



SEMINAR HASIL TUGAS AKHIR

PENYELESAIAN PERSAMAAN *BLACK-SCHOLES* DENGAN *ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD*

Nirmala Pratiwi
1211 100 078

Dosen Pembimbing:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Sentot Didik S, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA

2015

ABSTRAK

Adomian decomposition method (ADM) merupakan metode penyelesaian berbentuk sebuah deret pendekatan. Dalam Tugas Akhir ini akan dibahas tentang solusi analitik dari Persamaan *Black-Scholes* pada tipe Eropa, meliputi *European call option* dan *European put option* dengan pembayaran dividen dan diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method*, dimana solusi yang didapat akan dibandingkan dengan Persamaan difusi melalui simulasi program *Matlab* 2010a. Setelah didapatkan perbandingan model dari kedua metode, maka didapatkan hasil bahwa *Adomian decomposition method* merupakan metode yang paling akurat karena hasil perhitungan yang didapat, mendekati dengan hasil dari perhitungan Difusi, dengan nilai eror lebih kecil 0,0001%.

Kata kunci: *Adomian decomposition method*, *Persamaan Black-Scholes*, *Persamaan Difusi*, *Opsi Call*, *Opsi Put*.

BAB 1 : PENDAHULUAN

1.1 Latar
Belakang

1.2
Rumusan
Masalah

1.3
Batasan
Masalah

1.4
Tujuan

1.5
Manfaat

Perkembangan
Teknologi

Pola pikir

financial

investasi

Homotophy

*Adomian
Decomposition
Method (ADM)*

Binomial

Black-Scholes

OPSI

derivative

Trinomial

*Variational
Iteration Method
(VIM)*

Diffusi

BAB 1 : PENDAHULUAN



ITS
Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember

1.1 Latar
Belakang

1.2
Rumusan
Masalah

1.3
Batasan
Masalah

1.4
Tujuan

1.5
Manfaat

1. Bagaimanakah penyelesain persamaan *Black-Scholes* menggunakan *Adomian Decomposition Method* (ADM)?

2. Bagaimanakah keakuratan *Adomian Decomposition Method* (ADM) pada persamaan *Black-Scholes* dibandingkan solusi dari *Diffusion Equation*?

BAB 1 : PENDAHULUAN

ITS

Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember

1.1 Latar
Belakang

1.2

Rumusan
Masalah

1.3

Batasan
Masalah

1.4

Tujuan

1.5

Manfaat

1. Tipe Opsi yang digunakan adalah Opsi Eropa

2. *Interest rate* bebas risiko

3. Tidak terdapat biaya transaksi dan pajak

4. Volatilitas/variansi harga saham bersifat konstan

5. Saham yang digunakan memberikan dividen (pembagian keuntungan)

BAB 1 : PENDAHULUAN



ITS
Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember

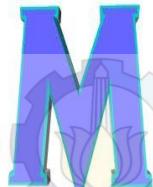
1.1 Latar
Belakang

1.2
Rumusan
Masalah

1.3
Batasan
Masalah

1.4
Tujuan

1.5
Manfaat



1

- Mendapatkan penyelesaian persamaan *Black-Scholes* menggunakan *Adomian Decomposition Method* (ADM)

2

- Mendapatkan hasil perbandingan solusi dari *Adomian Decomposition Method* (ADM) dengan *Diffusi Equation* untuk menyelesaikan persamaan *Black-Scholes*

BAB 1 : PENDAHULUAN



1.1 Latar
Belakang

1.2
Rumusan
Masalah

1.3
Batasan
Masalah

1.4
Tujuan

1.5
Manfaat

1.

- Memahami tentang aplikasi *Adomian Decomposition Method* (ADM) untuk menyelesaikan persamaan/model *Black-Scholes*

2.

- Mendapatkan hasil perbandingan secara analitik maupun grafik antara *Adomian decomposition method* dan *Diffution Equation* dalam menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes*.

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

2.7 Adomian
Decomposition Method

ADM untuk persamaan Abelian

Diselesaikan dengan metode Runge Kutta orde empat, dan penyelesaian umumnya diselesaikan dengan menggunakan *Adomian Decomposition Method* dalam bentuk deret.

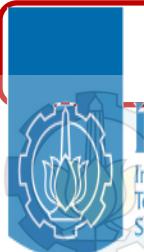
ADM untuk persamaan Schrödinger nonlinear

Persamaan ini diselesaikan secara numerik dengan menggunakan Metode Beda Hingga, tapi solusi akhir yang didapat belum maksimal (eror). Sehingga diselesaikan secara analitik dengan *Adomian Decomposition Method* dan didapatkan solusi eksak dalam bentuk deret

ADM untuk persamaan Black-Scholes

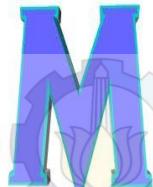
Diselesaikan secara analitik dengan Adomian Decomposition Method dalam bentuk deret. Didapatkan hasil jika metode ADM merupakan metode paling efisien dalam menyelesaikan pers. *Black-Scholes*.

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



ITS

Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

2.7 Adomian
Decomposition Method

Model yang digunakan untuk menentukan harga opsi. Model ini dikembangkan oleh Fischer Black dan Myron Scholes (1973) . Waktu penggunaannya hanya untuk Tipe Eropa (*expiration date*).

Beberapa asumsi tentang Black-Scholes:

1. Jenis opsi yang digunakan adalah opsi tipe Eropa
2. Variansi harga saham bersifat konstan
3. Tingkat suku bunga bebas risiko
4. Tidak terdapat pajak dan biaya transaksi

Persamaan umum Black-Scholes adalah:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

dengan σ : volatilitas

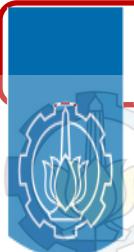
r : suku bunga

V : harga opsi saham

S : harga saham

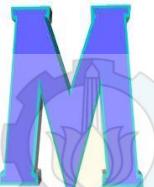
t : waktu jatuh tempo

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



ITS

Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Difusi

2.4 Opsi

2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

2.7 Adomian
Decomposition Method

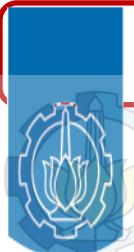
Persamaan analitik yang linear dan berorde dua, dimana Persamaan umumnya adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x, \tau > 0$$

Diberikan syarat awal, $u(x, 0) = 0$ dan $u(0, \tau) = 1$ untuk $-\infty < x < \infty$, dengan nilai

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4\tau}} dv$$

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

2.7 Adomian
Decomposition Method

Opsi adalah hak untuk melakukan transaksi (jual/beli) atas suatu aset pada suatu periode tertentu dengan nilai yang telah ditentukan pada saat jatuh tempo

Opsi Call/beli

Opsi Put/jual

Hak
transaksi

Periode
waktu

Tipe Eropa
Tipe Amerika

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

2.7 Adomian
Decomposition Method

Memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli aset yang ada di *option market*, dari penjual opsi seharga *Strike Price*

Harga opsi beli tipe Eropa (C) pada saat jatuh tempo adalah:

$$C = \begin{cases} S_T - K & ; \text{jika } S_T > K \\ 0 & ; \text{jika } S_T \leq K \end{cases}$$

