



TUGAS AKHIR - KM184801

**OPTIMASI DAYA TRANSMISI PADA PENDULUM
TERBALIK BERODA DENGAN KONTROL *LINEAR
QUADRATIC GAUSSIAN* (LQG) MELALUI KANAL
NIRKABEL**

**ZUHAIR
06111640000112**

Dosen Pembimbing
Subchan, Ph. D.
Dr. Tahiyyatul Asfihani, S.Si., M.Si.

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



TUGAS AKHIR - KM184801

**OPTIMASI DAYA TRANSMISI PADA PENDULUM
TERBALIK BERODA DENGAN KONTROL *LINEAR
QUADRATIC GAUSSIAN* (LQG) MELALUI KANAL
NIRKABEL**

**ZUHAIR
06111640000112**

Dosen Pembimbing
Subchan, Ph. D.
Dr. Tahiyatul Asfihani, S.Si., M.Si.

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



FINAL PROJECT - KM184801

**TRANSMISSION POWER OPTIMIZATION ON WHEELED
INVERTED PENDULUM USING LINEAR QUADRATIC
GAUSSIAN (LQG) CONTROL VIA WIRELESS CHANNEL**

ZUHAIR
06111640000112

Supervisors
Subchan, Ph. D.
Dr. Tahiyatul Asfihani, S.Si., M.Si.

Department of Mathematics
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

**OPTIMASI DAYA TRANSMISI PADA PENDULUM TERBALIK
BERODA DENGAN KONTROL *LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN*
(LQG) MELALUI KANAL NIRKABEL**

***TRANSMISSION POWER OPTIMIZATION ON WHEELED INVERTED
PENDULUM USING LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG) CONTROL
VIA WIRELESS CHANNEL***

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi SI Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

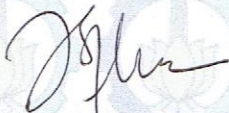
Oleh:

ZUHAIR

NRP. 06111640000112

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Dr. Tahiyatul Asfihani, S.Si., M.Si.

NIP. 19870728 201404 2 001

Dosen Pembimbing I,



Subchan, Ph.D.

NIP. 19710513 199702 1 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika

FSAD ITS



Subchan, Ph.D.

NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya,
MATEMATIKA

Januari 2020

**OPTIMASI DAYA TRANSMISI PADA PENDULUM TERBALIK
BERODA DENGAN KONTROL *LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN*
(LQG) MELALUI KANAL NIRKABEL**

Nama : Zuhair
NRP : 06111640000112
Departemen : Matematika FSAD ITS
Dosen Pembimbing : 1. Subchan, Ph.D.

Abstrak

2. Dr. Tahiyatul Asfihani, S.Si., M.Si.

Pada kontrol melalui jaringan nirkabel, dibutuhkan daya transmisi untuk mengirim data baca sensor dari *plant* ke pengontrol. Tingkat kesuksesan pengiriman data (PSR) merupakan faktor penting penentu performa kontrol, dan berbanding lurus dengan daya transmisi yang digunakan. Oleh karena itu, semakin baik performa kontrol, semakin tinggi pula daya transmisi yang dibutuhkan. Namun, *wireless sensor node* (WSN) yang terpasang pada *plant* pada umumnya memiliki sumber daya yang terbatas. Agar WSN dapat menghemat daya dan menjaga performa kontrol, optimasi daya transmisi dibutuhkan. Mekanisme optimasi daya transmisi diuji pada *plant* berupa pendulum terbalik beroda dengan WSN yang mengirimkan data baca sensor ke pengontrol melalui kanal nirkabel dengan *noise Gaussian*. Gabungan dari Kalman filter dan *Linear Quadratic Regulator* (LQR), dikenal sebagai *Linear Quadratic Gaussian* (LQG), digunakan untuk mendapatkan estimasi *state* dan kontrol optimal. Selain itu, digunakan *power scheduler* (PS) optimal untuk meminimumkan daya transmisi dengan tetap menjaga performa kontrol. Algoritma aproksimasi digunakan untuk mempermudah simulasi pemrograman dinamis yang digunakan pada PS. Hasil dari Tugas Akhir ini adalah daya transmisi yang dibutuhkan terkait perubahan jarak antara WSN-pengontrol dan waktu *sleep mode* adalah minimum, dengan tetap menjaga *plant* stabil di sekitar kondisi acuan.

Kata Kunci : Kanal Nirkabel, Kontrol LQG, Optimasi Daya Transmisi, Pendulum Terbalik Beroda.

**TRANSMISSION POWER OPTIMIZATION ON WHEELED INVERTED
PENDULUM USING LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG)
CONTROL VIA WIRELESS CHANNEL**

Name : Zuhair
NRP : 06111640000112
Department : Mathematics FSDA-ITS
Supervisors : 1. Subchan, Ph.D.
2. Dr. Tahiyatul Asfihani, S.Si., M.Si.

Abstract

In a wireless networked control system (W-NCS), power is required to transmit sensor reading to the controller. It should be noted that the packet success rate (PSR) is an essential factor in control performance, and PSR is directly proportional to transmission power. Hence it requires much power to have perfect control performance. However, in most cases in wireless sensor network scenarios, each node is attached to a limited power battery; therefore, the scheme that can harvest the energy while maintaining control performance is needed. In this study, such a scheme is tested on a wheeled inverted pendulum that is attached by the transmitter, which transmits the sensor data through a lossy wireless channel. The combination of Kalman filter and Linear Quadratic Regulator (LQR) that is known as Linear Quadratic Gaussian is used as the backbone of the scheme to estimate the state and decide the optimal control. In addition, the optimal power scheduler is introduced to minimized power usage while maintaining control performance. The approximate approach is applied to ease the computing cost of dynamic programming that is used in the optimal power scheduler. The results showed that the scheme worked perfectly, wherein power usage is low, and the stability of the dynamic system is well maintained.

Key Words : *LQG Control, Transmission Power Optimization, Wheeled Inverted Pendulum, Wireless Channel.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah *rabbil 'alamin*, berkat rahmat dan hidayah-Nya Tugas Akhir dengan judul,

**OPTIMASI DAYA TRANSMISI PADA PENDULUM TERBALIK
BERODA DENGAN KONTROL *LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN*
(LQG) MELALUI KANAL NIRKABEL**

dapat diselesaikan dengan baik dan tepat waktu. Tugas Akhir ini disusun sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) di Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Tugas Akhir ini dapat selesai atas bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada bagian ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Orangtua penulis, Abi Majid Abdullah Zahir dan Ummi Silvia Hanum Bailul, serta saudara kandung penulis, Muhammad Royyan, Karimah, Zamil Majdy, dan Nisausysyakiroh, atas doa, nasihat, motivasi, ide, dan referensi bacaan yang sangat membantu dalam pengerjaan Tugas Akhir ini. Semoga Allah memberkahi dan memudahkan segala urusan kalian.
2. Bapak Dr. Imam Mukhlash, M.T., selaku Kepala Departemen Matematika FMKSD ITS periode 2015-2019, dan Bapak Subchan, Ph.D. selaku Kepala Departemen Matematika FSAD ITS periode 2020-2024 yang telah memberikan motivasi dan dukungan kepada penulis.
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, M.Si. dan Drs. Iis Herisman, M.Si., selaku Kepala Program Studi dan Sekretaris Program Studi Sarjana Departemen Matematika FMKSD ITS periode 2015-2019, serta Ibu Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si., M.T. selaku Sekretaris Bidang Akademik Departemen Matematika FSAD ITS periode 2020-2024 yang telah memfasilitasi keperluan administrasi selama periode pengambilan Tugas Akhir.

4. Bapak Subchan, Ph.D., dan Ibu Dr. Tahiyatul Asfihani, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing I dan II, atas bimbingan, saran, kritik, dan motivasi selama proses pengerjaan Tugas Akhir.
5. Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp., Ibu Dr. Dra. Mardijah, M.T., dan Bapak Dr. Budi Setiyono, S.Si., M.T. sebagai dosen penguji yang telah memberikan masukan yang membangun.
6. Ibu Alvida Mustika Rukmi, S.Si., M.Si. sebagai dosen wali yang telah memberikan arahan selama kegiatan perkuliahan di ITS.
7. Ibu Endah Rokhmati M.P., Ph.D., Ibu Dra. Laksmi Prita Wardhani, M.Si., dan Ibu Sunarsini, S.Si., M.Si., atas bantuan kepada penulis untuk memahami materi matematika statistika dan keterukuran yang digunakan dalam Tugas Akhir ini.
8. Seluruh Dosen dan Tenaga Pendidik Departemen Matematika dan SPKB ITS yang telah mendidik, memberikan ilmu, dan memfasilitasi penulis selama berkuliah di ITS.
9. Mas Venansius Ryan Tjahjono, dan Mohamad Ilham Dwi Firmansyah atas *template L^AT_EX* Tugas Akhir yang sudah disusun dengan baik.
10. Teman-teman Angkatan 2016 dan calon wisudawan periode 121 Departemen Matematika ITS yang telah memberikan semangat, motivasi, dan dukungan selama ini.
11. Pembina, pengurus, dan petugas Asrama Mahasiswa ITS, Keluarga Bapak Anton, Bapak/Ibu pengemudi ojek daring, katering, dan benara yang telah berdedikasi pada pekerjaannya masing-masing dan sangat membantu penulis menjalani kehidupan di Surabaya.

12. Seluruh pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penulis mengucapkan terima kasih yang sangat dalam, atas doa dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Semoga Allah membalas seluruh pihak yang telah membantu pengerjaan Tugas Akhir ini dengan balasan yang sebaik-baiknya. Selain itu, penulis juga mengharapkan kritik dan saran yang membangun mengenai Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat.

Surabaya, Januari 2020

Zuhair

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
1 BAB I	
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan	5
1.5 Manfaat	5
2 BAB II	
TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Pembahasan Penelitian Terdahulu	7
2.2 <i>Network Control Systems</i> (NCSs)	8
2.3 Sistem Dinamik	9
2.4 Jaringan Sensor Nirkabel	10

2.5	Komunikasi pada Kanal Nirkabel	11
2.6	Vektor dan Matriks Acak	14
2.7	Kontrol <i>Linear Quadratic Gaussian</i> (LQG)	18
2.7.1	Kalman filter	18
2.7.2	Kontrol <i>linear quadratic regulator</i> (LQR) .	20
2.8	Optimasi Daya Transmisi dengan Kontrol LQG . .	21
2.9	Pendulum Terbalik Beroda	22
3	BAB III	
	METODE PENELITIAN	25
3.1	Objek dan Aspek Penelitian	25
3.2	Peralatan Penunjang Penelitian	25
3.3	Lokasi Penelitian	25
3.4	Tahapan Penelitian	25
4	BAB IV	
	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	29
4.1	Model Linear Sistem Pendulum Terbalik Beroda .	29
4.2	Estimator Optimal	32
4.3	Kontrol Optimal	42
4.4	<i>Packet Success Rate</i> Optimal	57
4.5	Daya Transmisi Optimal	64
4.6	Algoritma Aproksimasi	65
4.7	Simulasi Sistem	72
4.7.1	Simulasi sistem yang dapat distabilkan . .	73
4.7.2	Simulasi sistem yang tidak dapat distabilkan	87
4.7.3	Simulasi berulang pada sistem dengan ko- varian <i>noise</i> tetap	98
5	BAB V	
	PENUTUP	117
5.1	Kesimpulan	117
5.2	Saran	118
	DAFTAR PUSTAKA	121

DAFTAR GAMBAR

		Halaman
1.1	Arsitektur Umum NCS	2
1.2	Blok Diagram NCS	2
2.1	Pendulum Terbalik Beroda Bermotor pada NCS	22
3.1	Blok Diagram Pengerjaan Tugas Akhir	26
4.1	Hubungan Daya Transmisi dan PSR, $(R_1, \bar{R}_2)$	77
4.2	Hubungan Daya Transmisi dan PSR, $(R_1, \bar{R}_2) \times 10^{-1}$	77
4.3	Perbandingan Trayektori Posisi <i>Plant</i>	78
4.4	Perbandingan Trayektori Kecepatan <i>Plant</i>	78
4.5	Perbandingan Trayektori Sudut Pendulum	79
4.6	Perbandingan Trayektori Kecepatan Sudut Pendulum	79
4.7	Keputusan Daya Transmisi Optimal untuk Kovarian <i>Noise</i> Besar	80
4.8	Keputusan Daya Transmisi Optimal untuk Kovarian <i>Noise</i> Kecil	81
4.9	PSR Optimal NCS dengan Kovarian <i>noise</i> Besar	82
4.10	PSR Optimal NCS dengan Kovarian <i>noise</i> Kecil	83
4.11	<i>Arrival Process</i> NCS dengan Kovarian <i>noise</i> Besar	84
4.12	<i>Arrival Process</i> NCS dengan Kovarian <i>noise</i> Kecil	85
4.13	Trayektori Kontrol Input ($u = \mathcal{F}$) yang Dikirim Pengontrol melalui Kanal Nirkabel ke <i>Plant</i>	86
4.14	Trayektori Posisi <i>Plant</i> dengan Pendulum Jatuh ke Depan	88
4.15	Trayektori Kecepatan <i>Plant</i> dengan Pendulum Jatuh ke Depan	89
4.16	Trayektori Sudut Pendulum Jatuh ke Depan	89
4.17	Trayektori Kecepatan Sudut Pendulum Jatuh ke Depan	90
4.18	Keputusan Daya Transmisi Optimal NCS dengan Pendulum Jatuh ke Depan	90
4.19	PSR Optimal NCS dengan Pendulum Jatuh ke Depan	91
4.20	<i>Arrival Process</i> NCS dengan Pendulum Jatuh ke Depan	91

4.21	Trayektori Kontrol Input NCS dengan Pendulum Jatuh ke Depan	92
4.22	Trayektori Posisi <i>Plant</i> dengan Pendulum Jatuh ke Belakang	94
4.23	Trayektori Kecepatan <i>Plant</i> dengan Pendulum Jatuh ke Belakang	94
4.24	Trayektori Sudut Pendulum Jatuh ke Belakang . . .	95
4.25	Trayektori Kecepatan Sudut Pendulum Jatuh ke Be- lakang	95
4.26	Keputusan Daya Transmisi Optimal NCS dengan Pendulum Jatuh ke Belakang	96
4.27	PSR Optimal NCS Pendulum Jatuh ke Belakang . .	96
4.28	<i>Arrival Process</i> NCS dengan Pendulum Jatuh ke Belakang	97
4.29	Trayektori Kontrol Input NCS dengan Pendulum Jatuh ke Belakang	97

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Pilihan Teknologi Jaringan Nirkabel IEEE 802 . . .	11
4.1 Nilai Parameter Pendulum Terbalik Beroda	29
4.2 Nilai Parameter Kanal Komunikasi	72
4.3 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi	99
4.4 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	100
4.5 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	101
4.6 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	102
4.7 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	103
4.8 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	104
4.9 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	105
4.10 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	106
4.11 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	107
4.12 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	108
4.13 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	109
4.14 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	110
4.15 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	111
4.16 Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	112

4.17	Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	113
4.18	Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	114
4.19	Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)	115

DAFTAR SIMBOL

LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
WSN	<i>Wireless Sensor Node</i>
NCS	<i>Network Control System</i>
$\mathbb{N}^+$	Himpunan semua bilangan asli positif
$\mathbb{R}^n$	Ruang vektor berdimensi n dengan anggota bilangan riil
x_k	<i>State</i> sistem pada waktu k
F	Matriks <i>state</i>
B	Matriks input
u_k	Kontrol input pada waktu k
w_k	<i>Noise</i> Gaussian <i>state</i> sistem pada waktu k
$R \succ 0$	Matriks R definit positif
$R \succeq 0$	Matriks R semidefinit positif
R_1	Kovarian w_k
y_k	Keluaran sistem pada waktu k
H	Matriks keluaran
v_k	<i>Noise</i> Gaussian pada keluaran sistem
R_2	Kovarian v_k
x_0	<i>State</i> awal sistem
ℓ	Panjang <i>codewords</i>
z_k	Keluaran dari kuantifikasi keluaran sistem pada waktu k
n_k	<i>Noise</i> Gaussian pada keluaran kuantifikasi pada waktu k
Λ	Kovarian n_k
p_k^{RX}	Daya yang diterima pada waktu k

p_k^{TX}	Daya yang ditransmisikan pada waktu k
$p_k^{D^{-1}}$	Daya yang meluruh pada waktu k
d_0	Jarak referensi
d	Jarak antara WSN dan pengontrol
f	Frekuensi pembawa
c	Kecepatan cahaya
η	Pangkat lintasan yang hilang
SNR_k	<i>signal-to-noise ratio</i> pada waktu k
E_k	Energi sinyal yang diterima per bit
R_c	<i>Communication rate</i>
N_0	Kepadatan spektral daya <i>noise</i>
B_n	<i>Noise bandwidth</i>
BER_k	<i>Bit Error Rate</i> pada waktu k
$Q(.)$	<i>Q-function</i>
PSR_k	<i>Packet Success Rate</i> pada waktu k
$\psi(PSR_k)$	sama dengan p_k^{TX}
$\mathfrak{S}$	Domain p_k^{TX}
i.i.d	<i>Independent and identically distributed</i>
$P(.)$	Peluang
γ_k	i.i.d <i>arrival process</i> pada waktu k
$\mathbb{E}[.]$	Nilai harapan
$\mathbb{E}[. .]$	Nilai harapan bersyarat
$.^T$	<i>Transpose</i> matriks
$\text{tr}(.)$	<i>Trace</i> matriks
$\ .\ $	<i>Norm</i> Euclid
$\ .\ _{Q_1}^2$	Kuadrat <i>norm</i> Euclid dengan matriks bobot Q_1
$\frac{\partial}{\partial(.)}$	Operator turunan parsial

$\mathcal{M}$	Peubah acak secara umum
$\mathcal{S}$	Ruang sampel secara umum
e	Keluaran anggota $\mathcal{S}$
$\mathfrak{r}$	Nilai yang mungkin untuk peubah acak $\mathcal{M}$
$\mathfrak{M}$	Matriks acak secara umum
$\mathcal{M}_{i,j}$	Peubah acak pada baris ke- i dan kolom ke- j pada matriks acak $\mathfrak{M}$
$\text{Var}[\cdot]$	Varian
$\text{Cov}[\cdot]$	Kovarian
$\text{Cov}[\cdot, \cdot]$	Kovarian-silang
MSE	<i>Mean Square Error</i>
$\hat{x}_{q p}$	Estimasi dari x pada waktu q dengan pengamatan sampai dengan $p \leq q$
$\hat{x}_{k+1}$	Estimasi <i>state a priori</i> pada waktu k di pengontrol (sama dengan $\hat{x}_{k+1 k}$)
$\hat{x}_{k+}$	Estimasi <i>state a posteriori</i> untuk waktu k di pengontrol (sama dengan $\hat{x}_{k+1 k+1}$)
$\cdot^b$	Bentuk baku
P_{k+1}	Error kovarian <i>a priori</i> pada waktu k di pengontrol (sama dengan $P_{k+1 k}$)
P_{k+}	Error kovarian <i>a posteriori</i> untuk waktu k di pengontrol (sama dengan $P_{k k}$)
π	Keputusan <i>packet succes rate</i>
μ	Keputusan kontrol
$\cdot^*$	Optimal
$\mathcal{I}_k$	Informasi yang tersedia di pengontrol pada waktu k
$\gamma_{0:k-1}$	Nilai γ dari waktu 0 sampai $k-1$
$u_{0:k-1}$	Nilai u dari waktu 0 sampai $k-1$

$z_{0:k-1}$	Nilai z dari waktu 0 sampai $k - 1$
I_n	Matriks identitas berukuran $n \times n$
$\in$	Anggota himpunan
$\subset$	Himpunan bagian sejati
$\subseteq$	Himpunan bagian tak sejati
$\sum_{i=0}^N (x_i)$	Penjumlahan semua nilai x_i untuk $i \in [0, N] \subset \mathbb{N}$
Φ	Penalti deviasi antara performa kontrol dan usaha kontrol
$Q_{0,1,2}$	Matriks bobot
Ψ	Daya transmisi yang dibutuhkan
β	Performa kontrol tertentu
$\inf$	Infimum
λ	Pengali Lagrange
$\mathcal{F}$	Gaya horizontal yang menggerakkan pendulum terbalik beroda
l	Panjang pendulum dari pusat massanya
M	Massa landasan pendulum
$\mathcal{J}$	Momen massa dari inersia pendulum
g	Koefisien gravitasi
$\mathfrak{b}$	Koefisien gesek roda dengan lintasan
θ	Posisi angular pendulum
$\mathbb{X}$	Posisi horizontal <i>plant</i> pendulum terbalik beroda
ϕ	Deviasi sudut pendulum terhadap garis vertikal ke atas
$\cdot^c$	Berdasarkan waktu kontinu
PS	<i>Power Scheduler</i>
$\mathcal{I}_k^s$	Informasi yang tersedia di PS pada waktu k
$\tilde{x}_k$	Estimasi <i>state</i> pada waktu k di PS

P_k^s	Error kovarian pada waktu k di PS
K_k^s	Kalman <i>gain</i> pada waktu k di PS
V_k	<i>Cost-to-go function</i> pada waktu k
min	Minimum
L_k	<i>Gain</i> kontrol pada waktu k
S	Solusi persamaan Riccati pada pengontrol
V_k^π	<i>Cost-to-go function</i> pada waktu k dengan π tetap
W_k	Fungsi nilai pada waktu k
$\rho(P_k, \text{PSR}_k)$	<i>Stage cost</i>
$\varphi(P_k, \text{PSR}_k)$	Fungsi transisi
argmin	Argumen (anggota domain) yang menyebabkan nilai fungsi minimum
Γ_k	sama dengan $L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k$
e_k	Error estimasi <i>full state</i> pada waktu k di Pengontrol
ε_k	Error estimasi antara PS dan pengontrol pada waktu k
$\cdot_{k+1}^{-0}$	Nilai pendekatan pada waktu $k + 1$ jika $\gamma_k = 0$
$\cdot_{k+1}^{-1}$	Nilai pendekatan pada waktu $k + 1$ jika $\gamma_k = 1$

BAB I

PENDAHULUAN

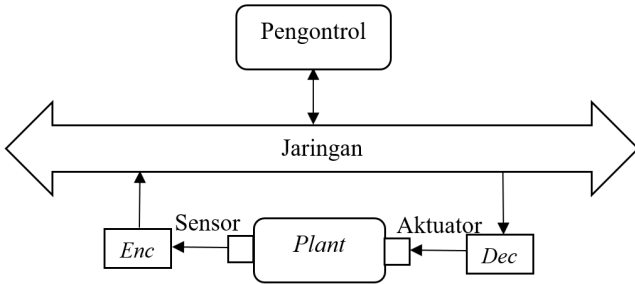
Pada bab ini dipaparkan latar belakang masalah, alasan pemilihan kontrol LQG dan *plant* berupa pendulum terbalik beroda pada subbab 1.1. Untuk mempermudah penyelesaian masalah, dikonstruksi rumusan masalah pada subbab 1.2. Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini ditunjukkan pada subbab 1.3, tujuan Tugas Akhir pada subbab 1.4, dan manfaat Tugas Akhir pada subbab 1.6.

1.1 Latar Belakang

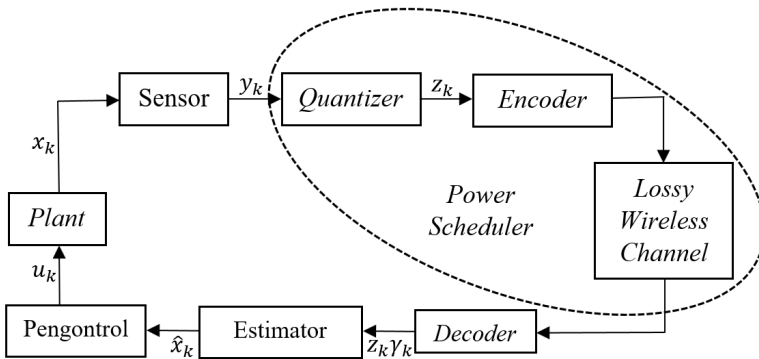
Internet di masa depan bertujuan mengintegrasikan teknologi komunikasi yang heterogen, kabel maupun nirkabel, dalam rangka membangun konsep *Internet of Things* (IoT) [1]. Walaupun terdapat banyak cara dalam membangun IoT, jaringan sensor nirkabel paling banyak digunakan [2]. Sebab, jaringan sensor nirkabel memiliki banyak keunggulan dibanding jaringan konvensional, seperti, biaya yang lebih rendah, skalabilitas, keandalan, akurasi, portabilitas, dan mudah digunakan pada berbagai aplikasi yang berbeda [3]. Jaringan sensor nirkabel didefinisikan sebagai jaringan dengan perangkat berukuran kecil, disebut *wireless sensor node* (WSN), yang secara spasial terdistribusi dan bekerja secara kooperatif untuk mengantarkan informasi yang dikumpulkan dari data yang dimonitor ke pengontrol melalui tautan nirkabel [3]. Dengan kemajuan teknologi, WSN semakin pintar, murah, dan kecil dalam segi ukuran, sehingga jangkauan pengaplikasiannya semakin meluas.

Dalam konteks IoT, WSN merupakan komponen yang penting untuk dikaji [2]. Pada umumnya, WSN sangat kecil dan membutuhkan daya yang kecil pula. Namun, node ini hanya dilengkapi dengan sumber daya yang terbatas dan tidak mungkin diganti dengan sumber daya yang lebih besar [4]. Selain itu, daya pada WSN sebagian besar digunakan untuk komunikasi. Oleh karena itu, kontrol daya yang efisien pada komunikasi nirkabel merupakan hal yang penting.

Salah satu cara efektif untuk menghemat daya pada node sensor nirkabel adalah melakukan kontrol pada daya transmisi.



Gambar 1.1. Arsitektur Umum NCS



Gambar 1.2. Blok Diagram NCS

Hal ini berhubungan dengan *network control systems* (NCSs). NCSs adalah sistem yang terdistribusi secara spasial dengan komunikasi antara sensor, aktuator, dan pengontrol melalui jaringan digital bersama, sebagaimana terlihat pada Gambar 1.1 [5]. Pada gambar, blok *encoder* mengubah pengukuran dari sistem pada *plant* ke “simbol” yang dapat ditransmisikan melalui jaringan nirkabel ke pengontrol. Kemudian, dari hasil pengukuran yang diterima, pengontrol akan mengirimkan kontrol input melalui kanal komunikasi ke aktuator. Blok *decoder* melakukan pemetaan aliran simbol yang

diterima dari jaringan ke *continuous actuation signal* yang akan diterima oleh *plant*.

Blok diagram NCS ditunjukkan pada Gambar 1.2. Pada gambar, untuk waktu k , *plant* akan mengirimkan informasi *state* sistem x_k ke sensor. Pengukuran tidak dilakukan pada semua variabel *state* sehingga hanya keluaran sistem y_k yang akan dikuantifikasi. Secara garis besar, *quantizer* akan mengubah pengukuran ke bentuk diskrit, z_k , detail proses ini tidak diperhatikan. Hasil kuantifikasi akan dikodekan menjadi *codeword* yang ditransmisikan melalui *lossy channel wireless*. Pada kanal nirkabel ini ada kemungkinan paket informasi tidak berhasil diterima pengontrol sehingga hasil penerjemahan oleh *decoder* adalah $z_k\gamma_k$, dengan $\gamma_k = 1$ jika z_k diterima, atau $\gamma_k = 0$ jika z_k tidak diterima. Kemudian, dilakukan estimasi *full state* sistem *plant*, $\hat{x}_k$. Selanjutnya dari estimasi ini pengontrol akan mengirim kontrol input u_k ke *plant* melalui kanal yang diasumsikan ideal. Untuk blok *quantizer* sampai dengan *lossy wireless channel* merupakan bagian dari *power scheduler* (PS). Bagian ini bertujuan menentukan besar daya transmisi yang akan digunakan untuk mengirimkan data baca sensor dari *plant* ke pengontrol melalui *lossy wireless channel*.

Digunakan *plant* berupa pendulum terbalik beroda yang akan mengirimkan data baca sensor melalui *lossy wireless channel* ke pengontrol. Oleh karena itu, WSN terpasang pada *plant* untuk berkomunikasi dengan pengontrol. Sedangkan, pengontrol akan mengirimkan input ke *plant* agar sistem menjadi stabil di persekitaran kondisi acuan tertentu melalui kanal komunikasi yang dianggap ideal. Dalam Tugas Akhir ini, daya transmisi yang dibutuhkan WSN dioptimasi dengan tetap menjaga performa kontrol.

Pendulum terbalik beroda dipilih karena selain tidak terlalu kompleks, ketidakstabilan dinamika pendulum terbalik beroda dapat menggambarkan sistem kontrol yang dibutuhkan pada NCS secara umum [6][7][8][9]. Pendulum terbalik beroda merupakan sistem nonlinear multivariabel yang menjadi objek penting dalam eksperimen dan investigasi teroris pada area teori kontrol dan robotika [8].

Ketidakstabilan sistem ini menyebabkan pendulum terbalik beroda umum digunakan untuk investigasi, verifikasi, dan validasi ide kontrol yang baru digagas [10].

Pada Tugas Akhir ini, sistem dinamik dari pendulum terbalik beroda dinyatakan dalam persamaan *state* linear setelah dilinearisasi di sekitar kondisi setimbang. Hanya dua dari empat variabel *state* sistem pendulum terbalik beroda yang diukur. Digunakan LQG yang merupakan gabungan dari Kalman filter dan LQR untuk mendapatkan estimator dan keputusan optimal. Digunakan PS optimal untuk mendapatkan daya transmisi optimal pada NCS. Daya transmisi optimal yang dimaksud adalah daya minimum yang digunakan WSN terkait dengan perubahan jarak antara *plant* dan pengontrol, dan waktu *sleep mode* dengan tetap menjaga performa kontrol pada NCS, yaitu, *plant* berada di persekitaran kondisi acuan.

1.2 Rumusan Masalah

Untuk menyelesaikan masalah yang telah dipaparkan, dibuat rumusan sebagai berikut:

1. Bagaimana merancang estimator optimal pada pendulum terbalik beroda dalam NCS.
2. Bagaimana merancang kontrol optimal pada pendulum terbalik beroda dalam NCS.
3. Bagaimana mendapatkan daya transmisi optimal pada NCS.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam Tugas Akhir ini adalah, sebagai berikut:

1. *Noise* dalam pengiriman data dari WSN ke pengontrol dianggap berdistribusi Gaussian dengan kanal komunikasi dari pengontrol ke aktuator pada *plant* adalah ideal.

2. Digunakan jenis pengiriman nirkabel dari sensor ke pengontrol adalah standar IEEE 802.15.4 yang sesuai dengan *additive white Gaussian noise* (AWGN).
3. Digunakan *cyclic redundancy check* (CRC) untuk mendeteksi eror pada pengiriman data, paket diterima pengontrol dari *plant* dengan *one-step delay*, dan paket yang tidak berhasil diterima tidak ditransmisikan ulang.

1.4 Tujuan

Tujuan umum Tugas Akhir ini adalah didapat daya transmisi minimal pada NCS *plant* pendulum terbalik beroda dengan kendala performa kontrol tertentu. Sedangkan, tujuan khusus dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Didapat estimator optimal pada pendulum terbalik beroda dalam NCS.
2. Didapat kontrol optimal pada pendulum terbalik beroda dalam NCS.
3. Didapat daya transmisi optimal pada NCS.

