurnal, paper maupun artikel sebagai penunjang penelitian.

2. Menentukan karakterisasi persamaan linear penyelesaian $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ atas aljabar max-plus interval

   Pada tahap ini dilakukan penelitian yang berdasarkan kajian teori untuk menentukan karakterisasi penyelesaian sebagai berikut.

   (a) Penyelesaian persamaan linear $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ atas aljabar max-plus interval, yang meliputi penyelesaian tunggal, penyelesaian banyak, dan tidak mempunyai penyelesaian.

   (b) Penyelesaian persamaan linear dan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ atas aljabar max-plus interval, yang meliputi penyelesain tunggal, penyelesaian tidak tunggal, untuk $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \varepsilon$ bisa ditemukan sifat-sifat penyelesaian trivial dan tak trivial.

3. Membuat simpulan

   Pada tahap ini dibuat simpulan yang berdasarkan penelitian terhadap karakterisasi penyelesaian persamaan linear $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ dan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \varepsilon$ atas aljabar max-plus interval sebagai acuan untuk menjawab rumusan masalah.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini diuraikan cara mendapatkan sifat-sifat karakteristik penyelesaian $\mathbf{A}\,\overline{\otimes}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ atas aljabar max-plus interval dengan menggunakan matriks ketaksesuaian (*discrepancy*) dan aturan Cramer dalam aljabar *supertropical*. Pembahasan diawali formula matriks *discrepancy* dan aturan Cramer sebagai metode penyelesaian persamaan linear, kemudian dilanjutkan dengan menentukan karakterisasi penyelesaian persamaan linear tak homogen dan homogen atas aljabar *max-plus* interval di *supertropical* R.

4.1 Karakterisasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tak Homogen atas Aljabar *Max-Plus* Interval

4.1.1 *Karakterisasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tak Homogen atas Aljabar Max-Plus Interval bukan di Supertropical*

Pada pembahasan ini akan diturunkan persamaan linear atas aljabar *max-plus* interval sebagai berikut :

Persamaan $\mathbf{A}\,\overline{\otimes}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} [\underline{a}_{1,1}\ ,\ \overline{a}_{1,1}] & [\underline{a}_{1,2}\ ,\ \overline{a}_{1,2}] & \cdots & [\underline{a}_{1,n}\ ,\ \overline{a}_{1,n}] \\ [\underline{a}_{2,1}\ ,\ \overline{a}_{2,1}] & [\underline{a}_{2,2}\ ,\ \overline{a}_{2,2}] & \cdots & [\underline{a}_{2,n}\ ,\ \overline{a}_{2,n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{m,1}\ ,\ \overline{a}_{m,1}] & [\underline{a}_{m,2}\ ,\ \overline{a}_{m,2}] & \cdots & [\underline{a}_{m,n}\ ,\ \overline{a}_{m,n}] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [\underline{x}_1\ ,\ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2\ ,\ \overline{x}_2] \\ \vdots \\ [\underline{x}_n\ ,\ \overline{x}_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{b}_1\ ,\ \overline{b}_1] \\ [\underline{b}_2\ ,\ \overline{b}_2] \\ \vdots \\ [\underline{b}_m\ ,\ \overline{b}_m] \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

untuk mempermudah dalam penurunan rumus maka persamaan $\mathbf{A}\,\overline{\otimes}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipisahkan sesuai Definisi 2.3.2 dan definisi operasi $\overline{\otimes}$ pada halaman 13, maka diperoleh persamaan linear batas bawah $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ dan persamaan linear batas atas $\overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{b}$. Selanjutnya kedua persamaan tersebut masing-masing diturunkan.

Pada persamaan linear batas bawah $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ dapat ditulis dalam dibentuk

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_{1,1} & \underline{a}_{1,2} & \cdots & \underline{a}_{1,n} \\ \underline{a}_{2,1} & \underline{a}_{2,2} & \cdots & \underline{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}_{m,1} & \underline{a}_{m,2} & \cdots & \underline{a}_{m,n} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \vdots \\ \underline{b}_m \end{bmatrix}$$

atau dalam bentuk

$$\begin{array}{rcl} (\underline{a}_{1,1} \otimes \underline{x}_1) \oplus (\underline{a}_{1,2} \otimes \underline{x}_2) \oplus \cdots \oplus (\underline{a}_{1,n} \otimes \underline{x}_n) & = & \underline{b}_1 \\ (\underline{a}_{1,1} \otimes \underline{x}_1) \oplus (\underline{a}_{2,2} \otimes \underline{x}_2) \oplus \cdots \oplus (\underline{a}_{2,n} \otimes \underline{x}_n) & = & \underline{b}_2 \\ & \vdots & \\ (\underline{a}_{m,1} \otimes \underline{x}_1) \oplus (\underline{a}_{m,2} \otimes \underline{x}_2) \oplus \cdots \oplus (\underline{a}_{m,n} \otimes \underline{x}_n) & = & \underline{b}_m \end{array}$$

dapat pula ditulis dalam notasi baku sebagai berikut

$$\begin{array}{rcl} \max\{(\underline{a}_{1,1} + \underline{x}_1), (\underline{a}_{1,2} + \underline{x}_2), \cdots, (\underline{a}_{1,n} + \underline{x}_n)\} & = & \underline{b}_1 \\ \max\{(\underline{a}_{2,1} + \underline{x}_1), (\underline{a}_{2,2} + \underline{x}_2), \cdots, (\underline{a}_{2,n} + \underline{x}_n)\} & = & \underline{b}_2 \\ & \vdots & \\ \max\{(\underline{a}_{m,1} + \underline{x}_1), (\underline{a}_{m,2} + \underline{x}_2), \cdots, (\underline{a}_{m,n} + \underline{x}_n)\} & = & \underline{b}_m \end{array}$$

Kasus yang pertama dibahas ada suatu penyelesaian dan beberapa elemen dari $\underline{b}$ adalah ε. Tanpa menghilangkan keumumannya, persamaan dapat disusun ulang sehingga elemen-elemen yang berhingga disusun dengan urutan yang pertama didapat

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_{1,1} & \underline{a}_{1,2} & \cdots & \underline{a}_{1,n} \\ \underline{a}_{2,1} & \underline{a}_{2,2} & \cdots & \underline{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}_{m,1} & \underline{a}_{m,2} & \cdots & \underline{a}_{m,n} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_k \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

tulis dalam bentuk baku, didapat

$$\begin{array}{rcl}
\max\{(\underline{a}_{1,1}+\underline{x}_1),(\underline{a}_{1,2}+\underline{x}_2),\cdots,(\underline{a}_{1,n}+\underline{x}_n)\} & = & \underline{b}_1 \\
 & \vdots & \\
\max\{(\underline{a}_{k,1}+\underline{x}_1),(\underline{a}_{k,2}+\underline{x}_2),\cdots,(\underline{a}_{k,n}+\underline{x}_l)\} & = & \underline{b}_k \\
\max\{(\underline{a}_{k+1,1}+\underline{x}_1),(\underline{a}_{k+1,2}+\underline{x}_2),\cdots,(\underline{a}_{k+1,n}+\underline{x}_l+1)\} & = & \varepsilon \\
 & \vdots & \\
\max\{(\underline{a}_{m,1}+\underline{x}_1),(\underline{a}_{m,2}+\underline{x}_2),\cdots,(\underline{a}_{m,n}+\underline{x}_n)\} & = & \varepsilon
\end{array}$$

karena persamaan $\underline{a}_{k+1,1},\cdots,\underline{a}_{k+1,n},\cdots,\underline{a}_{m,1},\cdots,\underline{a}_{m,n}$ dengan bagian kanannya sama dengan ε dan mempunyai penyelesaian yang bernilai berhingga maka nilai-nilai $\underline{a}_{k+1,1},\cdots,\underline{a}_{k+1,n},\cdots,\underline{a}_{m,1},\cdots,\underline{a}_{m,n}$ semuanya harus sama dengan ε, sehingga dengan menggunakan blok matriks didapat

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_1 & | & \underline{A}_2 \\ - & | & - \\ \varepsilon' & | & \underline{A}_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \underline{x}' \\ -- \\ \underline{x}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}' \\ -- \\ \varepsilon'' \end{bmatrix}$$

dengan

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} \underline{a}_{1,1} & \underline{a}_{1,2} & \cdots & \underline{a}_{1,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}_{k,1} & \underline{a}_{k,2} & \cdots & \underline{a}_{k,l} \end{bmatrix}, \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} \underline{a}_{1,l+1} & \underline{a}_{1,l+2} & \cdots & \underline{a}_{1,n-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}_{k,l+1} & \underline{a}_{k,l+2} & \cdots & \underline{a}_{k,n-l} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} -\infty & \cdots & -\infty \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ -\infty & \cdots & -\infty \end{bmatrix}, \underline{A}_3 = \begin{bmatrix} \underline{a}_{k+1,l+1} & \underline{a}_{k+1,l+2} & \cdots & \underline{a}_{k+1,n-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}_{m-k,l+1} & \underline{a}_{m-k,l+2} & \cdots & \underline{a}_{m-k,n-l} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_l \end{bmatrix}, \underline{x}'' = \begin{bmatrix} \underline{x}_{l+1} \\ \vdots \\ \underline{x}_{n-l} \end{bmatrix}, \underline{b}' = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_k \end{bmatrix}, \varepsilon'' = \begin{bmatrix} -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{bmatrix}$$

dengan matriks $\underline{A}_1$ berukuran $k \times l$. Misalkan

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_l \end{bmatrix} \text{ dan } \underline{b}' = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_k \end{bmatrix}$$

Catatan bahwa, $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ mempunyai penyelesaian, karena $\varepsilon' \otimes \underline{x}' \oplus \underline{A}_3 \otimes \underline{x}'' = -\infty$ dan $\underline{A}_3 \neq \varepsilon$, maka $\underline{x}_{l+1} = \cdots = \underline{x}_{n-1} = -\infty$ dan $\underline{A}_1 \otimes \underline{x}' = \underline{b}'$. Jadi, $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ mempunyai penyelesaian bila dan hanya bila $\underline{x}'$ adalah penyelesaian dari $\underline{A}_1 \otimes \underline{x}' = \underline{b}'$ dan penyelesaian dari $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ adalah

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}' \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, penyelesaian dari $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ dengan beberapa elemen $\underline{b}$ takhingga dapat direduksi ke bentuk $\underline{A}_1 \otimes \underline{x}' = \underline{b}'$ dengan semua elemen dari $\underline{b}'$ berhingga. Jadi pembahasan $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ dapat ditekankan pada semua elemen $\underline{b}$ berhingga. Bila $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ mempunyai penyelesaian maka

$$\underline{a}_{i,j} + \underline{x}_j \leq \underline{b}_i, \text{ untuk semua } i = \{1, 2, \cdots, m\} \text{ dan } j = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Pertaksamaan ini dapat diperlakukan secara terpisah untuk setiap j, didapat

$$\underline{a}_{i,1} + \underline{x}_1 \leq \underline{b}_i \text{ atau } \underline{x}_1 \leq \underline{b}_i - \underline{a}_{1,i}$$

atau

$$\underline{x}_1 \leq \min\{(\underline{b}_1 - \underline{a}_{1,1}), (\underline{b}_2 - \underline{a}_{2,1}), \cdots, (\underline{b}_m - \underline{a}_{m,1})\}$$

Jadi bila sistem persamaan mempunyai penyelesaian haruslah memenuhi

$$\underline{x}_1 \leq \min\{(\underline{b}_1 - \underline{a}_{1,1}), (\underline{b}_2 - \underline{a}_{2,1}), \cdots, (\underline{b}_m - \underline{a}_{m,1})\}$$

Dengan demikian penyelesaian $\underline{x}$ yang mungkin memenuhi

$$\begin{aligned}
\underline{x}_1 &\leq \min\{(\underline{b}_1 - \underline{a}_{1,1}), (\underline{b}_2 - \underline{a}_{2,1}), \cdots, (\underline{b}_m - \underline{a}_{m,1})\} \\
\underline{x}_2 &\leq \min\{(\underline{b}_1 - \underline{a}_{1,2}), (\underline{b}_2 - \underline{a}_{2,2}), \cdots, (\underline{b}_m - \underline{a}_{m,2})\} \\
&\vdots \\
\underline{x}_n &\leq \min\{(\underline{b}_1 - \underline{a}_{1,n}), (\underline{b}_2 - \underline{a}_{2,n}), \cdots, (\underline{b}_m - \underline{a}_{m,n})\}
\end{aligned}$$

Jadi, calon penyelesaian dari $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ yang dinotasikan dengan $\underline{x}'$ adalah

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} \underline{x}'_1 \\ \underline{x}'_2 \\ \vdots \\ \underline{x}'_n \end{bmatrix}, \text{dengan} \begin{cases} \underline{x}_1 & = \min\{(\underline{b}_1 - \underline{a}_{1,1}), (\underline{b}_2 - \underline{a}_{2,1}), \cdots, (\underline{b}_m - \underline{a}_{m,1})\} \\ \underline{x}_2 & = \min\{(\underline{b}_1 - \underline{a}_{1,2}), (\underline{b}_2 - \underline{a}_{2,2}), \cdots, (\underline{b}_m - \underline{a}_{m,2})\} \\ & \vdots \\ \underline{x}_n & = \min\{(\underline{b}_1 - \underline{a}_{1,n}), (\underline{b}_2 - \underline{a}_{2,n}), \cdots, (\underline{b}_m - \underline{a}_{m,n})\} \end{cases}$$

Selanjutnya didefinisikan matriks **discrepancy** (ketidaksamaan) dinotasikan oleh $D_{\underline{A},\underline{b}}$ dengan

$$D_{\underline{A},\underline{b}} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 - \underline{a}_{1,1} & \underline{b}_1 - \underline{a}_{1,2} & \cdots & \underline{b}_1 - \underline{a}_{1,n} \\ \underline{b}_2 - \underline{a}_{2,1} & \underline{b}_2 - \underline{a}_{2,2} & \cdots & \underline{b}_2 - \underline{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{b}_m - \underline{a}_{m,1} & \underline{b}_m - \underline{a}_{m,2} & \cdots & \underline{b}_m - \underline{a}_{m,n} \end{bmatrix}$$

Catatan bahwa, minimum dari setiap kolom $D_{\underline{A},\underline{b}}$ adalah elemen dari $\underline{x}$. Selanjutnya didefinisikan matriks tereduksi ketaksesuaian $R_{\underline{A},\underline{b}}$ oleh

$$R_{\underline{A},\underline{b}} = [r_{i,j}] \text{ dengan } r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{bila } d_{i,j} = \text{minimum dari kolom ke } j \\ 0, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Selanjutnya, untuk persamaan batas atas $\overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{b}$ juga cara yang sama dilakukan hal yang sama seperti persamaan batas bawah, maka diperoleh matriks *discrepancy* $D_{\overline{A},\overline{b}}$ adalah

$$D_{\overline{A},\overline{b}} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 - \overline{a}_{1,1} & \overline{b}_1 - \overline{a}_{1,2} & \cdots & \overline{b}_1 - \overline{a}_{1,n} \\ \overline{b}_2 - \overline{a}_{2,1} & \overline{b}_2 - \overline{a}_{2,2} & \cdots & \overline{b}_2 - \overline{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{b}_m - \overline{a}_{m,1} & \overline{b}_m - \overline{a}_{m,2} & \cdots & \overline{b}_m - \overline{a}_{m,n} \end{bmatrix}$$

Catatan bahwa, minimum dari setiap kolom $D_{\overline{A},\bar{b}}$ adalah elemen dari $\overline{x}$. Selanjutnya didefinisikan matriks tereduksi ketaksesuaian $R_{\overline{A},\bar{b}}$ oleh

$$R_{\overline{A},\bar{b}} = [r_{i,j}] \text{ dengan } r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{bila } d_{i,j} = \text{minimum dari kolom ke } j \\ 0, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Bila diselidiki $R_{A,b}$ didapatkan eksistensi penyelesaian persamaan linear sebagaimana diberikan oleh proposisi berikut.