Sehingga, didapatkan persamaan umum dari *Call Option* adalah

$$C(S, T) = \max(S_T - K, 0)$$

dengan C : harga opsi beli pada waktu jatuh tempo

S_T : harga saham

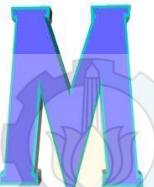
K : harga pelaksanaan/harga opsi

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



ITS

Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

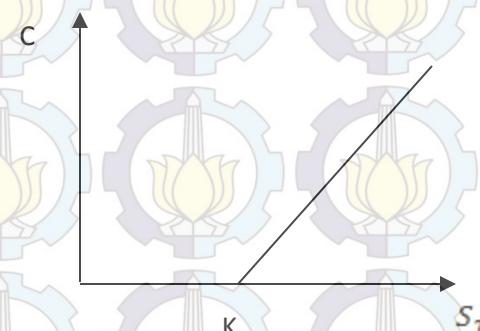
2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

2.7 Adomian
Decomposition Method



1. Pada saat $S_T < K$, *out of the money* (OTM). pemegang opsi tidak akan menggunakan haknya dan ia akan mengalami kerugian sebesar premi yang telah dibayarkan
2. Pada saat $S_T = K$, *at the money* (ATM). Kerugian yang diderita pemegang opsi beli adalah sebesar premi yang telah dibayarkan kepada penjual opsi
3. Pada saat $S_T > K$, *in the money* (ITM). Pemilik opsi akan menggunakan opsinya karena akan memperoleh keuntungan atau dapat meminimalkan kerugian

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



ITS

Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

2.7 Adomian
Decomposition Method

Memberikan hak kepada pemegang opsi (*taker*) untuk menjual sejumlah asset yang ada di *option market* seharga *Strike Price*

Harga opsi jula tipe Eropa (P) saat jatuh tempo adalah:

$$P = \begin{cases} K - S_T & ; \text{jika } S_T < K \\ 0 & ; \text{jika } S_T \geq K \end{cases}$$

Sehingga, didapatkan persamaan umum dari *Put Option* adalah

$$P(S, T) = \max(K - S_T, 0)$$

dengan P : harga opsi jual pada waktu jatuh tempo

S_T : harga saham

K : harga pelaksanaan/harga opsi

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

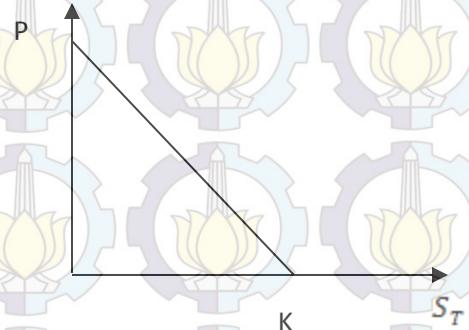
2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

2.7 Adomian
Decomposition Method



1. Pada saat $S_T < K$, *in the money* (ITM). pemegang opsi jual akan menggunakan haknya dan nilai opsi ini yaitu sebesar selisih antar harga pelaksanaan dan harga saham
2. Pada saat $S_T = K$, *at the money* (ATM). opsi ini akan bernilai nol dan pemegang opsi jual akan menanggung kerugian sebesar premi opsi yang telah dibayarkan
3. Pada saat $S_T > K$, *out the money* (OTM). Pemilik opsi tidak akan menggunakan opsinya karena ia dapat menjual saham dengan harga yang lebih tinggi di pasar saham

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA

ITS

Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember

M

2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

2.7 Adomian
Decomposition Method

Put-call parity yang dikembangkan oleh Stoll didenisikan sebagai suatu hubungan antara harga opsi jual dan opsi beli. Hubungan tersebut menunjukkan bahwa nilai opsi beli tipe Eropa dengan harga strike dan waktu jatuh tempo tertentu dapat diperoleh dari nilai opsi jual dengan harga strike dan waktu jatuh tempo yang sama, dan berlaku sebaliknya [6].

Put-call parity harga opsi tipe Eropa adalah

$$C(S(t), t) - P(S(t), t) = S(t) - Ee^{-r(T-t)}$$

dengan $C(S(t), t)$ = harga saham untuk *call option*

$P(S(t), t)$ = harga saham untuk *put option*

E = *strike price*

$T - t$ = harga saham pada waktu t

r = *interest rate*

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

2.4.1 *European Call Option*

2.4.2 *European Put Option*

2.5 *Put-Call Parity*

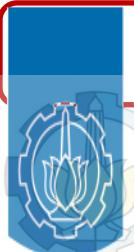
2.6 Dividen

2.7 *Adomian Decomposition Method*

Dividen merupakan keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada pemegang saham. Biasanya tidak seluruh keuntungan perusahaan dibagikan kepada pemegang saham, tetapi ada bagian yang disimpan kembali.

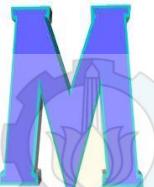
Jika perusahaan mengalami kerugian tentu saja dividen tidak akan dibagikan pada tahun tersebut.

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



ITS

Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

**2.7 Adomian
Decomposition Method**

Metode yang dikemukakan oleh seorang Ahli Ilmu Matematika dari Amerika yaitu George Adomian (1922-1996). Metode ini bertujuan untuk menemukan solusi analitik persamaan diferensial linier atau nonlinier dalam bentuk deret

Diberikan persamaan differensial sebagai berikut :

$$F u(t) = g(t) \quad (2.7.1)$$

Dimana, $F u(t)$ adalah sebuah fungsi yang memuat sebuah fungsi linear dan fungsi nonlinear didalamnya, sehingga dapat dituliskan

$$F u(t) = L u(t) + R u(t) \quad (2.7.2)$$

$$L u(t) + R u(t) + N u(t) = g(t) \quad (2.7.3)$$

$$L u(t) = g(t) - R u(t) - N u(t) \quad (2.7.4)$$

dengan L : Operator Linear

R : Sisa Operator Linear

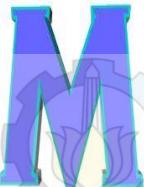
N : Operator Non-linear

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



ITS

Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

**2.7 Adomian
Decomposition Method**

L adalah Operator linier, sehingga dapat ditentukan inversnya L^{-1} dengan $L = \frac{d}{dt}$ dan $L^{-1} = \int_0^t dt$ sehingga dikenakan operator L^{-1}

Pada kedua sisi

$$\begin{aligned} L^{-1}Lu(t) &= L^{-1}[g(t) - Ru(t) - Nu(t)] \\ L^{-1}Lu(t) &= L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t) \\ u(t) &= \varphi + L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t) \end{aligned}$$

dengan φ = konstanta

Adomian mendenisikan $u(t)$ sebagai jumlahan deret tak hingga, sehingga berbentuk:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) \quad (2.7.5)$$

dan pada suku non-liniernya, $Nu(t)$ berbentuk:

$$Nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2.7.6)$$

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA



2.1 Penelitian Terdahulu

2.2 Black Scholes

2.3 Persamaan Diffusi

2.4 Opsi

2.4.1 European Call Option

2.4.2 European Put Option

2.5 Put-Call Parity

2.6 Dividen

2.7 Adomian
Decomposition Method

Dari Persamaan (2.7.3) dan (2.7.4) diperoleh

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) = \varphi + L^{-1}g(t) - L^{-1}R \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) - L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) \quad (2.7.7)$$