1.5 Manfaat

Manfaat dari Tugas Akhir ini adalah NCS dapat menghemat daya transmisi dengan tetap menjaga performansi pada permasalahan kontrol melalui kanal nirkabel. Selain itu, Tugas Akhir ini diharapkan dapat menjadi rujukan penelitian tentang kontrol *plant* melalui kanal nirkabel dengan daya optimal.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Di awal bab ini dibahas penelitian terdahulu yang terkait dengan kontrol pada pendulum terbalik beroda, kontrol pada kanal nirkabel, daya transmisi dan *packet dropout*, dan kontrol daya transmisi. Selanjutnya dibahas teori yang digunakan pada pengerjaan Tugas Akhir ini, yaitu, *network control systems*, jaringan sensor nirkabel, komunikasi pada kanal nirkabel, vektor dan matriks acak, kontrol LQG, optimasi daya transmisi dengan kontrol LQG, dan pendulum terbalik beroda.

2.1 Pembahasan Penelitian Terdahulu

Penelitian mengenai pemodelan kontrol pendulum terbalik beroda telah dilakukan oleh Shehu dkk. (2015) [10]. Dalam penelitian tersebut pengukuran dilakukan pada dua dari empat variabel *state* dan menggunakan *linear quadratic regulator* (LQR) untuk mendapatkan pengontrol optimal. Namun, tidak digunakan Kalman filter untuk mendapatkan estimator optimal dan kontrol tidak dilakukan melalui kanal nirkabel.

Selain itu, Music dkk. (2018) melakukan penelitian tentang kontrol pendulum beroda pada kanal nirkabel [7]. Namun demikian, penelitian tersebut tidak mempertimbangkan daya transmisi yang dibutuhkan untuk melakukan komunikasi antara *plant* dan pengontrol. Sebab, dalam penelitian tersebut, komunikasi dilakukan melalui *wireless local area network* (WLAN) bukan *low rate wireless personal area* (LR-WPAN) sehingga tidak diperlukan optimasi daya transmisi. Namun, sistem menjadi tidak fleksibel dan membutuhkan daya yang besar.

Berdasarkan penelitian Sinopoli dkk. (2004) dan Schenato dkk. (2007), diketahui bahwa daya transmisi dipengaruhi oleh rasio sinyal terhadap *noise* dan *packet dropout* [11][12]. *Packet dropout* dapat menyebabkan ketidakstabilan pada estimasi dalam permasalahan kontrol. Namun demikian, dalam penelitian tersebut belum

digabungkan antara pengontrol dan mekanisme daya transmisi.

Sedangkan, kontrol daya transmisi dengan estimator telah dibahas oleh Wu dkk. (2015), Ren dkk. (2018), dan Leong dkk. (2011) [13][14][15]. Namun, dalam desain yang dibuat hanya menggabungkan umpan balik keluaran dan mekanisme daya transmisi, bukan pengontrol dan mekanisme daya transmisi. Pada tahun 2018, telah dilakukan penelitian mengenai kontrol LQG pada jaringan sensor nirkabel oleh Soleymani dkk. [16]. Namun, penelitian tersebut hanya mengkonstruksi bentuk umum kontrol sistem dinamik pada kanal nirkabel, tanpa pengimplementasian pada *plant* tertentu. Selain itu, dalam penelitian tersebut pembuktian mengenai lemma yang dikonstruksi tidak dipaparkan secara jelas, sehingga pengembangan teori dan pengimplementasiannya pada *plant* tertentu tidak mudah.

2.2 Network Control Systems (NCSs)

NCSs adalah sistem yang terdistribusi secara spasial dengan komunikasi antara sensor, aktuator, dan pengontrol melalui jaringan digital bersama [5]. Secara umum sistem ini memiliki arsitektur yang fleksibel yang mengurangi biaya instalasi dan perawatan karena menggunakan *multipurpose shared network* untuk menghubungkan elemen-elemen yang tersebar secara spasial. NCSs merupakan irisan antara teori kontrol dan komunikasi. Pada umumnya, teori kontrol berfokus pada sistem dinamik yang terhubung melalui “kanal ideal”, sedangkan teori komunikasi mempelajari transmisi informasi melalui “kanal taksempurna”.

Menurut Hespanha dkk. (2007), beberapa hal yang membedakan antara NCSs dan sistem kontrol yang lain adalah sebagai berikut [5]:

1. *Band-Limited Channels*: jaringan komunikasi hanya dapat membawa informasi dalam satuan waktu dalam jumlah yang terbatas.

2. *Sampling dan Delay*: untuk mentransmisikan *continuous-time signal* melalui jaringan, sinyal harus di-*sampling*, dikodekan ke format digital, ditransmisikan melalui jaringan, dan terakhir diterjemahkan oleh penerima. *Delay* antara *sampling* dan penerjemahan pada penerima dipengaruhi oleh *network access delays* (waktu yang dibutuhkan jaringan untuk menerima data) dan *transmission delays* (waktu selama data transit di dalam jaringan). Selain itu, tergantung juga pada kondisi jaringan seperti antrean dan kualitas kanal.
3. *Packet Dropout*: perbedaan signifikan antara NCSs dan kontrol digital standar adalah kemungkinan data yang hilang saat transit pada jaringan. *Packet dropout* diakibatkan eror transmisi pada fisik tautan jaringan atau *buffer overflows* karena kongesti. Hal ini lebih sering terjadi pada jaringan nirkabel daripada jaringan kabel.
4. *Arsitektur Sistem*: Gambar 1.1 menunjukkan arsitektur umum dari NCS. Pada gambar, blok *encoder* mengubah pengukuran ke “simbol” yang dapat ditransmisikan melalui jaringan. *Encoder* memutuskan kapan melakukan *sampling* pada *continuous-time signal* yang ditransmisikan dan apa yang harus dikirim melalui jaringan. Sebaliknya, blok *decoder* melakukan pemetaan aliran simbol yang diterima dari jaringan ke *continuous actuation signal*.

2.3 Sistem Dinamik

Sistem dinamik berdasarkan waktu diskrit yang digunakan dalam Tugas Akhir ini memenuhi persamaan *state* linear berikut,

$$x_{k+1} = Fx_k + Bu_k + w_k \quad (2.1)$$

untuk waktu $k \in \mathbb{N}^+$ dan kondisi awal x_0 dengan $x_k \in \mathbb{R}^n$ merupakan *state* pada sistem, F matriks *state*, B matriks input, $u_k \in \mathbb{R}^m$

merupakan kontrol input, $w_k \in \mathbb{R}^n$ merupakan *noise* Gaussian dengan mean nol dan kovarian $R_1 \succ 0$. Untuk setiap step waktu, keluaran sistem diukur melalui WSN, dengan pengukuran sensor,

$$y_k = Hx_k + v_k \quad (2.2)$$

dengan $y_k \in \mathbb{R}^p$ merupakan keluaran sistem, H matriks keluaran, dan $v_k \in \mathbb{R}^p$ merupakan *noise* Gaussian dengan mean nol dan kovarian $R_2 \succ 0$. Selain itu, x_0 , w_k , dan v_k saling independen, dan (F, B) terkontrol dan (F, H) teramati.

Pengukuran dikuantisasi oleh *high-resolution quantizer* ke *codewords* dengan panjang tetap ℓ . Dimodelkan *quantizer* keluaran,

$$z_k = y_k + n_k \quad (2.3)$$

dengan n_k diasumsikan Gaussian *white noise* dengan mean nol dan kovarian Λ dengan $\Lambda \succ 0$. Diasumsikan setiap pengukuran *codeword* dibawa oleh *single network packet*.

2.4 Jaringan Sensor Nirkabel

Jaringan nirkabel adalah jaringan komputer yang menggunakan koneksi data nirkabel antara node-node jaringan. Sedangkan, jaringan sensor nirkabel merupakan jaringan tanpa kabel yang terdiri dari beberapa sensor untuk memonitor plant dari jauh [17]. Keunggulan jaringan ini adalah mampu beradaptasi pada berbagai lingkungan dan relatif lebih murah dibanding jaringan lain [18]. Oleh karena itu, jaringan ini dapat dimanfaatkan pada daerah yang tidak dimungkinkan bagi manusia untuk melakukan pengawasan [19]. Namun, masa hidup jaringan sensor nirkabel sangat bergantung pada baterai dan tidak dimungkinkan untuk mengisi daya baterai sehingga efisiensi energi menjadi penting [17].

Pada Tugas Akhir ini, digunakan jenis pengiriman nirkabel standar IEEE 802.15.4, yaitu, standar teknik pada operasi *low-rate wireless personal area networks* (LR-WPANs). Standar ini merupakan salah satu dari empat pilihan teknologi pada jaringan nirkabel

IEEE 802, sebagaimana terlihat pada Tabel 2.1. Dalam standar ini, *plant* yang menggunakan WPAN cenderung lebih fleksibel daripada WLAN karena sumber daya berupa baterai dapat berpindah bersama *plant*. Walaupun IEEE 802.15.4 menggunakan daya yang lebih sedikit dibanding IEEE 802.15.1, jangkauan area yang lebih luas, kecepatan pengiriman, dan tujuan otomatisasi dan kontrol menyebabkan optimasi daya transmisi pada standar ini menjadi dibutuhkan [20].

Tabel 2.1. Pilihan Teknologi Jaringan Nirkabel IEEE 802

Nama Jaringan	Standar IEEE	Dikenal sebagai
<i>Wireless personal area network</i> (WPAN)	IEEE 802.15.1	Bluetooth
<i>Low-rate WPAN</i> (LR-WPAN)	IEEE 802.15.4	ZigBee
<i>Wireless local area network</i> (WLAN)	IEEE 802.11	WiFi
<i>Wireless metropolitan area network</i> (WMAN)	IEEE 802.16	WiMAX

2.5 Komunikasi pada Kanal Nirkabel

Sensor node nirkabel dihubungkan ke pengontrol melalui kanal komunikasi nirkabel. Menurut Goldsmith (2005), daya dari sinyal yang ditransmisikan melemah selama sinyal menyebar melalui kanal [21]. Daya dari sinyal yang diterima memenuhi Persamaan 2.4.

$$p_k^{RX} = p_k^{TX} p_k^{D^{-1}} \quad (2.4)$$

dengan p_k^{RX} daya yang diterima, p_k^{TX} daya yang ditransmisikan, dan $p_k^{D^{-1}}$ daya yang meluruh akibat pelemahan. Telah dimodelkan

pelemahan pada kanal dengan model lintasan yang hilang pada Persamaan 2.5.

$$p_k^D = \left(\frac{4\pi f d_0}{c} \right)^2 \left(\frac{d}{d_0} \right)^\eta \quad (2.5)$$

dengan d_0 adalah jarak referensi, d adalah jarak antara WSN dan pengontrol, f adalah frekuensi pembawa, c adalah kecepatan cahaya, dan η adalah pangkat lintasan yang hilang.

Pada kanal AWGN, rasio *signal-to-noise* yang diterima (SNR_k) dari kanal didefinisikan sebagai rasio dari sinyal yang diterima pangkat daya *noise* dalam *bandwidth* sinyal yang ditransmisikan, sebagaimana pada Persamaan 2.6 [21].

$$\text{SNR}_k = \frac{p_k^{RX}}{N_0 B_n} = \frac{E_k R_c}{N_0 B_n} \quad (2.6)$$

dengan E_k energi sinyal yang diterima per bit, R_c *communication rate*, N_0 kepadatan spektral daya *noise*, dan B_n *noise bandwidth*. Dengan menggunakan Persamaan 2.4, 2.5, dan 2.6, didapat Persamaan 2.7.

$$\frac{E_k}{N_0} = \left(\frac{4\pi f d_0}{c} \right)^{-2} \left(\frac{d}{d_0} \right)^{-\eta} (N_0 R_c)^{-1} p_k^{TX} \quad (2.7)$$

Kemudian, menurut Proakis (1995), pengukuran performansi kanal komunikasi dengan formula pada Persamaan 2.8 [22].

$$\text{BER}_k = Q \left(\sqrt{\frac{2E_k}{N_0}} \right) \quad (2.8)$$

dengan BER_k merupakan *bit error rate* dan $Q(\cdot)$ merupakan *Q-function*. Sedangkan, tingkat keberhasilan paket transmisi dengan panjang ℓ bit dinyatakan dalam Persamaan 2.9.

$$\text{PSR}_k = (1 - \text{BER}_k)^\ell \quad (2.9)$$

Dengan menyubstitusi Persamaan 2.8 ke Persamaan 2.9, didapat Persamaan 2.10.

$$\text{PSR}_k = \left(1 - Q \left(\sqrt{\frac{2E_k}{N_0}} \right) \right)^\ell \quad (2.10)$$

Dengan menyubstitusi Persamaan 2.7 ke Persamaan 2.10, didapat daya transmisi pada waktu k sebagai fungsi dari tingkat keberhasilan paket (*packet success rate*), sebagaimana pada Persamaan 2.11.

$$p_k^{TX} = \begin{cases} c_0 \left(Q^{-1} \left(1 - \text{PSR}_k^{\frac{1}{\ell}} \right) \right)^2, & \text{PSR}_k \in [a, b] \\ 0, & \text{PSR}_k = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

dengan $[a, b]$ range PSR_k dengan a dan b tertentu, dan c_0 pada Persamaan 2.12.

$$c_0 = \frac{1}{2} N_0 R_c \left(\frac{4\pi f d_0}{c_0} \right)^2 \left(\frac{d}{d_0} \right)^\eta \quad (2.12)$$

Untuk kasus *transmitter* dalam keadaan *sleep mode*, $\text{PSR}_k = 0$. Oleh karena itu, jika $\text{PSR}_k = 0$, maka tidak ada apapun yang ditransmisikan saat waktu k . Selanjutnya, dinotasikan fungsi pada Persamaan 2.11 dengan $p_k^{TX} = \psi(\text{PSR}_k)$ terdefinisi pada domain $\mathfrak{S} = 0 \cup [a, b]$.

Packet loss pada kanal dimodelkan dengan i.i.d *arrival process* γ_k dengan distribusi peluang $P(\gamma_k = 1) = \text{PSR}_k$ sedemikian hingga dipenuhi Persamaan 2.13.

$$\gamma_k = \begin{cases} 1, & \text{jika } z_k \text{ berhasil diterima} \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.13)$$

Oleh karena itu, $\mathbb{E}[\gamma_k] = \text{PSR}_k$. Diasumsikan paket diterima dengan *one-step delay*, dan paket yang tidak berhasil diterima tidak ditransmisikan ulang.

2.6 Vektor dan Matriks Acak

Dalam pembahasan kontrol stokastik digunakan vektor atau matriks acak seperti *noise*, estimator *a posteriori*, dan lainnya. Oleh karena itu, pada bagian ini disajikan pengertian tentang vektor dan matriks acak, nilai harapan, kovarian, dan sifat-sifatnya.

Sebelum membahas matriks acak, terlebih dahulu disajikan definisi dan notasi operasi matriks *transpose*, *trace*, dan *norm* dari vektor yang digunakan dalam Tugas Akhir ini. Pada Definisi 2.6.1 dipaparkan pengertian *transpose* dari suatu matriks. Kemudian, pengertian *trace* dari suatu matriks persegi dinyatakan pada Definisi 2.6.2. Selanjutnya, pada Definisi 2.6.3 disajikan pengertian *norm* dari suatu vektor.

Definisi 2.6.1. *Transpose matriks* [23]

Jika sebarang matriks A berukuran $p \times q$, maka *transpose* dari A , dinotasikan A^T , didefinisikan sebagai matriks $q \times p$ yang dihasilkan dari penukaran baris dan kolom dari A .

Definisi 2.6.2. *Trace matriks* [23]

Jika A suatu matriks persegi, maka *trace* dari A , dinotasikan $\text{tr}(A)$, didefinisikan sebagai hasil jumlah dari entri-entri pada diagonal utama matriks A .

Definisi 2.6.3. *Norm Euclid pada vektor* [24]

Jika c suatu vektor berukuran $p \times 1$, maka *norm* dari c dinotasikan $\|c\|$, *norm Euclid* dari c didefinisikan sebagai,

$$\|c\| = \sqrt{c^T c}$$

Diperhatikan bahwa $\|c\|^2 = c^T c = \text{tr}(c^T c) = \text{tr}(cc^T)$ adalah suatu skalar. Dinotasikan $\|c\|_Q^2 = c^T Q c$ untuk suatu matriks Q berukuran $n \times n$.

Pada Teorema 2.6.1 dan 2.6.2 dipaparkan beberapa sifat *trace* dan turunan parsial dari *trace* matriks terhadap suatu matriks yang digunakan dalam Tugas Akhir ini.

Teorema 2.6.1. Sifat trace [23]

Misal A_1 , A_2 , dan A_3 adalah matriks, dan $\mathfrak{r} \in \mathbb{R}$ berlaku,

$$\text{tr}(A_1 + A_2) = \text{tr}(A_1) + \text{tr}(A_2) \quad (2.14)$$

$$\text{tr}(A_1 A_2 A_3) = \text{tr}(A_2 A_3 A_1) = \text{tr}(A_3 A_1 A_2) \quad (2.15)$$

$$\text{tr}(\mathfrak{r} A_1) = \mathfrak{r} \text{tr}(A_1) \quad (2.16)$$

Teorema 2.6.2. Turunan dari trace matriks [25][26]

Misal A_1 , A_2 , dan A merupakan matriks, berlaku,

$$\frac{\partial \text{tr}(A_1 A A_2)}{\partial A} = A_1^T A_2^T \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \text{tr}(A_1 A^T A_2)}{\partial A} = A_2 A_1 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \text{tr}(A^T A_2 A)}{\partial A} = A_2 A + A_2^T A \quad (2.19)$$

Vektor acak adalah vektor dengan elemen-elemennya adalah peubah acak [27]. Menurut Bain, dkk. (1992), peubah acak didefinisikan sebagai Definisi 2.6.4.

Definisi 2.6.4. Peubah acak [28]

Suatu peubah acak, misal $\mathcal{M}$, merupakan fungsi yang terdefinisi dari ruang sampel $\mathcal{S}$ ke $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}(e) = \mathfrak{x}$, $\forall e \in \mathcal{S}$, dengan $\mathfrak{x}$ adalah nilai yang mungkin dari $\mathcal{M}$.

Nilai harapan dari matriks (vektor) acak adalah matriks yang memuat nilai harapan dari setiap elemennya, sebagaimana dinyatakan pada Definisi 2.6.5

Definisi 2.6.5. Nilai harapan matriks (vektor) acak [27]

Diberikan $\mathfrak{M}$ adalah matriks acak berukuran $p \times q$, yaitu matriks yang entrinya adalah peubah acak. Misal, $\mathcal{M}_{i,j}$ adalah entri pada baris ke- i dan kolom ke- j dengan $i \in [1, p] \subset \mathbb{N}^+$ dan $j \in [1, q] \subset \mathbb{N}^+$. Kemudian, $\mathbb{E}[\mathfrak{M}]$ adalah matriks dari nilai harapan entri-entri di $\mathfrak{M}$,

$$\mathbb{E}[\mathfrak{M}] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[\mathcal{M}_{1,1}] & \cdots & \mathbb{E}[\mathcal{M}_{1,q}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}[\mathcal{M}_{p,1}] & \cdots & \mathbb{E}[\mathcal{M}_{p,q}] \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Selain itu, berlaku sifat-sifat nilai harapan matriks acak pada Teorema 2.6.3.

Teorema 2.6.3. Sifat nilai harapan matriks acak [27][28][29][30]

Misal $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ adalah matriks acak dengan ukuran sama, dan A_1, A_2 adalah matriks konstan, berlaku,

$$\mathbb{E}[\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2] = \mathbb{E}[\mathfrak{M}_1] + \mathbb{E}[\mathfrak{M}_2] \quad (2.21)$$

$$\mathbb{E}[A_1 \mathfrak{M}_1 A_2] = A_1 \mathbb{E}[\mathfrak{M}_1] A_2 \quad (2.22)$$

$$\mathbb{E}[\mathfrak{M}_1^T] = \mathbb{E}[\mathfrak{M}_1]^T \quad (2.23)$$

Jika $\mathfrak{M}_3$ berukuran $p \times q$ dan $\mathfrak{M}_4$ berukuran $q \times r$ saling independen, maka berlaku,

$$\mathbb{E}[\mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4] = \mathbb{E}[\mathfrak{M}_3] \mathbb{E}[\mathfrak{M}_4] \quad (2.24)$$

Jika $\mathfrak{M}_3$ adalah matriks acak berukuran 1×1 , maka berlaku,

$$\mathbb{E}[\mathfrak{M}_3] = \mathbb{E}[\text{tr}(\mathfrak{M}_3)] = \text{tr}(\mathbb{E}[\mathfrak{M}_3]) \quad (2.25)$$

Jika $\mathfrak{M}_4$ dan $\mathfrak{M}_5$ adalah matriks acak berdistribusi bersama, maka berlaku,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathfrak{M}_4 | \mathfrak{M}_5]] = \mathbb{E}[\mathfrak{M}_4] \quad (2.26)$$

Jika $\mathfrak{M}_1$ adalah terukur- $\mathcal{H}$, maka berlaku,

$$\mathbb{E}[\mathfrak{M}_1|\mathcal{H}] = \mathfrak{M}_1 \quad (2.27)$$

Jika $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_1$, maka

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathfrak{M}_1|\mathcal{H}_1]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathfrak{M}_1|\mathcal{H}] \quad (2.28)$$

Menurut Johnson, dkk. (2002), pengertian varian dari matriks acak dinyatakan pada Definisi 2.6.6.

Definisi 2.6.6. Varian matriks acak [27]

Jika $\mathfrak{M}$ adalah sebarang matriks acak, maka varian atau kovarian dari $\mathfrak{M}$ dinotasikan $\text{Var}[\mathfrak{M}] = \text{Cov}[\mathfrak{M}]$, dengan,

$$\text{Var}[\mathfrak{M}] = \text{Cov}[\mathfrak{M}] = \mathbb{E} \left[(\mathfrak{M} - \mathbb{E}[\mathfrak{M}]) (\mathfrak{M} - \mathbb{E}[\mathfrak{M}])^T \right] \quad (2.29)$$

Teorema 2.6.4. Sifat varian matriks acak [28] [29]

Misal, A adalah matriks konstan berukuran $p \times q$, dan $\mathfrak{X}$ vektor acak berukuran $q \times 1$ berlaku,

$$\text{Var}[A\mathfrak{X}] = A \text{Var}[\mathfrak{X}] A^T \quad (2.30)$$

Misal, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}$ dan $\mathfrak{X}$ suatu vektor acak, berlaku,

$$\text{Var}[\mathbf{r}_1 \mathfrak{X} + \mathbf{r}_2] = \mathbf{r}_1^2 \text{Var}[\mathfrak{X}] \quad (2.31)$$

Misal, $\mathfrak{X}_1$ dan $\mathfrak{X}_2$ adalah vektor acak berdimensi sama dan saling independen, berlaku,

$$\text{Var}[\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2] = \text{Var}[\mathfrak{X}_1] + \text{Var}[\mathfrak{X}_2] \quad (2.32)$$

Jika $\mathfrak{M}_4$ dan $\mathfrak{M}_5$ adalah matriks acak berdistribusi bersama, maka berlaku,

$$\text{Var}[\mathfrak{M}_5] = \mathbb{E}[\text{Var}[\mathfrak{M}_5|\mathfrak{M}_4]] + \text{Var}[\mathbb{E}[\mathfrak{M}_5|\mathfrak{M}_4]] \quad (2.33)$$

Menurut Gubner dkk. (2006), kovarian-silang dari dua vektor acak dinyatakan pada Definisi 2.6.7.

Definisi 2.6.7. Matriks kovarian-silang [24]

Jika $\mathfrak{X}_1$ adalah vektor acak berukuran $p \times 1$ dan $\mathfrak{X}_2$ adalah vektor acak berukuran $q \times 1$, maka matriks kovarian-silang adalah matriks dengan ukuran $p \times q$, yaitu,

$$\text{Cov} [\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2] = \mathbb{E} \left[(\mathfrak{X}_1 - \mathbb{E}[\mathfrak{X}_1]) (\mathfrak{X}_2 - \mathbb{E}[\mathfrak{X}_2])^T \right]$$

Teorema 2.6.5. Sifat kovarian-silang [29]

Misal, $\mathfrak{X}_1$ dan $\mathfrak{X}_2$ sebagaimana pada Definisi 2.6.7, berlaku,

$$\text{Cov} [\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2] = \mathbb{E} [\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2^T] - \mathbb{E}[\mathfrak{X}_1] \mathbb{E} [\mathfrak{X}_2]^T \quad (2.34)$$

$$\text{Cov} [\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_1] = \text{Cov} [\mathfrak{X}_1] = \text{Var} [\mathfrak{X}_1] \quad (2.35)$$

Jika A, C adalah matriks konstan, dan $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathbb{R}$, maka berlaku,

$$\text{Cov} [A\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{r}_1, C\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{r}_2] = A \text{Cov} [\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2] C^T \quad (2.36)$$

Jika $\mathfrak{X}_1$ dan $\mathfrak{X}_2$ saling independen, maka berlaku,

$$\text{Cov} [\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2] = 0_{p \times q} \quad (2.37)$$

2.7 Kontrol Linear Quadratic Gaussian (LQG)

Kontrol LQG fokus pada kendali sistem linear dengan *additive white Gaussian noise*. Ditentukan umpan balik keluaran optimal untuk meminimalkan nilai harapan dari kriteria *cost kuadratik*. Secara sederhana, LQG merupakan kombinasi dari Kalman Filter (*linear quadratic state estimator*) dan *linear quadratic regulator* (LQR) [31].

2.7.1 Kalman filter

Kalman filter atau LQE merupakan algoritma yang menggunakan pengukuran pengamatan terhadap waktu, *statistical noise*,

dan menghasilkan estimasi dari variabel yang tidak diketahui dengan melakukan estimasi pada distribusi peluang bersama atas variabel masing-masing waktu [32]. Kalman filter merupakan estimator rekursif. Artinya, untuk menghitung estimasi *state* sekarang hanya dibutuhkan estimasi *state* dari *timestep* sebelum dan pengukuran *timestep* sekarang. Notasi $\hat{x}_{q|p}$ artinya estimasi dari x pada waktu q dengan pengamatan sampai dengan $p \leq q$. Selanjutnya, dalam Tugas Akhir ini, untuk waktu k dan $k - 1$, $\hat{x}_{k|k-1}$ ditulis sebagai $\hat{x}_k$, dan $\hat{x}_{k|k}$ ditulis sebagai $\hat{x}_{k+}$.

State filter direpresentasikan dengan dua variabel, yaitu, *a posteriori state estimate* pada waktu k dengan pengamatan sampai waktu k ($\hat{x}_{k+}$), dan matriks *a posteriori error covariance* yang mengukur akurasi estimasi *state* (P_{k+}). Kalman filter dikonsepkan dengan dua fase, yaitu, “*Predict*” dan “*Update*”. Fase *predict* menggunakan estimasi *state* dari *timestep* sebelum untuk mengestimasi *state timestep* sekarang, dikenal sebagai estimasi *state a priori*. Sedangkan, pada fase *update* prediksi *a priori* sekarang digabungkan dengan pengamatan sekarang untuk memperhalus estimasi *state*, dikenal sebagai estimasi *state a posteriori* [33].

Untuk fase *predict* diformulasikan estimasi *state* yang diprediksi (*a priori*) sebagai Persamaan 2.38.

$$\hat{x}_{k+1}^b = F\hat{x}_{k+}^b + Bu_k \quad (2.38)$$

Sedangkan, *error covariance* yang diprediksi (*a priori*), dinyatakan dalam Persamaan 2.39.

$$P_{k+1}^b = FP_{k+}F^T + R_1. \quad (2.39)$$

Untuk fase *update*, diformulasikan inovasi pengukuran pada Persamaan 2.40.

$$\tilde{z}_k^b = z_k - H\hat{x}_k^b. \quad (2.40)$$

Inovasi kovarian pada Persamaan 2.41,

$$G_{k+1} = HP_k^bH^T + R_k. \quad (2.41)$$

Kalman *gain* optimal pada Persamaan 2.42,

$$K_k^b = P_k^b H^T G_k^{-1}. \quad (2.42)$$

Estimasi *state* setelah dilakukan *update* (*a posteriori*) pada waktu k ditunjukkan di Persamaan 2.43.

$$\hat{x}_{k+}^b = \hat{x}_k^b + K_k^b z_k^b. \quad (2.43)$$

Estimasi kovarian yang dilakukan *update* (*a posteriori*), ditunjukkan pada Persamaan 2.44.

$$P_{k+}^b = \left(I - K_k^b H \right) P_k^b. \quad (2.44)$$

Dalam kasus matriks eror kovarian, $\text{tr}(P_{k+1})$ adalah jumlah dari *mean squared errors* (MSE) [34]. Oleh karena itu, tujuan dari Kalman filter untuk meminimumkan MSE ekivalen dengan meminimumkan $\text{tr}(P_{k+1})$, yang artinya akan dicari $\text{tr}(P_{k+})$ minimum. Untuk mendapatkan kondisi minimum ini, dicari turunan pertama $\text{tr}(P_{k+})$ terhadap K_k sama dengan nol.

2.7.2 Kontrol *linear quadratic regulator* (LQR)

Tugas Akhir ini fokus pada kontrol LQR pada waktu diskrit. Indeks performansi didefinisikan pada Persamaan 2.45,

$$J^b = x_N^T Q^b x_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^T Q^b x_k + u_k^T R^b u_k + 2x_k^T N^b u_k \right) \quad (2.45)$$

dengan kontrol optimal pada Persamaan 2.46 untuk meminimalkan indeks performansi pada Persamaan 2.45,

$$u_k^b = -L_k^b x_k \quad (2.46)$$

dengan,

$$L_k^b = (R^b + B^T P_{k+1}^b B)^{-1} \left(B^T S_{k+1}^b F + N^T \right) \quad (2.47)$$

dan S_k didapat dari persamaan Ricatti pada Persamaan 2.48 [35].

$$S_{k-1}^b = F^T S_k^b F - \left(A^T S_k^b B + N \right) \left(R + B^T S_k^b B \right)^{-1} \left(B^T S_k^b F + N^{bT} \right) + Q \quad (2.48)$$

dengan kondisi awal $P_N^b = Q^b$.

2.8 Optimasi Daya Transmisi dengan Kontrol LQG

Secara umum antara daya transmisi dan performa pengiriman data memiliki hubungan yang berbanding lurus, semakin baik performa semakin tinggi pula daya transmisi yang dibutuhkan [4]. Selain itu, daya transmisi yang merupakan fungsi PSR pada Persamaan 2.11 dipengaruhi oleh jarak antara WSN dan pengontrol (d) pada Persamaan 2.5. Oleh karena itu, yang dimaksud optimasi daya transmisi dalam Tugas Akhir ini adalah penentuan daya minimum yang digunakan WSN terkait dengan perubahan jarak (d) dan waktu *sleep mode* dengan tetap menjaga performa kontrol pada NCS.

Misal π dan μ sebagai keputusan *packet success rate* dan keputusan kontrol. Pada waktu k , diasumsikan informasi yang tersedia pada pengontrol dinyatakan pada Persamaan 2.49.

$$\mathcal{I}_k = \{ \gamma_{0:k-1}, u_{0:k-1}, z_{0:k-1} \}. \quad (2.49)$$

Diasumsikan pengontrol melaporkan daya transmisi melalui kanal komunikasi yang ideal ke sensor node nirkabel. Penalti deviasi antara performa kontrol dan usaha kontrol atas waktu N , diukur dengan fungsi kuadrat pada Persamaan 2.50.

$$\Phi = \mathbb{E} \left[\|x_{N+1}\|_{Q_0}^2 + \sum_{k=0}^N (\|x_k\|_{Q_1}^2 + \|u_k\|_{Q_2}^2) \right] \quad (2.50)$$

dengan $Q_0, Q_1 \succeq 0$ dan $Q_2 \succ 0$ merupakan matriks bobot.