Proposisi 4.1.1. (Subiono, 2015) Diberikan persamaan $A \otimes x = b$ dengan ukuran A adalah $m \times n$, x berukuran $n \times 1$ dan b berukuran $m \times 1$ yang semua elemennya berhingga. Bila suatu baris dari matriks $R_{A,b}$ semua elemennya bernilai 0, maka $A \otimes x = b$ tidak punya penyelesaian. Bila setidaknya pada setiap baris matriks $R_{A,b}$ memuat satu elemen bernilai 1, maka x adalah suatu penyelesaian dari $A \otimes x = b$, dengan x mempunyai elemen-elemennya adalah minimum dari kolom-kolom matriks $D_{A,b}$

Salah satu hasil Proposisi 4.1.1 adalah eksistensi dari penyelesaian $A \otimes x = b$. Eksitensi ini belum menjelaskan bilamana tunggal dan tidak tunggal. Untuk hal ini diperlukan definisi berikut.

Definisi 4.1.1. (Subiono, 2015) Elemen bernilai 1 pada suatu baris $R_{A,b}$ dinamakan elemen **peubah tetap** bila

- nilai 1 hanya satu-satunya pada baris tersebut, atau

- nilai tersebut pada kolom yang sama seperti halnya hanya satu-satunya nilai 1.
  Sisa nilai lainnya dinamakan elemen **slack**.

Selanjutnya untuk mengetahui peubah tetap dan slack diberikan contoh berikut :
Pada Contoh 2.4.1 selesaikan $A \otimes x = b$, bila

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matriks *discrepancy*

$$D_{A,b} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } R_{A,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

semua elemen 1 adalah peubah tetap. Persamaan baris pertama menetapkan elemen $x_1 = 4$ dan persamaan baris kedua menetapkan elemen $x_3 = 3$. Persamaan baris ketiga menetapkan elemen $x_4 = 2$ serta persamaan baris keempat menetapkan elemen $x_2 = 6$. Setiap elemen-elemen yang telah dipilih ini tidak bisa diubah, bila diubah yang lain akan membentuk pertaksamaan.

Selanjutnya, pada Contoh 2.4.2 selesaikan $A \otimes x = b$, bila

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & -1 \\ -3 & -5 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Matriks *discrepancy*

$$D_{A,b} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 11 & 8 \\ 8 & 10 & 2 & 12 \\ 8 & 9 & 4 & 9 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } R_{A,b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

semua elemen 1 adalah peubah tetap sedangkan semua elemen sisa lainnya yang bernilai 1 adalah elemen slack. Ada empat elemen slack. Persamaan baris pertama dua cara menetapkan elemen yaitu $x_1 = 8$ dan $x_2 = 5$. Elemen penyelesaian persamaan baris kedua juga ada dua cara yaitu $x_1 = 8$ dan $x_3 = 2$. Pada persamaan baris ketiga hanya satu cara yaitu $x_1 = 8$. Sedangkan persamaan baris keempat ada tiga cara yaitu $x_1 = 8$ dan $x_2 = 5$ dan $x_4 = 7$. Jadi untuk $x_2 \leq 5$ dan $x_3 \leq 2$ tidak akan mengubah persamaan pada baris lainnya. Dengan demikian, dengan menetapkan $x_1 = 8$ dan untuk $x_2 \leq 5$ dan $x_3 \leq 2$ persamaan semua baris selalu benar.

Selanjutnya, diberikan proposisi ketunggalan dan ketidaktunggalan dari penyelesaian sistem persamaan linear sebagai berikut.

Proposisi 4.1.2. (Subiono, 2015) Diberikan persamaan $A \otimes x = b$ dengan ukuran A adalah $m \times n$, x berukuran $n \times 1$ dan b berukuran $m \times 1$ yang semua elemennya berhingga. Tambahan pula, persamaan $A \otimes x = b$ mempunyai penyelesaian. Bila setiap baris dari matriks $R_{A,b}$ hanya ada satu bernilai 1, maka penyelesaian $A \otimes x = b$ tunggal. Bila ada elemen slack pada matriks $R_{A,b}$, maka penyelesaian dari $A \otimes x = b$ adalah tidak tunggal.

Pada Proposisi 4.1.2 merupakan penyelesaian sistem persamaan linear yang bukan interval, kemudian dikonstruksi menjadi sistem persamaan linear yang interval, sebagaimana diberikan definisi dan teorema berikut.

Definisi 4.1.2. Persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian $\mathbf{y}$ bila $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{y} = \mathbf{b}$ dengan $\mathbf{y} = [\underline{y}\ ,\ \overline{y}]$ atau dengan kata lain $\underline{A} \otimes \underline{y} = \underline{b}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{y} = \overline{b}$.

Diberikan karakteristik yang terkait dengan penyelesaian, sebagaimana diberikan teorema berikut.

Teorema 4.1.1. Bila $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian $\mathbf{y} = [\underline{y}\ ,\ \overline{y}]$ dan untuk sebarang $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ dan sebarang $y \in [\underline{y}, \overline{y}]$, maka $A \otimes y \in [\underline{b}, \overline{b}]$.
Bukti : Akan dibuktikan $A \otimes y \in [\underline{b}, \overline{b}]$.
Karena $\underline{A} \preceq_{\max} A$ maka $\underline{A} \oplus A = A$ dan karena $A \preceq_{\max} \overline{A}$ maka $A \oplus \overline{A} = \overline{A}$

- $(\underline{A} \oplus A)$ dikalikan dengan y disebelah kanan dan dengan menggunakan sifat distributif di dapat

$$\begin{aligned}(\underline{A} \oplus A) \otimes y =& \underline{A} \otimes y \oplus A \otimes y \\ A \otimes y =& \underline{A} \otimes y \oplus A \otimes y\end{aligned}$$

  misalkan $B = A \otimes y$ dan $C = \underline{A} \otimes y$, diperoleh $B = C \oplus B$ maka $C \preceq_{\max} B$ ekuivalen dengan

$$\underline{A} \otimes y \preceq_{\max} A \otimes y \tag{4.2}$$

- $(A \oplus \overline{A})$ dikalikan dengan y disebelah kanan dan dengan menggunakan sifat distributif di dapat

$$\begin{aligned}(A \oplus \overline{A}) \otimes y =& (A \otimes y) \oplus (\overline{A} \otimes y) \\ \overline{A} \otimes y =& (A \otimes y) \oplus (\overline{A} \otimes y)\end{aligned}$$

misalkan $B = \overline{A} \otimes y$ dan $C = A \otimes y$, diperoleh $B = C \oplus B$ maka $C \preceq_{\max} B$ ekuivalen dengan

$$A \otimes y \preceq_{\max} \overline{A} \otimes y. \tag{4.3}$$

dari relasi urutan 4.2 dan 4.3 didapat

$$\underline{A} \otimes y \preceq_{\max} A \otimes y \preceq_{\max} \overline{A} \otimes y \tag{4.4}$$

karena $\underline{y} \preceq_{\max} y$ maka $\underline{y} \oplus y = y$ dan karena $y \preceq_{\max} \overline{y}$ maka $y \oplus \overline{y} = \overline{y}$

- $(\underline{y} \oplus y)$ dikalikan dengan $\underline{A}$ disebelah kiri dan dengan menggunakan sifat distributif di dapat

$$\begin{aligned} \underline{A} \otimes (\underline{y} \oplus y) &= (\underline{A} \otimes \underline{y}) \oplus (\underline{A} \otimes y) \\ \underline{A} \otimes y &= (\underline{A} \otimes \underline{y}) \oplus (\underline{A} \otimes y) \end{aligned}$$

  misalkan $D = (\underline{A} \otimes y)$ dan $E = (\underline{A} \otimes \underline{y})$, diperoleh $D = E \oplus D$ maka $E \preceq_{\max} D$ ekuivalen dengan

$$\underline{A} \otimes \underline{y} \preceq_{\max} \underline{A} \otimes y \tag{4.5}$$

- $y \oplus \overline{y}$ dikalikan dengan $\overline{A}$ disebelah kiri dan dengan menggunakan sifat distributif di dapat

$$\begin{aligned} \overline{A} \otimes (y \oplus \overline{y}) &= (\overline{A} \otimes y) \oplus (\overline{A} \otimes \overline{y}) \\ \overline{A} \otimes \overline{y} &= (\overline{A} \otimes y) \oplus (\overline{A} \otimes \overline{y}) \end{aligned}$$

  misalkan $D = (\overline{A} \otimes \overline{y})$ dan $E = (\overline{A} \otimes y)$, diperoleh $D = E \oplus D$ maka $E \preceq_{\max} D$ ekuivalen dengan

$$\overline{A} \otimes y \preceq_{\max} \overline{A} \otimes \overline{y} \tag{4.6}$$

  dari relasi urutan 4.5 dan 4.6 didapat

$$\underline{A} \otimes \underline{y} \preceq_{\max} \underline{A} \otimes y \preceq_{\max} \overline{A} \otimes y \preceq_{\max} \overline{A} \otimes \overline{y} \tag{4.7}$$

sesuai relasi urutan 4.4 dan 4.10 didapat

$$\underline{A} \otimes \underline{y} \preceq_{\max} \underline{A} \otimes y \preceq_{\max} A \otimes y \preceq_{\max} \overline{A} \otimes y \preceq_{\max} \overline{A} \otimes \overline{y} \tag{4.8}$$

berdasarkan Definisi 4.1.2 bahwa $\underline{A} \otimes \underline{y} \models \underline{b}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{y} \models \overline{b}$, maka diperoleh

$$\underline{b} \preceq_{\max} A \otimes y \preceq_{\max} \overline{b}$$

sehingga terbukti $A \otimes y \in [\underline{b}, \overline{b}]$.

■

Teorema 4.1.2. Diberikan persamaan pada $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan $\mathbf{b} \neq \varepsilon$ atau diberikan dalam persamaan 4.1 mempunyai penyelesaian tunggal, bila setiap baris dari masing-masing matriks $R_{\underline{A},\underline{b}}$ dan $R_{\overline{A},\overline{b}}$ hanya ada satu elemen yang bernilai 1.
Bukti : Berdasarkan Definisi 4.1.2 bahwa persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian maka persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{b}$ masing-masing mempunyai penyelesaian tunggal, bilamana menggunakan Proposisi 4.1.2 didapatkan matriks $R_{\underline{A},\underline{b}}$ dan $R_{\overline{A},\overline{b}}$ hanya ada satu elemen yang bernilai 1.

■

Contoh 4.1.1. Penyelesaian tunggal dari persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$.
Diketahui :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [5\ ,\ 8] & [12\ ,\ 12]] & [2\ ,\ 7] \\ [0\ ,\ 3] & [4\ ,\ 8] & [5\ ,\ 7] \\ [8\ ,\ 8] & [5\ ,\ 5] & [3\ ,\ 3] \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1\ ,\ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2\ ,\ \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3\ ,\ \overline{x}_3] \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} [14\ ,\ 16] \\ [11\ ,\ 13] \\ [13\ ,\ 14] \end{bmatrix}$$

Diselesaikan persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ menggunakan matriks *discrepancy* di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$ sebagai berikut.