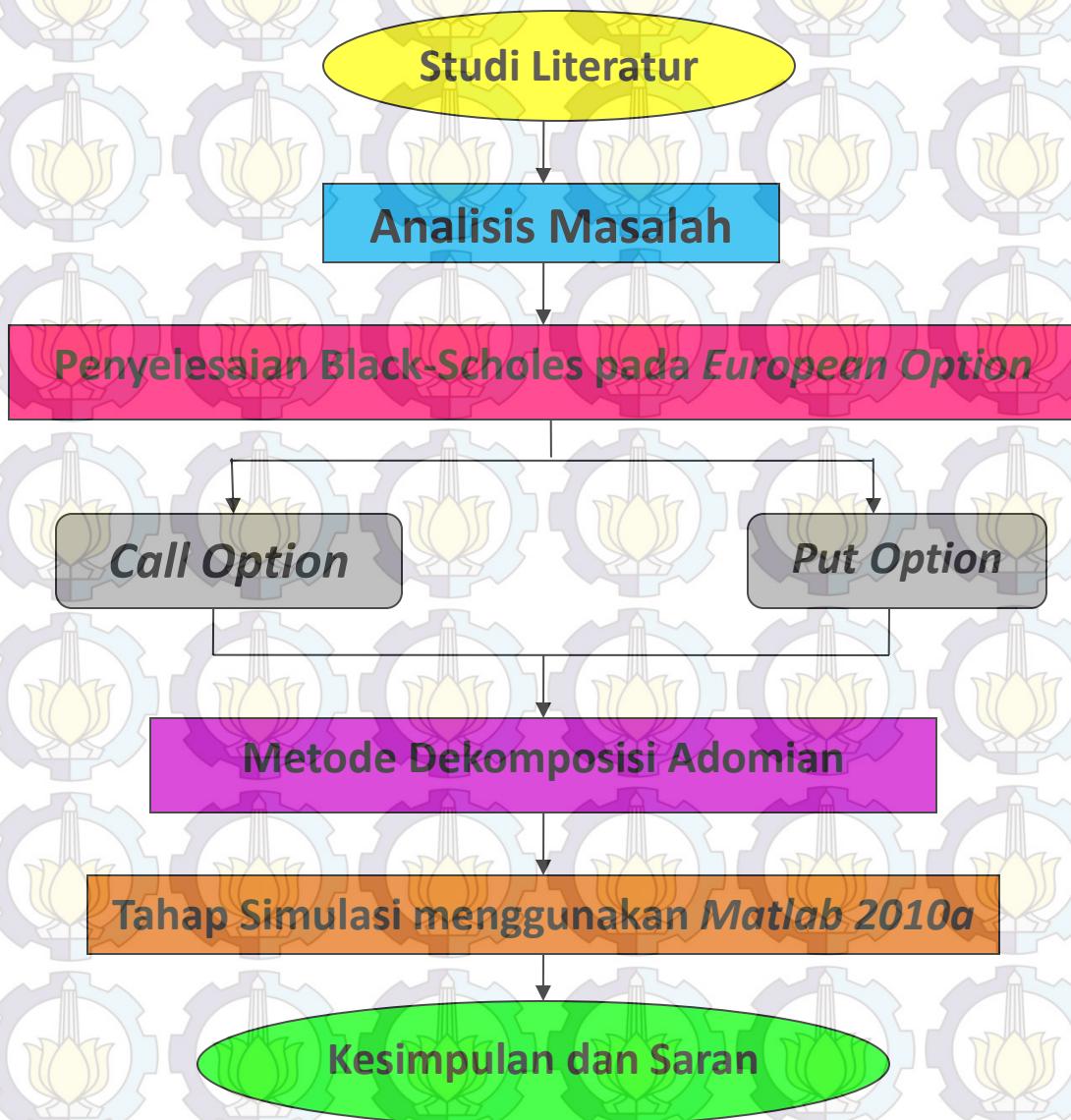
sehingga, dapat dituliskan menjadi:

$$u_i(x, t) = \begin{cases} \varphi + L^{-1}g(t), & \text{untuk } i = 0, \\ -L^{-1}Ru_i(t) - L^{-1}A_i(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n), & \text{untuk } i \geq 1 \end{cases} \quad (2.7.8)$$

dan didapatkan pendekatan sebagai berikut:

$$\psi_k = \sum_{i=0}^{k-1} u_i(t) \quad (2.7.9)$$

BAB III : METODE PENELITIAN



BAB IV : ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 European Option

4.1.1 European Call Option

4.1.2 European Put Option

4.2 Persamaan Difusi

Persamaan umum Black-Scholes dengan pemberian dividen adalah sebagai berikut::

$$\frac{\partial C(S(t), t)}{\partial t} + (r - \delta) S(t) \frac{\partial C(S(t), t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 = 0 \quad (4.1.1)$$

dengan $C(S(t), t)$ = harga saham pada waktu t untuk *call-option*

r = suku bunga bebas resiko

σ = volatilitas

δ = dividen

Diberikan transformasi:

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{E e^{rt}}{T - \frac{1}{2}\sigma^2} \quad (4.1.2)$$

$$C(S(t), t) = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \quad (4.1.3)$$

$$= EV(x, \tau) \quad (4.1.4)$$

Persamaan (4.1.1), ditransformasikan dengan menggunakan Persamaan (4.1.2), (4.1.3) dan (4.1.4) untuk mendapatkan model *Black-Scholes European call option*. Hasil transformasi tersebut disubstitusikan ke Persamaan (4.1.1), sehingga diperoleh:

Analisis Masalah

$$\frac{\partial C(S(t), t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(EV(x, \tau))$$

$$= E \frac{\partial}{\partial t} V(x, \tau)$$

$$= E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

$$= E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} \left(-\frac{\sigma^2}{2} \right)$$

(4.1.5)

$$= -\frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial C(S(t), t)}{\partial S(t)} = \frac{\partial}{\partial S(t)}(EV(x, \tau))$$

$$= E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S(t)}$$

$$= E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \frac{1}{E e^x}$$

$$= e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x}$$

(4.1.6)

$$\frac{\partial^2 C(S(t), t)}{\partial S(t)^2} = \frac{\partial}{\partial S(t)} \frac{\partial C(S(t), t)}{\partial S(t)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial S(t)} \left(e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S(t)}$$

$$= \left(-e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} \right)$$

$$= \frac{e^{-x}}{E}$$

(4.1.7)

$$\frac{\partial C(S(t), t)}{\partial t} + (r - \delta) S(t) \frac{\partial C(S(t), t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 C(S(t), t)}{\partial S(t)^2} - r C(S(t), t) = 0$$

$$-\frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta) E e^x e^{-x} \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (E e^x)^2 \left(-e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \frac{e^{-x}}{E} - r E V(x, \tau) = 0$$

$$\frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta) E e^x e^{-x} \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 E^2 e^{2x} \left(-e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \frac{e^{-x}}{E} - r E V(x, \tau) = 0$$

$$-\frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta) E \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 E e^x \left(-e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 E e^x e^{-x} \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} - r E V(x, \tau) = 0$$

$$-\frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta) E \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} - r E V(x, \tau) = 0$$

$$\text{Kedua ruas dibagi dengan } -\frac{1}{2} \sigma^2, \text{ sehingga diperoleh:}$$

$$E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2} \sigma^2} E \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - E \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{r}{\frac{1}{2} \sigma^2} E V(x, \tau) = 0$$

$$E \left[\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2} \sigma^2} \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{r}{\frac{1}{2} \sigma^2} V(x, \tau) \right] = 0$$

$$\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2} \sigma^2} \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{r}{\frac{1}{2} \sigma^2} V(x, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} - k^* \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + k^* V(x, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + k^* \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) - k V(x, \tau)$$