Ditentukan nilai optimal dari π dan μ yang akan meminimalkan daya transmisi yang dibutuhkan pada performa kontrol tertentu β , yaitu,

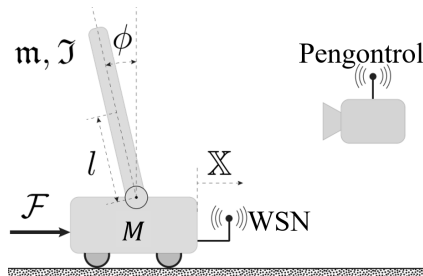
$$\Psi = \inf_{\pi, \mu: \Phi \leq \beta} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^N \psi(\text{PSR}_k) \right] \quad (2.51)$$

ekivalen dengan,

$$\Psi = \inf_{\pi, \mu} \mathbb{E} \left[\lambda \|x_{N+1}\|_{Q_1}^2 + \sum_{k=0}^N (\psi(\text{PSR}_k) + \lambda \|x_k\|_{Q_1}^2 + \lambda \|u_k\|_{Q_2}^2) \right] \quad (2.52)$$

dengan $\lambda > 0$ sebagai pengali Lagrange.

2.9 Pendulum Terbalik Beroda



Gambar 2.1. Pendulum Terbalik Beroda Bermotor pada NCS

Pendulum terbalik beroda merupakan sistem nonlinear multi-variabel yang menjadi objek penting dalam eksperimen dan investigasi teroris pada area teori kontrol dan robotika [8]. Ketakstabilan sistem ini menyebabkan pendulum terbalik beroda umum digunakan untuk investigasi, verifikasi, dan validasi ide kontrol yang baru digagas [10].

Pada Tugas Akhir ini *plant* yang dikontrol melalui kanal nirkabel adalah pendulum terbalik beroda dengan motor sebagaimana

terlihat pada Gambar 2.1. $\mathcal{F}$ adalah gaya yang menggerakkan pendulum dan landsannya secara horizontal, l panjang pendulum dari pusat massa, m massa pendulum, M massa landasan pendulum, $\mathcal{I}$ momen massa dari inersia pendulum, g koefisien gravitasi, b koefisien gesek roda dengan lintasan [36][37].

Gaya $\mathcal{F}$ merupakan kontrol input yang menggerakkan roda pendulum secara horizontal. Sedangkan, ϕ adalah deviasi sudut pendulum terhadap posisi setimbang vertikal ke atas, dengan tanda positif berarti deviasi ke arah depan *plant*, dan tanda negatif deviasi ke arah belakang *plant*. Dalam Tugas Akhir ini, dinamika sistem pendulum terbalik beroda dilinearkan disekitar posisi setimbang pendulum vertikal ke atas, $\phi = 0$.

Keluaran sistem ini adalah posisi angular pendulum ϕ , dan posisi horizontal *plant* $\mathbb{X}$ terhadap suatu titik acuan tertentu yang didefinisikan. Persamaan hasil pelinearan dari gaya pada sistem dengan $x = [\mathbb{X} \quad \dot{\mathbb{X}} \quad \phi \quad \dot{\phi}]^T$ ditunjukkan pada Persamaan 2.53 dan 2.54 [36][37].

$$\dot{x} = F^c x + B^c u + w \quad (2.53)$$

dengan matriks *state* berdasarkan waktu kontinu,

$$F^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(l+ml^2)b}{\mathcal{I}(M+m)+Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{\mathcal{I}(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{\mathcal{I}(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{\mathcal{I}(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks input berdasarkan waktu kontinu,

$$B^c = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mathcal{I}+ml^2}{\mathcal{I}(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{\mathcal{I}(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix}$$

dan w adalah *noise* pada *state* sistem. Terdapat *noise state* karena model sistem dinamik tidak sepenuhnya merepresentasikan sistem nyata. Sedangkan, pengukuran sensor adalah,

$$y = H^c x + v \quad (2.54)$$

dengan matriks keluaran berdasarkan waktu kontinu,

$$H^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan v *noise* pengukuran. Terdapat *noise* pengukuran karena data baca sensor tidak selalu akurat. Dengan demikian, matriks F , B , dan H pada Persamaan 2.1 dan 2.2, masing-masing merupakan hasil pendiskritan F^c , B^c , dan H^c pada Persamaan 2.53 dan 2.54.

Dalam Tugas Akhir ini, *plant* berupa pendulum tebalik beroda bermotor pada Gambar 2.1 mengirimkan data baca sensor (hasil pengukuran) ke pengontrol melalui *lossy wireless channel*. Sedangkan, *plant* menerima kontrol input dari pengontrol melalui kanal komunikasi yang dianggap ideal. Selain itu, sebagaimana dinyatakan pada Persamaan 2.54, tidak semua variabel *state* diukur sehingga diperlukan estimasi *full state*.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan objek, aspek, peralatan penunjang, lokasi, dan tahapan penelitian Tugas Akhir.

3.1 Objek dan Aspek Penelitian

Objek dari penelitian ini adalah sistem dinamis pendulum terbalik beroda pada NCS. Sedangkan, aspek penelitian adalah optimasi daya transmisi pada NCS.

3.2 Peralatan Penunjang Penelitian

Peralatan penunjang yang digunakan dalam penelitian ini adalah laptop Asus A450C dengan sistem operasi Windows 10 64-bit, memori RAM 8 GB, *processor* Intel Core i3. Digunakan perangkat lunak MATLAB untuk simulasi sistem dinamik.

3.3 Lokasi Penelitian

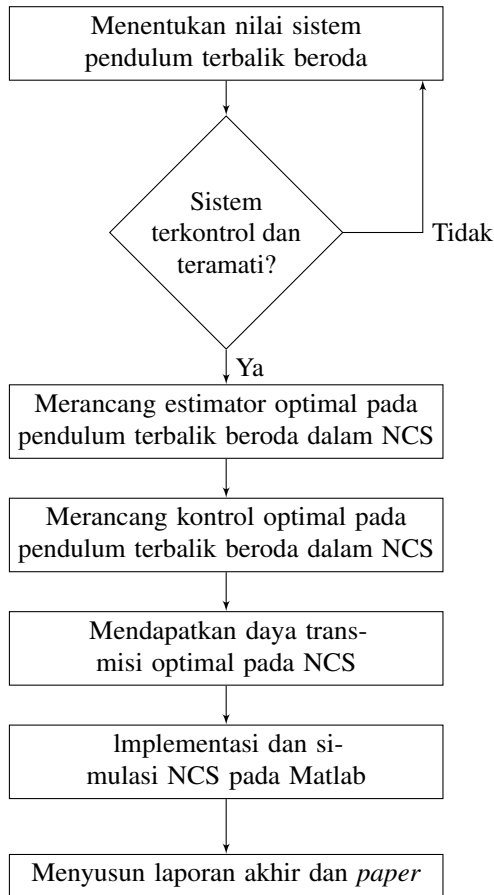
Lokasi penelitian di Laboratorium Pemodelan dan Simulasi Sistem, Departemen Matematika, ITS, Surabaya.

3.4 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian dalam Tugas Akhir ini dibagi menjadi beberapa langkah, ditunjukkan pada Gambar 3.1:

1. Menentukan nilai sistem pendulum terbalik beroda

Ditentukan nilai pada matriks F , B , dan C sehingga (F, B) terkontrol dan (F, C) teramati. Komputer tidak dapat memproses data kontinu sehingga sistem linear *time-invariant* pada Persamaan 2.53 dan 2.54 didiskritkan dengan menggunakan *zero order hold* (ZOH) dengan *sample time* tertentu.



Gambar 3.1. Blok Diagram Pengerjaan Tugas Akhir

2. Merancang estimator optimal pada pendulum terbalik beroda dalam NCS

Digunakan Kalman filter untuk mendapat estimator optimal dari pengukuran yang diberikan keluaran pendulum terbalik beroda dalam NCS.

3. **Merancang kontrol optimal pada pendulum terbalik beroda dalam NCS**
Digunakan LQR dengan cara menyelesaikan persamaan Riccati dengan pemrograman dinamis untuk mendapat kontrol optimal.
4. **Mendapatkan daya transmisi optimal pada NCS**
Dikonstruksi keputusan daya transmisi optimal pada NCS.
5. **Implementasi dan simulasi NCS pada Matlab**
Disimulasikan trayektori variabel *state* dari sistem dinamik, daya transmisi, PSR, dan γ tiap *step* waktu.
6. **Menyusun laporan akhir dan *paper***

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini ditentukan nilai pada model linear sistem pendulum terbalik beroda yang sesuai dengan batasan masalah penelitian. Selanjutnya, didesain estimator optimal dengan Kalman filter dan kontrol optimal dengan LQR. Kemudian, ditentukan keputusan *packet success rate* (PSR) optimal. Berdasarkan keputusan tersebut, ditentukan daya transmisi optimal. Selain itu, ditunjukkan berlakunya Prinsip Pemisahan sehingga mekanisme daya transmisi yang didapat terjamin optimal secara keseluruhan sistem. Digunakan algoritma aproksimasi untuk pendekatan nilai PSR optimal sehingga efisien untuk diimplementasi dalam bahasa pemrograman. Terakhir, dilakukan simulasi sistem pendulum terbalik beroda dengan estimator, pengontrol, dan daya transmisi optimal pada NCS dengan piranti lunak Matlab.

4.1 Model Linear Sistem Pendulum Terbalik Beroda

Tabel 4.1. Nilai Parameter Pendulum Terbalik Beroda

Nama Parameter	Simbol	Nilai	Satuan
Massa landasan pendulum	M	0,5	kg
Massa pendulum	m	0,2	kg
Koefisien gesek roda pada lintasan	b	0,1	$N/m/s$
Panjang pendulum ke pusat massa	l	0,3	m
Momen massa inersia pendulum	$\mathcal{J}$	0,006	$kg\ m^2$
Koefisien gravitasi	g	9,8	m/s^2

Dalam Tugas akhir ini, untuk sistem dinamik *plant* berupa pendulum terbalik beroda pada Persamaan 2.53 dan 2.54 di halaman 23 diasumsikan nilai-nilai pada Tabel. 4.1 sehingga diperoleh sistem

dinamik pendulum terbalik beroda berdasarkan waktu kontinu,

$$\dot{x} = F^c x + B^c u + w \quad (4.1)$$

dengan

$$F^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.6727 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.1818 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8182 \\ 0 \\ 4.5455 \end{bmatrix}$$

dan w adalah *noise* pada *state* sistem. Sedangkan, pengukuran sensor berdasarkan waktu kontinu adalah,

$$y = H^c x + v \quad (4.2)$$

dengan

$$H^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan v *noise* pengukuran.

Digunakan *zero order hold* dengan *sampling time* $T_s = 1/100$ pada piranti lunak MATLAB untuk mendapatkan model linear diskrit. Didapat sistem dinamik berdasarkan waktu diskrit dari persamaan 4.1,

$$x_{k+1} = Fx_k + Bu_k + w_k \quad (4.3)$$

dengan

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0.0100 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.9982 & 0.0267 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 1.0016 & 0.0100 \\ 0 & -0.0045 & 0.3119 & 1.0016 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0182 \\ 0.0002 \\ 0.0454 \end{bmatrix}$$

untuk waktu $k \in \mathbb{N}$ dan kondisi awal

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5\pi/180 & 0 \end{bmatrix}^T$$

dan $w_k \in \mathbb{R}^n$ merupakan *noise* Gaussian dengan mean nol dan kovarian $R_1 \succ 0$. Untuk setiap step waktu, keluaran sistem diukur melalui WSN, dengan pengukuran sensor berdasarkan waktu diskrit dari Persamaan 4.2,

$$y_k = Hx_k + v_k \quad (4.4)$$

dengan

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan $v_k \in \mathbb{R}^p$ merupakan *noise* Gaussian dengan mean nol dan kovarian $R_2 \succ 0$.

Pengukuran dikuantisasi oleh *high-resolution quantizer* ke *codewords* dengan panjang tetap ℓ . Dimodelkan *quantizer* keluaran,

$$z_k = y_k + n_k \quad (4.5)$$

dengan n_k diasumsikan Gaussian *white noise* dengan mean nol dan kovarian Λ dengan $\Lambda \succ 0$.

Nilai pada Tabel. 4.1 dipilih sedemikian hingga (F, B) terkontrol, dan (F, H) teramati. Ditentukan nilai kovarian *noise*, R_1 , R_2 , dan Λ pada beberapa skenario simulasi NCS di subab 4.7. Dengan demikian, dapat digunakan Kalman filter untuk mendapatkan estimasi *full state* optimal dan LQR untuk mendapatkan pengontrol optimal sehingga sistem stabil. Sistem distabilkan di sekitar kondisi acuan, $x_{ref} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Artinya, pendulum terbalik beroda yang semula berhenti pada posisi 0 terhadap suatu titik acuan tertentu, dengan sudut antara pendulum dan garis vertikal ke atas adalah 5° ke arah depan tanpa kecepatan sudut, dikontrol melalui kanal nirkabel sehingga pendulum terbalik beroda berhenti pada posisi 1 terhadap suatu titik acuan tertentu, dengan pendulum tegak ke atas tanpa kecepatan sudut.

4.2 Estimator Optimal

Pada bagian ini ditentukan estimasi *state* optimal dengan $\mathcal{I}_k$ sebagai informasi yang diketahui oleh pengontrol. Dalam Tugas Akhir ini dikonstruksi Teorema 4.2.1 beserta pembuktiannya dengan menggunakan Kalman filter. Sebab, pada Penelitian Soleymani, dkk. (2018) terdapat inkonsistensi pendefinisian Kalman *gain* pada lemma dan pembuktian estimasi *state* optimal.

Teorema 4.2.1. *Optimasi estimasi state dari sistem yang didefinisikan pada Persamaan 4.3, 4.4, dan 4.5 melalui kanal one-step-delay dengan arrival process pada Persamaan 2.13 dilakukan dengan meminimalkan mean square error (MSE). Didapat estimator optimal pada pengontrol sebagai berikut,*

$$\hat{x}_{k+1} = F\hat{x}_k + Bu_k + \gamma_k FK_k (z_k - H\hat{x}_k) \quad (4.6)$$

$$P_{k+1} = FP_k F^T + R_1 - \gamma_k FK_k HP_k F^T \quad (4.7)$$

dengan $\hat{x}_k = \mathbb{E}[x_k | \mathcal{I}_k]$, $P_k = \text{Cov}[x_k | \mathcal{I}_k]$, dan

$$K_k = P_k H^T (H P_k H^T + \bar{R}_2)^{-1} \quad (4.8)$$

dengan kondisi awal $\hat{x}_0 = m_0$, $P_0 = R_0$, dan $\bar{R}_2 = R_2 + \Lambda$.

Bukti. Dipilih estimasi *state a priori* untuk waktu $k + 1$, yaitu, $\hat{x}_{k+1}$, merupakan nilai harapan dari x_{k+1} dengan informasi tersedia pengontrol $\mathcal{I}_{k+1}$, dinyatakan pada Persamaan 4.9.

$$\hat{x}_{k+1} = \mathbb{E}[x_{k+1} | \mathcal{I}_{k+1}] \quad (4.9)$$

Persamaan 2.1 halaman 9 disubstitusi ke Persamaan 4.9 menghasilkan,

$$\hat{x}_{k+1} = \mathbb{E}[F x_k + B u_k + w_k | \mathcal{I}_{k+1}] \quad (4.10)$$

Pada Persamaan 4.10 jelas bahwa F , dan $B u_k$ adalah matriks konstan. Dengan menggunakan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.21, 2.22 halaman 16, dan fakta bahwa mean dari w_k adalah 0, didapat,

$$\hat{x}_{k+1} = F \mathbb{E}[x_k | \mathcal{I}_{k+1}] + B u_k \quad (4.11)$$

Dipilih estimasi *state a posteriori* untuk waktu k sebagai nilai harapan dari x_k dengan kondisi $\mathcal{I}_{k+1}$ sebagai informasi yang tersedia pada pengontrol, dengan kata lain, $\hat{x}_{k+} = \mathbb{E}[x_k | \mathcal{I}_{k+1}]$. Oleh karena itu, Persamaan 4.11 dapat ditulis sebagai,

$$\hat{x}_{k+1} = F \hat{x}_{k+} + B u_k \quad (4.12)$$

Estimasi *state a priori* pada NCS yang dinyatakan pada Persamaan 4.12 ekuivalen dengan bentuk umum *state a priori* Kalman filter pada Persamaan 2.38 halaman 19.

Error kovarian pada waktu $k + 1$ dengan informasi $\mathcal{I}_{k+1}$ (*a priori*), dirumuskan sebagai,

$$P_{k+1} = \text{Var}[x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_{k+1}] \quad (4.13)$$

dengan menyubstitusi Persamaan 2.1 halaman 9 dan Persamaan 4.12 ke Persamaan 4.13, didapat,

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \text{Var} [F x_k + Bu_k + w_k - F \hat{x}_{k+} - Bu_k | \mathcal{I}_{k+1}] \\ &= \text{Var} [F (x_k - \hat{x}_{k+}) + w_k | \mathcal{I}_{k+1}] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Jelas bahwa $F(x_k - \hat{x}_{k+})$ dan w_k merupakan vektor acak berukuran sama dan saling independen. Oleh karena itu, pada Persamaan 4.14 dapat digunakan sifat kovarian matriks pada Persamaan 2.32 halaman 17 sehingga diperoleh,

$$P_{k+1} = \text{Var} [F (x_k - \hat{x}_{k+}) | \mathcal{I}_{k+1}] + \text{Var} [w_k | \mathcal{I}_{k+1}] \quad (4.15)$$

F adalah matriks konstan sehingga berlaku sifat varian pada Persamaan 2.30 halaman 17. Selain itu, dengan fakta bahwa w_k sebagai *noise* pada *state* sistem adalah independen terhadap $\mathcal{I}_{k+1}$ dengan $\text{Var}[w_k] = R_1$, Persamaan 4.15 dapat ditulis sebagai,

$$P_{k+1} = F \text{Var} [(x_k - \hat{x}_{k+}) | \mathcal{I}_{k+1}] F^T + R_1 \quad (4.16)$$

Pada Persamaan 4.16, diperhatikan $\text{Var} [(x_k - \hat{x}_{k+}) | \mathcal{I}_{k+1}]$. Dalam kasus ini, eror kovarian *a posteriori* untuk waktu k dinyatakan sebagai varian dari akurasi estimasi *state a posteriori* pada waktu k dengan kondisi $\mathcal{I}_{k+1}$ sebagai informasi yang diketahui pengontrol, atau sebagaimana dinyatakan pada Persamaan 4.17.

$$P_{k+} = \text{Var} [(x_k - \hat{x}_{k+}) | \mathcal{I}_{k+1}] \quad (4.17)$$

Oleh karena itu, dengan menyubstitusi Persamaan 4.17 ke Persamaan 4.16, didapat,

$$P_{k+1} = F P_{k+} F^T + R_1 \quad (4.18)$$

Dalam hal ini, eror kovarian *a priori* pada NCS di Persamaan 4.18 ekuivalen dengan bentuk umum eror kovarian *a priori* Kalman filter di Persamaan 2.39 halaman 19.

Sebagaimana telah dipaparkan pada subab 2.7.1 halaman 18, tujuan dari Kalman filter adalah meminimumkan MSE yang ekuivalen dengan mendapatkan K_k saat $\frac{\partial \text{tr}(P_{k+})}{\partial K_k} = 0$. Oleh karena itu, pembahasan selanjutnya dalam pembuktian ini difokuskan pada waktu k .

Dimisalkan $\tilde{z}_k$ sebagai inovasi pengukuran yang dinyatakan sebagai berikut,

$$\tilde{z}_k = z_k - \hat{z}_k \quad (4.19)$$

Dipilih estimasi pengukuran, $\hat{z}_k$, pada Persamaan 4.19 sama dengan nilai harapan dari z_k pada Persamaan 2.3 halaman 10.

$$\hat{z}_k = \mathbb{E}[z_k] = \mathbb{E}[y_k + n_k] \quad (4.20)$$

Dengan melakukan substitusi Persamaan 2.2 halaman 10 ke Persamaan 4.20, menggunakan sifat kelinearan nilai harapan pada Persamaan 2.21, dan fakta bahwa mean v_k dan n_k masing-masing adalah 0, didapat,

$$\hat{z}_k = \mathbb{E}[Hx_k + v_k + n_k] = H\hat{x}_k \quad (4.21)$$

dengan menyubstitusi Persamaan 4.21 ke Persamaan 4.19 didapat,

$$\tilde{z}_k = z_k - H\hat{x}_k \quad (4.22)$$

Terlihat bahwa inovasi pengukuran pada NCS di Persamaan 4.22 ekuivalen dengan bentuk umum inovasi pengukuran Kalman Filter pada Persamaan 2.40 halaman 2.40. Substitusi Persamaan 2.3 ke Persamaan 4.22 menghasilkan,

$$\tilde{z}_k = y_k + n_k - H\hat{x}_k \quad (4.23)$$

Persamaan 2.2 halaman 10 disubstitusi ke Persamaan 4.23 sehingga,

$$\begin{aligned} \tilde{z}_k &= Hx_k + v_k + n_k - H\hat{x}_k \\ &= H(x_k - \hat{x}_k) + (v_k + n_k) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Kemudian, estimasi *state a posteriori* untuk waktu k adalah gabungan antara estimasi *state a priori* waktu k dan pengamatan waktu k , atau dapat ditulis sebagai,

$$\hat{x}_{k+} = \hat{x}_k + \gamma_k K_k \tilde{z}_k \quad (4.25)$$

dengan K_k adalah Kalman *gain* pada waktu k yang akan dicari.

Terlihat bahwa perbedaan bentuk umum estimasi *state a posteriori* Kalman filter pada Persamaan 2.43 halaman 20 dan Persamaan 4.25 adalah pada pengali γ_k . Sebab, pada NCS, hasil kuantifikasi pengamatan sistem yang diukur akan melalui *lossy wireless channel* sebelum dilakukan estimasi, sebagaimana diilustrasikan pada Gambar. 1.2. Hal ini mengakibatkan pengamatan sistem waktu sekarang dipengaruhi oleh i.i.d *arrival process*, γ_k .

Dilakukan substitusi Persamaan 4.25 ke Persamaan 4.17 sehingga didapat,

$$P_{k+} = \text{Var} [x_k - \hat{x}_k - \gamma_k K_k \tilde{z}_k | \mathcal{I}_{k+1}] \quad (4.26)$$

Persamaan 4.24 disubstitusi ke Persamaan 4.26 sehingga berlaku,

$$\begin{aligned} P_{k+} &= \text{Var} [x_k - \hat{x}_k - \gamma_k K_k (H(x_k - \hat{x}_k) + (v_k + n_k)) | \mathcal{I}_{k+1}] \\ &= \text{Var} [(I - \gamma_k K_k H) (x_k - \hat{x}_k) - \gamma_k K_k (v_k + n_k) | \mathcal{I}_{k+1}] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Diperhatikan pada Persamaan 4.27, antara $(x_k - \hat{x}_k) (I - \gamma_k K_k H)$ dan $\gamma_k K_k (v_k + n_k)$ adalah dua vektor acak dengan dimensi sama yang saling independen. Oleh karena itu, dengan sifat varian pada Persamaan 2.32 halaman 17, Persamaan 4.27 dapat ditulis sebagai,

$$\begin{aligned} P_{k+} &= \text{Var} [(I - \gamma_k K_k H) (x_k - \hat{x}_k) | \mathcal{I}_{k+1}] \\ &\quad + \text{Var} [\gamma_k K_k (v_k + n_k) | \mathcal{I}_{k+1}] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Berdasarkan penelitian Soleymani dkk. (2018) diketahui bahwa K_k , dan γ_k adalah terukur- $\mathcal{I}_k$. Dengan demikian, untuk γ_k , dan K_k dapat digunakan sifat pada Persamaan 2.28 halaman 17. Maka dari

itu, digunakan sifat varian pada Persamaan 2.30 dan 2.31 halaman 17 sehingga Persamaan 4.28 dapat ditulis sebagai,

$$P_{k+} = (I - \gamma_k K_k H) \text{Var} [(x_k - \hat{x}_k) | \mathcal{I}_{k+1}] (I - \gamma_k K_k H)^T + \gamma_k^2 K_k \text{Var} [(v_k + n_k) | \mathcal{I}_{k+1}] K_k^T \quad (4.29)$$

Jelas $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$ sehingga eror kovarian *a priori* untuk waktu k dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} P_k &= \text{Var} [(x_k - \hat{x}_k) | \mathcal{I}_k] \\ &= \text{Var} [(x_k - \hat{x}_k) | \mathcal{I}_{k+1}] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Jelas bahwa v_k dan n_k adalah vektor acak berdimensi sama dan saling independen. Dengan menggunakan sifat varian pada Persamaan 2.32 halaman 17, dan substusi Persamaan 4.30 ke Persamaan 4.29, diperoleh,

$$\begin{aligned} P_{k+} &= (I - \gamma_k K_k H) P_k (I - \gamma_k K_k H)^T \\ &+ \gamma_k^2 K_k (\text{Var} [v_k | \mathcal{I}_{k+1}] + \text{Var} [n_k | \mathcal{I}_{k+1}]) K_k^T \end{aligned} \quad (4.31)$$

Jelas bahwa v_k dan n_k tidak bergantung pada $\mathcal{I}_{k+1}$ sehingga berlaku,

$$\text{Var} [v_k | \mathcal{I}_{k+1}] = \text{Var}[v_k] = R_2 \quad (4.32)$$

dan

$$\text{Var} [n_k | \mathcal{I}_{k+1}] = \text{Var}[n_k] = \Lambda \quad (4.33)$$

Kemungkinan nilai γ_k adalah 0 atau 1 sebagaimana dinyatakan pada Persamaan 2.13 sehingga

$$\gamma_k^2 = \gamma_k \quad (4.34)$$

Persamaan 4.32, 4.33, dan 4.34 disubstitusi ke Persamaan 4.31 sehingga didapat,

$$P_{k+} = (I - \gamma_k K_k H) P_k (I - \gamma_k K_k H)^T + \gamma_k K_k (R_2 + \Lambda) K_k^T \quad (4.35)$$

Dimisalkan,

$$\bar{R}_2 = R_2 + \Lambda \quad (4.36)$$

sehingga hasil substitusi Persamaan 4.36 ke Persamaan 4.35 yang dilanjutkan dengan operasi aljabar pada matriks yang melibatkan substitusi Persamaan 4.34, diperoleh,

$$\begin{aligned} P_{k+} &= (I - \gamma_k K_k H) P_k (I - \gamma_k K_k H)^T + \gamma_k K_k \bar{R}_2 K_k^T \\ &= P_k - \gamma_k K_k H P_k - \gamma_k P_k H^T K_k^T + \gamma_k K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T \end{aligned} \quad (4.37)$$

Pada Persamaan 4.18 $\text{tr}(P_{k+1})$ merupakan jumlah dari MSE, untuk meminimumkan MSE ekivalen dengan meminimumkan $\text{tr}(P_{k+})$ dari Persamaan 4.37. Oleh karena itu, $\text{tr}(P_{k+})$ diturunkan secara parsial terhadap matriks K_k dengan ruas kanan sama dengan nol, yaitu,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}(P_{k+})}{\partial K_k} &= 0 \\ \frac{\partial \text{tr}(P_k)}{\partial K_k} - \gamma_k \frac{\partial \text{tr}(K_k H P_k)}{\partial K_k} - \gamma_k \frac{\text{tr}(P_k H^T K_k^T)}{\partial K_k} \\ &+ \gamma_k \frac{\partial \text{tr}(K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T)}{\partial K_k} = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Diperhatikan masing-masing suku pada ruas kiri Persamaan 4.38. Jelas bahwa,

$$\frac{\partial \text{tr}(P_k)}{\partial K_k} = 0 \quad (4.39)$$

karena $\text{tr}(P_k)$ bukan fungsi dari K_k . Dengan menggunakan sifat turunan *trace* matriks pada Persamaan 2.17 halaman 15, diperoleh,

$$\frac{\partial \text{tr}(K_k H P_k)}{\partial K_k} = (H P_k)^T \quad (4.40)$$

Jelas bahwa, P_k merupakan matriks simetri sehingga berlaku,

$$(HP_k)^T = P_k^T H^T = P_k H^T \quad (4.41)$$

Substitusi Persamaan 4.41 ke Persamaan 4.40 menghasilkan,

$$\frac{\partial \text{tr} (K_k HP_k)}{\partial K_k} = P_k H^T \quad (4.42)$$

Digunakan sifat turunan *trace* matriks pada Persamaan 2.18 halaman 15 untuk mendapatkan,

$$\frac{\partial \text{tr} (P_k H^T K_k^T)}{\partial K_k} = P_k H^T \quad (4.43)$$

Sifat turunan *trace* matriks pada Persamaan 2.19 halaman 15 digunakan untuk memperoleh,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr} (K_k (HP_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T)}{\partial K_k} &= K_k (HP_k H^T + \bar{R}_2)^T \\ &\quad + K_k (HP_k H^T + \bar{R}_2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Jelas bahwa, $(HP_k H^T + \bar{R}_2)$ adalah matriks simetri. Hal ini menyebabkan Persamaan 4.44 dapat dinyatakan sebagai,

$$\frac{\partial \text{tr} (K_k (HP_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T)}{\partial K_k} = 2K_k (HP_k H^T + \bar{R}_2) \quad (4.45)$$

Dengan menyubstitusi Persamaan 4.39, 4.42, 4.43, dan 4.45 ke Persamaan 4.38, dihasilkan,

$$\begin{aligned} -2\gamma_k (P_k H^T) + 2\gamma_k K_k (HP_k H^T + \bar{R}_2) &= 0 \\ K_k (HP_k H^T + \bar{R}_2) &= P_k H^T \end{aligned} \quad (4.46)$$

Jelas bahwa matriks simetri $(HP_k H^T + \bar{R}_2) \succ 0$ merupakan syarat cukup untuk memiliki invers. Oleh karena itu, Persamaan 4.46

dapat dikalikan dengan $(HP_k H^T + \bar{R}_2)^{-1}$ di sebelah kanan kedua ruas yang menghasilkan,

$$K_k = P_k H^T (HP_k H^T + \bar{R}_2)^{-1} \quad (4.47)$$

Dengan mengalikan K^T di sebelah kanan kedua ruas Persamaan 4.46, diperoleh,

$$K_k (HP_k H^T + \bar{R}_2) K^T = P_k H^T K_k^T \quad (4.48)$$

Persamaan 4.48 disubstitusi ke Persamaan 4.37 menghasilkan,

$$\begin{aligned} P_{k+} &= P_k - \gamma_k K_k H P_k - \gamma_k P_k H^T K_k^T + \gamma_k P_k H^T K_k^T \\ &= (I_n - \gamma_k K_k H) P_k \end{aligned} \quad (4.49)$$

Untuk mendapatkan bentuk lain dari $\hat{x}_{k+}$, Persamaan 4.22 disubstitusi ke Persamaan 4.25 sehingga

$$\hat{x}_{k+} = \hat{x}_k + \gamma_k K_k (z_k - H \hat{x}_k) \quad (4.50)$$

Jadi, telah didapat Kalman *gain* pada Persamaan 4.47 yang menyebabkan eror kovarian *a posteriori* pada Persamaan 4.49 adalah minimum dan estimasi *state a posteriori* pada Persamaan 4.50 adalah optimum. Dengan kata lain, eror kovarian *a posteriori* minimum adalah hasil substitusi Persamaan 4.47 ke Persamaan 4.49, yaitu,

$$P_{k+} = (I_n - \gamma_k P_k H^T (HP_k H^T + \bar{R}_2)^{-1} H) P_k$$

dan estimasi *state a posteriori* optimum adalah hasil substitusi Persamaan 4.47 pada Persamaan 4.50, yaitu,

$$\hat{x}_{k+} = \hat{x}_k + \gamma_k P_k H^T (HP_k H^T + \bar{R}_2)^{-1} (z_k - H \hat{x}_k)$$

Untuk mendapatkan estimasi *state a priori* optimal, Persamaan 4.50 disubstitusi ke Persamaan 4.12,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= F (\hat{x}_k + \gamma_k K_k (z_k - H \hat{x}_k)) + B u_k \\ &= F \hat{x}_k + B u_k + \gamma_k F K_k (z_k - H \hat{x}_k) \end{aligned}$$

Artinya, Persamaan 4.6 pada Teorema 4.2.1 terbukti. Sedangkan, untuk mendapatkan eror kovarian *a priori* minimum, Persamaan 4.49 disubstitusi ke Persamaan 4.18,

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= F (I_n - \gamma_k K_k H) P_k F^T + R_1 \\ &= F P_k F^T + R_1 - \gamma_k F K_k H P_k F^T \end{aligned}$$

Artinya, Persamaan 4.7 pada Teorema 4.2.1 terbukti. $\square$

Didefinisikan informasi yang tersedia pada *power scheduler* (PS) pada waktu k adalah $\mathcal{I}_k^s$ sebagaimana pada Persamaan 4.51 [38].

$$\mathcal{I}_k^s = \{\gamma_{0:k-1}, u_{0:k}, z_{0:k}\} \quad (4.51)$$

sehingga dipenuhi $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{I}_k^s$. Pada Teorema 4.2.2 dipaparkan estimator optimal dengan $\mathcal{I}_k^s$ sebagai informasi yang tersedia di PS [38].