1. Penyelesaian $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$, dengan

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix}$$

diperoleh matriks *discrepancy* $D_{\underline{A},\underline{b}}$ dan matriks reduksi $R_{\underline{A},\underline{b}}$ sebagai berikut.

$$D_{\underline{A},\underline{b}} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 12 \\ 11 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 10 \end{bmatrix} \text{ dan } R_{\underline{A},\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada matriks reduksi *discrepancy* $R_{\underline{A},\underline{b}}$ terdapat satu elemen bernilai 1 di setiap kolom dan di setiap baris. Hal ini, menunjukkan persamaan tersebut mempunyai penyelesaian tunggal, maka diperoleh penyelesaian $\underline{x}$ sebagai berikut.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

selanjutnya bisa dicek bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \oplus 14 \oplus 8 \\ 5 \oplus 6 \oplus 11 \\ 13 \oplus 7 \oplus 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

2. Penyelesaian $\overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{b}$, dengan

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 7 \\ 3 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

diperoleh matriks *discrepancy* $D_{\overline{A},\overline{b}}$ dan matriks reduksi $R_{\overline{A},\overline{b}}$ sebagai berikut:

$$D_{\overline{A},\overline{b}} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 9 \\ 10 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 11 \end{bmatrix} \text{ dan } R_{\overline{A},\overline{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada matriks reduksi *discrepancy* $R_{\overline{A},\underline{b}}$ terdapat satu elemen bernilai 1 di setiap kolom dan di setiap baris. Hal ini, menunjukkan persamaan tersebut mempunyai penyelesaian tunggal, maka diperoleh penyelesaian $\overline{x}$

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

selanjutnya bisa dicek bahwa

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 7 \\ 3 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \oplus 16 \oplus 13 \\ 9 \oplus 12 \oplus 13 \\ 14 \oplus 9 \oplus 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} = \overline{b}$$

Pada penyelesaian $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{b}$ mempunyai masing-masing penyelesaian tunggal. Maka diperoleh penyelesaian tunggal sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [5\ ,\ 6] \\ [2\ ,\ 4] \\ [6\ ,\ 6] \end{bmatrix}$$

Sehingga persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal.

Bila matriks $R_{\underline{A},\underline{b}}$ dan $R_{\overline{A},\overline{b}}$ tidak memenuhi kondisi Teorema 4.1.2 dengan setiap baris $R_{\underline{A},\underline{b}}$ dan $R_{\overline{A},\overline{b}}$ bisa lebih dari satu bernilai 1, maka sistem persamaan 4.1 mempunyai penyelesaian banyak. Kasus ini bisa diberikan pada contoh berikut.

Contoh 4.1.2. Penyelesaian banyak dari persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [6\ ,\ 7] & [5\ ,\ 6] & [8\ ,\ 9] \\ [7\ ,\ 7] & [3\ ,\ 3] & [4\ ,\ 5] \\ [3\ ,\ 5] & [1\ ,\ 3] & [1\ ,\ 4] \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1\ ,\ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2\ ,\ \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3\ ,\ \overline{x}_3] \end{bmatrix}\ \text{dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} [12\ ,\ 17] \\ [10\ ,\ 14] \\ [8\ ,\ 14] \end{bmatrix}$$

1. Penyelesaian $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$, dengan

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

diperoleh matriks *discrepancy* $D_{\underline{A},\underline{b}}$ dan matriks reduksi $R_{\underline{A},\underline{b}}$ sebagai berikut:

$$D_{\underline{A},\underline{b}} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 7 \end{bmatrix}\ \text{dan } R_{\underline{A},\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada matriks reduksi ketaksesuaian $R_{\underline{A},\underline{b}}$ terdapat setidaknya satu elemen bernilai 1 di setiap kolom dan terdapat dua elemen bernilai 1 di baris ke-1 dan baris ke-2. Hal ini, menunjukkan penyelesaian banyak. Maka diperoleh penyelesaian $\underline{x}$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa dicek bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \oplus 12 \oplus 12 \\ 10 \oplus 10 \oplus 8 \\ 6 \oplus 8 \oplus 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

2. Penyelesaian $\overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{b}$, dengan

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 17 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}$$

diperoleh matriks *discrepancy* $D_{\overline{A},\overline{b}}$ dan matriks reduksi $R_{\overline{A},\overline{b}}$ berikut :

$$D_{\overline{A},\overline{b}} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 8 \\ 7 & 11 & 9 \\ 9 & 11 & 10 \end{bmatrix} \text{ dan } R_{\overline{A},\overline{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada matriks reduksi ketaksesuaian $R_{\overline{A},\overline{b}}$ terdapat setidaknya satu elemen bernilai 1 di setiap kolom dan terdapat dua elemen bernilai 1 di baris ke-1 dan di baris ke-2. Hal ini, menunjukkan penyelesaian banyak. Maka diperoleh

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \oplus 17 \oplus 17 \\ 14 \oplus 14 \oplus 13 \\ 12 \oplus 14 \oplus 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix} = \overline{b}$$

maka diperoleh penyelesian vektor interval **x** sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [3 \quad 7] \\ [7 \quad 11] \\ [4 \quad 8] \end{bmatrix}$$

sedangkan untuk memperoleh penyelesaian yang lain dari persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dilakukan sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{c}_1 \ , \ \overline{c}_1] \\ [7 \ , \ 11] \\ [\underline{c}_3 \ , \ \overline{c}_3] \end{bmatrix} \text{ dengan } \underline{c}_1 \leq 3 \leq \overline{c}_1 \leq 7 \text{ dan } \underline{c}_3 \leq 4 \leq \overline{c}_3 \leq 8.$$

Selanjutnya, $\mathbf{x} = [\underline{x} \ , \ \overline{x}]$ adalah penyelesaian banyak dari $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, misalkan diberikan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [0 \ , \ 3] \\ [7 \ , \ 11] \\ [0 \ , \ 4] \end{bmatrix}$$

dapat diselidiki bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \oplus 12 \oplus 8 \\ 7 \oplus 10 \oplus 4 \\ 3 \oplus 8 \oplus 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \oplus 17 \oplus 13 \\ 11 \oplus 14 \oplus 9 \\ 8 \oplus 14 \oplus 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix} = \overline{b}$$

Hal ini menunjukkan bahwa persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian banyak di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$.

Contoh 4.1.3. Penyelesaian banyak dari persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$. Diketahui :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [4 \ , \ 7] & [7 \ , \ 10] & [5 \ , \ 6] \\ [5 \ , \ 8] & [10 \ , \ 13] & [4 \ , \ 7] \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1 \ , \ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2 \ , \ \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3 \ , \ \overline{x}_3] \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} [10 \ , \ 14] \\ [13 \ , \ 17] \end{bmatrix}$$

1. Penyelesaian $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$, dengan

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 5 & 10 & 4] \end{bmatrix}, \ \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} \text{ dan } \underline{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^T \otimes \underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{A}^T \otimes \underline{b}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 5 & 10 & 4] \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 \\ 15 & 20 & 14 \\ 9 & 14 & 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 23 \\ 17 \end{bmatrix}$$

penyelesaian $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$ dengan menggunakan matriks *discrepancy* sehingga diperoleh matriks $D_{\underline{A},\underline{b}}$ dan $R_{\underline{A},\underline{b}}$ sebagai berikut :

$$D_{\underline{A},\underline{b}} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 8 & 3 & 9 \\ 8 & 3 & 9 \end{bmatrix} \text{ dan } R_{\underline{A},\underline{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pada matriks $R_{\underline{A},\underline{b}}$ terlihat setiap kolom dan baris semuanya elemen bernilai 1, hal ini menunjukkan persamaan tersebut mempunyai penyelesaian banyak. Adapun nilai $\underline{x}$ sebagai berikut :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

selanjutnya dapat diselidiki bahwa

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 \\ 15 & 20 & 14 \\ 9 & 14 & 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \oplus 18 \oplus 18 \\ 23 \oplus 23 \oplus 23 \\ 17 \oplus 17 \oplus 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 23 \\ 17 \end{bmatrix}$$

2. Penyelesaian $\overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{b}$, dengan

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 6 \\ 8 & 13 & 7 \end{bmatrix}, \ \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}^T \otimes \overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{A}^T \otimes \overline{b}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 13 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 & 10 & 6 \\ 8 & 13 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 13 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 & 21 & 15 \\ 21 & 26 & 20 \\ 15 & 20 & 14 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 24 \end{bmatrix}$$

penyelesaian $\overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{b}$ dengan menggunakan matriks *discrepancy* sehingga diperoleh matrikx $D_{\overline{A},\overline{b}}$ dan $R_{\overline{A},\overline{b}}$ sebagai berikut :

$$D_{\overline{A},\overline{b}} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 10 \\ 9 & 4 & 10 \\ 9 & 4 & 10 \end{bmatrix} \text{ dan } R_{\overline{A},\overline{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pada matriks $R_{\overline{A},\overline{b}}$ terlihat setiap kolom dan baris semuanya elemen bernilai 1, hal ini menunjukkan persamaan tersebut mempunyai penyelesaian banyak. Adapun nilai $\overline{x}$ sebagai berikut :

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

selanjutnya dapat diselidiki bahwa

$$\begin{bmatrix} 16 & 21 & 15 \\ 21 & 26 & 20 \\ 15 & 20 & 14 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \oplus 25 \oplus 25 \\ 30 \oplus 30 \oplus 30 \\ 24 \oplus 24 \oplus 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 24 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh penyelesaian vektor interval **x** sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [8\ ,\ 9] \\ [3\ ,\ 4] \\ [9\ ,\ 10] \end{bmatrix}$$

sedangkan untuk memperoleh penyelesaian yang lain dari persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes}\, \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dilakukan sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [8\ ,\ 9] \\ [\underline{c}_2\ ,\ \overline{c}_2] \\ [\underline{c}_3\ ,\ \overline{c}_3] \end{bmatrix} \text{ untuk } \underline{c}_2 < 3 < \overline{c}_2 < 4 \text{ dan } \underline{c}_3 < 9 < \overline{c}_3 < 10,$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{c}_1\ ,\ \overline{c}_1] \\ [3\ ,\ 4] \\ [\underline{c}_3\ ,\ \overline{c}_3] \end{bmatrix} \text{ untuk } \underline{c}_1 < 8 < \overline{c}_1 < 9 \text{ dan } \underline{c}_3 < 9 < \overline{c}_3 < 10,$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{c}_1\ ,\ \overline{c}_1] \\ [\underline{c}_2\ ,\ \overline{c}_2] \\ [9\ ,\ 10] \end{bmatrix} \text{ untuk } \underline{c}_1 < 8 < \overline{c}_1 < 9 \text{ dan } \underline{c}_2 < 3 < \overline{c}_2 < 4.$$

Misalkan diberikan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [0\ ,\ 8] \\ [1\ ,\ 3] \\ [9\ ,\ 10] \end{bmatrix}$$

dapat diselidiki bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 \\ 15 & 20 & 14 \\ 9 & 14 & 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \oplus 16 \oplus 18 \\ 15 \oplus 21 \oplus 23 \\ 9 \oplus 15 \oplus 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 23 \\ 17 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 16 & 21 & 15 \\ 21 & 26 & 20 \\ 15 & 20 & 14 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \oplus 24 \oplus 25 \\ 29 \oplus 29 \oplus 30 \\ 23 \oplus 23 \oplus 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 24 \end{bmatrix} = \overline{b}$$

Hal ini menunjukkan bahwa persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes}\, \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian banyak di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$.

Selanjutnya, Bila matriks $R_{\underline{A},\underline{b}}$ dan $R_{\overline{A},\overline{b}}$ juga tidak memenuhi kondisi Teorema 4.1.2

dengan terdapat baris $R_{\underline{A},\underline{b}}$ dan $R_{\overline{A},\overline{b}}$ yang tidak mempunyai satu pun yang bernilai 1 atau dengan kata lain baris tersebut semua elemennya bernilai 0, maka sistem persamaan 4.1 tidak mempunyai penyelesaian. Kasus ini bisa diberikan pada contoh berikut.

Contoh 4.1.4. Tidak mempunyai penyelesaian dari persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$. Diketahui :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [0\ ,\ 1] & [3\ ,\ 5] & [5\ ,\ 7] \\ [3\ ,\ 8] & [1\ ,\ 2] & [4\ ,\ 9] \\ [5\ ,\ 6] & [4\ ,\ 5] & [2\ ,\ 3] \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1\ ,\ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2\ ,\ \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3\ ,\ \overline{x}_3] \end{bmatrix}\ \text{dan}\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} [10\ ,\ 17] \\ [9\ ,\ 19] \\ [10\ ,\ 20] \end{bmatrix}$$

1. Penyelesaian $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{b}$, dengan

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

diperoleh matriks *discrepancy* $D_{\underline{A},\underline{b}}$ dan matriks reduksi $R_{\underline{A},\underline{b}}$ berikut :

$$D_{\underline{A},\underline{b}} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\ \text{dan}\ R_{\underline{A},\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada matriks reduksi ketaksesuaian $R_{\underline{A},\underline{b}}$ terdapat setidaknya satu elemen bernilai 1 di setiap kolom dan terdapat semua elemen bernilai 0 di baris ke-2. Hal ini, menunjukkan persamaan tersebut tidak mempunyai penyelesaian. Walaupun terlihat minimal dari setiap kolom matriks $D_{\underline{A},\underline{b}}$ untuk nilai $\underline{x}$ berikut :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \oplus 5 \oplus 7 \\ 4 \oplus 3 \oplus 5 \\ 6 \oplus 6 \oplus 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \neq \underline{b}$$

2. Penyelesaian $\overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{b}$, dengan

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

diperoleh matriks *discrepancy* $D_{\overline{A},\overline{b}}$ dan matriks reduksi $R_{\overline{A},\overline{b}}$ berikut :

$$D_{\overline{A},\overline{b}} = \begin{bmatrix} 14 & 10 & 8 \\ 7 & 13 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } R_{\overline{A},\overline{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada matriks reduksi ketaksesuaian $R_{\overline{A},\overline{b}}$ terdapat setidaknya satu elemen bernilai 1 di setiap kolom dan terdapat semua elemen bernilai 0 di baris ke-1. Hal ini, menunjukkan persamaan tersebut tidak mempunyai penyelesaian. Walaupun terlihat minimal dari setiap kolom matriks $D_{\overline{A},\overline{b}}$ untuk nilai $\overline{x}$ sebagai berikut :

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \oplus 10 \oplus 13 \\ 12 \oplus 7 \oplus 15 \\ 10 \oplus 10 \oplus 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} \neq \overline{b}$$

Sehingga persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai penyelesaian di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$.