BS dengan ADM- European Call Option

dengan dimisalkan:

$$k^* = \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \text{ dan} \quad (4.1.8)$$

$$k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

dari penjabaran diatas, didapatkan model Black-Scholes dengan pembagian dividen untuk European call option adalah:

$$\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1) \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - kV(x, \tau) \quad (4.1.9)$$

Persamaan (4.1.9) diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method* dengan dikenakan operator L_T^{-1} pada kedua sisi, sehingga didapat

$$\begin{aligned} L_T^{-1}V_T(x, \tau) &= L_T^{-1}[V_{xx}(x, \tau) + (k^* - 1)V_x(x, \tau) \\ &\quad - kV(x, \tau)] \\ V(x, \tau) &= V(x, 0) + \int_0^\tau [V_{xx}(x, \tau) + (k^* - 1) \\ &\quad V_x(x, \tau) - kV(x, \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Solusi Persamaan (4.1.10) dimisalkan sebagai jumlahan dari fungsi-fungsi yang dicari, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, \tau) \quad (4.1.11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, \tau) &= V(x, 0) + \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} [V_{xx}(V_n(x, \tau)) \\ &\quad + (k^* - 1)V_x(V_n(x, \tau))] - k(V_n(x, \tau)) d\tau \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Agar lebih mudah mendapatkan jumlahan fungsi yang dicari dengan penjabaran *Adomian decomposition method* untuk nonlinear, maka nilai $V(x, \tau)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V(x, \tau) = V(x, 0) - \int_0^\tau A_n(V_0, V_1, \dots, V_n) d\tau$$

dengan nilai A_n adalah:

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty} [V_{xx}(V_n(x, \tau)) + (k^* - 1)V_x(V_n(x, \tau)) \\ - k(V_n(x, \tau))]$$

atau dapat dituliskan,

$$A_n(V_n(x, \tau)) = V_{xxx}(x, \tau) + (k^* - 1)V_{nx}(x, \tau) \\ - kV_n(x, \tau) \quad (4.1.13)$$

BS dengan ADM- European Call Option

Berdasarkan sifat relasi rekursif, Persamaan (4.1.12) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} V_0(x, \tau) = V(x, 0) \\ V_{n+1}(x, \tau) = \int_0^{\tau} [V_{xx}(V_n(x, \tau)) + (k^* - 1)(V_x(V_n(x, \tau)) - k(V_n(x, \tau))) d\tau \\ = \int_0^{\tau} A_n(V_0, V_1, \dots, V_n) d\tau. \end{cases} \quad (4.1.14)$$

Tipe opsi yang digunakan pada penelitian ini adalah *European option*, sehingga diberikan syarat batas untuk *European call option* sebagai berikut:

$$C(S(t), T) = \max(S(t) - E, 0) \quad (4.1.15)$$

$$EV(S(t), 0) = \max(Ee^x - E, 0), \text{ dengan } S(t) = Ee^x$$

$$EV(S(t), 0) = \max(E(e^x - 1), 0)$$

$$EV(S(t), 0) = E\max(e^x - 1, 0)$$

$$V(S(t), 0) = \max(e^x - 1, 0) \quad (4.1.16)$$

Berdasarkan syarat batas yang diberikan, Persamaan (4.1.13) dan (4.1.14), dituliskan sebagai berikut:

$$V_1(x, \tau) = (k^* \tau) \max(e^x, 0) - k\tau (\max(e^x - 1, 0))$$

$$V_2(x, \tau) = -\frac{1}{2} (k^* \tau)^2 \max(e^x, 0) + \frac{1}{2} (k\tau)^2 (\max(e^x - 1, 0))$$

$$V_3(x, \tau) = \frac{1}{6} (k^* \tau)^3 \max(e^x, 0) - \frac{1}{6} (k\tau)^3 (\max(e^x - 1, 0))$$

$$\vdots$$

untuk $n=1, 2, 3$, dan seterusnya.

Sehingga, diperoleh solusi umum untuk *European call option* berdividen adalah sebagai berikut:

$$V_n(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} (((k^* \tau)^n) \max(e^x, 0) + (k\tau)^n \max(e^x - 1, 0)). \quad (4.1.17)$$

BAB IV : ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 European Option

4.1.1 European Call Option

4.1.2 European Put Option

4.2 Persamaan Difusi

Persamaan umum Black-Scholes dengan pemberian dividen untuk *put option* adalah::

$$\frac{\partial P(S(t), t)}{\partial t} + (r - \delta)S(t) \frac{\partial P(S(t), t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 P(S(t), t)}{\partial S(t)^2} = rP(S(t), t)$$
$$\frac{\partial P(S(t), t)}{\partial t} + (r - \delta)S(t) \frac{\partial P(S(t), t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 P(S(t), t)}{\partial S(t)^2} - rP(S(t), t) = 0 \quad (4.1.18)$$

dengan $P(S(t), t)$ = harga saham pada waktu t untuk *put-option*

r = suku bunga bebas resiko

σ = volatilitas

δ = dividen

Diberikan transformasi:

$$S(t) = E(e^x)$$
$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$
$$P(S(t), t) = EW(x, \tau) \quad (4.1.19)$$

Persamaan (4.1.18), ditransformasikan dengan menggunakan Persamaan (4.1.2), (4.1.3) dan (4.1.19) untuk mendapatkan model *Black-Scholes European put option*. Hasil transformasi tersebut disubstitusikan ke Persamaan (4.1.18), sehingga diperoleh:

Analisis Masalah

$$\frac{\partial P(S(t), t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(EW(x, \tau))$$

$$\begin{aligned} &= E \frac{\partial}{\partial t} W(x, \tau) \\ &= E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} \end{aligned}$$

(4.1.20)

$$\frac{\partial P(S(t), t)}{\partial S(t)} = \frac{\partial}{\partial S(t)}(EW(x, \tau))$$

$$\begin{aligned} &= E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S(t)} \\ &= E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \frac{1}{E e^x} \\ &= e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \end{aligned}$$

(4.1.21)

$$\frac{\partial^2 P(S(t), t)}{\partial S(t)^2} = \frac{\partial}{\partial S(t)} \frac{\partial P(S(t), t)}{\partial S(t)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial S(t)} \left(e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S(t)} \\ &= \left(-e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \frac{1}{E e^x} \\ &= \left(-e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \frac{e^{-x}}{E} \end{aligned}$$