Teorema 4.2.2. *Estimator optimal pada PS untuk $0 \leq k < N$ memenuhi [38]:*

$$\check{x}_{k+1} = F\check{x} + Bu_k + K_k^s (z_k - H(F\check{x} + Bu_k)) \quad (4.52)$$

$$P_{k+1}^s = \left((F P_k^s F^T + R_0)^{-1} + H^T R_2^{-1} H \right)^{-1} \quad (4.53)$$

$$K_k^s = P_k^s H^T R_2^{-1} \quad (4.54)$$

dengan kondisi awal,

$$\check{x}_0 = m + P_0^s H^T \bar{R}_2^{-1} (z_0 - Hm)$$

$$P_0^s = (R_0^{-1} + H^T \bar{R}_2 H)^{-1}$$

dengan $\check{x}_k = \mathbb{E}[\check{x}_k | \mathcal{I}_k^s]$, dan $P_k^s = \text{Cov}[\check{x}_k | \mathcal{I}_k^s]$

4.3 Kontrol Optimal

Pada bagian ini ditentukan keputusan kontrol optimal pada Teorema 4.3.1. Terlebih dahulu dikonstruksi Lemma 4.3.1 yang memuat beberapa persamaan untuk mempermudah penurunan keputusan kontrol optimal.

Lemma 4.3.1. *Persamaan-persamaan berikut adalah benar,*

$$\mathbb{E} [\gamma_k^2 | \mathcal{I}_k] = \mathbb{E} [\gamma_k | \mathcal{I}_k] = \text{PSR}_k \quad (4.55)$$

$$\mathbb{E} [\gamma_k K_k (z_k - Hx_k) | \mathcal{I}_k] = 0 \quad (4.56)$$

$$\mathbb{E} [x_k^T S x_k | \mathcal{I}_k] = \hat{x}_k^T S \hat{x}_k + \text{tr}(SP_k), \forall S \quad (4.57)$$

Bukti. Untuk membuktikan Persamaan 4.55, ditinjau definisi *arrival process* γ_k pada Persamaan 2.13 halaman 13. Terlihat kemungkinan nilai γ_k hanya 0 atau 1 sehingga $\gamma_k = \gamma_k^2$. Jelas bahwa γ_k independen terhadap informasi pada himpunan $\mathcal{I}_k$ sehingga dengan fakta $\mathbb{E}[\gamma_k] = \text{PSR}_k$, Persamaan 4.55 terbukti.

Untuk membuktikan Persamaan 4.56, selain ditinjau definisi γ_k sebagaimana pembuktian Persamaan 4.55, juga ditinjau definisi inovasi $z_k - Hx_k$ pada Persamaan 4.19. Jelas bahwa γ_k dan $z_k - Hx_k$ saling independen. Oleh karena itu, dengan menggunakan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.24 halaman 16 didapat,

$$\mathbb{E} [\gamma_k K_k (z_k - Hx_k) | \mathcal{I}_k] = \mathbb{E}[\gamma_k] \mathbb{E} [K_k (z_k - Hx_k) | \mathcal{I}_k] \quad (4.58)$$

Berdasarkan penelitian Soleymani, dkk. (2018), diketahui K_k adalah terukur- $\mathcal{I}_k$. Dengan demikian, dapat digunakan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.27 halaman 17 sehingga Persamaan 4.58 dapat ditulis sebagai,

$$\mathbb{E} [\gamma_k K_k (z_k - Hx_k) | \mathcal{I}_k] = \mathbb{E}[\gamma_k] K_k \mathbb{E} [(z_k - Hx_k) | \mathcal{I}_k]$$

Digunakan fakta bahwa mean dari inovasi sama dengan nol sehingga Persamaan 4.56 terbukti.

Untuk membuktikan Persamaan 4.57 halaman 42, diperhatikan $x_k^T S x_k$ adalah matriks berukuran 1×1 . Oleh karena itu, dengan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.24 halaman 16, sifat siklik *trace* pada Persamaan 2.16 halaman 15, dan sifat kovarian silang pada Persamaan 2.34 dan 2.35 halaman 18, berlaku,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [x_k^T S x_k | \mathcal{I}_k] &= \text{tr} (S \mathbb{E} [x_k x_k^T | \mathcal{I}_k]) \\ &= \text{tr} (S \mathbb{E} [x_k | \mathcal{I}_k] \mathbb{E} [x_k | \mathcal{I}_k]^T + S \text{Cov} [x_k | \mathcal{I}_k])\end{aligned}\quad (4.59)$$

Diketahui bahwa $[x_k | \mathcal{I}_k] = \hat{x}_k$ dan $\text{Cov} [x_k | \mathcal{I}_k] = P_k$ sehingga dengan sifat siklik *trace*, Persamaan 4.57 terbukti. $\square$

Cost function pada Persamaan 2.52 halaman 22 dapat dinyatakan sebagai batas bawah terbesar dari,

$$\begin{aligned}\Psi &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{t-1} (\psi(\text{PSR}_k) + \lambda \|x_k\|_{Q_1}^2 + \lambda \|u_k\|_{Q_2}^2) \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\lambda \|x_{N+1}\|_{Q_1}^2 + \sum_{k=t}^N (\psi(\text{PSR}_k) + \lambda \|x_k\|_{Q_1}^2 + \lambda \|u_k\|_{Q_2}^2) \right]\end{aligned}\quad (4.60)$$

dengan π dan μ tertentu. Jelas bahwa pada Persamaan 4.60 suku pertama tidak bergantung pada $u(t), u(t+1), \dots, u(N)$. Oleh karena itu, dengan asumsi ada nilai minimum tunggal didefinisikan *cost-to-go function* V_k ,

$$V_k = \min_{\pi, \mu} \mathbb{E} \left[\|x_{N+1}\|_{Q_0}^2 + \sum_{t=k}^N \left(\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_t) + \|x_t\|_{Q_1}^2 + \|u_t\|_{Q_2}^2 \right) \middle| \mathcal{I}_k \right]\quad (4.61)$$

sehingga *cost function* pada Persamaan 2.52 halaman 22 dengan sifat nilai harapan bersyarat pada Persamaan 2.26 halaman 16 dapat dinyatakan sebagai $\Psi(\pi^*, \mu^*) = \lambda \mathbb{E}[V_0]$.

Teorema 4.3.1. *Keputusan kontrol optimal $\mu_k^* = -L_k \hat{x}_k$ dengan*

$$L_k = (Q_2 + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} F \quad (4.62)$$

dengan $S \succeq 0$ merupakan solusi dari persamaan Riccati

$$S_k = F^T S_{k+1} + Q_1 - L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k \quad (4.63)$$

dengan kondisi awal $S_{N+1} = Q_0$.

Bukti. Dengan menggunakan Persamaan 4.61, diperhatikan,

$$\begin{aligned} V_k - V_{k+1} &= \min_{\pi, \mu} \mathbb{E} \left[\|x_{N+1}\|_{Q_0}^2 + \sum_{t=k}^N \left(\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_t) + \|x_t\|_{Q_1}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|u_t\|_{Q_2}^2 \right) \middle| \mathcal{I}_k \right] - \min_{\pi, \mu} \mathbb{E} \left[\|x_{N+1}\|_{Q_0}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=k+1}^N \left(\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_t) + \|x_t\|_{Q_1}^2 + \|u_t\|_{Q_2}^2 \right) \middle| \mathcal{I}_{k+1} \right] \\ V_k &= \min_{\text{PSR}_k, u_k} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_k) + \|x_k\|_{Q_1}^2 + \|u_k\|_{Q_2}^2 \middle| \mathcal{I}_k \right] \\ &\quad + V_{k+1} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Jelas bahwa V_{k+1} tidak bergantung pada $\mathcal{I}_k$, sehingga Persamaan 4.64 dapat ditulis sebagai,

$$V_k = \min_{\text{PSR}_k, u_k} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_k) + \|x_k\|_{Q_1}^2 + \|u_k\|_{Q_2}^2 + V_{k+1} \middle| \mathcal{I}_k \right] \quad (4.65)$$

Dibuktikan *cost-to-go function* berbentuk $V_k = \hat{x}_k^T S \hat{x}_{k+1} + s_k$ dengan $S_k \succ 0$ dan s_k tidak bergantung pada x_k dan $\hat{x}_k$. Pembuktian dilakukan dengan induksi mundur.

(i) Basis induksi

Dengan menggunakan Persamaan 4.61 dengan $k = N + 1$, didapat

$$\begin{aligned} V_{N+1} &= \min_{\pi, \mu} \mathbb{E} \left[\|x_{N+1}\|_{Q_0}^2 + \sum_{t=N+1}^N \left(\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_t) + \|x_t\|_{Q_1}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|u_t\|_{Q_2}^2 \right) \middle| \mathcal{I}_{N+1} \right] \\ &= \mathbb{E} [\|x_{N+1}\|_{Q_0}^2 \middle| \mathcal{I}_{N+1}] = \mathbb{E} [x_{N+1}^T Q_0 x_{N+1} \middle| \mathcal{I}_{N+1}] \end{aligned} \quad (4.66)$$

dengan menggunakan Persamaan 4.57, Persamaan 4.66 dapat ditulis sebagai,

$$V_{N+1} = \hat{x}_{N+1}^T Q_0 \hat{x}_{N+1} + \text{tr}(Q_0 P_{N+1}) \quad (4.67)$$

Terlihat bahwa Persamaan 4.67 memenuhi bentuk $V_k = \hat{x}_k^T S \hat{x}_{k+1} + s_k$ dengan $S_k = S_{N+1} = Q_0$ dan $s_k = s_{N+1} = \text{tr}(Q_0 P_{N+1})$ yang tidak bergantung pada x_k dan $\hat{x}$. Jadi, pernyataan yang akan dibuktikan adalah benar untuk $k = N + 1$.

(ii) Hipotesis induksi

Diasumsikan benar bahwa,

$$V_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} + s_{k+1} \quad (4.68)$$

dengan $S_{k+1} \succ 0$ dan s_{k+1} tidak bergantung pada x_{k+1} dan $\hat{x}_{k+1}$.

(iii) Langkah induksi

Dengan menggunakan Persamaan 4.68 dibuktikan benar bahwa dipenuhi bentuk, $V_k = \hat{x}_k^T S_k \hat{x}_{k+1} + s_k$, dengan $S_k \succ 0$ dan s_k tidak bergantung pada x_k dan $\hat{x}_k$. Dengan menyubstitusi

Persamaan 4.68 ke Persamaan 4.65 didapat,

$$\begin{aligned}
 V_k &= \min_{\text{PSR}_k, u_k} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_k) + \|x_k\|_{Q_1}^2 + \|u_k\|_{Q_2}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} + s_{k+1} \mid \mathcal{I}_k \right] \\
 &= \min_{\text{PSR}_k, u_k} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_k) + x_k^T Q_1 x_k + u_k^T Q_2 u_k \right. \\
 &\quad \left. + \hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} + s_{k+1} \mid \mathcal{I}_k \right] \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

Dengan sifat kelinearan nilai harapan pada Persamaan 2.21 dan Persamaan 2.22 halaman 16, Persamaan 4.69 dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned}
 V_k &= \min_{\text{PSR}_k, u_k} \left\{ \frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_k) + \mathbb{E} [x_k^T Q_1 x_k \mid \mathcal{I}_k] + u_k^T Q_2 u_k \right. \\
 &\quad \left. + \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} \mid \mathcal{I}_k] + \mathbb{E} [s_{k+1} \mid \mathcal{I}_k] \right\} \quad (4.70)
 \end{aligned}$$

Diperhatikan $\mathbb{E} [x_k^T Q_1 x_k \mid \mathcal{I}_k]$ pada Persamaan 4.70 . Dengan menggunakan Persamaan 4.57 diketahui,

$$\mathbb{E} [x_k^T Q_1 x_k \mid \mathcal{I}_k] = \hat{x}_k^T Q_1 \hat{x}_k + \text{tr} (Q_1 P_k). \quad (4.71)$$

Diperhatikan $\mathbb{E} [\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} \mid \mathcal{I}_k]$ pada Persamaan 4.70. Jelas bahwa $\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1}$ merupakan matriks berukuran 1×1 . Sebab, x_k merupakan vektor berukuran $n \times 1$ sehingga $\hat{x}_k$ berukuran $n \times 1$ dan $\hat{x}_k^T$ berukuran $1 \times n$. Sedangkan, S_k adalah matriks berukuran $n \times n$. Oleh karena itu, berdasarkan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.25 dapat ditulis,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} \mid \mathcal{I}_k] &= \mathbb{E} [\text{tr} (\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1}) \mid \mathcal{I}_k] \\
 &= \text{tr} (\mathbb{E} [\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} \mid \mathcal{I}_k]) \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

Jelas bahwa S_{k+1} pada Persamaan 4.72 adalah matriks konstan sehingga dapat digunakan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.22 halaman 16 dan sifat *trace* pada Persamaan 2.15

halaman 15. Oleh karena itu, Persamaan 4.72 dapat ditulis sebagai,

$$\mathbb{E} [\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] = \text{tr} (S_{k+1} \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} \hat{x}_{k+1}^T | \mathcal{I}_k]) \quad (4.73)$$

Digunakan sifat matriks kovarian-silang pada Persamaan 2.34 halaman 18 untuk vektor acak $\hat{x}_{k+1}$ pada Persamaan 4.73, yaitu,

$$\begin{aligned} \text{Cov} [\hat{x}_{k+1}, \hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] &= \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} \hat{x}_{k+1}^T | \mathcal{I}_k] \\ &\quad - \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]^T \end{aligned} \quad (4.74)$$

Dengan menggunakan sifat matriks kovarian-silang pada Persamaan 2.35 halaman 18, Persamaan 4.74 dapat dinyatakan sebagai,

$$\mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} \hat{x}_{k+1}^T | \mathcal{I}_k] = \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]^T + \text{Cov} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \quad (4.75)$$

Persamaan 4.75 disubstitusi ke Persamaan 4.73, dan digunakan sifat *trace* pada Persamaan 2.14 halaman 15 menghasilkan,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} [\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\ &= \text{tr} \left(S_{k+1} \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]^T + S_{k+1} \text{Cov} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \right) \\ &= \text{tr} \left(\mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]^T S_{k+1} \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \right) \\ &\quad + \text{tr} (S_{k+1} \text{Cov} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Persamaan 4.6 disubstitusi ke Persamaan 4.76 sehingga,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} [\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\ &= \text{tr} \left(\mathbb{E} [F \hat{x}_k + Bu_k + \gamma_k F K_k (z_k - H \hat{x}_k) | \mathcal{I}_k]^T S_{k+1} \right. \\ &\quad \mathbb{E} [F \hat{x}_k + Bu_k + \gamma_k F K_k (z_k - H \hat{x}_k) | \mathcal{I}_k] \\ &\quad \left. + \text{tr} (S_{k+1} \text{Cov} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]) \right) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Berdasarkan penelitian Soleymani dkk. (2018) diketahui bahwa $\hat{x} = \mathbb{E}[x_k | \mathcal{I}_k]$ dan x_k adalah terukur- $\mathcal{I}_k$. Oleh karena itu, dengan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.28 berlaku,

$$\mathbb{E}[\hat{x}_k | \mathcal{I}_k] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[x_k | \mathcal{I}_k] | \mathcal{I}_k] = \mathbb{E}[x_k | \mathcal{I}_k] = \hat{x}_k \quad (4.78)$$

Jelas bahwa pada Persamaan 4.77 matriks F dan Bu_k adalah konstan terhadap $\mathcal{I}_k$. Oleh karena itu, dengan substitusi Persamaan 4.78, Persamaan 4.77 dapat ditulis sebagai,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\ &= \text{tr} \left((F \hat{x}_k + Bu_k + F \mathbb{E} [\gamma_k K_k (z_k - H \hat{x}_k) | \mathcal{I}_k])^T S_{k+1} \right. \\ & \quad \left. (F \hat{x}_k + Bu_k + F \mathbb{E} [\gamma_k K_k (z_k - H \hat{x}_k) | \mathcal{I}_k]) \right) \\ & \quad + \text{tr} (S_{k+1} \text{Cov} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Persamaan 4.56 disubstitusi Persamaan 4.79, diperoleh,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\ &= \text{tr} \left((F \hat{x}_k + Bu_k)^T S_{k+1} (F \hat{x}_k + Bu_k) \right) \\ & \quad + \text{tr} (S_{k+1} \text{Cov} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Pada Persamaan 4.80 diperhatikan $\text{Cov} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]$. Digunakan definisi varian matriks acak pada Persamaan 2.29 halaman 17 sehingga berlaku,

$$\begin{aligned} & \text{Cov} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\ &= \mathbb{E} \left[(\hat{x}_{k+1} - \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]) (\hat{x}_{k+1} - \mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k])^T | \mathcal{I}_k \right] \end{aligned} \quad (4.81)$$

Pada Persamaan 4.81, diperhatikan $\mathbb{E} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k]$. Dengan menggunakan Persamaan 4.6 dan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.21 halaman 16, diketahui bahwa,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\
&= \mathbb{E}[F\hat{x}_k + Bu_k + \gamma_k FK_k(z_k - H\hat{x}_k) | \mathcal{I}_k] \\
&= \mathbb{E}[F\hat{x}_k | \mathcal{I}_k] + \mathbb{E}[Bu_k | \mathcal{I}_k] + \mathbb{E}[\gamma_k FK_k(z_k - H\hat{x}_k) | \mathcal{I}_k]
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Persamaan 4.78 dan 4.56 disubstitusi ke Persamaan 4.82. Digunakan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.22 halaman 16 sehingga Persamaan 4.82 dapat ditulis sebagai,

$$\mathbb{E}[\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] = F\hat{x}_k + Bu_k \tag{4.83}$$

Persamaan 4.22 disubstitusi ke Persamaan 4.6 sehingga dapat ditulis,

$$\hat{x}_{k+1} = F\hat{x}_k + Bu_k + \gamma_k FK_k \tilde{z}_k \tag{4.84}$$

Oleh karena itu, dengan menyubsitusi Persamaan 4.84 dan 4.83 ke Persamaan 4.81 diperoleh,

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}[\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\
&= \mathbb{E}[(F\hat{x}_k + Bu_k + \gamma_k FK_k \tilde{z}_k - (F\hat{x}_k + Bu_k)) \\
&\quad (F\hat{x}_k + Bu_k + \gamma_k FK_k \tilde{z}_k - (F\hat{x}_k + Bu_k))^T | \mathcal{I}_k] \\
&= \mathbb{E}[\gamma_k^2 FK_k \tilde{z}_k \tilde{z}_k^T K_k^T F^T | \mathcal{I}_k]
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Jelas bahwa matriks pada Persamaan 4.85 saling independen. Oleh karena itu, dapat digunakan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.24 halaman 16, dan substitusi Persamaan 4.55 sehingga berlaku,

$$\text{Cov}[\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] = \text{PSR}_k FK_k \mathbb{E}[\tilde{z}_k \tilde{z}_k^T | \mathcal{I}_k] K_k^T F^T \tag{4.86}$$

Pada Persamaan 4.86 diperhatikan $\mathbb{E}[\tilde{z}_k \tilde{z}_k^T | \mathcal{I}_k]$. Digunakan Persamaan 4.24 untuk mendapatkan,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [\tilde{z}_k \tilde{z}_k^T | \mathcal{I}_k] \\
&= \mathbb{E} \left[(H(x_k - \hat{x}_k) + (v_k + n_k)) (H(x_k - \hat{x}_k) + (v_k + n_k))^T \middle| \mathcal{I}_k \right] \\
&= \mathbb{E} \left[(H(x_k - \hat{x}_k) + (v_k + n_k)) ((x_k^T - \hat{x}_k^T)H^T + (v_k + n_k)) \middle| \mathcal{I}_k \right] \\
& \quad (4.87)
\end{aligned}$$

Matriks-matriks acak pada Persamaan 4.87 dijabarkan dan untuk matriks acak yang saling independen digunakan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.24 halaman 16. Dengan demikian, diperoleh,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [\tilde{z}_k \tilde{z}_k^T | \mathcal{I}_k] \\
&= \mathbb{E} \left[H(x_k - \hat{x}_k)(x_k^T - \hat{x}_k^T)H^T \right. \\
& \quad \left. + (v_k + n_k) (H(x_k - \hat{x}_k) + (x_k^T - \hat{x}_k^T)H^T) + (v_k + n_k)^2 \middle| \mathcal{I}_k \right] \\
&= \mathbb{E} \left[H(x_k - \hat{x}_k)(x_k^T - \hat{x}_k^T)H^T \middle| \mathcal{I}_k \right] \\
& \quad \mathbb{E} [(v_k + n_k) | \mathcal{I}_k] \mathbb{E} [H(x_k - \hat{x}_k) + (x_k^T - \hat{x}_k^T)H^T | \mathcal{I}_k] \\
& \quad + \mathbb{E} [(v_k + n_k)^2 | \mathcal{I}_k] \\
& \quad (4.88)
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa v_k dan n_k saling independen, dan $\mathbb{E} [v_k | \mathcal{I}_k] = \mathbb{E} [n_k | \mathcal{I}_k] = 0$. Dengan menggunakan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.21 halaman 16 diketahui,

$$\mathbb{E} [(v_k + n_k) | \mathcal{I}_k] = \mathbb{E} [v_k | \mathcal{I}_k] + \mathbb{E} [n_k | \mathcal{I}_k] = 0 \quad (4.89)$$

Dengan menggunakan Persamaan 4.89, sifat matriks kovarian-silang pada Persamaan 2.34, 2.35, dan 2.32 halaman 17 juga diketahui,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(v_k + n_k)^2 | \mathcal{I}_k] &= (\mathbb{E} [v_k + n_k | \mathcal{I}_k])^2 + \text{Var} [v_k + n_k | \mathcal{I}_k] \\
&= \text{Var} \mathbb{E} [v_k | \mathcal{I}_k] + \text{Var} \mathbb{E} [n_k | \mathcal{I}_k] \\
& \quad (4.90)
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\text{Var} [v_k | \mathcal{I}_k] = R_2$, $\text{Var} [v_k | \mathcal{I}_k] = \Lambda$, dan Persamaan 4.36 sehingga Persamaan 4.90 dapat dinyatakan

sebagai,

$$\mathbb{E} \left[(v_k + n_k)^2 \middle| \mathcal{I}_k \right] = R_2 + \Lambda = \bar{R}_2 \quad (4.91)$$

Pada Persamaan 4.88, jelas bahwa matriks H adalah konstan sehingga dengan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.22 halaman 16, substitusi Persamaan 4.89 dan 4.91, didapat,

$$\mathbb{E} \left[\tilde{z}_k \tilde{z}_k^T \middle| \mathcal{I}_k \right] = H \mathbb{E} \left[(x_k - \hat{x}_k)(x_k^T - \hat{x}_k^T) \middle| \mathcal{I}_k \right] H^T + \bar{R}_2 \quad (4.92)$$

Dari Teorema 4.2.1 diketahui $\hat{x}_k = \mathbb{E} [x_k | \mathcal{I}_k]$ sehingga Persamaan 4.92 ekuivalen dengan,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\tilde{z}_k \tilde{z}_k^T \middle| \mathcal{I}_k \right] \\ &= H \mathbb{E} \left[(x_k - \mathbb{E} [x_k | \mathcal{I}_k])(x_k - \mathbb{E} [x_k | \mathcal{I}_k])^T \middle| \mathcal{I}_k \right] H^T + \bar{R}_2 \end{aligned} \quad (4.93)$$

Diperhatikan definisi kovarian matriks acak pada Persamaan 2.29 halaman 17. Jelas bahwa Persamaan 4.93 dapat dinyatakan sebagai,

$$\mathbb{E} \left[\tilde{z}_k \tilde{z}_k^T \middle| \mathcal{I}_k \right] = H \text{Cov} [x_k | \mathcal{I}_k] H^T + \bar{R}_2 \quad (4.94)$$

Dari Teorema 4.2.1 diketahui $P_k = \text{Cov} [x_k | \mathcal{I}_k]$ sehingga Persamaan 4.94 dapat ditulis sebagai,

$$\mathbb{E} \left[\tilde{z}_k \tilde{z}_k^T \middle| \mathcal{I}_k \right] = H P_k H^T + \bar{R}_2 \quad (4.95)$$

Persamaan 4.95 disubstitusi ke Persamaan 4.86 menghasilkan,

$$\text{Cov} [\hat{x}_{k+1} | \mathcal{I}_k] = \text{PSR}_k F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T \quad (4.96)$$

Persamaan 4.96 disubstitusi ke Persamaan 4.80 menghasilkan,

$$\mathbb{E} \left[\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} \middle| \mathcal{I}_k \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} \left((F\hat{x}_k + Bu_k)^T S_{k+1} (F\hat{x}_k + Bu_k) \right) \\
&\quad + \text{tr} \left(S_{k+1} \text{PSR}_k F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T \right)
\end{aligned} \tag{4.97}$$

Jelas bahwa $(F\hat{x}_k + Bu_k)^T S_{k+1} (F\hat{x}_k + Bu_k)$, dan PSR_k pada Persamaan 4.97 merupakan matriks berukuran 1×1 sehingga dengan sifat *trace* pada Persamaan 2.16 halaman 15 diperoleh,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\hat{x}_{k+1}^T S_{k+1} \hat{x}_{k+1} \mid \mathcal{I}_k \right] \\
&= (F\hat{x}_k + Bu_k)^T S_{k+1} (F\hat{x}_k + Bu_k) \\
&\quad + \text{PSR}_k \text{tr} \left(S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T \right)
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Persamaan 4.71 dan 4.98 disubstitusi ke Persamaan 4.70 menghasilkan,

$$\begin{aligned}
V_k = \min_{\text{PSR}_k, u_k} &\left\{ \frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_k) + \hat{x}_k^T Q_1 \hat{x}_k + \text{tr}(Q_1 P_k) \right. \\
&+ u_k^T Q_2 u_k + (F\hat{x}_k + Bu_k)^T S_{k+1} (F\hat{x}_k + Bu_k) \\
&+ \text{PSR}_k \text{tr} \left(S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T \right) \\
&\left. + \mathbb{E}[s_{k+1} \mid \mathcal{I}_k] \right\}
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Jelas bahwa V_k pada Persamaan 4.99 adalah matriks 1×1 sehingga V_k ekuivalen dengan $\text{tr}(V_k)$. Oleh karena itu, untuk mendapat u_k optimal (dilambangkan μ_k^*), $\text{tr}(V_k)$ pada Persamaan 4.99 diturunkan secara parsial terhadap u_k dengan ruas kanan sama dengan nol, yaitu,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \text{tr}(V_k)}{\partial u_k} = 0 \\
& \frac{\partial \text{tr}(u_k^T Q_2 u_k)}{\partial u_k} \\
& + \frac{\partial \text{tr}((F \hat{x}_k + B u_k)^T S_{k+1} (F \hat{x}_k + B u_k))}{\partial u_k} = 0 \quad (4.100)
\end{aligned}$$

Diperhatikan $\frac{\partial \text{tr}(u_k^T Q_2 u_k)}{\partial u_k}$ pada persamaan 4.100. Dengan menggunakan sifat turunan *trace* matriks pada Persamaan 2.19 halaman 15 dan fakta bahwa $Q_2 \succeq 0$, diketahui,

$$\frac{\partial \text{tr}(u_k^T Q_2 u_k)}{\partial u_k} = Q_2 u_k + Q_2^T u_k = 2Q_2 u_k \quad (4.101)$$

Diperhatikan suku ke dua ruas kiri Persamaan 4.100. Dengan sifat transpose dan perkalian matriks, diperoleh,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \text{tr}((F \hat{x}_k + B u_k)^T S_{k+1} (F \hat{x}_k + B u_k))}{\partial u_k} = \\
& \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\text{tr}(\hat{x}_k^T F^T S_{k+1} F \hat{x}_k + u_k^T B^T S_{k+1} F \hat{x}_k \right. \\
& \quad \left. + \hat{x}_k^T F^T S_{k+1} B u_k + u_k^T B^T S_{k+1} B u_k) \right) \quad (4.102)
\end{aligned}$$

Digunakan sifat *trace* pada Persamaan 2.14 halaman 15, dan sifat turunan *trace* pada Persamaan 2.18, 2.17, 2.19 halaman 15 masing-masing pada suku kedua, ketiga, dan keempat ruas kanan Persamaan 4.102 sehingga,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \operatorname{tr} \left((F \hat{x}_k + Bu_k)^T S_{k+1} (F \hat{x}_k + Bu_k) \right)}{\partial u_k} = \\
& 0 + B^T S_{k+1} F \hat{x}_k + \left(\hat{x}_k^T F^T S_{k+1} B \right)^T + \left(B^T S_{k+1} Bu_k + \right. \\
& \quad \left. (B^T S_{k+1} B)^T u_k \right) = \\
& B^T S_{k+1} F \hat{x}_k + B^T S_{k+1}^T F \hat{x}_k + B^T S_{k+1} Bu_k + B^T S_{k+1}^T Bu_k \\
& \quad (4.103)
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa $S_{k+1} \succeq 0$. Artinya, S_{k+1} adalah matriks simetri sehingga Persamaan 4.103 dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \operatorname{tr} \left((F \hat{x}_k + Bu_k)^T S_{k+1} (F \hat{x}_k + Bu_k) \right)}{\partial u_k} = \\
& 2B^T S_{k+1} F \hat{x}_k + 2B^T S_{k+1} Bu_k \quad (4.104)
\end{aligned}$$

Persamaan 4.101 dan 4.104 disubstitusi ke Persamaan 4.100 sehingga didapat,

$$\begin{aligned}
2Q_2 u_k + 2B^T S_{k+1} F \hat{x}_k + 2B^T S_{k+1} Bu_k &= 0 \\
(Q_2 + B^T S_{k+1} B) u_k &= -B^T S_{k+1} F \hat{x}_k \\
& \quad (4.105)
\end{aligned}$$

Jelas bahwa $(Q_2 + B^T S_{k+1} B) \succeq 0$ sehingga memiliki invers. Jadi, dari Persamaan 4.105 didapat,

$$u_k^* = - (Q_2 + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} F \hat{x}_k \quad (4.106)$$

Misal, sebagaimana Persamaan 4.62,

$$L_k = (Q_2 + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} F$$

Dengan demikian, Persamaan 4.106 ekuivalen dengan $u_k^* = -L_k \hat{x}_k$.