4.1.2 *Karakterisasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tak Homogen atas Aljabar Max-Plus Interval di Supertropical*

Pada pembahasan sebelum, terdapat persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai penyelesaian di aljabar *tropical*, sehingga untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, maka persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dikonversikan ke aljabar *supertropical* dengan relasi *ghost surpass* sehingga menjadi persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \models \mathbf{b}$ yang mempunyai penyelesaian. Selanjutnya akan dibahas mengenai penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \models \mathbf{b}$ dalam aljabar *supertropical* dengan menggunakan aturan Cramer.

Persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} [\underline{a}_{1,1} \ , \ \overline{a}_{1,1}] & [\underline{a}_{1,2} \ , \ \overline{a}_{1,2}] & \cdots & [\underline{a}_{1,n} \ , \ \overline{a}_{1,n}] \\ [\underline{a}_{2,1} \ , \ \overline{a}_{2,1}] & [\underline{a}_{2,2} \ , \ \overline{a}_{2,2}] & \cdots & [\underline{a}_{2,n} \ , \ \overline{a}_{2,n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{n,1} \ , \ \overline{a}_{n,1}] & [\underline{a}_{n,2} \ , \ \overline{a}_{n,2}] & \cdots & [\underline{a}_{n,n} \ , \ \overline{a}_{n,n}] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [\underline{x}_1 \ , \ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2 \ , \ \overline{x}_2] \\ \vdots \\ [\underline{x}_n \ , \ \overline{x}_n] \end{bmatrix} \vDash \begin{bmatrix} [\underline{b}_1 \ , \ \overline{b}_1] \\ [\underline{b}_2 \ , \ \overline{b}_2] \\ \vdots \\ [\underline{b}_n \ , \ \overline{b}_n] \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Terlebih dahulu diberikan proposisi penyelesaian persamaan dalam aljabar *supertropical*.

Proposisi 4.1.3. (Yulianti, 2016) Diberikan $A \in M_n(R), b \in \mathcal{T}_0^n$ dan $x \in R^n$, maka sistem penyelesaian $A \otimes x \vDash b$ mempunyai penyelesaian *tangible* yang tunggal jika dan hanya jika $|A| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(A) \otimes b) \in \mathcal{T}_0^n$.

Pada Proposisi 4.1.3 merupakan penyelesaian sistem persamaan linear yang bukan interval, kemudian dikonstruksi menjadi sistem persamaan linear yang interval, sebagaimana diberikan definisi dan teorema berikut.

Definisi 4.1.3. Persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian $\mathbf{y}$ bila $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{y} \vDash \mathbf{b}$ dimana $\mathbf{y} = [\underline{y} \ , \ \overline{y}]$ atau dengan kata lain $\underline{A} \otimes \underline{y} \vDash \underline{b}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{y} \vDash \overline{b}$.

Teorema 4.1.3. Bila $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian $\mathbf{y} = [\underline{y} \ , \ \overline{y}]$, untuk sebarang $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ dan sebarang $y \in [\underline{y}, \overline{y}]$ maka $A \otimes y \in [\underline{b}, \overline{b}]$.

Bukti : Akan dibuktikan $A \otimes y \in [\underline{b}, \overline{b}]$.

Karena $\underline{A} \preccurlyeq_v A$ maka $\underline{A} \oplus A = A$ dan karena $A \preccurlyeq_v \overline{A}$ maka $A \oplus \overline{A} = \overline{A}$

- $(\underline{A} \oplus A)$ dikalikan dengan y disebelah kanan dan dengan menggunakan sifat distributif di dapat

$$\begin{aligned} (\underline{A} \oplus A) \otimes y =& \underline{A} \otimes y \oplus A \otimes y \\ A \otimes y =& \underline{A} \otimes y \oplus A \otimes y \end{aligned}$$

misalkan $B = A \otimes y$ dan $C = \underline{A} \otimes y$, diperoleh $B = C \oplus B$ maka $C \preccurlyeq_v B$ ekuivalen dengan

$$\underline{A} \otimes y \preccurlyeq_v A \otimes y \tag{4.10}$$

- $(A \oplus \overline{A})$ dikalikan dengan y disebelah kanan dan dengan menggunakan sifat distributif di dapat

$$\begin{aligned}(A \oplus \overline{A}) \otimes y =& (A \otimes y) \oplus (\overline{A} \otimes y)\\ \overline{A} \otimes y =& (A \otimes y) \oplus (\overline{A} \otimes y)\end{aligned}$$

misalkan $B = \overline{A} \otimes y$ dan $C = A \otimes y$, diperoleh $B = C \oplus B$ maka $C \preccurlyeq_v B$ ekuivalen dengan

$$A \otimes y \preccurlyeq_v \overline{A} \otimes y. \tag{4.11}$$

dari relasi urutan 4.10 dan 4.11 didapat

$$\underline{A} \otimes y \preccurlyeq_v A \otimes y \preccurlyeq_v \overline{A} \otimes y. \tag{4.12}$$

karena $\underline{y} \preccurlyeq_v y$ maka $\underline{y} \oplus y = y$ dan karena $y \preccurlyeq_v \overline{y}$ maka $y \oplus \overline{y} = \overline{y}$

- $(\underline{y} \oplus y)$ dikalikan dengan $\underline{A}$ disebelah kiri dan dengan menggunakan sifat distributif di dapat

$$\begin{aligned}\underline{A} \otimes (\underline{y} \oplus y) =& (\underline{A} \otimes \underline{y}) \oplus (\underline{A} \otimes y)\\ \underline{A} \otimes y =& (\underline{A} \otimes \underline{y}) \oplus (\underline{A} \otimes y)\end{aligned}$$

misalkan $D = (\underline{A} \otimes y)$ dan $E = (\underline{A} \otimes \underline{y})$, diperoleh $D = E \oplus D$ maka $E \preccurlyeq_v D$ ekuivalen dengan

$$\underline{A} \otimes \underline{y} \preccurlyeq_v \underline{A} \otimes y \tag{4.13}$$

- $y \oplus \overline{y}$ dikalikan dengan $\overline{A}$ disebelah kiri dan dengan menggunakan sifat distributif di dapat

$$\begin{aligned}\overline{A} \otimes (y \oplus \overline{y}) =& (\overline{A} \otimes y) \oplus (\overline{A} \otimes \overline{y})\\ \overline{A} \otimes \overline{y} =& (\overline{A} \otimes y) \oplus (\overline{A} \otimes \overline{y})\end{aligned}$$

misalkan $D = (\overline{A} \otimes \overline{y})$ dan $E = (\overline{A} \otimes y)$, diperoleh $D = E \oplus D$ maka $E \preccurlyeq_v D$ ekuivalen dengan

$$\overline{A} \otimes y \preccurlyeq_v \overline{A} \otimes \overline{y} \tag{4.14}$$

dari relasi urutan 4.13 dan4.14 didapat

$$\underline{A} \otimes \underline{y} \preccurlyeq_v \underline{A} \otimes y \preccurlyeq_v \overline{A} \otimes y \preccurlyeq_v \overline{A} \otimes \overline{y} \tag{4.15}$$

sesuai relasi urutan 4.14 dan 4.15 didapat

$$\underline{A} \otimes \underline{y} \preccurlyeq_v \underline{A} \otimes y \preccurlyeq_v A \otimes y \preccurlyeq_v \overline{A} \otimes y \preccurlyeq_v \overline{A} \otimes \overline{y} \tag{4.16}$$

berdasarkan Definisi 4.1.3 bahwa $\underline{A} \otimes \underline{y} \vDash \underline{b}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{y} \vDash \overline{b}$, maka diperoleh

$$\underline{b} \preccurlyeq_v A \otimes y \preccurlyeq_v \overline{b}$$

sehingga terbukti $A \otimes y \in [\underline{b}, \overline{b}]$.

■

Teorema 4.1.4. Diberikan persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ dengan $\underline{A} \in M_n(R), \overline{A} \in M_n(R), \underline{b} \in \mathcal{T}_0^n, \overline{b} \in \mathcal{T}_0^n$ dan $\underline{x} \in R^n, \overline{x} \in R^n$ atau diberikan dalam persamaan 4.9 mempunyai penyelesaian *tangible* yang tunggal. Bila dan hanya bila $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \in \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \in \mathcal{T}_0^n$.

Bukti : Menurut Definisi 4.1.3 bahwa persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian maka persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{b}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \overline{b}$ masing-masing mempunyai penyelesaian *tangible* yang tunggal, bilamana menggunakan Proposisi 4.1.3 didapatkan $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \in \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \in \mathcal{T}_0^n$.

■

Berdasarkan teorema-teorema yang telah dibahas, maka didapatkan syarat perlu dan syarat cukup dari sistem persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ atas aljabar *max-plus* interval di *supertropical* R mempunyai penyelesaian tunggal yang *tangible* yaitu bila dan hanya bila $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \in \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \in \mathcal{T}_0^n$. Jika kondisi tersebut tidak terpenuhi maka sistem persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tidak tunggal. Sehingga diperoleh kemungkinan calon penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal bila dan hanya bila :

1. $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n$ atau
2. $|\underline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon, |\overline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$ dan $(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n$ atau
3. $|\underline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon, |\overline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$

Selanjutnya diberikan contoh kasus agar dapat memahami dari penyelesaian *tangible* yang tunggal dan tidak tunggal pada *supertropical* sebagai berikut:

Contoh 4.1.5. Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ pada $\mathbb{I}(R)$ menggunakan aturan Cramer dengan $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \in \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \in \mathcal{T}_0^n$ merupakan penyelesaian *tangible* tunggal.
Diketahui pada Contoh 4.1.1 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [5\ ,\ 8] & [12\ ,\ 12]] & [2\ ,\ 7] \\ [0\ ,\ 3] & [4\ ,\ 8] & [5\ ,\ 7] \\ [8\ ,\ 8] & [5\ ,\ 5] & [3\ ,\ 3] \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1\ ,\ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2\ ,\ \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3\ ,\ \overline{x}_3] \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} [14\ ,\ 16] \\ [11\ ,\ 13] \\ [13\ ,\ 14] \end{bmatrix}$$

1. Penyelesaian $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{b}$, dengan

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\underline{A}| &= \begin{vmatrix} 5 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (5 \otimes 4 \otimes 3) \oplus (5 \otimes 5 \otimes 5) \oplus (12 \otimes 0 \otimes 3) \oplus (12 \otimes 5 \otimes 8) \\ &\quad \oplus (2 \otimes 0 \otimes 5) \oplus (2 \otimes 4 \otimes 8) \\ &= 12 \oplus 15 \oplus 15 \oplus 25 \oplus 7 \oplus 14 = 25 \in \mathcal{T} \\ |\underline{A}_{b,1}| &= \begin{vmatrix} 14 & 12 & 2 \\ 11 & 4 & 5 \\ 13 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (14 \otimes 4 \otimes 3) \oplus (14 \otimes 5 \otimes 5) \oplus (12 \otimes 11 \otimes 3) \oplus (12 \otimes 5 \otimes 13) \\ &\quad \oplus (2 \otimes 11 \otimes 5) \oplus (2 \otimes 4 \otimes 13) \\ &= 21 \oplus 24 \oplus 26 \oplus 30 \oplus 18 \oplus 19 = 30 \in \mathcal{T} \\ |\underline{A}_{b,2}| &= \begin{vmatrix} 5 & 14 & 2 \\ 0 & 11 & 5 \\ 8 & 13 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (5 \otimes 11 \otimes 3) \oplus (5 \otimes 5 \otimes 13) \oplus (14 \otimes 0 \otimes 3) \oplus (14 \otimes 5 \otimes 8) \\ &\quad \oplus (2 \otimes 0 \otimes 13) \oplus (2 \otimes 11 \otimes 8) \\ &= 19 \oplus 23 \oplus 17 \oplus 27 \oplus 15 \oplus 21 = 27 \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\underline{A}_{b,3}| = &\begin{vmatrix} 5 & 12 & 14 \\ 0 & 4 & 11 \\ 8 & 5 & 13 \end{vmatrix} \\
=&(5 \otimes 4 \otimes 13) \oplus (5 \otimes 11 \otimes 5) \oplus (12 \otimes 0 \otimes 13) \oplus (12 \otimes 11 \otimes 8) \\
&\oplus (14 \otimes 0 \otimes 5) \oplus (14 \otimes 4 \otimes 8) \\
=&22 \oplus 21 \oplus 25 \oplus 31 \oplus 19 \oplus 26 = 31 \in \mathcal{T}
\end{aligned}
$$

menunjukkan bahwa

$$
\operatorname{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b} = \begin{bmatrix} |\underline{A}_{b,1}| \\ |\underline{A}_{b,2}| \\ |\underline{A}_{b,3}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 27 \\ 31 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_0^n
$$

maka diperoleh penyelesaian dari persamaan tersebut

$$
\begin{aligned}
\underline{x}_1 &= \frac{|\underline{A}_{b,1}|}{|\underline{A}|} = \frac{30}{25} = -25 \otimes 30 = 5 \\
\underline{x}_2 &= \frac{|\underline{A}_{b,2}|}{|\underline{A}|} = \frac{27}{25} = -25 \otimes 27 = 2 \\
\underline{x}_3 &= \frac{|\underline{A}_{b,3}|}{|\underline{A}|} = \frac{31}{25} = -25 \otimes 31 = 6
\end{aligned}
$$

sehingga

$$
\underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya bisa dicek bahwa

$$
\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \oplus 14 \oplus 8 \\ 5 \oplus 6 \oplus 11 \\ 13 \oplus 7 \oplus 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \underline{b}
$$

Oleh karena $|\underline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $\operatorname{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b} \in \mathcal{T}_0^n$, maka persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{b}$ mempunyai penyelesaian *tangible* tunggal.