(4.1.22)

$$\frac{\partial P(S(t), t)}{\partial t} + (r - \delta) S(t) \frac{\partial P(S(t), t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 P(S(t), t)}{\partial S(t)^2} - r P(S(t), t) = 0$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta) E(e^{-x}) e^x \left(\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (E(e^x))^2 \\ &\left[\left(-e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \frac{e^{-x}}{E} - r EW(x, \tau) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta) E(e^{-x}) e^x \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 (E^2 e^{2x}) \\ &\left(\frac{-e^{-2x} \partial W(x, \tau)}{E} + \frac{e^{-2x} \partial^2 W(x, \tau)}{E} \right) - r EW(x, \tau) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta) E \left(\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 E e^x \\ &\left(-e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} - r EW(x, \tau) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta) E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma^2 E \\ &\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} - r EW(x, \tau) = 0 \end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan $-\frac{1}{2} \sigma^2$, sehingga diperoleh:

$$E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2} \sigma^2} E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - E \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{r}{\frac{1}{2} \sigma^2} E W(x, \tau) = 0$$

$$E \left[\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2} \sigma^2} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{r}{\frac{1}{2} \sigma^2} W(x, \tau) \right] = 0$$

BS dengan ADM- European Put Option

$$\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} W(x, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} - k^* \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + kW(x, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} = k^* \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} - kW(x, \tau)$$

$$\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^*) \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - kW(x, \tau)$$

dengan dimisalkan:

$$k^* = \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \text{ dan} \quad (4.1.23)$$

$$k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad (4.1.24)$$

Sehingga didapatkan model *Black-Scholes* dengan pembagian dividen untuk European put option adalah

$$\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1) \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - kW(x, \tau) \quad (4.1.25)$$

Persamaan (4.1.25) diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method* dengan dikenakan operator L_T^{-1} pada kedua sisi, sehingga didapat

$$L_T^{-1} W_t(x, \tau) = L_T^{-1} [W_{xx}(x, \tau) + (k^* - 1) W_x(x, \tau) - kW(x, \tau)]$$

$$W(x, \tau) = W(x, 0) + \int_0^\tau [W_{xx}(x, \tau) + (k^* - 1) W_x(x, \tau) - kW(x, \tau)] d\tau. \quad (4.1.26)$$

Solusi Persamaan (4.1.26) dimisalkan sebagai jumlahan dari fungsi-fungsi yang dicari, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$W(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x, \tau) \quad (4.1.27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x, \tau) = W(x, 0) + \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} [W_{xx}(W_n(x, \tau)) + (k^* - 1)(W_x(W_n(x, \tau))) - kW_n(x, \tau)] d\tau \quad (4.1.28)$$

BS dengan ADM- European Put Option

Agar lebih mudah mendapatkan jumlahan fungsi yang dicari dengan penjabaran *Adomian decomposition method* untuk nonlinear, maka nilai $W(x, \tau)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$W(x, \tau) = W(x, 0) - \int_0^\tau A_n(W_0, W_1, \dots, W_n) d\tau$$

dengan nilai A_n adalah:

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty} [W_{xx}(W_n(x, \tau)) + (k^* - 1)W_x(W(x, \tau)) - k(W_n(x, \tau))]$$

atau dapat dituliskan,

$$A_n(W_n(x, \tau)) = W_{xxx}(x, \tau) + (k^* - 1)W_{xx}(x, \tau) - kW(x, \tau). \quad (4.1.29)$$

Berdasarkan sifat relasi rekursif, Persamaan (8) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} W_0(x, \tau) = W(x, 0) \\ W_{n+1}(x, \tau) = \int_0^\tau [W_{xx}(W_n(x, \tau)) + (k^* - 1)(W_x(W_n(x, \tau)) - k(W_n(x, \tau)))] d\tau \\ = \int_0^\tau A_n(W_0, W_1, \dots, W_n) d\tau \end{cases} \quad (4.1.30)$$

Diketahui syarat batas untuk *European put-option* adalah:

$$P(S(t), T) = \max(E - S(t), 0) \quad (4.1.31)$$

$$EW(S(t), 0) = \max(E - Ec^x, 0), \text{ dengan } S(t) = E(e^x)$$

$$EW(S(t), 0) = \max(E(1 - e^x), 0)$$

$$EW(S(t), 0) = Emax(1 - e^x, 0)$$

$$W(S(t), 0) = \max(1 - e^x, 0) \quad (4.1.32)$$

Berdasarkan syarat batas yang diberikan, Persamaan (4.1.29) dan (4.1.30), dituliskan sebagai berikut:

$$W_1(x, \tau) = (k^* \tau) \max(-e^x, 0) - k\tau (\max(1 - e^x, 0))$$

$$W_2(x, \tau) = -\frac{1}{2} (k^* \tau)^2 \max(-e^x, 0) + \frac{1}{2} (k\tau)^2 (\max(1 - e^x, 0))$$

$$W_3(x, \tau) = \frac{1}{6} (k^* \tau)^3 \max(-e^x, 0) - \frac{1}{6} (k\tau)^3 (\max(1 - e^x, 0)).$$

BS dengan ADM- European Put Option

untuk $n=1, 2, 3$, dan seterusnya.

Sehingga, diperoleh solusi umum untuk *European call option* berdividen adalah sebagai berikut:

$$W_n(x, \tau) = \max(1 - e^x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} (((k^* \tau)^n) \max(-e^x, 0) + (k\tau)^n \max(1 - e^x, 0)) \quad (4.1.33)$$

BAB IV : ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 European Option

4.1.1 European Call Option

4.1.2 European Put Option

4.2 Persamaan Difusi

Setelah didapatkan penjabaran dari *European call option* dan *European put option* dengan menggunakan *Adomian decomposition method*, maka akan dijabarkan Persamaan difusi guna mendapatkan model yang akan dibandingkan dengan model dari *Adomian decomposition method* menggunakan simulasi program. Dari persamaan (4.1.11), diketahui bahwa model umum *Black-Scholes* berdividen untuk *European call option* adalah:

$$\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^+ - 1) \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - kV(x, \tau)$$

dari syarat batas pada persamaan (4.1.13), maka dapat dimisalkan untuk nilai $V(S(t), t)$ adalah sebagai berikut:

$$V(S(t), t) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (4.2.1)$$

Dari persamaan (4.2.1), nilai $V(S(t),t)$ ditransformasikan, sehingga didapat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(S(t), t)}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau}(e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)) \\ &= \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \quad (4.2.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(S(t), t)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)) \\ &= \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \quad (4.2.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}) \\ &= \alpha \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \\ &\quad + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \\ &= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \\ &\quad + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \\ &= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \\ &\quad + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (4.2.4)\end{aligned}$$

Setelah didapatkan hasil transformasi terhadap $V(S(t), t)$, maka persamaan (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) disubstitusikan kedalam persamaan (4.1.11) untuk memperoleh persamaan umum dari *European call option*, sehingga dijabarkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1) \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - kV(x, \tau)$$

$$\beta e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau}$$

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1)(\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau})$$

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - ke^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau),$$

$$e^{\alpha x + \beta \tau} (\beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}) = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau}$$

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1)(\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) +$$