Dimisalkan PSR_k^* adalah PSR_k optimal. Jika pada Persamaan 4.99 u_k disubstitusi dengan $u_k^* = -L_k \hat{x}_k$ dan PSR_k disubstitusi dengan PSR_k^* , maka diperoleh,

$$\begin{aligned}
 V_k &= \frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_k^*) + \hat{x}_k^T Q_1 \hat{x}_k + \text{tr}(Q_1 P_k) \\
 &\quad + (-L_k \hat{x}_k)^T Q_2 (-L_k \hat{x}_k) + \hat{x}_k^T F^T S_{k+1} F \hat{x}_k \\
 &\quad + (-L_k \hat{x}_k)^T B^T S_{k+1} F \hat{x}_k + \hat{x}_k^T F^T S_{k+1} B (-L_k \hat{x}_k) \\
 &\quad + (-L_k \hat{x}_k)_k^T B^T S_{k+1} B (-L_k \hat{x}_k) \\
 &\quad + \text{PSR}_k^* \text{tr}(S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T) \\
 &\quad \mathbb{E}[s_{k+1} | \mathcal{I}_k] \\
 &= \hat{x}_k^T (F^T S_{k+1} F + Q_1 + L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k \\
 &\quad - (L_k^T B^T S_{k+1} F + F^T S_{k+1} B L_k)) \hat{x}_k \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_k^*) + \text{tr}(Q_1 P_k) \\
 &\quad + \text{PSR}_k^* \text{tr}(S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T) \\
 &\quad + \mathbb{E}[s_{k+1} | \mathcal{I}_k] \tag{4.107}
 \end{aligned}$$

Dari Persamaan 4.107 terlihat bahwa telah dipenuhi bentuk $V_k = \hat{x}_k^T S_k \hat{x}_{k+1} + s_k$. Untuk mendapatkan bentuk S_k yang lebih sederhana, ditinjau Persamaan 4.62. Jika kedua ruas Persamaan 4.62 dikalikan dengan $(Q_2 + B^T S_{k+1} B)$ di sebelah kiri dan dikurangi oleh $B^T S_{k+1} F$, maka didapat,

$$(Q_2 + B^T S_{k+1} B) L_k - B^T S_{k+1} F = 0 \tag{4.108}$$

Jika kedua ruas Persamaan 4.108 dikalikan dengan L_k^T di sebelah kiri, maka,

$$L_k^T ((Q_2 + B^T S_{k+1} B) L_k - B^T S_{k+1} F) = 0 \tag{4.109}$$

Transpose kedua ruas Persamaan 4.108 adalah,

$$F^T S_{k+1} B - L_k^T (Q_2 + B^T S_{k+1} B) = 0 \tag{4.110}$$

Jika kedua ruas Persamaan 4.110 dikalikan dengan L_k di sebelah kanan, maka,

$$(F^T S_{k+1} B - L_k^T (Q_2 + B^T S_{k+1} B)) L_k = 0 \quad (4.111)$$

Dengan menyamakan Persamaan 4.109 dan 4.111 diperoleh,

$$L_k^T B^T S_{k+1} F + F^T S_{k+1} B L_k = 2L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k \quad (4.112)$$

Persamaan 4.112 disubstitusi ke Persamaan 4.107 menghasilkan,

$$\begin{aligned} V_k = & \hat{x}_k^T (F^T S_{k+1} F + Q_1 - L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k) \hat{x}_k \\ & + \frac{1}{\lambda} \psi (\text{PSR}_k^*) + \text{tr} (Q_1 P_k) \\ & + \text{PSR}_k^* \text{tr} (S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T) \\ & + \mathbb{E} [s_{k+1} | \mathcal{I}_k] \end{aligned} \quad (4.113)$$

Jadi, dipenuhi bentuk $V_k = \hat{x}_k^T S_k \hat{x}_{k+1} + s_k$ dengan,

$$S_k = F^T S_{k+1} F + Q_1 - L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k$$

dan

$$\begin{aligned} s_k = & \frac{1}{\lambda} \psi (\text{PSR}_k^*) + \text{tr} (Q_1 P_k) \\ & + \text{PSR}_k^* \text{tr} (S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T) \\ & + \mathbb{E} [s_{k+1} | \mathcal{I}_k] \end{aligned} \quad (4.114)$$

dengan PSR_k^* tidak bergantung pada x_k dan $\hat{x}_k$.

Bentuk $V_k = \hat{x}_k^T S_k \hat{x}_{k+1} + s_k$ dipenuhi menunjukkan bahwa fungsi V_k adalah kuadratik dengan $Q_2 \succ 0$ dan $S_{k+1} \succeq 0$. Oleh karena itu, nilai minimum V_k terhadap u_k ada untuk setiap k . Jadi, dapat disimpulkan keputusan pengontrol optimal ekivalen dengan u_k^* , yaitu, $\mu_k^* = u_k^* = -L_k \hat{x}_k$.

□

4.4 Packet Success Rate Optimal

Pada bagian ini ditentukan keputusan *packet success rate* optimal pada Teorema 4.4.1. Terlebih dahulu dikonstruksi Lemma 4.4.1 dan 4.4.2 yang memuat persamaan untuk mempermudah penentuan keputusan *packet success rate* optimal.

Lemma 4.4.1. *Persamaan berikut adalah benar:*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\text{tr}(P_{N+1}Q_0) - \text{tr}(R_0S_0)] = \\ & \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^N (\text{tr}(S_{k+1}R_1) + \text{tr}(P_k L_k^T (B^T S_{k+1}B + Q_2)L_k)) \right] \\ & - \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^N (\text{tr}(P_k Q_1) + \text{PSR}_k \text{tr}(S_{k+1}K_k(HP_k H^T + \bar{R}_2))K_k^T) \right] \end{aligned} \quad (4.115)$$

Bukti. Jika kedua ruas Persamaan 4.47 di-*transpose* dan dikalikan dengan $(HP_k H^T + \bar{R}_2)$, maka dengan fakta bahwa $P_k \succeq 0$ diperoleh,

$$HP_k = (HP_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T \quad (4.116)$$

Persamaan 4.116 disubstitusi ke Persamaan 4.7 menghasilkan,

$$P_{k+1} = FP_k F^T + R_1 - \gamma_k F K_k (HP_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T \quad (4.117)$$

Persamaan 4.117 dikalikan dengan S_{k+1} di sebelah kiri dan ditentukan *trace* dari hasil perkalian tersebut. Dengan menggunakan sifat siklik *trace* pada Persamaan 2.15 halaman 15, didapat,

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_{k+1}S_{k+1}) &= \text{tr}(P_k F^T S_{k+1} F) + \text{tr}(S_{k+1}R_1) \\ &\quad - \text{tr}(\gamma_k S_{k+1} F K_k (HP_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T) \end{aligned} \quad (4.118)$$

Jika Persamaan 4.63 dikalikan dengan P_k di sebelah kiri dan ditentukan *trace* dari hasil perkalian tersebut, maka dengan menggunakan sifat siklik *trace* pada Persamaan 2.15 halaman 15 diperoleh,

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_k S_k) &= \text{tr}(P_k F^T S_{k+1}) + \text{tr}(P_k Q_1) \\ &\quad - \text{tr}(L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k) \end{aligned} \quad (4.119)$$

Persamaan 4.117 dikurangi Persamaan 4.119 menghasilkan,

$$\begin{aligned} &\text{tr}(P_{k+1} S_{k+1}) - \text{tr}(P_k S_k) \\ &= \text{tr}(S_{k+1} R_1) - \text{tr}(\gamma_k S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T) \\ &\quad - \text{tr}(P_k Q_1) + \text{tr}(L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k) \end{aligned} \quad (4.120)$$

Ditentukan jumlahan Persamaan 4.120 untuk k dari 0 sampai N , dan ditentukan nilai harapannya, yaitu,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\text{tr}(P_{N+1} S_{N+1})] - \mathbb{E}[\text{tr}(P_0 S_0)] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^N (\text{tr}(S_{k+1} R_1) + \text{tr}(L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k))\right] \\ &\quad - \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^N (\text{tr}(P_k Q_1) + \text{tr}(\gamma_k S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T))\right] \end{aligned} \quad (4.121)$$

Diketahui γ_k matriks 1×1 yang independen terhadap matriks acak lainnya, dan $\mathbb{E}[\gamma_k] = \text{PSR}_k$ sehingga berlaku,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\text{tr}(\gamma_k S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T)] \\ &= \mathbb{E}[\gamma_k] \mathbb{E}[S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T] \\ &= \text{PSR}_k \mathbb{E}[S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T] \\ &= \mathbb{E}[\text{PSR}_k S_{k+1} F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T] \end{aligned} \quad (4.122)$$

Diketahui $S_{N+1} = Q_0$ dan $P_0 = R_0$. Oleh karena itu, dengan menyubsitusi Persamaan 4.122 ke Persamaan 4.121 terbukti Persamaan 4.115 benar.

□

Lemma 4.4.2. *Cost function $\Psi(\pi, \mu^*)$ dengan keputusan kontrol optimal μ^* dan keputusan packet succes rate π yang independen terhadap state dan estimasi state adalah,*

$$\begin{aligned} \Psi(\pi, \mu^*) = & \lambda m^T S_0 m + \lambda \text{tr}(R_0 S_0) \\ & + \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^N (\psi(\text{PSR}_k) + \lambda \text{tr}(S_{k+1} R_1) + \lambda \text{tr}(\Theta)_k R_k) \right] \end{aligned} \quad (4.123)$$

dengan $\Theta_k = F^T S_{k+1} B L_k$

Bukti. Misal, V_k^π adalah *cost-to-go function* V_k pada Persamaan 4.61 dengan π tetap. Pada pembuktian Teorema 4.3.1 telah terbukti bahwa persamaan tersebut memenuhi bentuk $V_k = \hat{x}_k^T S_k \hat{x}_k + s_k$. Oleh karena itu, *cost function* pada Persamaan 2.52 halaman 22 dengan π tertentu, dan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.26 dan 2.21 halaman 16 dapat dinyatakan sebagai,

$$\Psi(\pi, \mu^*) = \lambda \mathbb{E}[V_0^\pi] = \lambda \mathbb{E}[\hat{x}_0^T S_0 \hat{x}_0 + s_0] = \lambda \mathbb{E}[\hat{x}_0^T S_0 \hat{x}_0] + \lambda \mathbb{E}[s_0] \quad (4.124)$$

Pada Persamaan 4.124 terlebih dahulu diperhatikan $\mathbb{E}[\hat{x}_0^T S_0 \hat{x}_0]$. Jelas bahwa $\hat{x}_0^T S_0 \hat{x}_0$ adalah matriks 1×1 sehingga dengan kelinearan nilai harapan, *trace*, dan sifat pada Persamaan 2.15, persamaan berikut dipenuhi,

$$\mathbb{E}[\hat{x}_0^T S_0 \hat{x}_0] = \mathbb{E}[\text{tr}(S_0 \hat{x}_0 \hat{x}_0^T)] = \text{tr}(\mathbb{E}[S_0 \hat{x}_0 \hat{x}_0^T]) \quad (4.125)$$

Jelas bahwa S_0 matriks konstan sehingga dengan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.22 halaman 16, dan sifat kovarian silang pada Persamaan 2.34 dan 2.35 halaman 18, Persamaan 4.125 dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{x}_0^T S_0 \hat{x}_0] &= \text{tr}(S_0 \mathbb{E}[\hat{x}_0 \hat{x}_0^T]) = \text{tr}(S_0 (\mathbb{E}[\hat{x}_0 \hat{x}_0^T])) \\ &= \text{tr}(S_0 (\mathbb{E}[\hat{x}_0] \mathbb{E}[\hat{x}_0]^T + \text{Var}[\hat{x}_0])) \end{aligned} \quad (4.126)$$

Diketahui $\hat{x}_k = \mathbb{E}[x_k | \mathcal{I}_k]$ sehingga dengan sifat nilai harapan bersyarat pada Persamaan 2.26 berlaku,

$$\mathbb{E}[\hat{x}_k] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[x_k | \mathcal{I}_k]] = \mathbb{E}[x_k] \quad (4.127)$$

Persamaan 4.127 untuk $k = 0$ adalah,

$$\mathbb{E}[\hat{x}_0] = \mathbb{E}[x_0] = m \quad (4.128)$$

Dengan hukum varian total pada Persamaan 2.33 halaman 17 diketahui,

$$\text{Var}[x_k] = \mathbb{E}[\text{Var}[x_k | \mathcal{I}_k]] + \text{Var}[\mathbb{E}[x_k | \mathcal{I}_k]] \quad (4.129)$$

Diketahui $\text{Var}[x_k | \mathcal{I}_k] = P_k$ dan $\mathbb{E}[x_k | \mathcal{I}_k] = \hat{x}_k$ sehingga dari Persamaan 4.129 diperoleh,

$$\text{Var}[\hat{x}_k] = \text{Var}[x_k] - \mathbb{E}[P_k] \quad (4.130)$$

Persamaan 4.130 untuk $k = 0$ dengan $P_0 = \text{Var}[x_0 | \mathcal{I}_0] = \text{Var}[x_0] = R_0$ adalah,

$$\text{Var}[\hat{x}_0] = \text{Var}[x_0] - \mathbb{E}[P_0] = R_0 - \mathbb{E}[R_0] = 0 \quad (4.131)$$

Persamaan 4.128 dan 4.131 disubstitusi ke Persamaan 4.126. Selain itu, digunakan sifat siklik *trace* pada Persamaan 2.15 halaman 15 sehingga berlaku,

$$\mathbb{E}[\hat{x}_0^T S_0 \hat{x}_0] = \text{tr}(S_0 (mm^T + 0)) = m^T S_0 m \quad (4.132)$$

Pada Persamaan 4.124 diperhatikan $\mathbb{E}[s_0]$. Dengan menyubstitusi Persamaan 4.114 untuk $k = 0$, diketahui,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s_0] = \mathbb{E} & \left[\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_0) + \text{tr}(Q_1 P_0) \right. \\ & + \text{PSR}_0 \text{tr}(S_1 F K_0 (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_0^T F^T) \\ & \left. + \mathbb{E}[s_1 | \mathcal{I}_0] \right] \end{aligned} \quad (4.133)$$

Dengan menggunakan sifat nilai harapan bersyarat pada Persamaan 2.26, terlihat bahwa pada Persamaan 4.133, nilai $\mathbb{E}[s_0]$ memuat $\mathbb{E}[\mathbb{E}[s_1|\mathcal{I}_0]] = \mathbb{E}[s_1]$, dan $\mathbb{E}[s_1]$ memuat $\mathbb{E}[\mathbb{E}[s_2|\mathcal{I}_1]] = \mathbb{E}[s_2]$, dan seterusnya, sampai $\mathbb{E}[s_N]$ memuat $\mathbb{E}[\mathbb{E}[s_{N+1}|\mathcal{I}_N]] = \mathbb{E}[s_{N+1}]$. Oleh karena itu, Persamaan 4.133 dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s_0] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[s_{N+1}] + \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_k) + \text{tr}(Q_1 P_k) \right. \right. \\ \left. \left. + \text{PSR}_k \text{tr}(S_1 F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.134)$$

Dalam pembuktian Teorema 4.3.1 dari Persamaan 4.67 diketahui bahwa $\mathbb{E}[s_{N+1}] = \mathbb{E}[\text{tr}(Q_0 P_{N+1})] = \text{tr}(Q_0 P_{N+1})$. Dengan demikian, Persamaan 4.134 dapat ditulis sebagai,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s_0] = \mathbb{E} \left[\text{tr}(Q_0 P_{N+1}) + \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{\lambda} \psi(\text{PSR}_k) + \text{tr}(Q_1 P_k) \right. \right. \\ \left. \left. + \text{PSR}_k \text{tr}(S_1 F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.135)$$

Persamaan 4.132 dan 4.135 disubstitusi ke Persamaan 4.124 menghasilkan,

$$\begin{aligned} & \Psi(\pi, \mu^*) \\ &= \lambda m^T S_0 m + \mathbb{E} \left[\lambda \text{tr}(Q_0 P_{N+1}) + \sum_{k=0}^N (\psi(\text{PSR}_k) \right. \\ & \quad \left. + \lambda \text{tr}(Q_1 P_k) + \lambda \text{PSR}_k \text{tr}(S_1 F K_k (H P_k H^T + \bar{R}_2) K_k^T F^T)) \right] \end{aligned} \quad (4.136)$$

Dengan menggunakan Persamaan 4.115 pada Lemma 4.4.1, Persamaan 4.136 dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned}
\Psi(\pi, \mu^*) &= \lambda m^T S_0 m + \mathbb{E} \left[\lambda \operatorname{tr}(R_0 S_0) + \sum_{k=0}^N (\psi(\operatorname{PSR}_k) \right. \\
&\quad \left. + \lambda \operatorname{tr}(S_{k+1} R_1) + \lambda \operatorname{tr}(P_k L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k)) \right] \quad (4.137)
\end{aligned}$$

Transpose dari L_k pada Persamaan 4.62 disubstitusi ke Persamaan 4.137. Selain, digunakan fakta bahwa $(Q_2 + B^T S_{k+1} B)^{-1}$ adalah matriks simetri dan pemisalan $\Theta_k = F^T S_{k+1} B L_k$ sehingga Persamaan 4.123 pada Lemma 4.4.2 terbukti. $\square$

Didefinisikan fungsi nilai W_k sebagai,

$$W_k(P_k) = \min_{\pi} \mathbb{E} \left[\sum_{t=k}^N (\psi(\operatorname{PSR}_t) + \lambda \operatorname{tr}(\Theta_t) P_t) \middle| \mathcal{I}_k \right] \quad (4.138)$$

dengan $W_{N+1} = 0$. Kemudian, ditentukan *packet success rate* optimal untuk mengoptimasi Persamaan 2.52 halaman 22.

Teorema 4.4.1. *Keputusan packet success rate optimal adalah,*

$$\begin{aligned}
\pi_k^* &= \operatorname{argmin}_{\operatorname{PSR}_k \in \mathfrak{S}} \left\{ \psi(\operatorname{PSR}_k) + (1 - \operatorname{PSR}_k) W_{k+1} (F P_k F^T + R_1) \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{PSR}_k W_{k+1} (F P_k F^T + R_1 - F K_k H P_k F^T) \right\} \quad (4.139)
\end{aligned}$$

Bukti. Jelas bahwa pada Persamaan 4.123 hanya suku ketiga dari $\Psi(\pi, \mu^*)$ yang bergantung pada PSR_k dan hanya suku terakhir yang bergantung pada P_k . Selain itu, P_k berubah tergantung pada Persamaan Riccati pada 4.7. Oleh karena itu, keputusan optimal *packet success rate* diperoleh dengan menyelesaikan masalah optimasi berikut,

$$\begin{aligned}
&\text{meminimumkan } \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^N (\psi(\operatorname{PSR}_k) + \lambda \operatorname{tr}(\Theta_k P_k)) \right], \\
&\text{dengan } P_{k+1} = F P_k F^T + R_1 - \gamma_k F K_k H P_k F^T \quad (4.140)
\end{aligned}$$

dengan nilai awal $P_0 = R_0$. Didefinisikan,

$$\rho(P_k, \text{PSR}_k) = \psi(\text{PSR}_k) + \lambda \text{tr}(\Theta_k P_k) \quad (4.141)$$

dan

$$\varphi(P_k, \text{PSR}_k) = P_{k+1} = F P_k F^T + R_1 - \gamma_k F K_k H P_k F^T \quad (4.142)$$

Dengan menggunakan Persamaan 4.142 dan sifat kelinearan nilai harapan pada Persamaan 2.21 halaman 16, Persamaan 4.138 dapat ditulis sebagai,

$$\begin{aligned} W_k(P_k) &= \min_{\pi} \mathbb{E} [\psi(\text{PSR}_k) + \lambda \text{tr}(\Theta_k P_k) \\ &\quad + \sum_{t=k+1}^N (\psi(\text{PSR}_t) + \lambda \text{tr}(\Theta_t) P_t) \Big| \mathcal{I}_k] \\ &= \min_{\pi} \{ \mathbb{E} [\rho(P_k, \text{PSR}_k) | \mathcal{I}_k] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{t=k+1}^N (\psi(\text{PSR}_t) + \lambda \text{tr}(\Theta_t) P_t) \Big| \mathcal{I}_k \right] \} \end{aligned} \quad (4.143)$$

Berdasarkan penelitian Soleymani dkk. (2018), $\rho(P_k, \text{PSR}_k)$ pada Persamaan 4.141 adalah terukur- $\mathcal{I}_k$ untuk setiap PSR_k . Selain itu, jelas bahwa $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$ sehingga dengan menggunakan sifat nilai harapan pada Persamaan 2.27 dan 2.28, dan fakta bahwa $P_{k+1} = \varphi(P_k, \text{PSR}_k)$, Persamaan 4.143 dapat dinyatakan sebagai,

$$W_k(P_k) = \min_{\text{PSR}_k \in \mathcal{S}} \{ \rho(P_k, \text{PSR}_k) + \mathbb{E} [W_{k+1}(\varphi(P_k, \text{PSR}_k)) | \mathcal{I}_k] \} \quad (4.144)$$

Fungsi transisi $\varphi(P_k, \text{PSR}_k)$ hanya mempunyai dua nilai yang berbeda (saat nilai $\gamma_k = 0$ atau $\gamma_k = 1$), yaitu,

$$\begin{aligned} P_{k+1}^0 &= F P_k F^T + R_1 \\ P_{k+1}^1 &= F P_k F^T + R_1 - F K_k H P_k F^T \end{aligned}$$

Jelas bahwa peluang $P_{k+1} = P_{k+1}^1$ adalah PSR_k dan peluang $P_{k+1} = P_{k+1}^0$ adalah $1 - \text{PSR}_k$. Oleh karena itu, nilai harapan dari $W_{k+1}(\varphi(P_k, \text{PSR}_k))$ adalah,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{k+1}(\varphi(P_k, \text{PSR}_k)) | \mathcal{I}_k] \\ = (1 - \text{PSR}_k)W_{k+1}(P_{k+1}^0) + \text{PSR}_k W_{k+1}(P_{k+1}^1) \quad (4.145) \end{aligned}$$

Dengan demikian, PSR_k optimal adalah argumen (anggota domain W_k) yang menyebabkan fungsi W_k minimum, yaitu,

$$\begin{aligned} \text{PSR}_k^* &= \underset{\text{PSR}_k \in \mathfrak{S}}{\text{argmin}} \{ \rho(P_k, \text{PSR}_k) + (1 - \text{PSR}_k)W_{k+1}(P_{k+1}^0) \\ &\quad + \text{PSR}_k W_{k+1}(P_{k+1}^1) \} \\ &= \underset{\text{PSR}_k \in \mathfrak{S}}{\text{argmin}} \{ \rho(P_k, \text{PSR}_k) \\ &\quad + (1 - \text{PSR}_k)W_{k+1}(FP_k F^T + R_1) \\ &\quad + \text{PSR}_k W_{k+1}(FP_k F^T + R_1 - FK_k H P_k F^T) \} \quad (4.146) \end{aligned}$$

Terlihat pada Persamaan 4.146, di dalam $\rho(P_k, \text{PSR}_k)$ suku $\lambda \text{tr}(\Theta_k P_k)$ tidak bergantung pada PSR_k . Jadi, terbukti keputusan *packet success rate* optimal π^* dipilih sama dengan PSR_k^* tanpa melibatkan $\lambda \text{tr}(\Theta_k P_k)$ sebagaimana dinyatakan pada Persamaan 4.139.

□

4.5 Daya Transmisi Optimal

Berdasarkan Teorema 4.4.1, daya transmisi pada Persamaan 2.11 yang optimal adalah,

$$p_k^{*TX} = \psi(\text{PSR}_k^*) \quad (4.147)$$

Berlaku prinsip pemisahan pada desain sistem secara keseluruhan sebagaimana dinyatakan dalam Teorema 4.5.1.

Teorema 4.5.1. *Berlaku prinsip pemisahan antara desain estimator optimal, pengontrol optimal, dan mekanisme optimal kontrol daya transmisi.*

Bukti. Estimasi *state* optimal, keputusan kontrol optimal, dan keputusan *packet success rate* optimal didesain secara terpisah pada Teorema 4.2.1, Teorema 4.3.1, dan Teorema 4.4.1. $\square$

Dengan berlakunya prinsip pemisahan pada Teorema 4.5.1, desain NCS pada Gambar 1.2 halaman 2 dipenuhi. Artinya, saat *step k* estimator dapat menentukan estimasi *full state* optimal ($\hat{x}_k$) tanpa bergantung pada input *step k* (u_k). Setelah estimasi optimal *step k* ditentukan, hasilnya digunakan untuk menentukan keputusan kontrol optimal *step k* (u_k). Mekanisme daya transmisi dengan menentukan PSR optimal pada PS saat *step k* juga tidak bergantung pada hasil estimasi dan kontrol *step k*. Artinya, pada satu *step* yang sama masing-masing dari estimasi, keputusan kontrol, dan keputusan PSR adalah optimal dan tidak saling bergantung. Dapat disimpulkan daya transmisi pada Persamaan 4.147 adalah optimal pada keseluruhan NCS.

4.6 Algoritma Aproksimasi

Dimisalkan $e_k = x_k - \hat{x}_k$ adalah eror estimasi pada pengontrol, dan $\tilde{z}$ pada Persamaan 4.19 adalah inovasi estimator pada pengontrol. Dimisalkan $\varepsilon_k = \tilde{x} - \hat{x}_k$ merupakan eror estimasi pada PS dan pengontrol. Dinotasikan γ_{k+1}^0 yang berarti “nilai pendekatan pada waktu $k + 1$ jika $\gamma_k = 0$ ”, dan γ_{k+1}^1 untuk $\gamma_k = 1$. Untuk mempermudah simulasi, berdasarkan disertasi Soleymani (2018) yang telah disesuaikan dengan kanal komunikasi pada subab 2.5 halaman 11, dipaparkan pendekatan nilai PSR_k^* di Persamaan 4.146 pada Lemma 4.6.1, Teorema 4.6.1, dan Teorema 4.6.2.

Lemma 4.6.1. *Cost function $\Psi(\pi, \mu^*)$ dengan keputusan kontrol optimal μ^* dan keputusan packet succes rate π yang independen terhadap state dan estimasi state adalah,*

$$\begin{aligned} \Psi(\pi, \mu^*) = & \lambda m^T S_0 m + \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^N \psi(\text{PSR}_k) + \lambda w_k^T S_{k+1} w_k \right. \\ & \left. + \lambda (u_k + L_k x_k)^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) (u_k + L_k x_k) \right] \end{aligned} \quad (4.148)$$

Bukti. Dengan proses dinamik pada Persamaan 2.1 halaman 9 dan persamaan Riccati pada Persamaan 4.63, dapat ditulis,

$$x_{k+1}^T S_{k+1} x_{k+1} = (F x_k + B x_k + w_k)^T S_{k+1} (F x_k + B x_k + w_k) \quad (4.149)$$

dan

$$x_k^T S_k x_k = x_k^T (F^T S_{k+1} F + Q_1 - L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k) x_k \quad (4.150)$$

Oleh karena itu, didapat,

$$\begin{aligned} & x_{N+1}^T S_{N+1} x_{N+1} - x_0^T S_0 x_0 \\ &= \sum_{k=0}^N [x_{k+1}^T S_{k+1} x_{k+1} - x_k^T S_k x_k] \\ &= \sum_{k=0}^N [w_k^T S_{k+1} w_k + 2(F x_k + B u_k)^T S_{k+1} w_k \\ &\quad + x_k^T L_k^T (B_k^T S_{k+1} B_k + Q_2) L_k x_k \\ &\quad - x_k^T Q_1 x_k - u_k^T Q_2 u_k + 2x_k^T F_k^T S_{k+1} B_k u_k \\ &\quad + u_k^T (B_k^T S_{k+1} B_k + Q_2) u_k] \end{aligned} \quad (4.151)$$

dengan persamaan pertama merupakan identitas, dan persamaan kedua digunakan Persamaan 4.149 and 4.150. Kemudian, ditambahkan dan dikurangkan suku $\sum_{k=0}^N u_k^T Q_2 u_k$ di kedua ruas. Dengan menyusun suku-suku pada persamaan tersebut, didapat

$$\begin{aligned} & \lambda x_{N+1}^T S_{N+1} x_{N+1} + \sum_{k=0}^N \lambda x_k^T Q_1 x_k + \lambda u_k^T Q_2 u_k = \\ & \lambda x_0^T S_0 x_0 + \sum_{k=0}^N \left[\lambda w_k^T S_{k+1} w_k + 2\lambda (F x_k + B u_k)^T S_{k+1} w_k \right. \\ & \quad \left. + \lambda (u_k + L_k x_k)^T (B_k^T S_{k+1} B_k + Q_2) (u_k + L_k x_k) \right] \end{aligned}$$

Dengan menambahkan suku $\sum_{k=0}^N \psi(\text{PSR}_k)$ di kedua ruas dan dicari nilai harapannya, diperoleh,

$$\begin{aligned} \Psi(\pi, \mu^*) &= \mathbb{E} \left[\lambda x_0^T S_0 x_0 + \sum_{k=0}^N \left\{ \psi(\text{PSR}_k) + \lambda w_k^T S_{k+1} w_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\lambda (F x_k + B u_k)^T S_{k+1} w_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \lambda (u_k + L_k x_k)^T (B_k^T S_{k+1} B_k + Q_2) (u_k + L_k x_k) \right\} \right] \\ &= \lambda m^T S_0 m + \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^N \psi(\text{PSR}_k) + \lambda w_k^T S_{k+1} w_k \right. \\ & \quad \left. + \lambda (u_k + L_k x_k)^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) (u_k + L_k x_k) \right] \end{aligned}$$

Pada persamaan kedua digunakan fakta bahwa w_k independen terhadap x_k . □

Teorema 4.6.1. *Keputusan packet success rate optimal adalah,*

$$\begin{aligned} \text{PSR}_k^* = \underset{\text{PSR}_k \in \mathfrak{S}}{\text{argmin}} \{ & \psi(\text{PSR}_k) + \text{PSR}_k \tilde{z}^T K_k^T F^T \\ & L_{k+1}^T (B^T S_{k+2} B + Q_2) L_{k+1} F \\ & (K_k \tilde{z} - 2\varepsilon_k) + \hat{\varrho}_k \}, \end{aligned} \quad (4.152)$$

dengan $\hat{\varrho}_k = \mathbb{E} [V_{k+1}^s | \mathcal{I}_k^s]$, dengan

$$V_k^s = \min_{\text{PSR}_k} \mathbb{E} \left[\sum_{t=k}^N \psi(\text{PSR}_t) + \lambda e_{t+1}^T \Gamma_{t+1} e_{t+1} \middle| \mathcal{I}_k^s \right],$$

dengan $\Gamma_k = L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k$ dengan pengecualian $\Gamma_{N+1} = 0$.