2. Penyelesaian $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \overline{b}$, dengan

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 7 \\ 3 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|\overline{A}| = &\begin{vmatrix} 8 & 12 & 7 \\ 3 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
=&(8 \otimes 8 \otimes 3) \oplus (8 \otimes 7 \otimes 5) \oplus (12 \otimes 3 \otimes 3) \oplus (12 \otimes 7 \otimes 8) \\
&\oplus (7 \otimes 3 \otimes 5) \oplus (7 \otimes 8 \otimes 8) \\
=&19 \oplus 20 \oplus 18 \oplus 27 \oplus 15 \oplus 23 = 27 \in \mathcal{T} \\
|\overline{A}_{b,1}| = &\begin{vmatrix} 16 & 12 & 7 \\ 13 & 8 & 7 \\ 14 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
=&(16 \otimes 8 \otimes 3) \oplus (16 \otimes 7 \otimes 5) \oplus (12 \otimes 13 \otimes 3) \oplus (12 \otimes 7 \otimes 14) \\
&\oplus (7 \otimes 13 \otimes 5) \oplus (7 \otimes 8 \otimes 14) \\
=&27 \oplus 28 \oplus 28 \oplus 33 \oplus 25 \oplus 29 = 33 \in \mathcal{T} \\
|\overline{A}_{b,2}| = &\begin{vmatrix} 8 & 16 & 7 \\ 3 & 13 & 7 \\ 8 & 14 & 3 \end{vmatrix} \\
=&(8 \otimes 13 \otimes 3) \oplus (8 \otimes 7 \otimes 14) \oplus (16 \otimes 3 \otimes 3) \oplus (16 \otimes 7 \otimes 8) \\
&\oplus (7 \otimes 3 \otimes 14) \oplus (7 \otimes 13 \otimes 8) \\
=&24 \oplus 29 \oplus 22 \oplus 31 \oplus 24 \oplus 28 = 31 \in \mathcal{T} \\
|\overline{A}_{b,3}| = &\begin{vmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 3 & 8 & 13 \\ 8 & 5 & 14 \end{vmatrix} \\
=&(8 \otimes 8 \otimes 14) \oplus (8 \otimes 13 \otimes 5) \oplus (12 \otimes 3 \otimes 14) \oplus (12 \otimes 13 \otimes 8) \\
&\oplus (16 \otimes 3 \otimes 5) \oplus (16 \otimes 8 \otimes 8) \\
=&30 \oplus 26 \oplus 29 \oplus 33 \oplus 24 \oplus 32 = 33 \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

menunjukkan bahwa

$$\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b} = \begin{bmatrix} |\overline{A}_{b,1}| \\ |\overline{A}_{b,2}| \\ |\overline{A}_{b,3}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 31 \\ 33 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_0^n$$

maka diperoleh penyelesaian dari persamaan tersebut

$$\overline{x}_1 = \frac{|\overline{A}_{b,1}|}{|\overline{A}|} = \frac{33}{27} = -27 \otimes 33 = 6$$
$$\overline{x}_2 = \frac{|\overline{A}_{b,2}|}{|\overline{A}|} = \frac{31}{27} = -27 \otimes 31 = 4$$
$$\overline{x}_3 = \frac{|\overline{A}_{b,3}|}{|\overline{A}|} = \frac{33}{27} = -27 \otimes 33 = 6$$

sehingga

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 7 \\ 3 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \oplus 16 \oplus 13 \\ 9 \oplus 12 \oplus 13 \\ 14 \oplus 9 \oplus 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} = \overline{b}$$

maka diperoleh vektor interval **x** sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [5\ ,\ 4] \\ [2\ ,\ 6] \\ [6\ ,\ 4] \end{bmatrix}$$

Oleh karena $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \in \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \in \mathcal{T}_0^n$. Hal ini menunjukkan bahwa persamaan $\mathbf{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian *tangible* tunggal.

Perhatikan beberapa catatan pada kasus Contoh 4.1.1 dan Contoh 4.1.5 sebagai berikut :

(a) Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ diselesaikan dengan matriks *discrepancy* mempunyai penyelesaian tunggal di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$.

(b) Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ diselesaikan dengan aturan Cramer mempunyai penyelesaian *tangible* tunggal di $\mathbb{I}(R)$, dan hasilnya sama dengan yang dilakukan pada poin (a).

Contoh 4.1.6. Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ pada $\mathbb{I}(R)$ menggunakan aturan Cramer dengan $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n$ merupakan penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal.
Diketahui pada Contoh 4.1.2 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [6\ ,\ 7] & [5\ ,\ 6] & [8\ ,\ 9] \\ [7\ ,\ 7] & [3\ ,\ 3] & [4\ ,\ 5] \\ [3\ ,\ 5] & [1\ ,\ 3] & [1\ ,\ 4] \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1\ ,\ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2\ ,\ \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3\ ,\ \overline{x}_3] \end{bmatrix}\ \text{dan}\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} [12\ ,\ 17] \\ [10\ ,\ 14] \\ [8\ ,\ 14] \end{bmatrix}$$

1. Penyelesaian $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{b}$, dengan

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\underline{A}| &= \begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (6 \otimes 3 \otimes 1) \oplus (6 \otimes 4 \otimes 1) \oplus (5 \otimes 7 \otimes 1) \oplus (5 \otimes 4 \otimes 3) \\ &\quad \oplus (8 \otimes 7 \otimes 1) \oplus (8 \otimes 3 \otimes 3) \\ &= 10 \oplus 11 \oplus 13 \oplus 12 \oplus 16 \oplus 14 = 16 \in \mathcal{T} \\ |\underline{A}_{b,1}| &= \begin{vmatrix} 12 & 5 & 8 \\ 10 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (12 \otimes 3 \otimes 1) \oplus (12 \otimes 4 \otimes 1) \oplus (5 \otimes 10 \otimes 1) \oplus (5 \otimes 4 \otimes 8) \\ &\quad \oplus (8 \otimes 10 \otimes 1) \oplus (8 \otimes 3 \otimes 8) \\ &= 16 \oplus 17 \oplus 16 \oplus 17 \oplus 19 \oplus 19 = 19^{v} \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\underline{A}_{b,2}| = &\begin{vmatrix} 6 & 12 & 8 \\ 7 & 10 & 4 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} \\
=&(6 \otimes 10 \otimes 1) \oplus (6 \otimes 4 \otimes 8) \oplus (12 \otimes 7 \otimes 1) \oplus (12 \otimes 4 \otimes 3) \\
&\oplus (8 \otimes 7 \otimes 8) \oplus (8 \otimes 10 \otimes 3) \\
=&17 \oplus 18 \oplus 20 \oplus 19 \oplus 23 \oplus 21 = 23 \in \mathcal{T} \\
|\underline{A}_{b,3}| = &\begin{vmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 7 & 3 & 10 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\
=&(6 \otimes 3 \otimes 8) \oplus (6 \otimes 10 \otimes 1) \oplus (5 \otimes 7 \otimes 8) \oplus (5 \otimes 10 \otimes 3) \\
&\oplus (12 \otimes 7 \otimes 1) \oplus (12 \otimes 3 \otimes 3) \\
=&17 \oplus 17 \oplus 20 \oplus 18 \oplus 20 \oplus 18 = 20^v \in \mathcal{G}
\end{aligned}
$$

menunjukkan bahwa

$$
\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b} = \begin{bmatrix} |\underline{A}_{b,1}| \\ |\underline{A}_{b,2}| \\ |\underline{A}_{b,3}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19^v \\ 23 \\ 20^v \end{bmatrix} \notin \mathcal{T}_0^n
$$

maka diperoleh penyelesaian dari persamaan tersebut

$$
\begin{aligned}
\underline{x}_1 &= \frac{|\underline{A}_{b,1}|}{|\underline{A}|} = \frac{19^v}{16} = -16 \otimes 19^v = 3^v \\
\underline{x}_2 &= \frac{|\underline{A}_{b,2}|}{|\underline{A}|} = \frac{23}{16} = -16 \otimes 23 = 7 \\
\underline{x}_3 &= \frac{|\underline{A}_{b,3}|}{|\underline{A}|} = \frac{20^v}{16} = -16 \otimes 20^v = 4^v
\end{aligned}
$$

sehingga

$$
\underline{x} = \begin{bmatrix} 3^v \\ 7 \\ 4^v \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3^v \\ 7 \\ 4^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^v \oplus 12 \oplus 12^v \\ 10^v \oplus 10 \oplus 8^v \\ 6^v \oplus 8 \oplus 5^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^v \\ 10^v \\ 8 \end{bmatrix} \models \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

2. Penyelesaian $\overline{A} \otimes \overline{x} \models \overline{b}$, dengan

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 17 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|\overline{A}| =& \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
=&(7 \otimes 3 \otimes 4) \oplus (7 \otimes 5 \otimes 3) \oplus (6 \otimes 7 \otimes 4) \oplus (6 \otimes 5 \otimes 5) \\
&\oplus (9 \otimes 7 \otimes 3) \oplus (9 \otimes 3 \otimes 5) \\
=&14 \oplus 15 \oplus 17 \oplus 16 \oplus 19 \oplus 17 = 19 \in \mathcal{T} \\
|\overline{A}_{b,1}| =& \begin{vmatrix} 17 & 6 & 9 \\ 14 & 3 & 5 \\ 14 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
=&(17 \otimes 3 \otimes 4) \oplus (17 \otimes 5 \otimes 3) \oplus (6 \otimes 14 \otimes 4) \oplus (6 \otimes 5 \otimes 14) \\
&\oplus (9 \otimes 14 \otimes 3) \oplus (9 \otimes 3 \otimes 14) \\
=&24 \oplus 25 \oplus 24 \oplus 25 \oplus 26 \oplus 26 = 26^v \in \mathcal{G} \\
|\overline{A}_{b,2}| =& \begin{vmatrix} 7 & 17 & 9 \\ 7 & 14 & 5 \\ 5 & 14 & 4 \end{vmatrix} \\
=&(7 \otimes 14 \otimes 4) \oplus (7 \otimes 5 \otimes 14) \oplus (17 \otimes 7 \otimes 4) \oplus (17 \otimes 5 \otimes 5) \\
&\oplus (9 \otimes 7 \otimes 14) \oplus (9 \otimes 14 \otimes 5) \\
=&25 \oplus 26 \oplus 28 \oplus 27 \oplus 30 \oplus 28 = 30 \in \mathcal{T} \\
|\overline{A}_{b,3}| =& \begin{vmatrix} 7 & 6 & 17 \\ 7 & 3 & 14 \\ 5 & 3 & 14 \end{vmatrix} \\
=&(7 \otimes 3 \otimes 14) \oplus (7 \otimes 14 \otimes 3) \oplus (6 \otimes 7 \otimes 14) \oplus (6 \otimes 14 \otimes 5) \\
&\oplus (17 \otimes 7 \otimes 3) \oplus (17 \otimes 3 \otimes 5)
\end{aligned}$$

$$= 24 \oplus 24 \oplus 27 \oplus 25 \oplus 27 \oplus 25 = 27^v \in \mathcal{G}$$

menunjukkan bahwa

$$\operatorname{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b} = \begin{bmatrix} |\overline{A}_{b,1}| \\ |\overline{A}_{b,2}| \\ |\overline{A}_{b,3}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26^v \\ 30 \\ 27^v \end{bmatrix} \notin \mathcal{T}_0^n$$

maka diperoleh penyelesaian dari persamaan tersebut

$$\overline{x}_1 = \frac{|\overline{A}_{b,1}|}{|\overline{A}|} = \frac{26^v}{19} = -19 \otimes 26^v = 7^v$$
$$\overline{x}_2 = \frac{|\overline{A}_{b,2}|}{|\overline{A}|} = \frac{30}{19} = -19 \otimes 30 = 11$$
$$\overline{x}_3 = \frac{|\overline{A}_{b,3}|}{|\overline{A}|} = \frac{27^v}{19} = -19 \otimes 27^v = 8^v$$

sehingga

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 7^v \\ 11 \\ 8^v \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7^v \\ 11 \\ 8^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14^v \oplus 17 \oplus 17^v \\ 14^v \oplus 14 \oplus 13^v \\ 12^v \oplus 14 \oplus 12^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17^v \\ 14^v \\ 14 \end{bmatrix} \models \begin{bmatrix} 17 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix} = \overline{b}$$

maka diperoleh vektor interval **x** sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [3^v \ , \ 7^v] \\ [7 \ , \ 11] \\ [4^v \ , \ 8^v] \end{bmatrix}$$

sedangkan untuk memperoleh penyelesaian yang lain dari persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \models \varepsilon$ dilakukan sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{g}_1 \ , \ \overline{g}_1] \\ [7 \ , \ 11] \\ [\underline{g}_3 \ , \ \overline{g}_3] \end{bmatrix}$$ untuk setiap $\underline{g}_1 \preccurlyeq_v 3 \preccurlyeq_v \ \overline{g}_1 \preccurlyeq_v 7$ dan $\underline{g}_3 \preccurlyeq_v 4 \preccurlyeq_v \overline{g}_3 \preccurlyeq_v 8$.

Selanjutnya, $\mathbf{x} = [\underline{x} \ , \ \overline{x}]$ adalah penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal dari $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$, misalkan diberikan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [1 \ , \ 6] \\ [7 \ , \ 11] \\ [2 \ , \ 5] \end{bmatrix}$$

dapat diselidiki bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \oplus 12 \oplus 10 \\ 8 \oplus 10 \oplus 6 \\ 4 \oplus 8 \oplus 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} \vDash \underline{b}$$

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \oplus 17 \oplus 14 \\ 13 \oplus 14 \oplus 10 \\ 11 \oplus 14 \oplus 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix} \vDash \overline{b}$$

Hal ini menunjukkan bahwa penyelesaian *tangible* tidak tunggal dari persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \ \vDash \ \mathbf{b}$, berdasarkan sesuai kriteria penyelesaian dengan $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{b}) = [(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}), (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b})] \notin \mathcal{T}_0^n$. Perhatikan beberapa catatan pada kasus Contoh 4.1.2 dan Contoh 4.1.6 sebagai berikut :

(a) Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \ = \ \mathbf{b}$ diselesaikan dengan matriks *discrepancy* mempunyai penyelesaian banyak di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$.

(b) Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ diselesaikan dengan aturan Cramer mempunyai penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal di $\mathbb{I}(R)$, dan hasilnya sama dengan yang dilakukan pada poin (a).