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} e^{\alpha x + \beta \tau}) - ke^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau),$$

$$e^{\alpha x + \beta \tau} (\beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}) = e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha^2 u(x, \tau) + 2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1)\alpha u(x, \tau) + (k^* - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - ku(x, \tau)),$$

$$\beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \alpha^2 u(x, \tau) + 2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}$$

$$+ (k^* - 1)\alpha u(x, \tau) + (k^* - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - ku(x, \tau),$$

$$\beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \alpha^2 u(x, \tau) - ku(x, \tau) + 2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} +$$

$$\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1)\alpha u(x, \tau) + (k^* - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x},$$

$$\beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \alpha^2 u(x, \tau) - ku(x, \tau) + \alpha(k^* - 1)u(x, \tau) +$$

$$2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + (k^* - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2},$$

$$\beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = u(x, \tau)(\alpha^2 - k + \alpha(k^* - 1)) + 2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + (k^* - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}$$

$$\beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = (\alpha^2 - k + \alpha(k^* - 1))u(x, \tau)$$

$$+ 2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + (k^* - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}$$

dari persamaan diatas, didapatkan nilai α dan β adalah:

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k^* - 1) \text{ dan} \quad (4.2.5)$$

$$\beta = -(\frac{1}{4}(k^* - 1)^2 + k) \quad (4.2.6)$$

sehingga, diperoleh nilai $V(S(t), t)$ adalah

$$V(S(t), t) = e^{-\frac{1}{2}(k^* - 1)x - \frac{1}{4}(k^* - 1)^2 + k}\tau u(x, \tau) \quad (4.2.7)$$

Apabila $\tau = 0$, maka nilai $u(x, 0)$ adalah:

$$u(x, 0) = \max \left(e^{\frac{1}{2}(k^* + 1)v} - e^{\frac{1}{2}(k^* - 1)x}, 0 \right) e^{-\frac{(x-v)^2}{4\tau}} \quad (4.2.8)$$

dengan $u(x, 0) = f(v)$

Diketahui persamaan difusi adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ dengan : } x, \tau \geq 0 \quad (4.2.9)$$

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4\tau}} dv$$



$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4\tau}} dv \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\Pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \max(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k^*-1)x}, 0) e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2} dv \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\Pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v} - e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v}) e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2} dv \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\Pi t}} \left(\int_0^{\infty} \left[(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2}) - (e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2}) \right] dv \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\Pi t}} \int_0^{\infty} (e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2}) dv \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{\Pi t}} \int_0^{\infty} (e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2}) dv \\
&= I_1 - I_2 \\
&= e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} N(d_1) - e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} N(d_2)
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Selanjutnya, Persamaan (4.2.10) disubstitusikan ke persamaan (4.2.7) dan diperoleh nilai $V(S(t), t)$ adalah

$$V(S(t), t) = e^x N(d_1) - e^{-kt} N(d_2). \tag{4.2.11}$$

Sehingga, dari transformasi *call-option* pada Persamaan (4.1.4) dan Persamaan (4.2.11), model umum untuk difusi *call-option* adalah:

$$C(S(t), t) = S(t) N(d_1) - E e^{-rt} N(d_2). \tag{4.2.12}$$

Menurut sifat dari *put-call parity*, maka model umum untuk difusi *put-option*:

$$P(S(t), t) = E e^{-rt} N(-d_2) - S(t) N(-d_1) \tag{4.2.13}$$

dengan nilai d_1 dan d_2 adalah

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)}{\sqrt{\sigma^2\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)}{\sqrt{\sigma^2\tau}}$$

Berdasarkan distribusi normal, maka nilai $N(d_1)$ dan $N(d_2)$ adalah

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

4.3 SIMULASI

Sebagai simulasi dari model European option dan Difusi, maka diberikan beberapa parameter :

Diasumsikan $E = \$40$, $\sigma = 1$, $r = 5\%$, $\delta = 0.317$, $\tau = 0.03$

1. Difusi Call Option

No.	$S_t (\$)$	No.	$S_t (\$)$	No.	$S_t (\$)$
1.	0	8.	35	15	70
2.	5	9.	40	16	75
3.	10	10.	45	17	80
4.	15	11.	50	18	85
5.	20	12.	55	19	90
6.	25	13.	60	20	95
7.	30	14.	65	21	100

Berdasarkan Persamaan (4.2.17) diperoleh nilai call option (\$) sebagai berikut :

No.	$S_t (\$)$	Call Option (\$)	No.	$S_t (\$)$	Call Option (\$)
1.	0	4.2932×10^{-11}	11.	50	17.8080
2.	5	1.5293×10^{-5}	12.	55	22.4477
3.	10	0.0034	13.	60	27.2365
4.	15	0.0663	14.	65	32.1143
5.	20	0.4118	15.	70	37.0442
6.	25	1.3816	16.	75	42.0042
7.	30	3.2132	17.	80	46.9813
8.	35	5.9288	18.	85	51.9683
9.	40	9.3920	19.	90	56.9609
10.	45	13.4108	20.	95	61.9566
21.	100	66.95×10^{-2}			

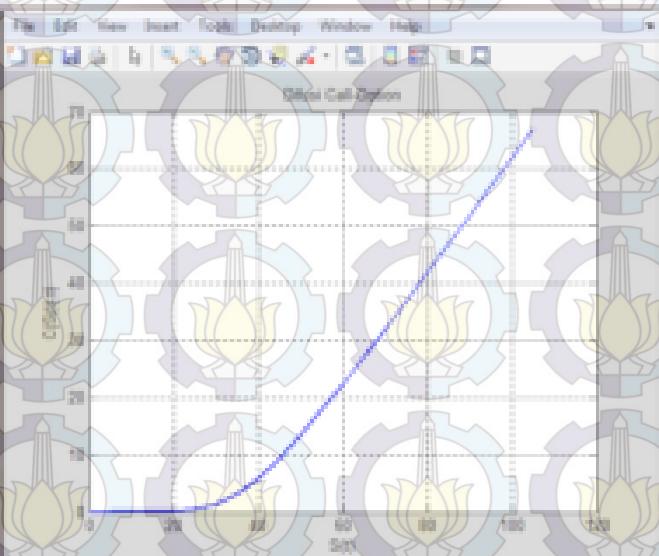
Tabel 4.1: Asumsi Harga Saham

Tabel 4.2: Difusi Call Option dengan Pembahagian Dividen

4.3 SIMULASI

4.3.1 Difusi *call option*

Sehingga berdasarkan Tabel 4.2, diperoleh plot grafik sebagai berikut:



Terlihat pada Gambar 4.1 bahwa dengan strike price, volatilitas, dan interest rate yang telah ditentukan serta dengan meningkatnya harga saham maka semakin meningkat pula harga *call option*.