Bukti. Dengan menggunakan keputusan kontrol optimal μ^* pada cost function $\Psi(\pi, \mu)$ pada Lemma 4.6.1, didapat,

$$\begin{aligned} \Psi(\pi, \mu^*) = & \lambda m^T S_0 m + \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^N \psi(\text{PSR}_k) + \lambda w_k^T S_{k+1} w_k \right. \\ & \left. + \lambda e_k^T L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k e_k \right] \end{aligned} \quad (4.153)$$

dengan menggunakan definisi eror estimasi $e_k = x_k - \hat{x}_k$. Selanjutnya, dengan fakta bahwa x_0 dan w_k adalah independen terhadap keputusan daya yang berhubungan dengan $\Psi(\pi, \mu^*)$, didefinisikan fungsi nilai V_k^s sebagai,

$$V_k^s = \min_{\text{PSR}_k} \mathbb{E} \left[\sum_{t=k}^N \psi(\text{PSR}_t) + \lambda e_{t+1}^T \Gamma_{t+1} e_{t+1} \middle| \mathcal{I}_k^s \right],$$

dengan $\Gamma_k = L_k^T (B^T S_{k+1} B + Q_2) L_k$ dengan pengecualian $\Gamma_{N+1} = 0$. Dengan sifat penambahan pada fungsi nilai V_k^s , diperoleh,

$$\begin{aligned}
V_k^s &= \min_{\text{PSR}_k} \mathbb{E} \left[\psi(\text{PSR}_k) + \lambda e_{k+1}^T \Gamma_{k+1} e_{k+1} \right. \\
&\quad \left. + \min_{\text{PSR}_k} \mathbb{E} \left[\sum_{t=k+1}^N \psi(\text{PSR}_t) + \lambda e_{t+1}^T \Gamma_{t+1} e_{t+1} \middle| \mathcal{I}_{k+1}^s \right] \middle| \mathcal{I}_k^s \right] \\
&= \min_{\text{PSR}_k} \mathbb{E} \left[\psi(\text{PSR}_k) + \lambda e_{k+1}^T \Gamma_{k+1} e_{k+1} + V_{k+1}^s \middle| \mathcal{I}_k^s \right]
\end{aligned} \tag{4.154}$$

dengan kondisi awal $V_{N+1}^s = 0$. Dengan induksi matematika mundur dibuktikan fungsi nilai V_k^s independen terhadap keputusan kontrol. Jelas bahwa yang akan dibuktikan benar untuk $N + 1$. Diasumsikan benar untuk waktu $k + 1$, dan akan ditunjukkan benar untuk waktu k . Estimasi eror pada pengontrol dapat ditulis sebagai,

$$e_{k+1} = F e_k + w_k - \gamma_k K_k \tilde{z}_k \tag{4.155}$$

Selanjutnya, ditentukan,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[e_{k+1}^T \Gamma_{k+1} e_{k+1} \middle| \mathcal{I}_k^s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e_k^T F^T \Gamma_{k+1} F e_k + w_k^T \Gamma_{k+1} w_k + \gamma_k^2 \tilde{z}_k^T K_k^T F^T \Gamma_{k+1} F K_k \tilde{z}_k \right. \\
&\quad \left. + 2e_k^T F^T \Gamma_{k+1} w_k - 2\gamma_k \tilde{z}_k^T K_k^T F^T \Gamma_{k+1} w_k - 2\gamma_k \tilde{z}_k^T K_k^T F^T \Gamma_{k+1} F e_k \middle| \mathcal{I}_k^s \right] \\
&= \varepsilon_k^T F^T \Gamma_{k+1} F \varepsilon_k + \text{tr}(F^T \Gamma_{k+1} F P_k^s) + \text{tr}(\Gamma_{k+1} W_k) \\
&\quad + \text{PSR}_k \tilde{z}_k^T K_k^T F^T \Gamma_{k+1} F K_k \tilde{z}_k - 2 \text{PSR}_k \tilde{z}_k^T K_k^T F^T \Gamma_{k+1} F \varepsilon_k
\end{aligned} \tag{4.156}$$

dengan pada persamaan kedua digunakan definisi ε_k dan P_k^s , dan fakta bahwa $\tilde{z}_k$ adalah terukur- $\mathcal{I}_k^s$ dan w_k independen terhadap e_k . Oleh karena itu, didapat,

$$\begin{aligned}
V_k^s &= \min_{\text{PSR}_k} \left[\psi(\text{PSR}_k) + \lambda \mathbb{E} \left[e_{k+1}^T \Gamma_{k+1} e_{k+1} \middle| \mathcal{I}_k^s \right] + \mathbb{E} \left[V_{k+1}^s \middle| \mathcal{I}_k^s \right] \right] \\
&= \min_{\text{PSR}_k} \left[\psi(\text{PSR}_k) + \lambda \varepsilon_k^T F^T \Gamma_{k+1} F \varepsilon_k + \text{tr}(F^T \Gamma_{k+1} F P_k^s) \right. \\
&\quad + \text{tr}(\Gamma_{k+1} W_k) + \text{PSR}_k \tilde{z}_k^T K_k^T F^T \Gamma_{k+1} F K_k \tilde{z}_k \\
&\quad \left. - 2 \text{PSR}_k \tilde{z}_k^T K_k^T F^T \Gamma_{k+1} F \varepsilon_k + \mathbb{E} \left[V_{k+1}^s \middle| \mathcal{I}_k^s \right] \right] \quad (4.157)
\end{aligned}$$

Pembuat minimum Persamaan 4.157 adalah,

$$\begin{aligned}
\text{PSR}_k^* &= \underset{\text{PSR}_k \in \mathfrak{S}}{\text{argmin}} \left\{ \psi(\text{PSR}_k) + \text{PSR}_k \tilde{z}_k^T K_k^T F^T \right. \\
&\quad \left. \Gamma_{k+1} F (K_k \tilde{z}_k - 2\varepsilon_k) + \hat{\varrho}_k \right\},
\end{aligned}$$

dengan $\hat{\varrho}_k = \mathbb{E} [V_{k+1}^s | \mathcal{I}_k^s]$. Dari asumsi induksi matematika $\hat{\varrho}_k$ independen terhadap keputusan kontrol. Oleh karena itu, dapat disimpulkan V_k^s independen terhadap keputusan kontrol. Jadi, pembuktian induksi selesai. $\square$

Menurut Soleymani, T. (2018), setelah dilakukan penyesuaian jenis kanal komunikasi yang digunakan, dapat ditulis nilai $\hat{\varrho}_k$ pada Persamaan 4.152 ke bentuk lain [38]. Oleh karena itu, didapat Teorema 4.6.2.

Teorema 4.6.2. *Keputusan daya transmisi optimal adalah [38],*

$$p_k^{*TX} = \psi(\text{PSR}_k^*) \quad (4.158)$$

dengan

$$\begin{aligned} \text{PSR}_k^* = \underset{\text{PSR}_k \in \mathfrak{S}}{\text{argmin}} \left\{ \psi(\text{PSR}_k) + \lambda \text{PSR}_k \left(\tilde{z}_k^T K_k^T F^T \Gamma_k F (K_k \tilde{z}_k - 2\varepsilon) \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{t=k+2}^N (\bar{e}_t^{0T} \Gamma_t \bar{e}_t^0 + \text{tr}(\Gamma_k \bar{P}_t^0) - \bar{e}_t^{1T} - \text{tr}(\Gamma_k \bar{P}_t^1)) \right) \right\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \bar{e}_{t+1}^0 &= (F - FK_t^0 H) \bar{e}_t^0 \\ \bar{P}_{t+1}^0 &= (F - FK_t^0 H) \bar{P}_t^0 (F - FK_t^0 H)^T + R_1 + FK_t^0 \bar{R}_2 K_t^{0T} F^T \\ P_{t+1}^0 &= FP_t^0 F^T + R_1 - FK_t^0 H P_t^0 F^T \\ \bar{e}_{t+1}^1 &= (F - FK_t^1 H) \bar{e}_t^1 \\ \bar{P}_{t+1}^1 &= (F - FK_t^1 H) \bar{P}_t^1 (F - FK_t^1 H)^T + R_1 + FK_t^1 \bar{R}_2 K_t^{1T} F^T \\ P_{t+1} &= (FP_t^1 F^T) + R_1 - FK_t^1 H P_t^1 F^T \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} K_t^0 &= P_t^1 H^T (H P_t^0 H^T + \bar{R}_2)^{-1} \\ K_t^1 &= P_t^1 H^T (H P_t^1 H^T + \bar{R}_2)^{-1} \end{aligned}$$

untuk $t \geq k+1$ dengan nilai awal $\bar{e}_{t+1}^0 = F\varepsilon_k$, $\bar{P}_{k+1}^0 = FP_k^s F^T + R_1$, $P_{k+1}^0 = FP_k F^T + R_1$, $\bar{e}_{k+1}^1 = F\varepsilon_k - FK_k \tilde{z}_k$, $\bar{P}_{k+1}^1 = FP_k^s F^T + R_1$, dan $P_{k+1}^1 = FP_k F^T + R_1 - FK_k H P_k F^T$.

4.7 Simulasi Sistem

Tabel 4.2. Nilai Parameter Kanal Komunikasi

Nama Parameter	Simbol	Nilai	Satuan
<i>Data rate</i>	R_c	250	<i>Kbps</i>
<i>Carrier frequency</i>	f	$2,45 \times 10^9$	<i>GHz</i>
Jarak awal <i>receiver</i>	$d_{k=0}$	10	<i>m</i>
Jarak referensi	d_0	1	<i>m</i>
<i>Path loss exponent</i>	η	3,6	<i>Kbps</i>
<i>Power spectral density</i>	N_0	6×10^{-18}	<i>watt/Hz</i>
Panjang <i>payload</i>	ℓ	100	<i>bits</i>
Kecepatan cahaya	c	299792458	<i>m/s</i>

Didefinisikan nilai-nilai parameter kanal komunikasi pada subab 2.5 halaman 11 di Tabel 4.2. Sedangkan, untuk parameter optimasi didefinisikan nilai-nilai sebagai berikut. Untuk Persamaan 2.52 halaman 22, didefinisikan nilai bobot x_{N+1} sebagai, $Q_0 = 100I_4$, dan bobot untuk x_k , $Q_1 = 100I_4$. Sedangkan, bobot untuk u_k , $Q_2 = 0,5$, dan nilai pengali Lagrange $\lambda = 0,0004$.

Untuk melakukan pemrograman dinamis, ruang PSR didiskritkan pada interval $[0,0001, 0,9999]$ dengan grid berkardinalitas 5000. Pada simulasi diimplementasi sistem dinamik pada Persamaan 4.3, 4.4, dan 4.5 halaman 30. Diimplementasi estimator optimal di pengontrol pada Persamaan 4.6, 4.7, dan 4.8 halaman 32 dengan nilai $m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, dan $R_0 = 2I_4$. Sedangkan, estimator optimal di PS pada Persamaan 4.52, 4.53, dan 4.54. Diimplementasi kontrol optimal pada Persamaan 4.62 dan 4.63 halaman 44. Keputusan daya transmisi optimal dengan PSR optimal yang diimplementasi adalah Persamaan 4.158 halaman 71. Selain itu, diimplementasi formula daya transmisi yang sesuai dengan kanal komunikasi IEEE 802.15.4 pada Persamaan 2.11 halaman 13, dan

arrival process pada Persamaan 2.13 halaman 13 dengan nilai parameter kanal komunikasi pada Tabel 4.2 halaman 72. Digunakan nilai parameter optimasi sebagaimana didefinisikan pada awal subab ini.

Dilakukan tiga bagian simulasi dengan kondisi awal sistem dan parameter yang sama (kecuali kovarian *noise*), sebagaimana dipaparkan pada bagian 4.7.1, 4.7.2, dan 4.7.3 di subbab ini. Pada bagian 4.7.1 dibuat dua skenario simulasi dengan kovarian *noise* berbeda tetapi sistem tetap dapat distabilkan di sekitar kondisi acuan. Pada bagian 4.7.2 dibuat dua skenario simulasi, yaitu, dengan pendulum terjatuh ke arah depan, dan pendulum terjatuh ke arah belakang sehingga sistem tidak dapat distabilkan pada NCS. Pada bagian 4.7.3 ditunjukkan sifat stokastik dari NCS melalui simulasi sistem dengan kovarian *noise* tetap diulang sebanyak lima kali.

4.7.1 Simulasi sistem yang dapat distabilkan

Pada bagian ini ditentukan kovarian *noise* pada NCS sehingga *plant* dapat distabilkan di persekitaran kondisi acuan. Digunakan dua skenario simulasi dengan horizon waktu $N = 1000$. Skenario pertama, kovarian *noise* sistem dinamik $(R_1, \bar{R}_2)$ dengan nilai $R_1 = 0,001I_4$ untuk Persamaan 4.3 halaman 30, dan nilai $\bar{R}_2 = R_2 + \Lambda = 0,003I_2$ untuk Persamaan 4.36 halaman 38. dan dengan kovarian *noise* yang lebih kecil, $(R_1, \bar{R}_2) \times 10^{-1}$. Oleh karena itu, didapat hasil simulasi sistem dinamik pada Gambar 4.1-4.13.

Berdasarkan hubungan antara daya transmisi dan PSR pada Gambar 4.1 dan 4.2, terlihat bahwa semakin tinggi daya transmisi, semakin tinggi pula peluang diterima data baca sensor yang dikirim oleh *plant* ke pengontrol. Dari hasil simulasi diketahui bahwa, saat jarak antara WSN dan pengontrol pada *step* ke-0, $d_{k=0} = 10 \text{ m}$, nilai daya transmisi sebagai fungsi PSR merentang di $[0, 0479 \times 10^{-3}, 0, 8513 \times 10^{-3}]$. Sedangkan, saat jarak antara WSN dan pengontrol pada *step* ke-1000, $d_{k=1000} \approx 11 \text{ m}$, nilai daya transmisi

sebagai fungsi PSR merentang di $[0, 1 \times 10^{-3}, 1, 2 \times 10^{-3}]$. Dapat disimpulkan pertambahan jarak antara WSN dan pengontrol juga mengakibatkan pertambahan daya transmisi yang dibutuhkan untuk mendapatkan kemungkinan sukses pengiriman data yang sama. Nilai kovarian *noise* tidak memengaruhi hubungan antara daya transmisi dan PSR. Sebab, nilai daya transmisi sebagai fungsi PSR pada Gambar 4.1 dan 4.2 adalah sama.

Gambar 4.3-4.6 menunjukkan trayektori empat variabel *state* sistem dinamik dari waktu step ke-0 sampai step ke-1000. Secara keseluruhan, sistem dinamik dengan kovarian *noise* lebih kecil, yaitu, $(R_1, \bar{R}_2) \times 10^{-1}$, lebih stabil di persekitaran kondisi acuan daripada dengan kovarian *noise* $(R_1, \bar{R}_2)$. Sedangkan, sistem dinamik dengan kovarian *noise* besar, $(R_1, \bar{R}_2)$, cenderung lebih cepat menuju ke kondisi acuan, dan lebih cepat menjauhi kondisi acuan. Hal ini berdampak pada keputusan daya transmisi optimal (p^{*TX}) sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.7 dan 4.8.

Pada sistem dengan kovarian *noise* besar, *state* sistem cenderung tidak stabil di persekitaran kondisi acuan sehingga membutuhkan kontrol input optimal. Sebab, dengan mendapat kontrol input optimal diharapkan sistem *plant* menjadi stabil di persekitaran kondisi acuan. Agar pengontrol dapat mengirimkan kontrol input optimal, pengontrol harus sukses menerima data baca sensor terbaru dari *plant*. Sedangkan, agar kemungkinan diterimanya data baca sensor terbaru oleh pengontrol tinggi, dibutuhkan daya transmisi yang tinggi pula. Oleh karena itu, jika diperhatikan trayektori daya transmisi pada *step* ke-0 sampai 150, dan *step* ke-850 sampai 1000 pada Gambar 4.7 dan 4.8, maka untuk kovarian *noise* kecil pada Gambar 4.8, terlihat lebih banyak *step* dengan daya transmisi di sekitar nol daripada kovarian besar pada Gambar 4.8. Selain itu, rata-rata daya transmisi yang dibutuhkan sistem dengan kovarian kecil adalah $7,2603 \times 10^{-4}$ watt, dan sistem dengan kovarian besar adalah $7,4964 \times 10^{-4}$ watt. Dapat disimpulkan semakin besar *noise* sistem dinamik maka semakin besar pula daya transmisi yang dibutuhkan NCS agar *plant* tetap stabil di sekitar kondisi acuan.

Pada *step* ke-0, posisi *plant* terhadap titik acuan tertentu adalah $\mathbb{X}_{k=0} = 0$ dengan jarak WSN pada *plant* ke pengontrol adalah $d_{k=0} = 10 \text{ m}$. Sistem distabilkan dengan posisi acuan adalah $\mathbb{X} = 1$ sehingga $d = 11 \text{ m}$ saat tepat di posisi acuan. Dalam kasus ini, saat *plant* semakin dekat dengan posisi acuan, jarak antara WSN dan pengontrol semakin jauh. Oleh karena itu, secara umum pada Gambar 4.7 dan 4.8 saat *step* bertambah daya transmisi yang dibutuhkan juga bertambah.

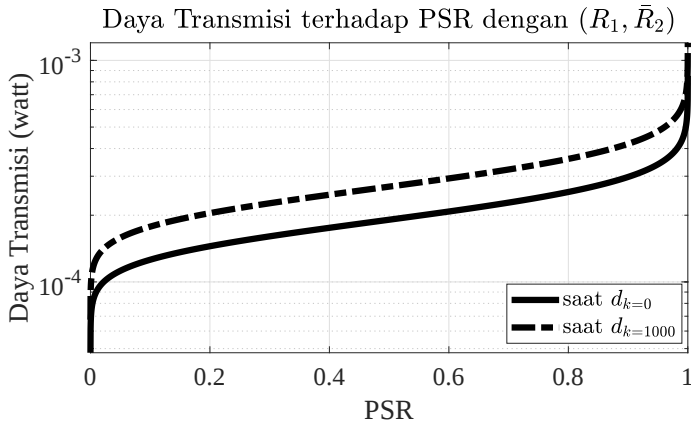
Trayektori PSR optimal dari dua kovarian *noise* yang berbeda ditunjukkan pada Gambar 4.9 dan 4.10. Ruang PSR diskrit merentang di $[0, 0001, 0, 9999]$ sehingga pada waktu k dikatakan *sleep mode* saat $(\text{PSR}_k = 0, 0001 \approx 0)$. Sistem dengan kovarian noise $(R_1, \bar{R}_2)$ pada Gambar 4.9 mengalami *sleep mode* sebanyak 254 kali dengan rata-rata $\pi^* = \text{PSR}^* = 0,7458$. Sedangkan, sistem Sistem dengan kovarian noise $(R_1, \bar{R}_2) \times 10^{-1}$ pada Gambar 4.10 mengalami *sleep mode* sebanyak 278 kali dengan rata-rata $\pi^* = \text{PSR}^* = 0,7218$. Artinya, saat sistem lebih tidak stabil di persekitaran kondisi acuan, keputusan PSR yang dipilih juga lebih tinggi.

Jika trayektori keputusan daya optimal pada Gambar 4.7 dan 4.8 dibandingkan dengan trayektori PSR optimal pada Gambar 4.9 dan 4.10, maka terlihat bahwa semakin tinggi daya transmisi yang digunakan oleh *plant* juga semakin tinggi peluang data sukses diterima oleh pengontrol. Ekuivalen dengan trayektori *arrival process* (γ) pada Gambar 4.11 dan 4.12. Sebab, $\mathbb{E}[\gamma_k] = \text{PSR}_k$. Hasil kuantifikasi keluaran data baca sensor (z_k) diterima oleh pengontrol $(\gamma_k = 1)$ saat PSR_k dipersekitaran 1. Sedangkan, tidak diterima oleh pengontrol $(\gamma_k = 0)$ saat PSR_k dipersekitaran 0. Hubungan ini berlaku sama pada dua kovarian *noise* yang berbeda.

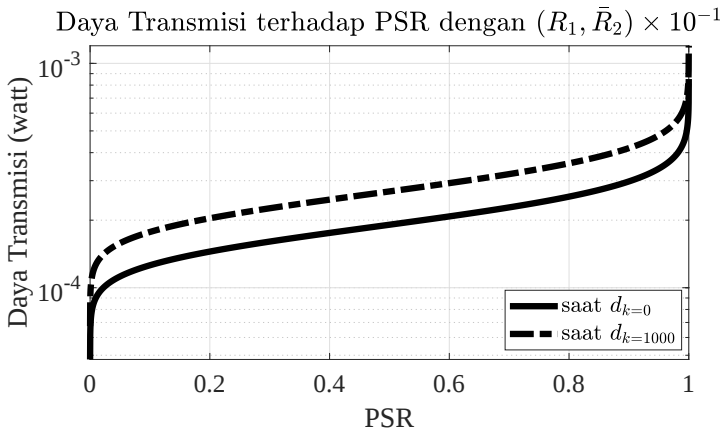
Berdasarkan trayektori *arrival process* sistem dinamik dengan kovarian noise $(R_1, \bar{R}_2)$ pada Gambar 4.11, dari 1000 *step* terdapat 746 *step* dengan data berhasil diterima pengontrol, dan 254 *step* dengan data gagal diterima pengontrol. Untuk sistem dinamik dengan kovarian noise $(R_1, \bar{R}_2) \times 10^{-1}$ pada Gambar

4.12, dari 1000 *step* terdapat 720 *step* dengan data berhasil diterima pengontrol, dan 280 *step* dengan data gagal diterima pengontrol. Jika *plant* lebih tidak stabil di persekitaran kondisi acuan, maka lebih banyak data yang harus sukses diterima pengontrol. Jika pengontrol sukses menerima data baca sensor terbaru, maka kontrol input optimal yang dikirim dapat menyetabilkan *plant*.

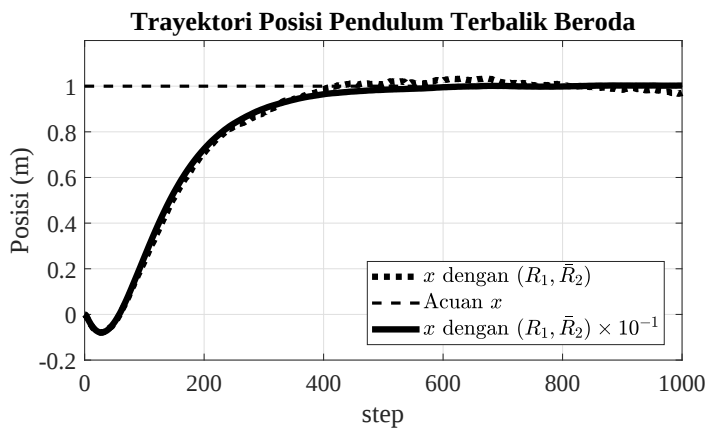
Pada Gambar 4.13 ditunjukkan trayektori kontrol input yang dikirim oleh pengontrol ke *plant* melalui *lossy channel wireless*. Kontrol input $u = \mathcal{F}$ berupa gaya yang menggerakkan pendulum terbalik beroda secara horizontal. Dari gambar terlihat bahwa sistem dengan kovarian *noise* yang besar, $(R_1, \bar{R}_2)$, menyebabkan kontrol input berfluktuasi dengan fase yang lebih besar daripada dengan kovarian *noise* kecil, $(R_1, \bar{R}_2) \times 10^{-1}$, yang lebih stabil di persekitaran nol. Jadi, semakin besar kovarian *noise*, maka semakin besar pula gaya (kontrol input) yang dibutuhkan untuk menstabilkan pendulum terbalik beroda disekitar kondisi acuan. Terlihat bahwa trayektori kontrol input optimal, $\mu^* = u^*$, pada Gambar 4.13 adalah minimum (di persekitaran nol) dengan tetap menjaga sistem stabil di sekitar kondisi acuan (Gambar 4.3-4.6).



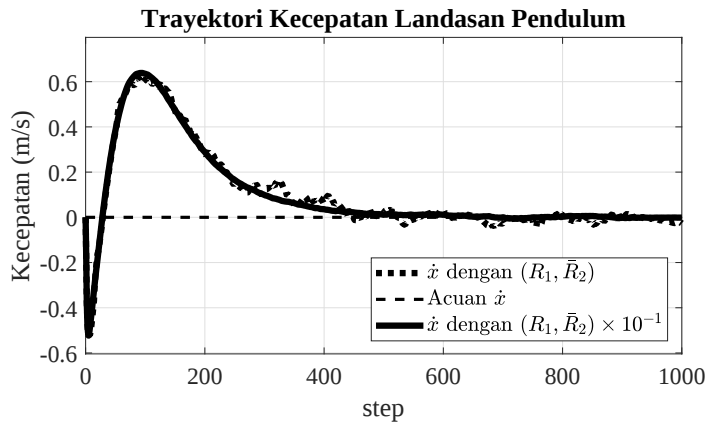
Gambar 4.1. Hubungan Daya Transmisi dan PSR, $(R_1, \bar{R}_2)$



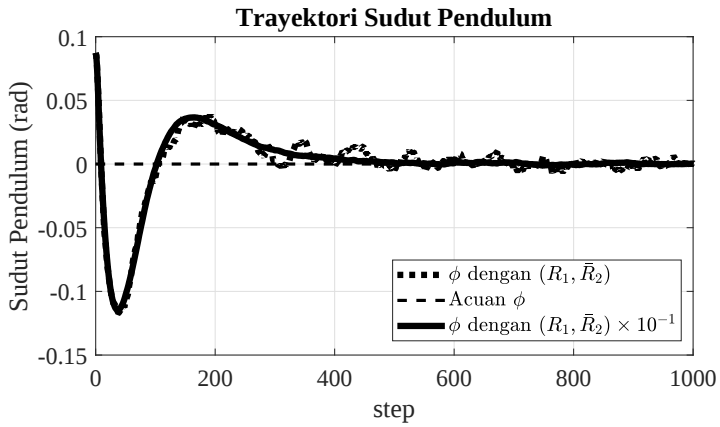
Gambar 4.2. Hubungan Daya Transmisi dan PSR, $(R_1, \bar{R}_2) \times 10^{-1}$



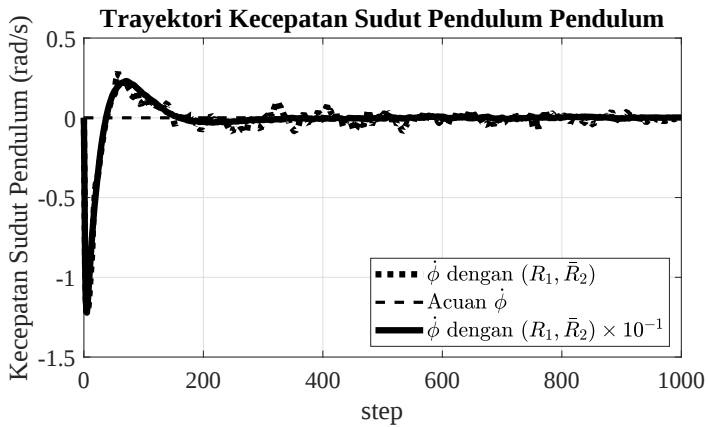
Gambar 4.3. Perbandingan Trayektori Posisi *Plant*



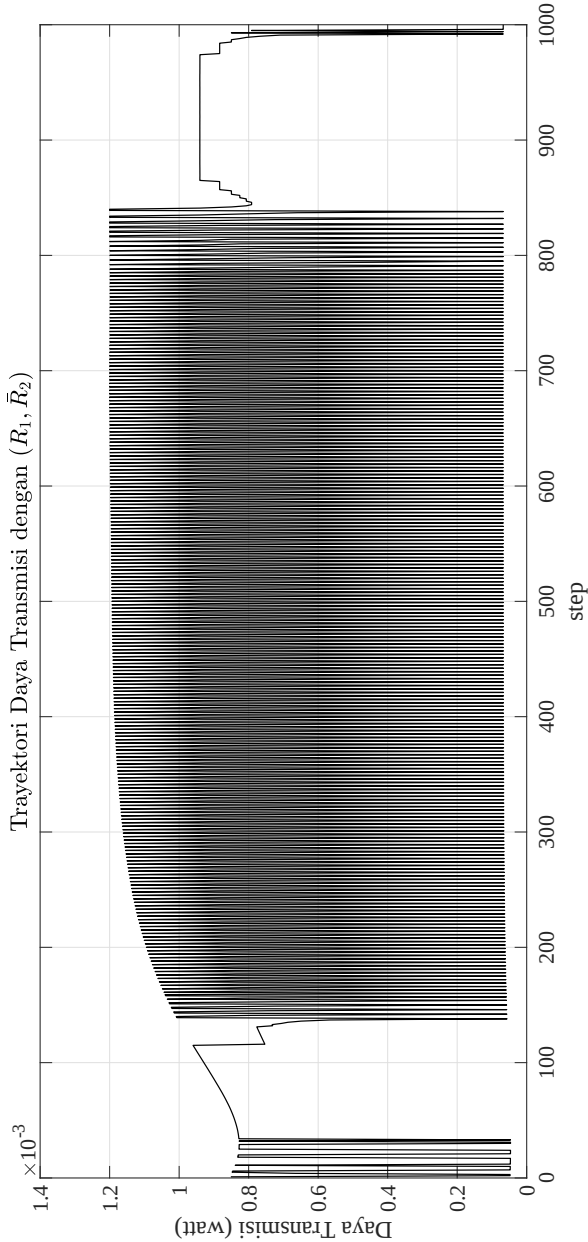
Gambar 4.4. Perbandingan Trayektori Kecepatan *Plant*



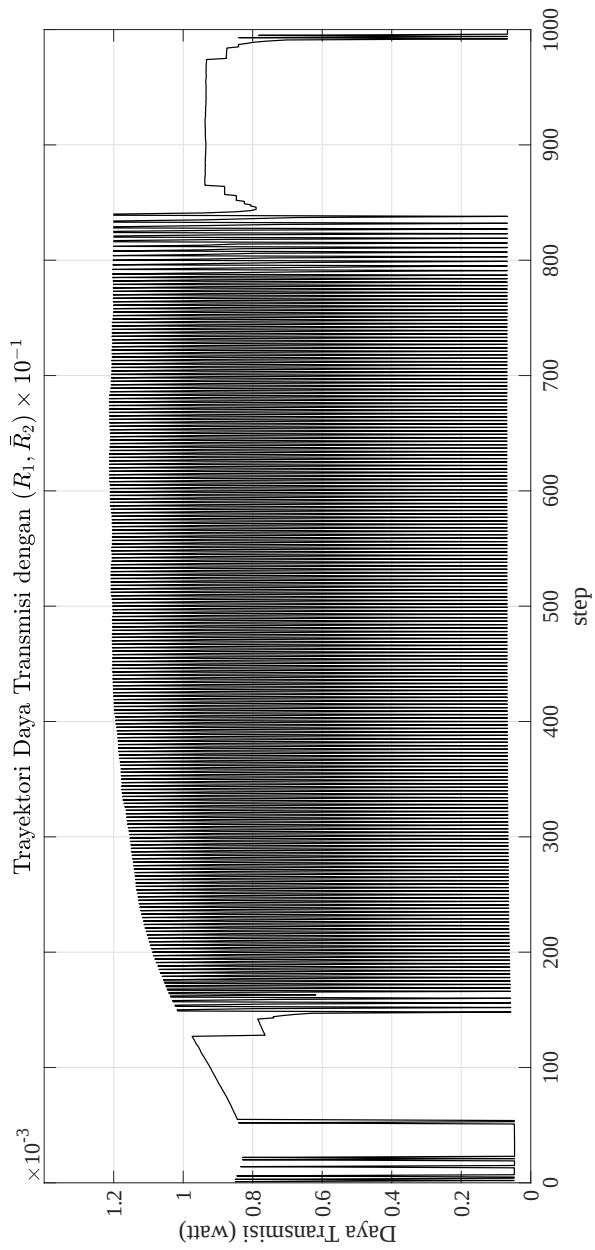
Gambar 4.5. Perbandingan Trayektori Sudut Pendulum