Contoh 4.1.7. Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ pada $\mathbb{I}(R)$ menggunakan aturan Cramer dengan $|\underline{A}| \in \mathcal{G} \neq \varepsilon|, |\overline{A}|] \in \mathcal{G} \neq \varepsilon$ dan $[(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n$ merupakan penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal.

Diketahui pada Contoh 4.1.3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [4\ ,\ 7] & [7\ ,\ 10] & [5\ ,\ 6] \\ [5\ ,\ 8] & [10\ ,\ 13] & [4\ ,\ 7] \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1\ ,\ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2\ ,\ \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3\ ,\ \overline{x}_3] \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} [10\ ,\ 14] \\ [13\ ,\ 17] \end{bmatrix}$$

1. Penyelesaian $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{b}$, dengan

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 \\ 15 & 20 & 14 \\ 9 & 14 & 8 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ 23 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|\underline{A}| =& \begin{vmatrix} 10 & 15 & 9 \\ 15 & 20 & 14 \\ 9 & 14 & 8 \end{vmatrix} \\
=&(10 \otimes 20 \otimes 8) \oplus (10 \otimes 14 \otimes 14) \oplus (15 \otimes 15 \otimes 8) \oplus (15 \otimes 14 \otimes 9) \\
&\oplus (9 \otimes 15 \otimes 14) \oplus (9 \otimes 20 \otimes 9) \\
=&38 \oplus 38 \oplus 38 \oplus 38 \oplus 38 \oplus 38 = 38^v \in \mathcal{G} \\
|\underline{A}_{b,1}| =& \begin{vmatrix} 18 & 15 & 9 \\ 23 & 20 & 14 \\ 17 & 14 & 8 \end{vmatrix} \\
=&(18 \otimes 20 \otimes 8) \oplus (18 \otimes 14 \otimes 14) \oplus (15 \otimes 23 \otimes 8) \oplus (15 \otimes 14 \otimes 17) \\
&\oplus (9 \otimes 23 \otimes 14) \oplus (9 \otimes 20 \otimes 17) \\
=&46 \oplus 46 \oplus 46 \oplus 46 \oplus 46 \oplus 46 = 46^v \in \mathcal{G} \\
|\underline{A}_{b,2}| =& \begin{vmatrix} 10 & 18 & 9 \\ 15 & 23 & 14 \\ 9 & 17 & 8 \end{vmatrix} \\
=&(10 \otimes 23 \otimes 8) \oplus (10 \otimes 14 \otimes 17) \oplus (18 \otimes 15 \otimes 8) \oplus (18 \otimes 14 \otimes 9) \\
&\oplus (9 \otimes 15 \otimes 17) \oplus (9 \otimes 23 \otimes 9) \\
=&41 \oplus 41 \oplus 41 \oplus 41 \oplus 41 \oplus 41 = 41^v \in \mathcal{G} \\
|\underline{A}_{b,3}| =& \begin{vmatrix} 10 & 15 & 18 \\ 15 & 20 & 23 \\ 9 & 14 & 17 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&(10 \otimes 20 \otimes 17) \oplus (10 \otimes 23 \otimes 14) \oplus (15 \otimes 15 \otimes 17) \oplus (15 \otimes 23 \otimes 9) \\
&\oplus (18 \otimes 15 \otimes 14) \oplus (18 \otimes 20 \otimes 9) \\
=&47 \oplus 47 \oplus 47 \oplus 47 \oplus 47 \oplus 47 = 47^v \in \mathcal{G}
\end{aligned}
$$

menunjukkan bahwa

$$
\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b} = \begin{bmatrix} |\underline{A}_{b,1}| \\ |\underline{A}_{b,2}| \\ |\underline{A}_{b,3}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46^v \\ 41 \\ 47^v \end{bmatrix} \notin \mathcal{T}_0^n
$$

maka diperoleh penyelesaian dari persamaan tersebut

$$
\begin{aligned}
\underline{x}_1 &= \frac{|\underline{A}_{b,1}|}{|\underline{A}|} = \frac{46^v}{38^v} = -38^v \otimes 46^v = 8^v \\
\underline{x}_2 &= \frac{|\underline{A}_{b,2}|}{|\underline{A}|} = \frac{41^v}{38^v} = -38^v \otimes 41^v = 3^v \\
\underline{x}_3 &= \frac{|\underline{A}_{b,3}|}{|\underline{A}|} = \frac{47^v}{38^v} = -38^v \otimes 47^v = 9^v
\end{aligned}
$$

sehingga

$$
\underline{x} = \begin{bmatrix} 8^v \\ 3^v \\ 9^v \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$
\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 \\ 15 & 20 & 14 \\ 9 & 14 & 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8^v \\ 3^v \\ 9^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18^v \oplus 18^v \oplus 18^v \\ 23^v \oplus 23^v \oplus 23^v \\ 17^v \oplus 17^v \oplus 17^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18^v \\ 23^v \\ 17^v \end{bmatrix} \vDash \begin{bmatrix} 18 \\ 23 \\ 17 \end{bmatrix} = \underline{b}
$$

2. Penyelesaian $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \overline{b}$, dengan

$$
\overline{A} = \begin{bmatrix} 16 & 21 & 15 \\ 21 & 26 & 20 \\ 15 & 20 & 14 \end{bmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 24 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}| = &\begin{vmatrix} 16 & 21 & 15 \\ 21 & 26 & 20 \\ 15 & 20 & 14 \end{vmatrix} \\
=&(16 \otimes 26 \otimes 14) \oplus (16 \otimes 20 \otimes 20) \oplus (21 \otimes 21 \otimes 14) \oplus (21 \otimes 20 \otimes 15) \\
&\oplus (15 \otimes 26 \otimes 15) \oplus (15 \otimes 26 \otimes 15) \\
=&56 \oplus 56 \oplus 56 \oplus 56 \oplus 56 \oplus 56 = 56^v \in \mathcal{G} \\
|\overline{A}_{b,1}| = &\begin{vmatrix} 25 & 21 & 15 \\ 30 & 26 & 20 \\ 24 & 20 & 14 \end{vmatrix} \\
=&(25 \otimes 26 \otimes 14) \oplus (25 \otimes 20 \otimes 20) \oplus (21 \otimes 30 \otimes 14) \oplus (21 \otimes 20 \otimes 24) \\
&\oplus (15 \otimes 30 \otimes 15) \oplus (15 \otimes 26 \otimes 24) \\
=&65 \oplus 65 \oplus 65 \oplus 65 \oplus 65 \oplus 65 = 65^v \in \mathcal{G} \\
|\overline{A}_{b,2}| = &\begin{vmatrix} 16 & 25 & 15 \\ 21 & 30 & 20 \\ 15 & 24 & 14 \end{vmatrix} \\
=&(16 \otimes 30 \otimes 14) \oplus (16 \otimes 20 \otimes 24) \oplus (25 \otimes 21 \otimes 14) \oplus (25 \otimes 20 \otimes 15) \\
&\oplus (15 \otimes 21 \otimes 24) \oplus (15 \otimes 30 \otimes 15) \\
=&60 \oplus 60 \oplus 60 \oplus 60 \oplus 60 \oplus 60 = 60^v \in \mathcal{G} \\
|\overline{A}_{b,3}| = &\begin{vmatrix} 16 & 21 & 25 \\ 21 & 26 & 30 \\ 15 & 20 & 24 \end{vmatrix} \\
=&(16 \otimes 26 \otimes 24) \oplus (16 \otimes 30 \otimes 20) \oplus (21 \otimes 21 \otimes 24) \oplus (21 \otimes 30 \otimes 15) \\
&\oplus (25 \otimes 26 \otimes 15) \oplus (25 \otimes 26 \otimes 15) \\
=&66 \oplus 66 \oplus 66 \oplus 66 \oplus 66 \oplus 66 = 66^v \in \mathcal{G}
\end{aligned}
$$

menunjukkan bahwa

$$
\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b} = \begin{bmatrix} |\overline{A}_{b,1}| \\ |\overline{A}_{b,2}| \\ |\overline{A}_{b,3}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65^v \\ 60 \\ 66^v \end{bmatrix} \notin \mathcal{T}_0^n
$$

maka diperoleh penyelesaian dari persamaan tersebut

$$\overline{x}_1 = \frac{|\overline{A}_{b,1}|}{|\overline{A}|} = \frac{65^v}{56^v} = -56^v \otimes 65^v = 9^v$$
$$\overline{x}_2 = \frac{|\overline{A}_{b,2}|}{|\overline{A}|} = \frac{60^v}{56^v} = -56^v \otimes 60^v = 4^v$$
$$\overline{x}_3 = \frac{|\overline{A}_{b,3}|}{|\overline{A}|} = \frac{66^v}{56^v} = -56^v \otimes 66^v = 10^v$$

sehingga

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 9^v \\ 4^v \\ 10^v \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 16 & 21 & 15 \\ 21 & 26 & 20 \\ 15 & 20 & 14 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 9^v \\ 4^v \\ 10^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25^v \oplus 25^v \oplus 25^v \\ 30^v \oplus 30^v \oplus 30^v \\ 24^v \oplus 24^v \oplus 24^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25^v \\ 30^v \\ 24^v \end{bmatrix} = \bar{b} \models \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 24 \end{bmatrix} = \bar{b}$$

maka diperoleh penyelesaian vektor interval **x** sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [8^v \ , \ 9^v] \\ [3^v \ , \ 4^v] \\ [9^v \ , \ 10^v] \end{bmatrix}$$

sedangkan untuk memperoleh penyelesaian yang lain dari persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \models \mathbf{b}$ dilakukan sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [8 \ , \ 9] \\ [\underline{g}_2 \ , \ \overline{g}_2] \\ [\underline{g}_3 \ , \ \overline{g}_3] \end{bmatrix} \text{ untuk } \underline{g}_2 \prec_v 3 \prec_v \overline{g}_2 \prec_v 4 \text{ dan } \underline{g}_3 \prec_v 9 \prec_v \overline{g}_3 \prec_v 10$$
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{g}_1 \ , \ \overline{g}_1] \\ [3 \ , \ 4] \\ [\underline{g}_3 \ , \ \overline{g}_3] \end{bmatrix} \text{ untuk } \underline{g}_1 \prec_v 8 \prec_v \overline{g}_1 \prec_v 9 \text{ dan } \underline{g}_3 \prec_v 9 \prec_v \overline{g}_3 \prec_v 10$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{g}_1 \ , \ \overline{g}_1] \\ [\underline{g}_2 \ , \ \overline{g}_2] \\ [9 \ , \ 10] \end{bmatrix} \text{ untuk } \underline{g}_1 \prec_v 8 \prec_v \overline{g}_1 \prec_v 9 \text{ dan } \underline{g}_2 \prec_v 3 \prec_v \overline{g}_2 \prec_v 4$$

Selanjutnya, $\mathbf{x} = [\underline{x} \ , \ \overline{x}]$ adalah penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal dari $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$, misalkan diberikan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [2 \ , \ 9] \\ [3 \ , \ 4] \\ [0 \ , \ 9] \end{bmatrix}$$

dapat diselidiki bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 \\ 15 & 20 & 14 \\ 9 & 14 & 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \oplus 18 \oplus 9 \\ 17 \oplus 23 \oplus 14 \\ 11 \oplus 17 \oplus 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 23 \\ 17 \end{bmatrix} \vDash \underline{b}$$

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 16 & 21 & 15 \\ 21 & 26 & 20 \\ 15 & 20 & 14 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \oplus 25 \oplus 24 \\ 26 \oplus 30 \oplus 24 \\ 20 \oplus 24 \oplus 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 24 \end{bmatrix} \vDash \overline{b}$$

Hal ini menunjukkan bahwa persamaan $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ dengan menggunakan aturan Cramer mempunyai penyelesaian *tangible* tidak tunggal. Berdasarkan kriteria penyelesaian $|\underline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon, |\overline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$ dan $(\text{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n, (\text{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n$.

Perhatikan beberapa catatan pada kasus Contoh 4.1.3 dan Contoh 4.1.7 sebagai berikut :

(a) Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ diselesaikan dengan matriks *discrepancy* mempunyai penyelesaian banyak di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$.

(b) Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ diselesaikan dengan aturan Cramer mempunyai penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal di $\mathbb{I}(R)$, dan hasilnya sama dengan yang dilakukan pada poin (a).

Contoh 4.1.8. Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ pada $\mathbb{I}(R)$ menggunakan formula adjoin dengan $|\underline{A}| \in \mathcal{G} \neq \varepsilon, |\overline{A}| \in \mathcal{G} \neq \varepsilon$ merupakan penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal.