Gambar 4.1. Difusi *call option* dengan pembayaran dividen

4.3 SIMULASI

Sama halnya dengan Diffusion *call option*, maka parameter yang diberikan untuk Difusi *put option* (dengan kondisi harga saham sama dengan *call option*) adalah:

Diasumsikan $E = \$40$, $\sigma = 1$, $r = 5\%$, $\delta = 0.317$ $= 0.03$

2. Difusi *put option*

Berdasarkan Persamaan (4.2.18) diperoleh nilai *put option* untuk difusi (\$) sebagai berikut :

No.	$S_t(\$)$	No.	$S_t(\$)$	No.	$S_t(\$)$
1.	0	8.	35	15	70
2.	5	9.	40	16	75
3.	10	10.	45	17	80
4.	15	11.	50	18	85
5.	20	12.	55	19	90
6.	25	13.	60	20	95
7.	30	14.	65	21	100

Tabel 4.1: Asumsi Harga Saham

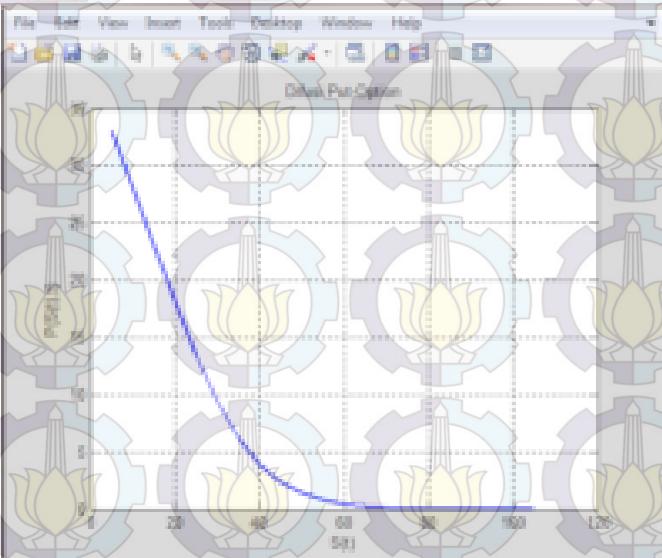
No.	$S_t(\$)$	<i>Put Option</i> (\$)	No.	$S_t(\$)$	<i>Put Option</i> (\$)
1.	0	33.0492	11.	50	0.8572
2.	5	28.0492	12.	55	0.4969
3.	10	23.0526	13.	60	0.2857
4.	15	18.1155	14.	65	0.1635
5.	20	13.4619	15.	70	0.0934
6.	25	9.4308	16.	75	0.0533
7.	30	6.2624	17.	80	0.0305
8.	35	3.9780	18.	85	0.0175
9.	40	2.4411	19.	90	0.0101
10.	45	1.4600	20.	95	0.0058
			21.	100	0.0034

Tabel 4.3: Difusi Put Option dengan Pembayaran Dividen

4.3 SIMULASI

4.3.2 Difusi put option

Sehingga berdasarkan Tabel 4.3, diperoleh plot grafik sebagai berikut:



Terlihat pada Gambar 4.2 bahwa dengan strike price, volatilitas, dan interest rate yang telah ditentukan serta dengan meningkatnya harga saham maka harga *put option* semakin menurun.

Gambar 4.2. Difusi put option dengan pembayaran dividen

4.3 SIMULASI

Dari Persamaan (4.2.8) diketahui bahwa variabel yang terkandung dalam model umum dari Adomian European call option adalah variabel x , dengan x merupakan variabel dari harga saham ($S(t)$). Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah membandingkan antara Persamaan Difusi dan Adomian decomposition method, sehingga nilai x pada Persamaan Adomian, dikonversikan kedalam bentuk $S(t)$. Dimana diketahui bahwa $S(t) = E e^x$, maka $x = \ln(S(t) / E)$. Dari perhitungan, didapatkan nilai x pada tabel sebagai berikut

No.	$S_t(\$)$	x	No.	$S_t(\$)$	x
1.	0	-	11.	50	0.223144
2.	5	-2.07944	12.	55	0.318454
3.	10	-1.38629	13.	60	0.405465
4.	15	-0.98083	14.	65	0.485508
5.	20	-0.69315	15.	70	0.559616
6.	25	-0.47	16.	75	0.628609
7.	30	-0.28768	17.	80	0.693147
8.	35	-0.13353	18.	85	0.753772
9.	40	0	19.	90	0.81093
10.	45	0.117783	20.	95	0.864997
			21.	100	0.916291

Tabel 4.4: Nilai x untuk Adomian call option

4.3 SIMULASI

4.3.3 Adomian call option

Dari tabel 4.4, didapatkan nilai-nilai untuk variabel x, sehingga dari Persamaan (4.2.8) didapatkan hasil serta nilai konversi Adomian European call option adalah sebagai berikut:

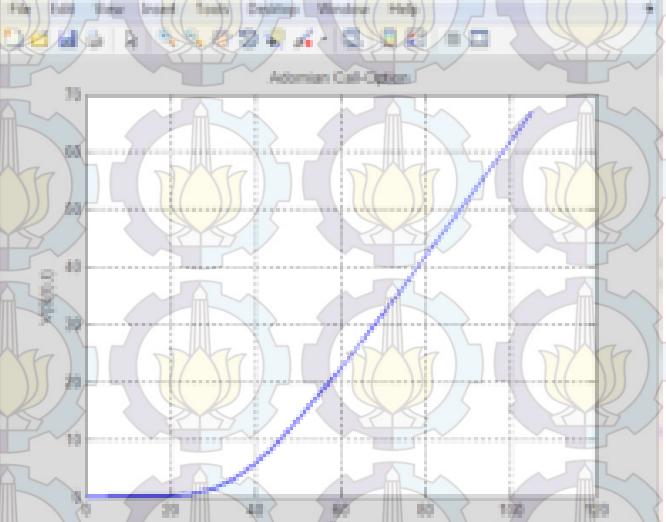
No.	x	Call Option (\$)	
1.	-	4.2932×10^{-11}	
2.	-2.07944	1.5293×10^{-5}	
3.	-1.38629	0.0034	
4.	-0.98083	0.0663	
5.	-0.69315	0.4118	
6.	-0.47	1.3816	
7.	-0.28768	3.2132	
8.	-0.13353	5.9288	
9.	0	9.392	
10.	0.117783	13.4108	
11.	0.223144	17.808	
12.	0.318454	22.4477	
13.	0.405465	27.2365	
14.	0.485508	32.1143	
15.	0.559616	37.0442	
16.	0.628609	42.0042	
17.	0.693147	46.9813	
18.	0.753772	51.9683	
19.	0.81093	56.9609	
20.	0.864997	61.9566	
21.	0.916291	66.9542	

Tabel 4.5: Adomian European Call Option

4.3 SIMULASI

4.3.3 Adomian call option

Sehingga berdasarkan Tabel 4.5 dapat diperoleh plot grafik sebagai berikut :



Gambar 4.3. Adomian call option dengan pembayaran dividen

Terlihat pada Gambar 4.3 bahwa dengan strike price, volatilitas, interest rate, dan dividen yang telah ditentukan serta dengan meningkatnya nilai x pada harga saham, maka semakin meningkat pula harga call option. Terlihat pula bahwa dari hasil plot Grafik *Adomian call option* sama persis dengan grafik dari Difusi, sehingga dapat disimpulkan bahwa *Adomian decomposition method* merupakan metode penyelesaian eksak yang dapat digunakan untuk menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes* dengan nilai eror minim pada saham.