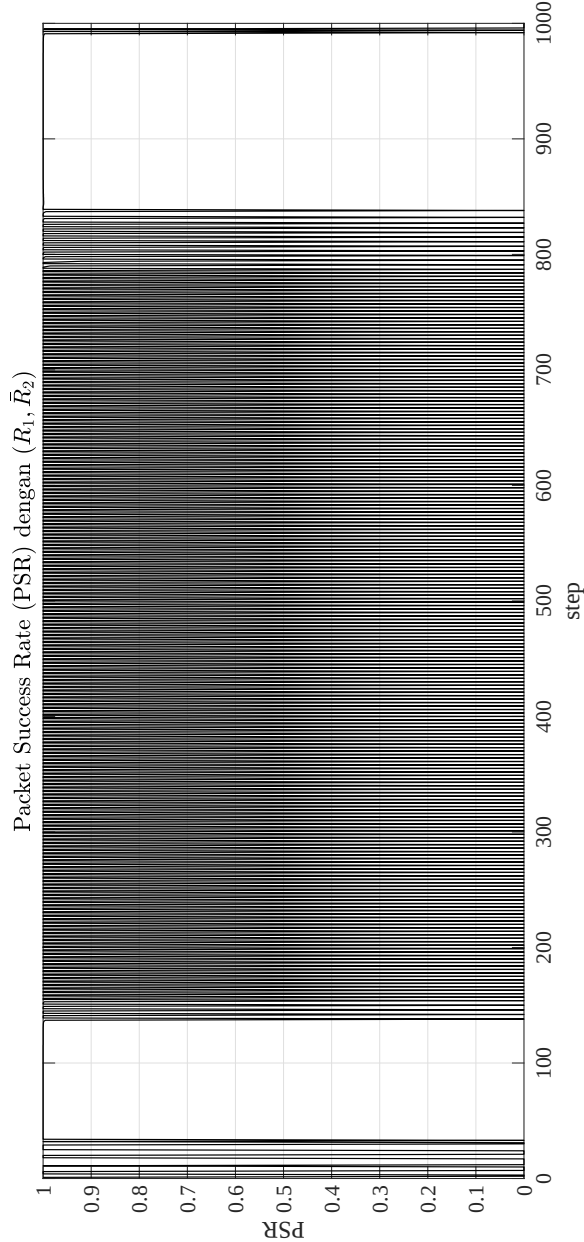
Gambar 4.6. Perbandingan Trayektori Kecepatan Sudut Pendulum



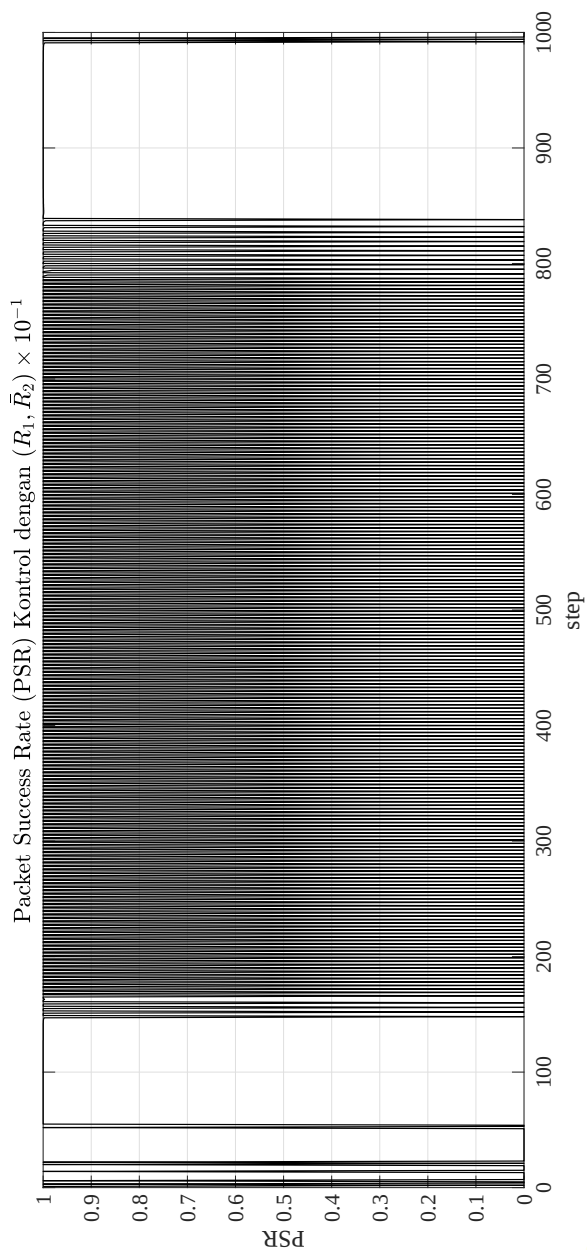
Gambar 4.7. Keputusan Daya Transmisi Optimal untuk Kovarian *Noise* Besar



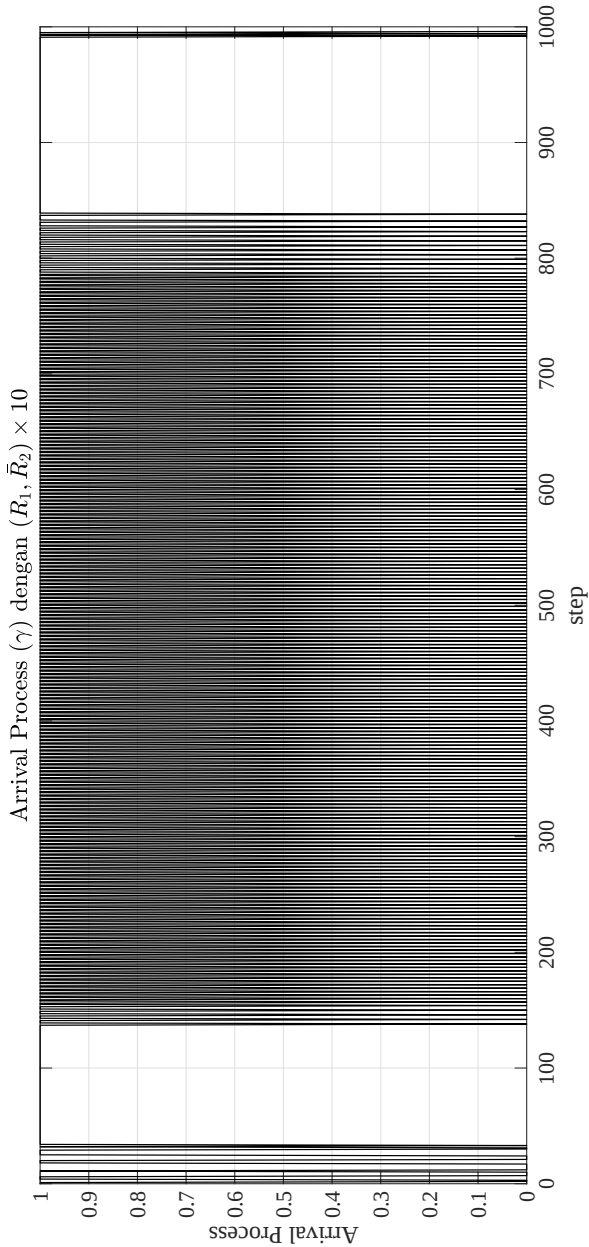
Gambar 4.8. Keputusan Daya Transmisi Optimal untuk Kovarian *Noise* Kecil



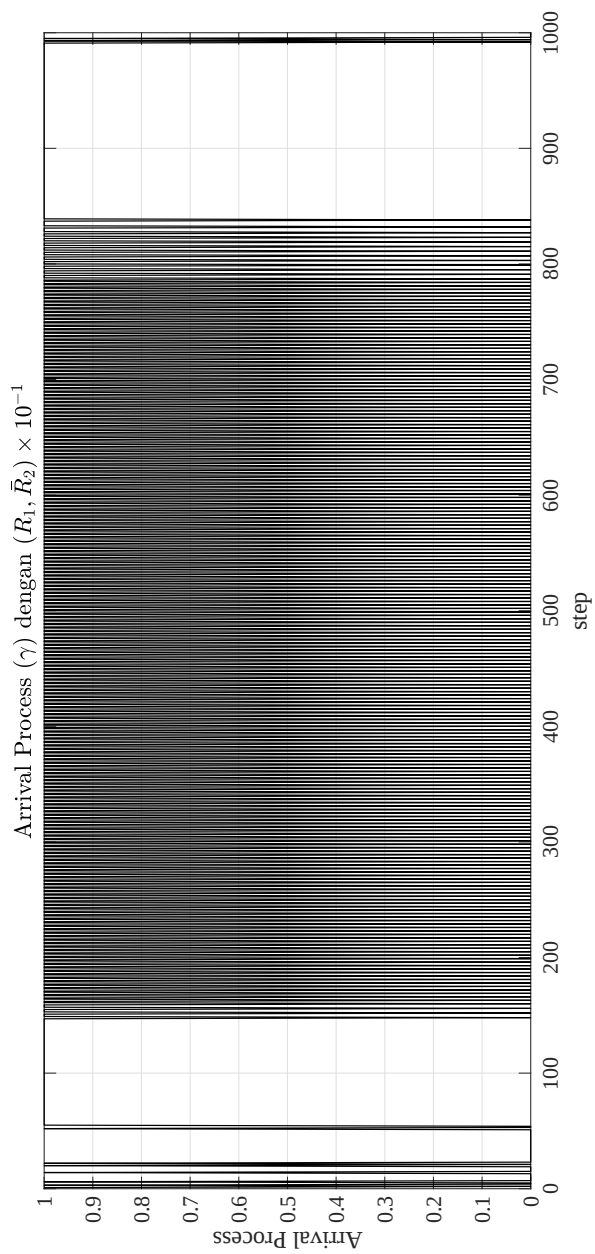
Gambar 4.9. PSR Optimal NCS dengan Kovarian *noise* Besar



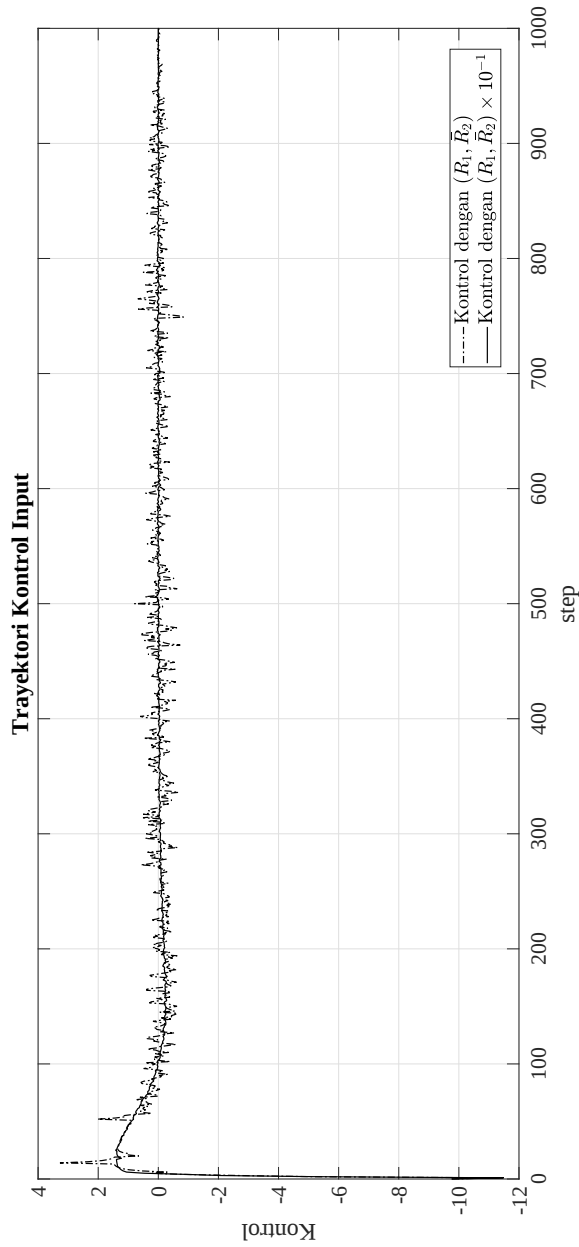
Gambar 4.10. PSR Optimal NCS dengan Kovarian *noise* Kecil



Gambar 4.11. *Arrival Process NCS dengan Kovarian noise Besar*



Gambar 4.12. *Arrival Process NCS dengan Kovarian noise Kecil*



Gambar 4.13. Trayektori Kontrol Input ($u = \mathcal{F}$) yang Dikirim Pengontrol melalui Kanal Nirkabel ke *Plant*

4.7.2 Simulasi sistem yang tidak dapat distabilkan

Sistem pendulum terbalik beroda merupakan sistem yang tidak stabil. Pada bagian ini ditentukan nilai kovarian *noise* pada dua skenario berbeda, dan *threshold* kontrol input 2 sehingga sistem tidak dapat distabilkan. Simulasi dilakukan sepanjang horizon waktu $N = 1000$.

Skenario pertama adalah posisi awal pendulum 5° ke arah depan, $\phi_{k=0} \approx 0,0872665 \text{ rad}$, jatuh ke depan, $\phi = 90^\circ \approx 1,5708 \text{ rad}$. Pendulum tidak dapat bangkit sehingga *plant* tidak dapat distabilkan. Ditentukan nilai kovarian *noise*,

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0001 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}_2 = \begin{bmatrix} 0,0003 & 0 \\ 0 & 0,03 \end{bmatrix}$$

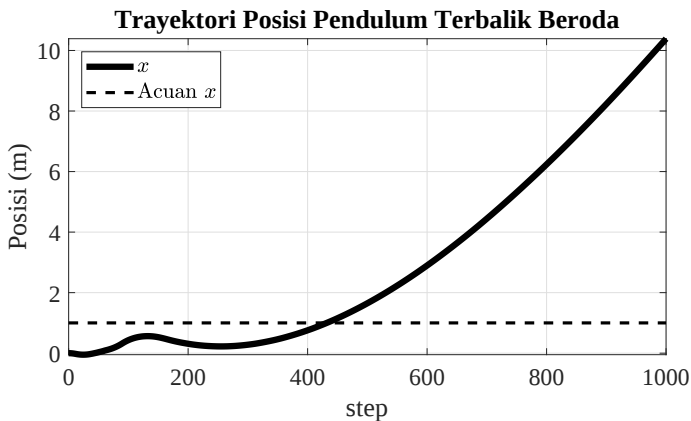
dengan *noise state* untuk variabel ϕ pada matriks R_1 adalah 0,02, dan *noise* pengukuran ϕ pada matriks $\bar{R}_2$ adalah 0,03, nilainya lebih besar daripada *noise* variabel *state* lainnya dan *noise* pada simulasi bagian 4.7.1. Hasil simulasi skenario pertama bagian 4.7.2 ditunjukkan pada Gambar 4.14-4.21.

Dari Gambar 4.17 terlihat pendulum yang semula pada posisi $0,0872665 \text{ rad}$, di sekitar *step* kurang dari 200 sampai *step* ke-1000 berada di persekitaran posisi $1,5708 \text{ rad}$. Terlihat fluktuasi di sekitar posisi $1,5708 \text{ rad}$ ke arah posisi 0 rad yang tidak signifikan.

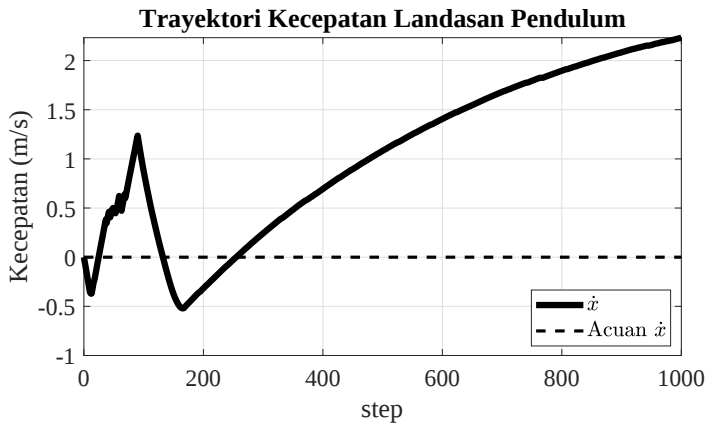
Kondisi *plant* yang tidak berada di sekitar acuan dan semakin menjauh dari pengontrol menyebabkan WSN menggunakan daya transmisi yang tinggi (Gambar 4.18) agar peluang diterimanya data baca sensor terbaru oleh pengontrol juga tinggi (Gambar 4.19). Dari Gambar 4.20 terlihat bahwa data yang dikirim WSN selalu diterima

oleh pengontrol ($\gamma = 1$) agar pengontrol dapat mengirimkan data baca sensor optimum agar *plant* stabil di sekitar acuan.

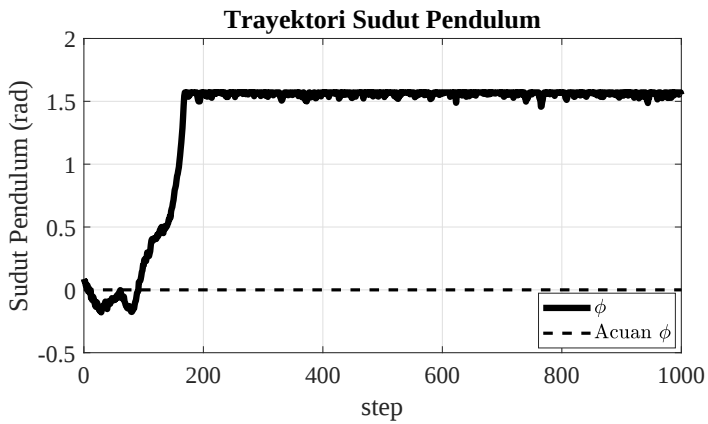
Pada Gambar 4.21 kontrol input yang dieksekusi oleh *plant* adalah maksimum, yaitu, -2 . Namun, hanya mampu menggerakkan *plant* ke arah depan (Gambar 4.15) yang menyebabkan posisi *plant* semakin jauh dari titik acuan tertentu (Gambar 4.14). Kontrol input juga menyebabkan fluktuasi kecepatan sudut pendulum (Gambar 4.17) tetapi tidak cukup kuat untuk membangkitkan pendulum (Gambar 4.16). Artinya, pendulum terjatuh ke depan dan tidak dapat bangkit sehingga tidak dapat distabilkan di sekitar kondisi acuan.



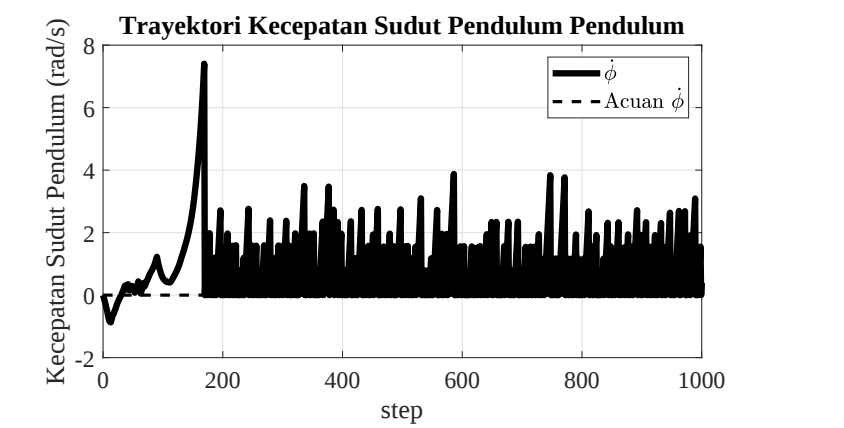
Gambar 4.14. Trayektori Posisi *Plant* dengan Pendulum Jatuh ke Depan



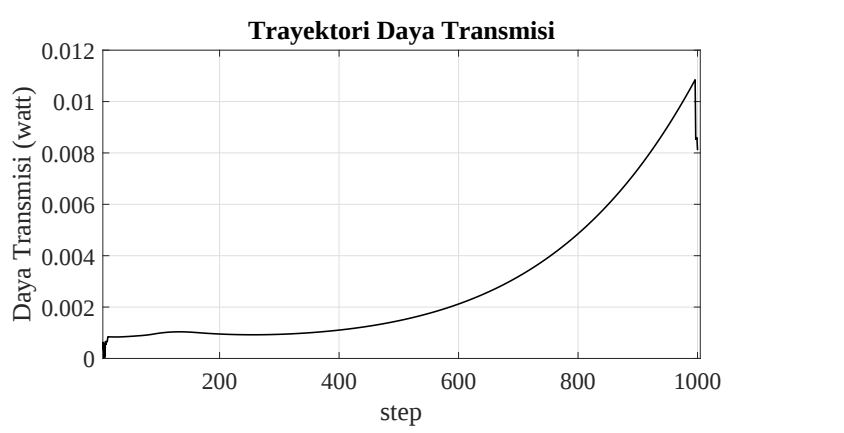
Gambar 4.15. Trayektori Kecepatan *Plant* dengan Pendulum Jatuh ke Depan



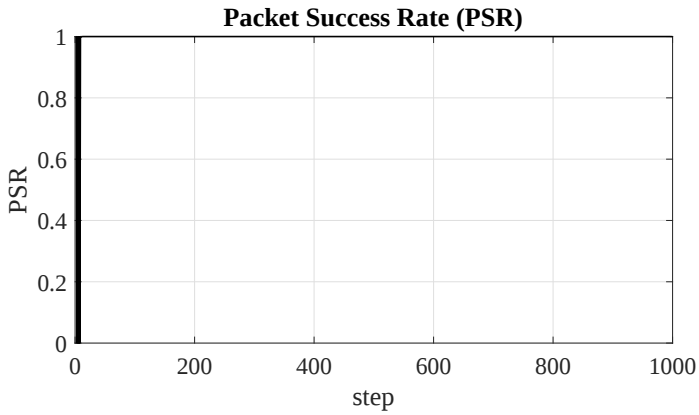
Gambar 4.16. Trayektori Sudut Pendulum Jatuh ke Depan



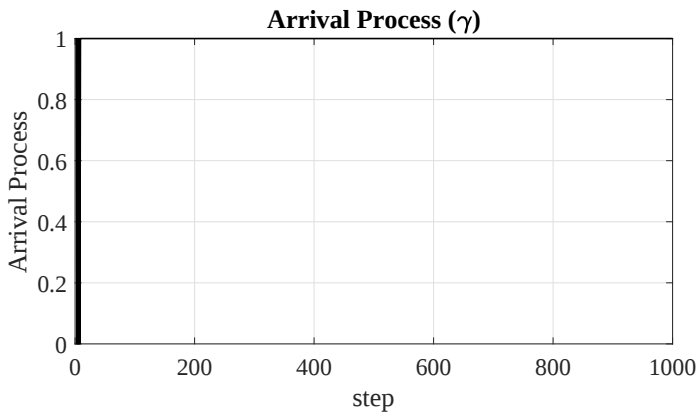
Gambar 4.17. Trayektori Kecepatan Sudut Pendulum Jatuh ke Depan



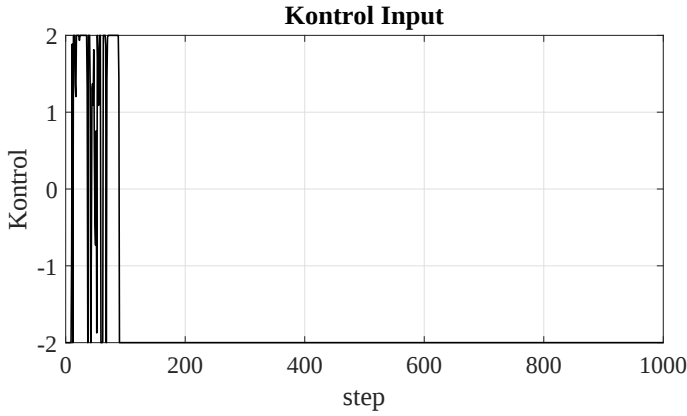
Gambar 4.18. Keputusan Daya Transmisi Optimal NCS dengan Pendulum Jatuh ke Depan



Gambar 4.19. PSR Optimal NCS dengan Pendulum Jatuh ke Depan



Gambar 4.20. *Arrival Process* NCS dengan Pendulum Jatuh ke Depan



Gambar 4.21. Trayektori Kontrol Input NCS dengan Pendulum Jatuh ke Depan

Skenario kedua adalah posisi awal pendulum 5° ke arah depan, $\phi_{k=0} \approx 0,0872665 \text{ rad}$, jatuh ke belakang, $\phi = -90^\circ \approx -1,5708 \text{ rad}$, dan pendulum tidak dapat bangkit lagi sehingga *plant* tidak dapat distabilkan. Ditentukan nilai kovarian *noise*,

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0001 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}_2 = \begin{bmatrix} 0,0003 & 0 \\ 0 & 0,0003 \end{bmatrix}.$$

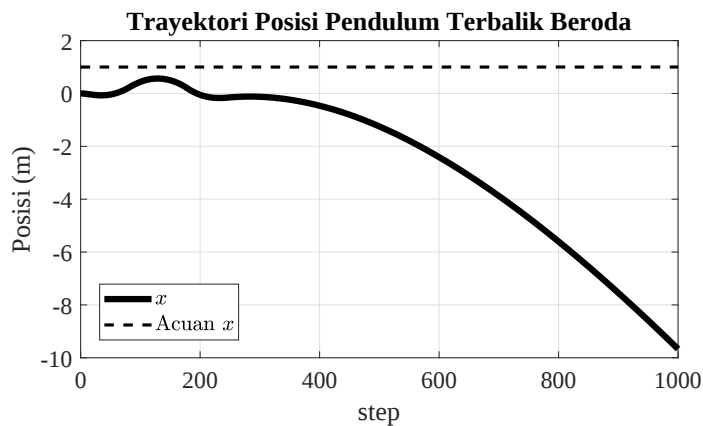
Perbedaan dengan *noise* pada skenario pertama adalah *noise* pengukuran untuk ϕ lebih kecil 10^{-2} kali, yaitu, 0,0003. Hasil simulasi skenario kedua bagian 4.7.2 ditunjukkan pada Gambar 4.22-4.29.

Dari Gambar 4.25 terlihat pendulum yang semula pada posisi $0,0872665 \text{ rad}$, di sekitar *step* lebih dari 200 sampai *step* ke-1000 berada di persekitaran posisi $-1,5708 \text{ rad}$. Terlihat fluktuasi di

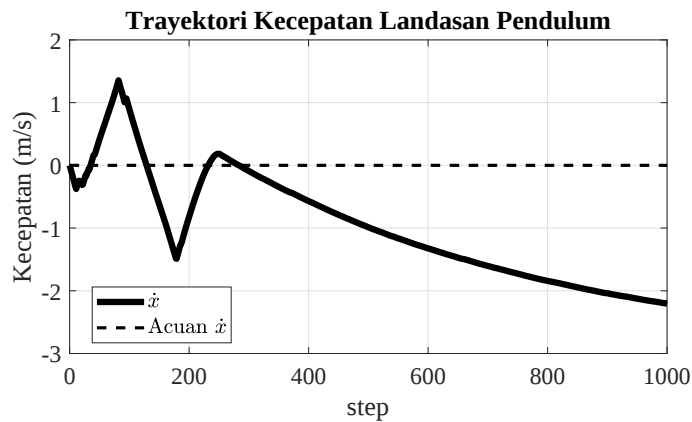
sekitar posisi $-1,5708 \text{ rad}$ ke arah posisi 0 rad yang tidak signifikan.

Plant dengan pendulum jatuh kebelakang artinya jauh dari kondisi acuan sehingga PSR optimal yang dipilih (π^*) pada Gambar 4.27 dipersekitaran 1. Oleh karena itu, pada Gambar 4.28 data baca sensor yang dikirim WSN selalu diterima oleh pengontrol ($\gamma = 1$). Pada Gambar 4.29 kontrol input yang dieksekusi oleh *plant* setelah *step* ke-200 adalah maksimum, yaitu, $+2$. Namun, hanya mampu menggerakkan *plant* ke arah depan (Gambar 4.23) yang menyebabkan posisi *plant* semakin jauh dari titik acuan tertentu (Gambar 4.22). Kontrol input juga menyebabkan fluktuasi kecepatan sudut pendulum (Gambar 4.25) tetapi tidak cukup kuat untuk membangkitkan pendulum (Gambar 4.24). Artinya, pendulum terjatuh ke belakang dan tidak dapat bangkit.

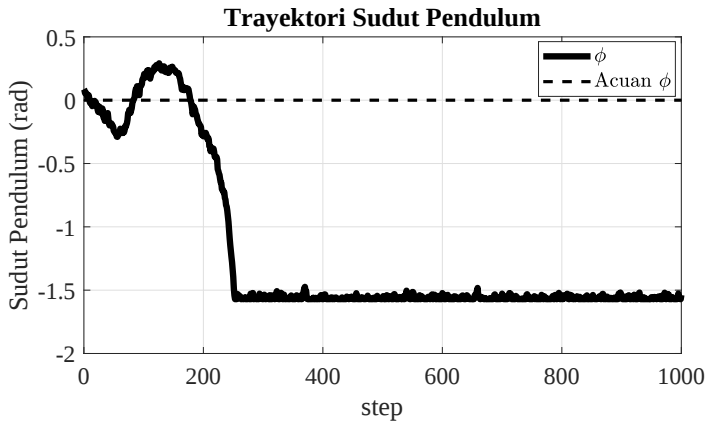
Selain arah jatuh pendulum, yang membedakan dengan skenario pertama adalah daya transmisi yang dibutuhkan. Pada Gambar 4.26 terlihat daya maksimum yang digunakan adalah sekitar $0,001 \text{ watt}$ dengan tren turun. Sedangkan pada skenario pertama (Gambar 4.18), daya maksimum yang digunakan adalah $0,01$ dengan tren naik. Hal ini terjadi karena *noise* pengukuran ϕ pada skenario kedua 10^{-2} dari skenario pertama.