Diketahui pada Contoh 4.1.4:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [0\ ,\ 1] & [3\ ,\ 5] & [5\ ,\ 7] \\ [3\ ,\ 8] & [1\ ,\ 2] & [4\ ,\ 9] \\ [5\ ,\ 6] & [4\ ,\ 5] & [2\ ,\ 3] \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1\ ,\ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2\ ,\ \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3\ ,\ \overline{x}_3] \end{bmatrix}\ \text{dan}\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} [10\ ,\ 17] \\ [9\ ,\ 19] \\ [10\ ,\ 20] \end{bmatrix}$$

1. Penyelesaian $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{b}$, dengan

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\underline{A}| = & \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ = & (0 \otimes 1 \otimes 2) \oplus (0 \otimes 4 \otimes 4) \oplus (3 \otimes 3 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 4 \otimes 5) \\ & \oplus (5 \otimes 3 \otimes 4) \oplus (5 \otimes 1 \otimes 5) \\ = & 3 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 12 \oplus 12 \oplus 11 = 12 \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

diperoleh penyelesaian dari $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{b}$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{adj}(\underline{A}) &= (\text{Cof}(\underline{A}))^T \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 9 & 10 & 8 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}^T \\ \text{adj}(\underline{A}) &= \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 9 & 10 & 8 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

penyelesaian $\underline{x}$ merupakan kolom ke-j yang tangible dari $\text{adj}(\underline{A})$ yaitu kolom ke-1, ke-2 dan ke-3.
jika $\underline{x}$ adalah kolom ke-1 dari $\text{adj}(\underline{A})$, maka

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \oplus 12 \oplus 12 \\ 11 \oplus 10 \oplus 11 \\ 13 \oplus 13 \oplus 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^v \\ 11^v \\ 13^v \end{bmatrix} \models \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

jika $\underline{x}$ adalah kolom ke-2 dari $\mathrm{adj}(\underline{A})$, maka

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa dicek bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \oplus 13 \oplus 13 \\ 12 \oplus 11 \oplus 12 \\ 14 \oplus 14 \oplus 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13^v \\ 12^v \\ 14^v \end{bmatrix} \models \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

jika $\underline{x}$ adalah kolom ke-3 dari $\mathrm{adj}(\underline{A})$, maka

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa dicek bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \oplus 11 \oplus 11 \\ 10 \oplus 9 \oplus 10 \\ 12 \oplus 12 \oplus 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ 10^v \\ 12^v \end{bmatrix} \models \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

2. Penyelesaian $\overline{A} \otimes \overline{x} \models \overline{b}$, dengan

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}| =& \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
=&(1 \otimes 2 \otimes 3) \oplus (1 \otimes 9 \otimes 5) \oplus (5 \otimes 8 \otimes 3) \oplus (5 \otimes 9 \otimes 6) \\
& \oplus (7 \otimes 8 \otimes 5) \oplus (7 \otimes 2 \otimes 6) \\
=&6 \oplus 15 \oplus 16 \oplus 20 \oplus 20 \oplus 15 = 20^v \in \mathcal{G}
\end{aligned}
$$

diperoleh penyelesaian dari $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \overline{b}$ sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{adj}(\overline{A}) &= (\operatorname{Cof}(\overline{A}))^T \\
&= \begin{bmatrix} 14 & 15 & 13 \\ 12 & 13 & 11 \\ 14 & 15 & 13 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{adj}(\overline{A}) = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 14 \\ 15 & 13 & 15 \\ 13 & 11 & 13 \end{bmatrix}
$$

penyelesaian $\overline{x}$ merupakan kolom ke-j yang tangible dari $\operatorname{adj}(\overline{A})$ yaitu kolom ke-1, ke-2 dan ke-3.

jika $\overline{x}$ adalah kolom ke-1 dan ke-3 dari $\operatorname{adj}(\overline{A})$, maka

$$
\overline{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$
\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \oplus 20 \oplus 20 \\ 22 \oplus 17 \oplus 22 \\ 20 \oplus 20 \oplus 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20^v \\ 22^v \\ 20^v \end{bmatrix} \vDash \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \underline{b}
$$

jika $\overline{x}$ adalah kolom ke-2 dari $\mathrm{adj}(\underline{A})$, maka

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa diselidiki bahwa

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \oplus 18 \oplus 18 \\ 20 \oplus 15 \oplus 20 \\ 18 \oplus 18 \oplus 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18^v \\ 20^v \\ 18^v \end{bmatrix} \vDash \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

maka diperoleh penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal **x** sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [8\ ,\ 14] \\ [9\ ,\ 15] \\ [7\ ,\ 13] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [8\ ,\ 12] \\ [9\ ,\ 13] \\ [7\ ,\ 11] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [9\ ,\ 14] \\ [10\ ,\ 15] \\ [8\ ,\ 13] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [9\ ,\ 12] \\ [10\ ,\ 13] \\ [8\ ,\ 11] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [7\ ,\ 14] \\ [8\ ,\ 15] \\ [6\ ,\ 13] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [7\ ,\ 12] \\ [8\ ,\ 13] \\ [6\ ,\ 11] \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, $\mathbf{x} = [\underline{x}\ ,\ \overline{x}]$ adalah penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal dari $\mathbf{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$, misalkan diselidiki salah satu penyelesaian tersebut dengan diberikan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [7\ ,\ 12] \\ [8\ ,\ 13] \\ [6\ ,\ 11] \end{bmatrix}$$

dapat diselidiki bahwa

$$\underline{A} \otimes \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \oplus 11 \oplus 11 \\ 10 \oplus 9 \oplus 10 \\ 12 \oplus 12 \oplus 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11^v \\ 10^v \\ 12^v \end{bmatrix} \vDash \underline{b}$$

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \oplus 18 \oplus 18 \\ 20 \oplus 15 \oplus 20 \\ 18 \oplus 18 \oplus 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18^v \\ 20^v \\ 14^v \end{bmatrix} \vDash \overline{b}$$

Hal ini menunjukkan persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal. Berdasarkan kriteria penyelesaian dengan $|\overline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$.

Perhatikan beberapa catatan pada kasus Contoh 4.1.4 dan Contoh 4.1.8 sebagai berikut :

(a) Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ diselesaikan dengan matriks *discrepancy* tidak mempunyai penyelesaian di $\mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}$.

(b) Penyelesaian persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ diselesaikan dengan formula adjoin mempunyai penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal di $\mathbb{I}(R)$, dan hasilnya berbeda dengan yang dilakukan pada poin (a). Karena pada kasus aljabar tropical dengan persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai penyelesaian, akan tetapi kasus tersebut dijadikan persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ di *supertropical* R bisa mempunyai penyelesaian.

4.2 Karakterisasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Homogen atas Aljbar *Max-Plus* Interval di *Supertropical*

Setelah dibahas sistem persamaan linear tak homogen atas aljabar *max-plus* interval dalam tropical dan *supertropical*, selanjutnya akan dibahas mengenai sistem persamaan linear homogen dengan persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ atas aljabar *max-plus* dalam aljabar *supertropical*.

Persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} [\underline{a}_{1,1}\ ,\ \overline{a}_{1,1}] & [\underline{a}_{1,2}\ ,\ \overline{a}_{1,2}] & \cdots & [\underline{a}_{1,n}\ ,\ \overline{a}_{1,n}] \\ [\underline{a}_{2,1}\ ,\ \overline{a}_{2,1}] & [\underline{a}_{2,2}\ ,\ \overline{a}_{2,2}] & \cdots & [\underline{a}_{2,n}\ ,\ \overline{a}_{2,n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{n,1}\ ,\ \overline{a}_{n,1}] & [\underline{a}_{n,2}\ ,\ \overline{a}_{n,2}] & \cdots & [\underline{a}_{n,n}\ ,\ \overline{a}_{n,n}] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [\underline{x}_1\ ,\ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2\ ,\ \overline{x}_2] \\ \vdots \\ [\underline{x}_n\ ,\ \overline{x}_n] \end{bmatrix} \vDash \begin{bmatrix} [\varepsilon\ ,\ \varepsilon] \\ [\varepsilon\ ,\ \varepsilon] \\ \vdots \\ [\varepsilon\ ,\ \varepsilon] \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Untuk lebih memahami penyelesaian tersebut diberikan definisi dan proposisi sebagai berikut :

Proposisi 4.2.1. (Yulianti, 2016) Diberikan $A \in M_n(R)$ maka sistem persamaan $A \otimes x \vDash \varepsilon$ mempunyai penyelesaian trivial jika dan hanya jika $|A| \in \mathcal{T}$.

Proposisi 4.2.2. (Yulianti, 2016) Diberikan $A \in M_n(R)$ maka sistem persamaan $A \otimes x \vDash \varepsilon$ mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika $|A| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$.

Pada Proposisi 4.2.1 dan Proposisi 4.2.2 merupakan penyelesaian sistem persamaan linear yang bukan interval, kemudian dikonstruksi menjadi sistem persamaan linear yang interval, sebagaimana diberikan definisi dan proposisi berikut.

Definisi 4.2.1. Persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ mempunyai penyelesaian $\mathbf{y}$ bila $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{y} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana $\mathbf{y} = [\underline{y}\ ,\ \overline{y}]$ atau dengan kata lain $\underline{A} \otimes \underline{y} \vDash \varepsilon$ dan $\overline{A} \otimes \overline{y} \vDash \varepsilon$.

Teorema 4.2.1. Diberikan persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan $\underline{A} \in M_n(R), \overline{A} \in M_n(R)$, atau diberikan dalam persamaan 4.17 mempunyai penyelesaian trivial bila dan hanya bila $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$.

Bukti : Berdasarkan Definisi 4.2.1 bahwa persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ mempunyai penyelesaian maka persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \varepsilon$ dan $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \varepsilon$ masing-masing mempunyai penyelesaian trivial, bilamana menggunakan Proposisi 4.2.1 didapatkan $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$.

■

Untuk lebih memahaminya diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 4.2.1. Penyelesaian trivial pada persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$, dimana $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$.

Bila diketahui :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [0\ ,\ 1] & [5\ ,\ 5] & [2\ ,\ 3] \\ [3\ ,\ 5] & [-1\ ,\ 2] & [-2\ ,\ -1] \\ [1\ ,\ 2] & [4\ ,\ 4] & [7\ ,\ 7] \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1\ ,\ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2\ ,\ \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3\ ,\ \overline{x}_3] \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} [\varepsilon\ ,\ \varepsilon] \\ [\varepsilon\ ,\ \varepsilon] \\ [\varepsilon\ ,\ \varepsilon] \end{bmatrix}$$

1. Penyelesaian trivial dengan persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{\varepsilon}$.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

sistem persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \varepsilon \leftrightarrow \underline{A} \otimes \underline{x} \in \mathcal{G}_0^3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

diperoleh determinan dari $\underline{A}$

$$\begin{aligned} |\underline{A}| =& \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} \\ =&(0 \otimes -1 \otimes 7) \oplus (0 \otimes -2 \otimes 4) \oplus (5 \otimes 3 \otimes 7) \oplus (5 \otimes -2 \otimes 1) \\ &\oplus (2 \otimes 3 \otimes 4) \oplus (2 \otimes -1 \otimes 1) \\ =&6 \oplus 2 \oplus 15 \oplus 4 \oplus 9 \oplus 2 = 15 \\ |\underline{A}| =&15 \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

karena penyelesaian dari $\underline{A} \otimes \underline{x} \in \mathcal{G}_0^3$, maka semua elemen penyelesaian $\underline{x}$ harus ε sebagai berikut :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

selanjutnya, penyelesaian ini bisa diselidiki sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \underline{A} \otimes \underline{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0 \otimes \varepsilon) \oplus (5 \otimes \varepsilon) \oplus (2 \otimes \varepsilon) \\ (3 \otimes \varepsilon) \oplus (-1 \otimes \varepsilon) \oplus (-2 \otimes \varepsilon) \\ (1 \otimes \varepsilon) \oplus (4 \otimes \varepsilon) \oplus (7 \otimes \varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3 \end{aligned}$$

oleh karena $|\underline{A}| \in \mathcal{T}$, maka persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{\varepsilon}$ di R mempunyai penyelesaian trivial.

2. Penyelesaian trivial dengan persamaan $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \overline{\varepsilon}$.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \overline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

sistem persamaan $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \varepsilon \leftrightarrow \overline{A} \otimes \overline{x} \in \mathcal{G}_0^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

diperoleh determinan dari $\overline{A}$

$$\begin{aligned} |\overline{A}| = &\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} \\ =&(1 \otimes 2 \otimes 7) \oplus (1 \otimes -1 \otimes 4) \oplus (5 \otimes 5 \otimes 7) \oplus (5 \otimes -1 \otimes 2) \\ &\oplus (3 \otimes 5 \otimes 4) \oplus (3 \otimes 2 \otimes 2) \end{aligned}$$

$$=10 \oplus 4 \oplus 17 \oplus 6 \oplus 12 \oplus 7 = 17 \in \mathcal{T}$$

maka penyelesaian dari $\overline{A} \otimes \overline{x} \in \mathcal{G}_0^3$ sebagai berikut :

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

selanjutnya, penyelesaian ini bisa diselidiki sebagai berikut :

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \otimes \varepsilon) \oplus (5 \otimes \varepsilon) \oplus (3 \otimes \varepsilon) \\ (5 \otimes \varepsilon) \oplus (2 \otimes \varepsilon) \oplus (-1 \otimes \varepsilon) \\ (2 \otimes \varepsilon) \oplus (4 \otimes \varepsilon) \oplus (7 \otimes \varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

oleh karena $|\overline{A}| \in \mathcal{T}$, maka persamaan $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \overline{\varepsilon}$ di R mempunyai penyelesaian trivial.

sehingga penyelesaian vektor interval **x** adalah

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\varepsilon \ , \ \varepsilon] \\ [\varepsilon \ , \ \varepsilon] \\ [\varepsilon \ , \ \varepsilon] \end{bmatrix}$$

dengan diperoleh penyelesaian persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{\varepsilon}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \overline{\varepsilon}$ adalah penyelesaian trivial, maka dikatakan persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ mempunyai penyelesaian trivial.

Teorema 4.2.2. Diberikan persamaan pada $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan $\underline{A} \in M_n(R), \overline{A} \in M_n(R)$, atau diberikan dalam persamaan 4.17 mempunyai penyelesaian tak trivial bila dan hanya bila $|\underline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon, |\overline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$.

Bukti : Menurut Definisi 4.2.1 mempunyai penyelesaian maka persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \varepsilon$ dan $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \varepsilon$ mempunyai penyelesaian tak trivial dengan menggunakan Proposisi 4.2.2 didapatkan $|\underline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon, |\overline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$.

■

Untuk lebih memahaminya diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 4.2.2. Penyelesaian tak trivial pada persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$, dimana $|\underline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon, |\overline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$.