4.3 SIMULASI

Sama halnya dengan *call option*, dari Persamaan (4.2.9) diketahui bahwa variabel yang terkandung dalam model umum dari *Adomian European put option* adalah variabel x , dengan x merupakan variabel dari harga saham ($S(t)$). Untuk nilai $S(t)$ dimisalkan bahwa $S(t) = E e^{xt}$ maka $x = \ln(S(t) / E)$. Dari perhitungan dengan nilai $S(t)$ sama dengan *call option*, didapatkan nilai x untuk *put option* sebagai berikut:

No.	$S_t (\$)$	x
1.	0	-
2.	5	-2.07944
3.	10	-1.38629
4.	15	-0.98083
5.	20	-0.69315
6.	25	-0.47
7.	30	-0.28768
8.	35	-0.13353
9.	40	0
10.	45	0.117783
11.	50	0.223144
12.	55	0.318454
13.	60	0.405465
14.	65	0.485508
15.	70	0.559616
16.	75	0.628609
17.	80	0.693147
18.	85	0.753772
19.	90	0.81093
20.	95	0.864997
21.	100	0.916291

Tabel 4.6: Nilai x untuk Adomian put option

4.3 SIMULASI

4.3.4 Adomian put option

Dari tabel 4.6, didapatkan nilai-nilai untuk variabel x, sehingga dari Persamaan (4.2.9) didapatkan hasil perhitungan serta hasil konversi untuk *Adomian European put option* adalah sebagai berikut:

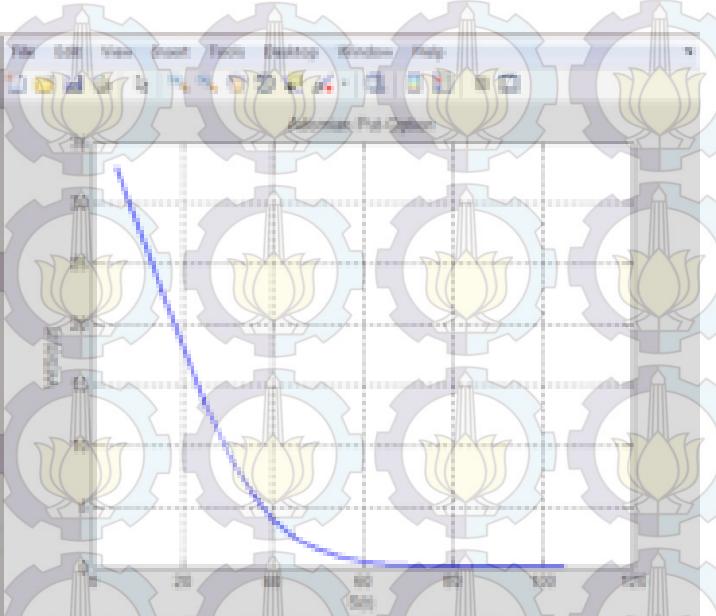
No.	x	Put Option (\$)	No.	x	Put Option (\$)
1.	-	33.0492	11.	0.223144	0.8572
2.	-2.07944	28.0492	12.	0.318454	0.4969
3.	-1.38629	23.0526	13.	0.405465	0.2857
4.	-0.98083	18.1155	14.	0.485508	0.1635
5.	-0.69315	13.461	15.	0.559616	0.0934
6.	-0.47	9.4308	16.	0.628609	0.0533
7.	-0.28768	6.2624	17.	0.693147	0.0305
8.	-0.13353	3.978	18.	0.753772	0.0175
9.	0	2.4411	19.	0.81093	0.0101
10.	0.117783	1.46	20.	0.864997	0.0058
			21.	0.916291	0.0034

Tabel 4.7: Adomian European put Option

4.3 SIMULASI

4.3.3 Adomian call option

Sehingga berdasarkan Tabel 4.7 dapat diperoleh plot grafik sebagai berikut :



Gambar 4.4. Adomian put option dengan pembayaran dividen

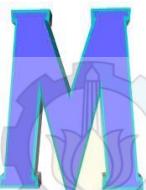
Terlihat pada Gambar 4.4 bahwa dengan strike price, volatilitas, *interest rate*, dan dividen yang telah ditentukan serta dengan meningkatnya nilai x pada harga saham, maka semakin menurun harga *put option*. Terlihat pula bahwa dari hasil plot Grafik *Adomian put option* sama persis dengan grak dari Difusi, sehingga dapat disimpulkan bahwa *Adomian decomposition method* merupakan metode penyelesaian eksak yang dapat digunakan untuk menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes* dengan nilai eror minim pada saham.

BAB V : KESIMPULAN



ITS

Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember



Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Penyelesaian model *Black-Scholes* untuk *European call option* berdividen dengan *Adomian decomposition method* adalah :

$$V_n(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} (k^* t^n \max(e^x, 0) + (kt)^n \max(1 - e^x, 0))$$

Penyelesaian model *Black-Scholes* untuk *European put option* berdividen dengan *Adomian decomposition method* adalah :

$$W_n(x, \tau) = \max(1 - e^x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} (k^* t^n \max(-e^x, 0) + (kt)^n \max(1 - e^x, 0))$$

dan, penyelesaian model *Black-Scholes* untuk *European call option* berdividen dengan Persamaan Difusi adalah

$$C(S(t), t) = S(t)N(d1) - Ee^{-r(T-t)}N(d2)$$

penyelesaian model *Black-Scholes* untuk *European put option* berdividen dengan Persamaan Difusi adalah :

$$P(S(t), t) = P(S(t), t)N(-d2) - S(t)N(-d1)$$

dengan nilai d_1 dan d_2 adalah:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{x + \tau(k^* + 1)}{\sqrt{2\tau}} \\ &= \frac{\log\left(\frac{S(t)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}} \end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}}$$

$$N(d_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{x + \tau(k^* - 1)}{\sqrt{2\tau}} \\ &= \frac{\log\left(\frac{S(t)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}} \\ d_2 &= \frac{\log\left(\frac{S(t)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} \end{aligned}$$

$$N(d_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

2. Berdasarkan simulasi dapat disimpulkan bahwa hasil perhitungan dari *Adomian decomposition method* sangat sesuai dengan hasil perhitungan dari Difusi, sehingga dapat disimpulkan bahwa *Adomian decomposition method* merupakan metode yang sesuai untuk menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes* dengan nilai eror lebih kecil dari 0.0001%.

BAB VI : DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bazar J, Goldoust F. (2013). **Adomian Decomposition Method for the Black-Scholes Equation**, Applied Mathematics and Pharmaceutical Sciences.Singapore
- [2] J.F.Price. 2013. **Optional mathematics is not optional**, Notices of the American Mathematical Society, 43: 964-971.
- [3] Husnan D. 2004."**Manajemen Keuangan Teori dan Penerapan (Keputusan Jangka Panjang)**". BPFE. Yogyakarta
- [4] Rouparvar H. 2013. "**Analytical Solution of The Black Scholes Equation by using Variational Iteration Method**" Apply Mathematics E-Notes, 13: 243-248
- [5] Glkac W. 2014. "**The Homotopy Perturbation Method for The Black Scholes Equation**". Science and Art Faculty. Turkey
- [6] Wilmott P, dkk. 1996. "**The Mathematics of Financial Derivative**" Press Syndicate of The University of Cambrige, Australia
- [7] Muawanah N L.2012."**Penurunan Model Black-Scholes dengan Metode Binomial untuk Saham Tipe Eropa**" Jurnal Matematika UNAND Vol II: 49-57