Bila diketahui :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [5 \ , \ 9] & [2 \ , \ 4] & [4 \ , \ 6] \\ [-1 \ , \ 6] & [3 \ , \ 4] & [0 \ , \ 0] \\ [7 \ , \ 10] & [0 \ , \ 5] & [6 \ , \ 7] \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1 \ , \ \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2 \ , \ \overline{x}_2] \\ [\underline{x}_3 \ , \ \overline{x}_3] \end{bmatrix} \ \text{dan} \ \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} [\varepsilon \ , \ \varepsilon] \\ [\varepsilon \ , \ \varepsilon] \\ [\varepsilon \ , \ \varepsilon] \end{bmatrix}$$

1. Penyelesaian tak trivial dengan persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{\varepsilon}$.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

sistem persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \varepsilon \leftrightarrow \underline{A} \otimes \underline{x} \in \mathcal{G}_0^3$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

diperoleh determinan dari $\underline{A}$

$$\begin{aligned} |\underline{A}| = &\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\ =&(5 \otimes 3 \otimes 6) \oplus (5 \otimes 0 \otimes 0) \oplus (2 \otimes 1 \otimes 6) \oplus (2 \otimes 0 \otimes 7) \\ &\oplus (4 \otimes 1 \otimes 0) \oplus (4 \otimes 3 \otimes 7) \\ =&14 \oplus 5 \oplus 9 \oplus 9 \oplus 5 \oplus 14 = 14^v \in \mathcal{G}_0 \end{aligned}$$

maka penyelesaian dari $\underline{A} \otimes \underline{x} \in \mathcal{G}_0^3$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mathrm{adj}(\underline{A}) &= (\mathrm{Cof}(\underline{A}))^T \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 7^v & 10 \\ 8 & 11^v & 9 \\ 7 & 5^v & 8 \end{bmatrix}^T \\ \mathrm{adj}(\underline{A}) &= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 7^v & 11^v & 5^v \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

penyelesaian $\underline{x}$ merupakan kolom ke- j dari $\mathrm{adj}(\underline{A})$ yaitu kolom ke-1, kolom ke-2 dan kolom ke-3.

Jika $\underline{x}$ merupakan kolom ke-1 dari $\mathrm{adj}(\underline{A})$, maka

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7^v \\ 10 \end{bmatrix}$$

selanjutnya, penyelesaian ini bisa diselidiki sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\underline{A} \otimes \underline{x} &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 9 \\ 7^v \\ 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 \oplus 9^v \oplus 14 \\ 10 \oplus 10^v \oplus 10 \\ 16 \oplus 7^v \oplus 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14^v \\ 10^v \\ 16^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3\end{aligned}$$

Jika $\underline{x}$ merupakan kolom ke-2 dari $\mathrm{adj}(\underline{A})$, maka

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11^v \\ 9 \end{bmatrix}$$

selanjutnya, penyelesaian ini bisa diselidiki sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\underline{A} \otimes \underline{x} &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 11^v \\ 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 \oplus 13^v \oplus 13 \\ 9 \oplus 14^v \oplus 9 \\ 15 \oplus 11^v \oplus 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13^v \\ 14^v \\ 15^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3\end{aligned}$$

Jika $\underline{x}$ merupakan kolom ke-3 dari $\mathrm{adj}(\underline{A})$, maka

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5^v \\ 8 \end{bmatrix}$$

selanjutnya, penyelesaian ini bisa diselidiki sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\underline{A} \otimes \underline{x} &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 5^v \\ 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 \oplus 7^v \oplus 12 \\ 8 \oplus 8^v \oplus 5 \\ 14 \oplus 5^v \oplus 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^v \\ 8^v \\ 14^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3\end{aligned}$$

2. Penyelesaian tak trivial dengan persamaan $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \overline{\varepsilon}$.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \overline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

sistem persamaan $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \varepsilon \leftrightarrow \overline{A} \otimes \overline{x} \in \mathcal{G}_0^3$

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

diperoleh determinan dari $\overline{A}$

$$\begin{aligned} |\overline{A}| = & \begin{vmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \end{vmatrix} \\ =& (9 \otimes 4 \otimes 7) \oplus (9 \otimes 0 \otimes 5) \oplus (4 \otimes 6 \otimes 5) \oplus (4 \otimes 0 \otimes 10) \\ & \oplus (6 \otimes 6 \otimes 5) \oplus (6 \otimes 4 \otimes 10) \\ =& 20 \oplus 14 \oplus 15 \oplus 14 \oplus 17 \oplus 20 = 20^v \\ |\overline{A}| =& 20^v \in \mathcal{G}_0 \end{aligned}$$

maka penyelesaian dari $\overline{A} \otimes \overline{x} \in \mathcal{G}_0^3$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mathrm{adj}(\overline{A}) &= (\mathrm{Cof}(\overline{A}))^T \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 13 & 14 \\ 11^v & 16^v & 14^v \\ 10 & 12 & 13 \end{bmatrix}^T \\ \mathrm{adj}(\underline{A}) &= \begin{bmatrix} 11 & 11^v & 10 \\ 13 & 16^v & 12 \\ 14 & 14^v & 13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

penyelesaian $\overline{x}$ merupakan kolom ke-j dari $\mathrm{adj}(\overline{A})$ yaitu kolom ke-1, kolom ke-2 dan kolom ke-3.

Jika $\overline{x}$ merupakan kolom ke-1 dari $\operatorname{adj}(\overline{A})$, maka

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

selanjutnya, penyelesaian ini bisa diselidiki sebagai berikut :

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 \oplus 17 \oplus 20 \\ 17 \oplus 17 \oplus 14 \\ 21 \oplus 18 \oplus 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20^v \\ 17^v \\ 21^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

Jika $\overline{x}$ merupakan kolom ke-2 dari $\operatorname{adj}(\overline{A})$, maka

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 11^v \\ 16^v \\ 14^v \end{bmatrix}$$

selanjutnya, penyelesaian ini bisa diselidiki sebagai berikut :

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 11^v \\ 16^v \\ 14^v \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 20^v \oplus 20^v \oplus 20^v \\ 17^v \oplus 20^v \oplus 14^v \\ 21^v \oplus 21^v \oplus 21^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20^v \\ 20^v \\ 21^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

Jika $\overline{x}$ merupakan kolom ke-3 dari $\operatorname{adj}(\overline{A})$, maka

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

selanjutnya, penyelesaian ini bisa diselidiki sebagai berikut :

$$\overline{A} \otimes \overline{x} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 \oplus 16 \oplus 19 \\ 16 \oplus 16 \oplus 13 \\ 20 \oplus 17 \oplus 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19^v \\ 16^v \\ 20^v \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_0^3$$

maka diperoleh penyelesaian vektor interval **x** sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [9\ ,\ 11] \\ [7\ ,\ 13] \\ [10\ ,\ 14] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [9\ ,\ 11^v] \\ [7\ ,\ 16^v] \\ [10\ ,\ 14^v] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [9\ ,\ 10] \\ [7\ ,\ 12] \\ [10\ ,\ 13] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [8\ ,\ 11] \\ [11^v\ ,\ 13] \\ [9\ ,\ 14] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [8\ ,\ 11^v] \\ [11^v\ ,\ 16^v] \\ [9\ ,\ 14^v] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [8\ ,\ 10] \\ [11^v\ ,\ 12] \\ [9\ ,\ 13] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [7\ ,\ 11] \\ [5\ ,\ 13] \\ [8\ ,\ 14] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [7\ ,\ 11^v] \\ [5\ ,\ 16^v] \\ [8\ ,\ 14^v] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [7\ ,\ 10] \\ [5\ ,\ 12] \\ [8\ ,\ 13] \end{bmatrix}.$$

sedangkan untuk memperoleh penyelesaian yang lain dari persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \varepsilon$ dilakukan sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} \otimes \begin{bmatrix} [9\ ,\ 11] \\ [7\ ,\ 13] \\ [10\ ,\ 14] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{c} \otimes \begin{bmatrix} [9\ ,\ 11^v] \\ [7\ ,\ 16^v] \\ [10\ ,\ 14^v] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{c} \otimes \begin{bmatrix} [9\ ,\ 10] \\ [7\ ,\ 12] \\ [10\ ,\ 13] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} \otimes \begin{bmatrix} [8\ ,\ 11] \\ [11^v\ ,\ 13] \\ [9\ ,\ 14] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{c} \otimes \begin{bmatrix} [8\ ,\ 11^v] \\ [11^v\ ,\ 16^v] \\ [9\ ,\ 14^v] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{c} \otimes \begin{bmatrix} [8\ ,\ 10] \\ [11^v\ ,\ 12] \\ [9\ ,\ 13] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} \otimes \begin{bmatrix} [7\ ,\ 11] \\ [5\ ,\ 13] \\ [8\ ,\ 14] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{c} \otimes \begin{bmatrix} [7\ ,\ 11^v] \\ [5\ ,\ 16^v] \\ [8\ ,\ 14^v] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{c} \otimes \begin{bmatrix} [7\ ,\ 10] \\ [5\ ,\ 12] \\ [8\ ,\ 13] \end{bmatrix}.$$

untuk setiap $\mathbf{c} = [\underline{c}\ ,\ \overline{c}] \in \mathcal{T}$.

Dengan diperoleh penyelesaian persamaan $\underline{A} \otimes \underline{x} \vDash \underline{\varepsilon}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{x} \vDash \overline{\varepsilon}$ adalah penyelesaian tak trivial, maka dikatakan persamaan $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \varepsilon$ mempunyai penyelesaian tak trivial.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini, diberikan simpulan berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang diperoleh. Diberikan juga saran pada hasil penelitian ini untuk perbaikan dan pengembangan penelitian selanjutnya.

5.1 Simpulan

Diberikan simpulan yang diperoleh sebagai beikut:

1. Penyelesaian sistem persamaan linear $\mathbf{A}\,\overline{\otimes}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ atas aljabar *max-plus* interval dengan $\underline{A} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m\times n}, \overline{A} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{m\times n}, \underline{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{n}, \overline{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{n}$ dan $\underline{x} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{n}, \overline{x} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})_{\max}^{n}$ menggunakan matriks *discrepancy* mempunyai penyelesaian atau tidak dengan karakteristik sebagai berikut :

   (a) Penyelesaian tunggal bila hanya bila setiap baris matriks $R_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ memiliki hanya satu elemen yang bernilai 1.

   (b) Penyelesaian banyak bila hanya bila terdapat baris matriks $R_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ memiliki lebih dari satu elemen yang bernilai 1.

   (c) Tidak mempunyai penyelesaian bila hanya bila terdapat baris matriks $R_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ yang tidak semua elemen yang bernilai 1 atau semua elemen di baris tersebut bernilai 0.

   Selain itu, pada poin (c) dengan kasus persamaan $\mathbf{A}\,\overline{\otimes}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang tidak mempunyai penyelesaian, kemungkinan bisa mempunyai penyelesaian di aljabar *supertropical* R dengan bentuk persamaan $\mathbf{A}\,\overline{\otimes}\,\mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$.

2. Penyelesaian sistem persamaan linear tak homogen $\mathbf{A}\,\overline{\otimes}\,\mathbf{x} \vDash \mathbf{b}$ atas *max-plus* interval dengan $\underline{A} \in M_n(R), \overline{A} \in M_n(R), \underline{b} \in \mathcal{T}_0^n, \overline{b} \in \mathcal{T}_0^n$ dan $\underline{x} \in R^n, \overline{x} \in R^n$ mempunyai penyelesaian dengan karakteristik sebagai berikut.

   (a) Penyelesaian *tangible* yang tunggal bila dan hanya bila $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \in \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \in \mathcal{T}_0^n$.

   (b) Penyelesaian *tangible* yang tidak tunggal bila dan hanya bila

      i. $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$ dan $(\mathrm{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n, (\mathrm{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n$ atau

ii. $|\underline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon, |\overline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$ dan $(\text{adj}(\underline{A}) \otimes \underline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n, (\text{adj}(\overline{A}) \otimes \overline{b}) \notin \mathcal{T}_0^n$ atau

iii. $|\underline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon, |\overline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$

3. Penyelesaian sistem persamaan linear homogen $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{x} \vDash \boldsymbol{\varepsilon}$ atas *max-plus* interval dengan $\underline{A} \in M_n(R, \overline{A} \in M_n(R)$ dan $\underline{x} \in R^n, \overline{x} \in R^n$ mempunyai penyelesaian sebagai berikut.

   (a) Penyelesaian trivial bila dan hanya bila $|\underline{A}| \in \mathcal{T}, |\overline{A}| \in \mathcal{T}$.

   (b) Penyelesaian tak trivial bila dan hanya bila $|\underline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon, |\overline{A}| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$.

5.2 Saran

Diberikan saran bagi peneliti selanjutnya adalah untuk penelitian selanjutnya agar menggunakan metode selain matriks *discrepancy*, aturan Cramer dan formula adjoin serta tidak dibatasi dengan matriks tak persegi.

DAFTAR PUSTAKA

Myskova, H., 2012."*Interval Max-Plus System of Linear Equations*". Linear Algebra Appl 437 (2012) 1992-2000

Rudhito, A., Wahyuni, S., Suparwanto, A., Susilo, F., 2011."*Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval*". Jurnal Natur Indonesia 13(2), Februari 2011:94-99

Siswanto, 2014. "*Ruang Vektor Eigen Suatu Matriks Atas Aljabar Max-Plus Interval*". Jurnal Matematika dan Sains, Vol 19, Nomor 1.

Subiono, 2015."*Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya version 3.0.0*". Jurusan Matematika,Institut Teknologi Sepuluh Nopember,Surabaya

Yulianti, D.,2016."*Karakterisasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Atas Aljabar SuperTropical*". Tesis : Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

BIODATA PENULIS

Penulis bernama Hermansyah yang lahir di Bone, 01 Januari 1988 dan merupakan anak pertama dari empat bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari SD Negeri 028 Tarakan (1994-2000), SMP Negeri 4 Tarakan (2000-2003), SMA Hang Tuah Tarakan Jurusan IPA (2003-2006). Pada tahun 2006, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 dan diterima sebagai mahasiswa di Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP), Universitas Borneo Tarakan. Selanjutnya, pada tahun 2013 penulis mendapat beasiswa Pra S2-S2 Saintek dan menjadi mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dan mengambil bidang minat Aljabar. Untuk informasi yang berkaitan dengan Tesis ini, dapat menghubungi penulis melalui email h3rmansyah16@gmail.com.