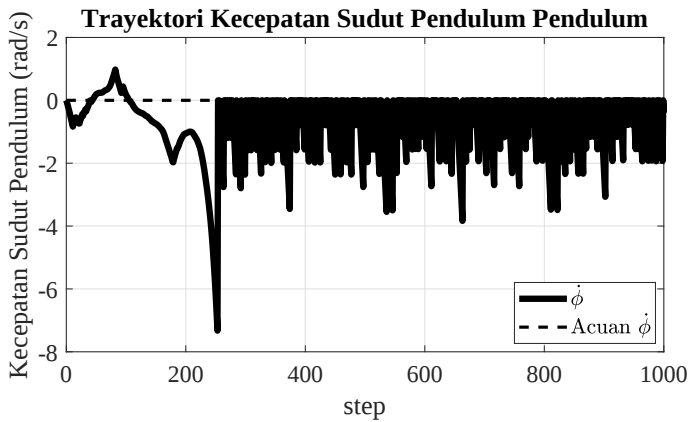
Gambar 4.22. Trayektori Posisi *Plant* dengan Pendulum Jatuh ke Belakang



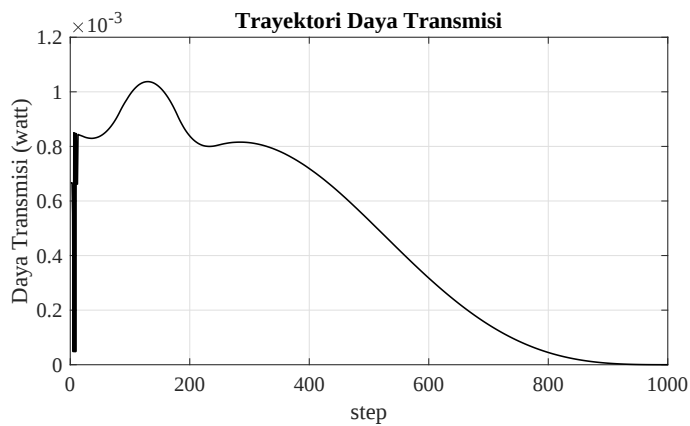
Gambar 4.23. Trayektori Kecepatan *Plant* dengan Pendulum Jatuh ke Belakang



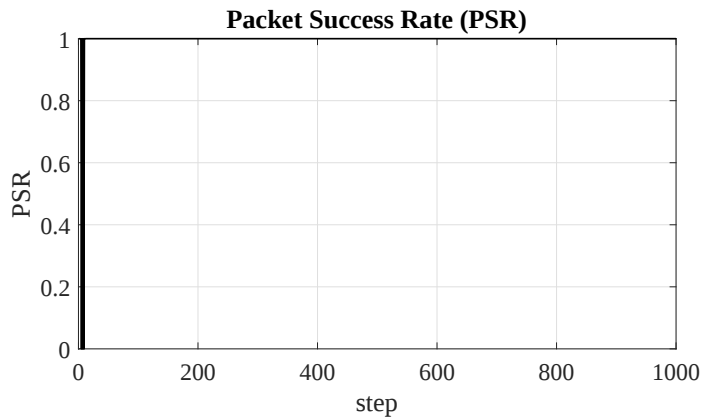
Gambar 4.24. Trayektori Sudut Pendulum Jatuh ke Belakang



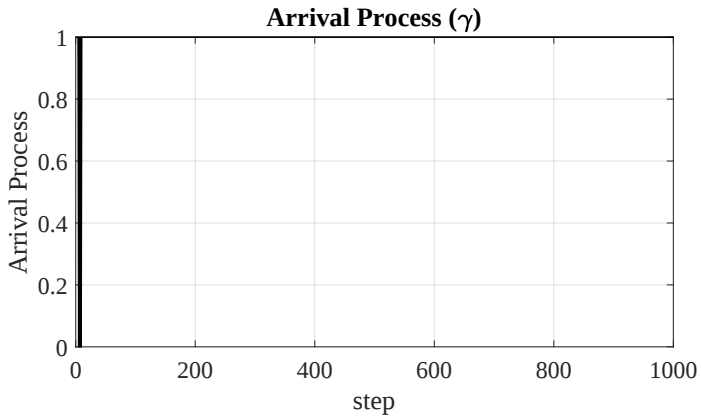
Gambar 4.25. Trayektori Kecepatan Sudut Pendulum Jatuh ke Belakang



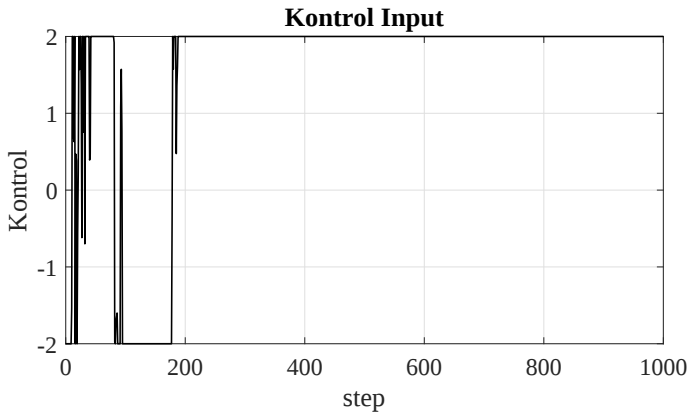
Gambar 4.26. Keputusan Daya Transmisi Optimal NCS dengan Pendulum Jatuh ke Belakang



Gambar 4.27. PSR Optimal NCS Pendulum Jatuh ke Belakang



Gambar 4.28. *Arrival Process* NCS dengan Pendulum Jatuh ke Belakang



Gambar 4.29. Trayektori Kontrol Input NCS dengan Pendulum Jatuh ke Belakang

4.7.3 Simulasi berulang pada sistem dengan kovarian *noise* tetap

Dilakukan simulasi NCS berulang sebanyak lima kali dengan *noise* tetap, yaitu, $R_1 = 0,001I_4$, dan $\bar{R}_2 = 0,003I_2$. Digunakan horizon waktu $N = 500$ sehingga *plant* telah mencapai persekitaran kondisi acuan. Nilai kontrol input dan daya transmisi optimal dari masing-masing *step* pada simulasi yang diulang lima kali ditunjukkan pada Tabel 4.3-4.19, dengan simbol aE-b berarti $a \times 10^{-b}$.

Dari tabel tersebut terlihat bahwa, dengan parameter NCS yang sama di setiap percobaan, pada *step* yang sama bisa jadi nilai keputusan kontrol dan daya transmisi optimal berbeda. Hal ini terjadi karena NCS adalah sistem stokastik, yaitu, dipengaruhi oleh variabel/matriks acak seperti, w_k , v_k , n_k , dan γ_k . Terdapat *noise state* w_k pada Persamaan 4.3 halaman 30 karena model matematika dari sistem *plant* yang dikonstruksi tidak sepenuhnya merepresentasikan sistem nyata. *Noise* pengukuran v_k pada Persamaan 4.4 karena sensor pengukur keluaran sistem tidak sepenuhnya akurat. *Noise* kuantifikasi n_k pada Persamaan 4.5 karena nilai sebelum dan setelah kuantifikasi bisa jadi berbeda. Terdapat *arrival process* γ_k pada Persamaan 2.13 halaman 13 karena kanal komunikasi dari WSN pada *plant* ke pengontrol adalah *lossy wireless channel*, artinya data baca sensor bisa jadi gagal diterima oleh pengontrol. Oleh karena itu, pada Tabel 4.19 rata-rata kontrol input optimal pada masing-masing percobaan berbeda, yaitu, 0,027896086, 0,01809526, 0,019692307, 0,011177636, dan 0,016247102. Rata-rata daya transmisi yang dibutuhkan pada masing percobaan juga berbeda, yaitu, 0,000730729 watt, 0,00072919 watt, 0,00073404 watt, 0,000735592 watt, dan 0,000730123 watt.

Tabel 4.3. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi/(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	-1	-1	-1	-1	-1	0.000851271	0.000851271	0.000851271	0.000851271	0.000851271
1	-15.88695301	-16.3749247	-16.63718605	-16.44109927	-15.9285674	4.79E-05	4.79E-05	4.79E-05	4.79E-05	4.79E-05
2	-7.473969943	-7.7226616	-7.855410122	-7.761935545	-7.494694402	0.000850829	0.000850691	0.000850885	0.000850713	0.000850713
3	-4.406408188	-3.221150611	-2.333580388	-3.892729297	-3.703534183	4.78E-05	4.78E-05	4.78E-05	4.78E-05	4.78E-05
4	-1.613382178	-1.059887678	-0.631227937	-1.350307428	-1.288625264	4.77E-05	4.77E-05	4.77E-05	4.77E-05	4.77E-05
5	-0.185173951	0.048515887	0.244814622	-0.04834465	-0.052142906	0.000846705	0.000846974	0.000846455	0.000846427	0.000846537
6	0.590718141	1.581852553	0.29142055	1.284104442	1.109545328	4.75E-05	4.76E-05	4.75E-05	4.75E-05	4.75E-05
7	0.929363838	1.417349931	0.757727388	1.308946426	1.182160866	4.73E-05	4.74E-05	4.74E-05	4.73E-05	4.74E-05
8	1.113017889	1.34580044	1.005654111	1.333993767	1.230617427	4.73E-05	4.74E-05	4.73E-05	4.73E-05	4.73E-05
9	1.216949033	1.319807648	1.141792532	1.357669132	1.265474646	4.73E-05	4.74E-05	4.73E-05	4.72E-05	4.73E-05
10	1.279230839	1.315499685	1.220122664	1.379240849	1.292126675	4.72E-05	4.73E-05	4.72E-05	4.72E-05	4.72E-05
11	1.319151799	1.320879705	1.267964106	1.398402353	1.313357294	4.71E-05	4.72E-05	4.72E-05	4.71E-05	4.71E-05
12	1.346512264	1.329947037	1.299171396	1.41505985	1.330630267	4.70E-05	4.71E-05	4.72E-05	4.71E-05	4.71E-05
13	1.366319352	1.339727058	1.320797581	1.42922513	1.344740983	0.000835014	0.000835995	0.000836599	0.000833977	0.000835385
14	-0.496686038	1.15282639	0.548151997	1.008444285	-1.319118946	4.69E-05	4.70E-05	4.70E-05	4.69E-05	4.69E-05
15	0.473798222	1.255752003	0.941901407	1.233816822	0.039336629	4.68E-05	4.69E-05	4.70E-05	4.68E-05	4.69E-05
16	0.968556839	1.30987046	1.144142006	1.35047293	0.730321703	4.68E-05	4.69E-05	4.70E-05	4.68E-05	4.69E-05
17	1.221948479	1.338682047	1.248669632	1.411194447	1.083114271	4.68E-05	4.69E-05	4.69E-05	4.68E-05	4.68E-05
18	1.352376392	1.353575431	1.302899421	1.442686947	1.264050413	4.67E-05	4.68E-05	4.68E-05	4.67E-05	4.68E-05
19	1.419685794	1.360641084	1.330823155	1.458486092	1.357180485	4.67E-05	4.68E-05	4.68E-05	4.66E-05	4.67E-05
20	3.786999629	0.690815087	1.560306779	-0.029014812	2.543118088	0.0008285	0.000830931	0.000830746	0.000828559	0.00082907
21	2.62527277	1.01407098	1.473116936	0.726723355	2.004214896	4.65E-05	4.67E-05	4.67E-05	4.65E-05	4.65E-05
22	1.361947213	0.545871114	1.388379784	1.814636547	2.397998088	0.000826766	0.000829938	0.00082937	0.000826763	0.000827645
23	1.394891693	0.949440139	1.389708741	1.651248981	1.924169344	4.65E-05	4.66E-05	4.66E-05	4.65E-05	4.65E-05
24	1.407105127	1.150486894	1.386894101	1.56530548	1.680449901	4.65E-05	4.66E-05	4.66E-05	4.64E-05	4.65E-05
25	1.408213895	1.248572363	1.381320993	1.517754416	1.552292566	4.64E-05	4.66E-05	4.66E-05	4.64E-05	4.65E-05
26	1.403116942	1.294012754	1.373727288	1.48891601	1.481890162	4.64E-05	4.65E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.65E-05
27	1.394324571	1.312254819	1.364522663	1.468891653	1.440087301	4.64E-05	4.65E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.64E-05
28	1.383139549	1.316185176	1.35394975	1.452720744	1.412196152	4.63E-05	4.65E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.65E-05
29	1.370253579	1.312346419	1.342165552	1.43794969	1.390833572	4.63E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.63E-05	4.64E-05
30	1.35604855	1.304076231	1.32928259	1.42332328	1.372303973	4.63E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.63E-05	4.64E-05

Tabel 4.4. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
31	1.340748605	1.293092627	1.315389705	1.408308248	1.354772723	4.63E-05	4.64E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.64E-05
32	1.324497457	1.28029452	1.300562607	1.392631167	1.337343806	4.63E-05	4.65E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.64E-05
33	1.307396344	1.266166031	1.284869219	1.376193059	1.319593993	4.63E-05	4.64E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.64E-05
34	1.289524573	1.250980687	1.268372416	1.358974422	1.301337737	4.63E-05	4.65E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.64E-05
35	1.270949024	1.234904571	1.251131431	1.340994729	1.282508408	4.64E-05	4.65E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.64E-05
36	1.251729293	1.218048443	1.2332026	1.322292021	1.263098372	4.64E-05	4.65E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.65E-05
37	1.231920274	1.200494082	1.214639762	1.302912576	1.243128756	4.64E-05	4.65E-05	4.65E-05	4.64E-05	4.65E-05
38	1.211573494	1.182307623	1.195494488	1.28290584	1.222634209	4.65E-05	4.65E-05	4.66E-05	4.64E-05	4.65E-05
39	1.190737808	1.163563818	1.175816233	1.262321758	1.201655233	4.65E-05	4.65E-05	4.66E-05	4.65E-05	4.66E-05
40	1.169459783	1.144261976	1.155652428	1.241209545	1.180234342	4.65E-05	4.65E-05	4.67E-05	4.65E-05	4.66E-05
41	1.147783918	1.124502728	1.135048562	1.219617062	1.15841414	4.66E-05	4.66E-05	4.67E-05	4.66E-05	4.66E-05
42	1.125752776	1.104313942	1.114048247	1.197590536	1.136236387	4.66E-05	4.66E-05	4.67E-05	4.66E-05	4.66E-05
43	1.103407084	1.083738715	1.092693275	1.175174443	1.113741549	4.67E-05	4.67E-05	4.68E-05	4.67E-05	4.67E-05
44	1.080785804	1.062818143	1.071023672	1.152411472	1.090968592	4.67E-05	4.67E-05	4.68E-05	4.67E-05	4.67E-05
45	1.057926194	1.041591484	1.049077753	1.129342544	1.067954911	4.68E-05	4.67E-05	4.69E-05	4.68E-05	4.68E-05
46	1.034863865	1.020096263	1.026892171	1.106006833	1.044736312	4.68E-05	4.68E-05	4.69E-05	4.68E-05	4.68E-05
47	1.01163283	0.998368349	1.004501966	1.082441814	1.02134703	4.69E-05	4.68E-05	4.69E-05	4.69E-05	4.69E-05
48	0.988265556	0.97644202	0.981940616	1.058683304	0.99781976	4.69E-05	4.69E-05	4.70E-05	4.69E-05	4.69E-05
49	0.964793012	0.954350015	0.959240079	1.034765513	0.974185696	4.70E-05	4.69E-05	4.71E-05	4.70E-05	4.70E-05
50	0.941244714	0.932123583	0.936430844	1.010721084	0.950474576	4.70E-05	4.70E-05	4.71E-05	4.71E-05	4.71E-05
51	0.917648767	0.909792531	0.913541975	0.986581148	0.92671472	4.71E-05	4.70E-05	4.72E-05	4.71E-05	4.71E-05
52	3.91782261	-0.292569158	1.222429539	3.7943777074	1.532456681	0.000838398	0.000837883	0.000839587	0.000838684	0.000838327
53	2.383531763	0.29804661	1.031128478	2.327614093	1.209091258	4.73E-05	4.72E-05	4.73E-05	4.73E-05	4.72E-05
54	1.593743828	0.860466774	0.9227788401	1.571778646	1.033364285	4.73E-05	4.72E-05	4.74E-05	4.73E-05	4.73E-05
55	0.964503408	1.254260611	-0.148187777	1.705315715	1.254132088	0.00084215	0.000840716	0.000843539	0.000843237	0.000842533
56	1.118814722	1.020590037	0.687087542	0.687087542	1.111992557	0.000843527	0.000841904	0.000845348	0.000844529	0.000843941
57	0.763108813	1.272524127	0.388042083	1.166971742	0.722155667	0.000844795	0.000843445	0.000846879	0.000846345	0.000845301
58	0.87503761	1.178611887	0.568576154	0.748623498	1.284012364	0.000846236	0.000844817	0.000848263	0.000847901	0.000846517
59	1.100179002	1.103495098	0.574451822	0.987654883	0.774153013	0.000848157	0.000846194	0.000849979	0.000849559	0.000847791
60	0.985515994	0.904433302	0.819231266	1.118682277	0.507369124	0.000849485	0.000847229	0.000851053	0.000851064	0.000849235

Tabel 4.5. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*T^*X = \psi(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
61	0.908177618	0.486220746	1.0282883	0.769706793	0.662109242	0.000851038	0.000848423	0.000851828	0.00085306	0.000851365
62	0.894551549	0.531442964	1.126177693	0.621908578	0.795495713	0.000852859	0.000849945	0.000853158	0.000855072	0.000853119
63	0.324536533	0.632731665	0.903508258	0.707738854	0.099045071	0.000854117	0.000854131	0.000854131	0.000854347	0.000854347
64	0.609738783	0.44154087	0.823919927	0.338878155	0.782638405	0.000856425	0.000853181	0.000855345	0.000858644	0.000856273
65	0.575357501	0.178787607	0.555965692	0.438219046	1.135700451	0.000858195	0.000854381	0.000857109	0.000860623	0.000857836
66	0.39681508	0.402451939	0.549665462	0.32720548	0.606631432	0.000860457	0.000856301	0.000858933	0.000862753	0.000859805
67	0.157561401	0.448870066	0.508231662	0.389662689	0.543463741	0.000861762	0.000858419	0.000860744	0.000864874	0.000861874
68	0.488563328	0.653411085	0.789564476	0.498444506	0.29030839	0.000864146	0.000860184	0.000862349	0.000866752	0.000863744
69	0.613596888	0.769127609	0.532253566	0.659838836	0.521414456	0.00086591	0.000862002	0.000863917	0.00086658	0.000865148
70	0.451225213	0.24421378	0.692841956	0.464894893	0.534981088	0.00086747	0.000863273	0.000865989	0.000870473	0.000867383
71	0.276738927	0.592540193	0.408390969	0.315294304	0.19398938	0.000869555	0.000865059	0.000867638	0.000872581	0.000868948
72	0.529712546	0.32043644	0.268654176	0.00279458	0.471140285	0.000871504	0.000866889	0.000869725	0.000874928	0.000871066
73	0.327451041	0.572718674	0.717603024	0.072731879	0.072250293	0.000873096	0.000868413	0.000871616	0.000876558	0.00087272
74	0.065766256	0.193401043	0.799577654	-0.20860252	-0.018761468	0.000874523	0.000870313	0.000873406	0.000878067	0.000874611
75	0.232065416	0.450068392	0.562943427	0.139669976	0.245209329	0.000876356	0.000872278	0.000875303	0.000880402	0.000877114
76	0.236706788	0.422643888	0.463883674	0.485433647	0.402455388	0.000878761	0.000873832	0.00087685	0.000882292	0.000879146
77	0.293430084	0.189030506	0.405455904	0.485626508	0.23767191	0.000881125	0.000875404	0.000878413	0.000884802	0.000881472
78	0.409466441	0.52292866	0.30610746	0.300739155	0.393305979	0.000883205	0.000877425	0.000880502	0.000887393	0.00088293
79	0.197908722	0.350610968	0.678871244	0.551101846	0.156301225	0.000885445	0.000879155	0.000882046	0.000889715	0.000885294
80	0.175815478	0.179578656	0.211515138	0.625861397	0.102577552	0.000887433	0.000881568	0.000883923	0.000891952	0.000887314
81	-0.011612432	0.395980037	0.216880131	0.028118104	0.224999691	0.000889719	0.000883794	0.000885606	0.000894037	0.00089348
82	-0.004453198	0.615885193	0.264456987	0.07632919	0.502503834	0.000891444	0.000885931	0.000887189	0.000895948	0.000890981
83	0.226823196	0.439012775	-0.231270374	-0.242962599	0.36685165	0.000893542	0.000887968	0.000889524	0.000893406	0.000893406
84	0.338738347	0.386327104	0.340619117	-0.172012945	0.550084428	0.00089595	0.000889699	0.000892202	0.000900353	0.000895679
85	0.279229338	0.267079141	0.057020515	-0.162152409	0.109524501	0.000898157	0.000891682	0.000894333	0.000902348	0.000897255
86	-0.002473209	0.170953642	-0.115488842	-0.115488842	-0.013362747	0.000901093	0.000893472	0.000896733	0.000904599	0.000899354
87	0.122305661	0.053231006	0.290413849	0.302223141	0.336453456	0.000903399	0.000896032	0.000898857	0.000906637	0.000901759
88	-0.003185945	0.160786253	0.199821711	0.277693296	0.263014033	0.000905766	0.000897436	0.000900598	0.000908757	0.00090365
89	-0.096683998	0.274731207	-0.019198756	0.282508709	0.282508709	0.00090833	0.000899225	0.000902726	0.000910865	0.000905683
90	0.15377742	0.129074468	0.102618681	-0.548202626	0.344779827	0.000910547	0.000901215	0.000904791	0.000912985	0.000907735

Tabel 4.6. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^{*TX} = \psi(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
91	0.282129735	-0.290216169	0.210335626	0.013212936	0.082070866	0.000912719	0.000902866	0.000906741	0.000915558	0.000909805
92	0.054250059	0.061679428	0.225422372	0.041980665	0.066406519	0.00091478	0.000905179	0.000908896	0.000917336	0.000912806
93	0.209671719	0.278497642	0.392742833	0.155421692	0.610607621	0.000917299	0.000907123	0.000910895	0.00091962	0.00091442
94	0.158406494	0.025837543	0.270064306	0.338329655	-0.118291675	0.00091971	0.000908672	0.000912918	0.000921503	0.000917212
95	0.091876889	-0.128072251	0.003617608	0.226696035	-0.066212815	0.000921686	0.000910633	0.000915141	0.000923941	0.000919409
96	0.100707861	0.214305161	0.082168399	-0.118793668	-0.373717737	0.00092435	0.000917264	0.000917184	0.000925966	0.000921589
97	0.270075421	0.159263089	0.046050744	-0.215622318	-0.120795804	0.000927188	0.000914365	0.000919333	0.000928239	0.000923664
98	0.098324948	0.163572366	-0.037532765	0.127856195	0.143163248	0.000929426	0.000916683	0.000921673	0.000930838	0.000926055
99	-0.273573567	0.344664332	0.094661652	-0.39067322	0.048306119	0.000931738	0.000918634	0.000924514	0.000933097	0.000928341
100	0.02331661	0.461298783	-0.144120144	-0.34909322	0.104958136	0.000933713	0.000920272	0.000926794	0.000935474	0.000930601
101	-0.153820655	0.505150777	-0.097871427	0.155475118	-0.043540379	0.000936232	0.000922619	0.000929174	0.000937781	0.000932871
102	-0.215127358	-0.009541161	-0.003000797	-0.124846966	-0.133090549	0.000938542	0.000924742	0.000931141	0.000940175	0.000935163
103	0.005266831	0.546844859	0.072728967	-0.286375559	-0.154845254	0.00094038	0.000926267	0.000932727	0.000941964	0.000937871
104	-0.395689595	0.404333682	-0.039841932	-0.716900652	0.045242791	0.000942647	0.000928337	0.00093493	0.000944232	0.000940172
105	0.01938959	0.104213141	-0.084476169	-0.151355046	0.058942013	0.000945099	0.000930357	0.00093664	0.000946729	0.000942558
106	0.04665957	0.038503392	-0.173926726	-0.259063063	-0.085125763	0.000946764	0.000931955	0.00093909	0.00094822	0.000944035
107	-0.118960389	-0.316832374	0.062657738	-0.503753354	-0.363113784	0.000948686	0.000933711	0.000940578	0.00095126	0.000945874
108	-0.279948887	-0.242284779	0.33125494	0.077527036	-0.39618415	0.000951085	0.000935615	0.000942949	0.000953512	0.000948166
109	0.028458502	0.099999802	-0.13360846	0.018495202	-0.038594122	0.000953776	0.000937701	0.000945678	0.000956284	0.000950676
110	-0.088238087	0.517997469	-0.02644162	-0.125646455	-0.202194981	0.000956082	0.000939563	0.000947436	0.000958999	0.0009526
111	-0.089370158	0.270545598	0.146807937	-0.05277315	-0.166777728	0.000958405	0.000941825	0.000949707	0.000961187	0.000954727
112	0.279191846	0.205751416	0.162205029	-0.18287562	0.371826715	0.000960107	0.000944169	0.000952218	0.000963765	0.000956877
113	-0.109399037	-0.104348228	0.06870827	-0.298268779	0.132606585	0.000962031	0.000946749	0.000954252	0.000966242	0.000958812
114	-0.114057538	-0.33461582	-0.288436685	0.236976077	0.224300338	0.000964707	0.000948707	0.000956449	0.000968015	0.000960517
115	-0.011431898	-0.214583844	-0.481919399	-0.043642717	-0.093492424	0.000966643	0.00095082	0.000958879	0.000970008	0.000963172
116	-0.342412711	-0.008401711	-0.335736053	0.060928167	0.056932217	0.00096875	0.000952739	0.000961729	0.000972429	0.000965608
117	-0.058547087	-0.025263201	-0.582084626	-0.413970985	-0.062171072	0.000971007	0.000954855	0.000964027	0.000975069	0.000968605
118	-0.240358218	-0.003966216	-0.382086108	-0.132381884	-0.122641984	0.000972591	0.000956516	0.000965857	0.000977291	0.000970064
119	-0.433898031	-0.290513005	-0.423684336	-0.381409795	-0.24611635	0.000974051	0.000958946	0.000967908	0.000979433	0.000972294
120	-0.070810344	-0.400811413	-0.002024488	-0.461367818	-0.062645167	0.000976006	0.000961229	0.000970261	0.000981546	0.000974982

Tabel 4.7. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
121	-0.175623503	-0.337365341	0.111886646	0.020611066	-0.772667157	0.000978019	0.000963157	0.000972933	0.000984006	0.000976817
122	-0.0510006563	-0.319924034	0.048828339	-0.188489771	-0.389880285	0.000980722	0.000965632	0.000975108	0.000986146	0.000978871
123	-0.235920096	-0.576963473	0.223663723	-0.306737451	-0.016435861	0.000987849	0.000967849	0.000977884	0.000988109	0.000980977
124	-0.483564401	0.026522159	-0.273733747	-0.36719612	0.042646695	0.000985025	0.000969508	0.000980035	0.000990468	0.000982727
125	-0.146191448	-0.146307226	-0.490673385	-0.182423879	0.088854657	0.000986554	0.000971946	0.000981123	0.000992357	0.000984586
126	-0.199040426	-0.233705449	-0.404287823	-0.191692453	-0.394919796	0.000988481	0.000974113	0.000983761	0.000998604	0.000988642
127	-0.528146923	-0.244751445	-0.331877618	-0.332262014	-0.135265623	0.000990959	0.000976045	0.000986425	0.000996783	0.000988167
128	-0.102736651	-0.147287868	-0.275471971	-0.405998233	-0.435247409	0.000777994	0.000779994	0.000773846	0.000782205	0.000775542
129	-0.334116393	0.128731604	-0.404605915	-0.405213458	-0.513491079	0.000779605	0.000767556	0.000775243	0.000783474	0.000777732
130	-0.165034813	0.00077414	-0.141983519	-0.227240576	-0.199320375	0.000781272	0.000769666	0.000776712	0.000785422	0.000778762
131	-0.183587026	-0.128009816	0.172887724	-0.105751796	-0.194107105	0.000783148	0.000770813	0.000778407	0.000786896	0.000780808
132	-0.604965776	-0.19778301	0.185440657	-0.218509498	-0.325747944	0.000784859	0.000772337	0.000779797	0.000788764	0.000782245
133	-0.373156503	-0.153159374	-0.512017291	-0.041972019	-0.18220356	0.000786807	0.000774322	0.000781414	0.000790602	0.000783393
134	-0.109471887	0.064047857	-0.38860627	-0.710412853	-0.254618698	0.000787833	0.000776197	0.000782632	0.000792229	0.000785004
135	0.124303356	-0.171125073	-0.480484561	-0.168564642	-0.353589859	0.000789245	0.000775666	0.000784177	0.000794042	0.000786605
136	-0.013330967	-0.614850276	-0.305070316	-0.214404205	-0.45669503	0.000790721	0.000778896	0.000784974	0.000795499	0.000788478
137	-0.159028419	-0.800847407	-0.422462974	-0.178686573	-0.317046665	0.000792114	0.000779995	0.000786265	0.000796842	0.00079025
138	-0.435398105	-0.272218584	-0.57820513	-0.125000795	-0.29937575	0.000793714	0.000781777	0.000787838	0.000798054	0.000791714
139	-0.328096827	-0.319892995	-0.511583156	0.022259097	-0.142769291	0.000794956	0.000783021	0.000788948	0.000799798	0.000793175
140	-0.427854682	-0.142776551	-0.377822123	-0.495633767	-0.150175457	0.000796965	0.00078429	0.000790837	0.000801414	0.000794972
141	-0.094903036	-0.142762914	0.022259097	-0.286361126	-0.061805665	0.000798196	0.000785652	0.000792668	0.000803396	0.000796685
142	-0.162539626	-0.260336406	-0.286536451	-0.0949504	0.021559309	0.000800012	0.000787105	0.000793698	0.000804883	0.000797878
143	0.035196909	-0.141371527	-0.178041657	-0.093066983	0.09958244	0.000752881	0.00074063	0.000746828	0.000757368	0.000751271
144	-0.408035783	-0.209518979	-0.191649504	-0.308329882	-0.070397422	0.00075418	0.00074162	0.000748524	0.000755266	0.000752566
145	-0.315681562	-0.382441253	-0.204467828	-0.155047641	0.015345609	0.00072664	0.000714536	0.000721233	0.000731342	0.00072492
146	-0.028994747	-0.345852739	-0.049727576	-0.315931404	-0.5771156329	0.000695688	0.0006701953	0.000671602	0.000676329	0.000670632
147	-0.206086602	-0.585564795	-0.171490389	-0.504371488	-0.616406038	0.000667934	0.000657505	0.000663099	0.000672107	0.000667139
148	-0.236697347	-0.034031642	-0.369683489	-0.439548567	-0.239691042	5.75E-04	0.000571312	0.00057333	0.000577957	0.000574006
149	-0.27296721	-0.131562036	-0.306302205	-0.369683369	-0.270618135	5.82E-05	5.72E-05	5.77E-05	5.85E-05	5.81E-05
150	-0.450597775	-0.143724482	-0.096940138	-0.41024765	-0.365683051	0.00103579	0.00101807	0.001027484	0.001040019	0.001034642

Tabel 4.8. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi/(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
151	-0.613759252	-0.08320082	-0.127999903	-0.372973681	-0.252122023	0.001037431	0.001019227	0.001028574	0.001041702	0.001036366
152	-0.487985463	-0.244334291	-0.373246562	-0.19015993	-0.135540865	8.14E-04	0.000799361	0.000806449	0.000817127	0.000812774
153	-0.396218724	-0.231968399	-0.305989706	-0.235942385	-0.22671977	5.80E-05	5.75E-05	5.80E-05	5.88E-05	5.85E-05
154	-0.194844471	-0.091503334	-0.103220719	-0.631809186	-0.596654661	0.001042735	0.001023816	0.001032198	0.001041465	0.001041465
155	-0.289896793	-0.085898729	-0.234452396	0.091847185	-0.662820227	0.001044614	0.001025019	0.001033576	0.001048504	0.001043308
156	0.009105778	0.060128384	-0.295421873	-0.106439403	-0.351389328	7.70E-04	0.000755708	0.00076168	0.00077271	0.000769106
157	-0.144734583	-0.07723139	-0.260725028	-0.086442662	-0.114027438	5.89E-05	5.79E-05	5.83E-05	5.92E-05	5.89E-05
158	-0.59136477	-0.008108539	-0.202220388	-0.191049951	-0.364848474	0.001049184	0.001030167	0.001038192	0.001053138	0.001048507
159	0.024282633	0.014959034	-0.395448953	-0.404901792	-0.114027438	0.001050898	0.00103164	0.001039646	0.00105505	0.001049848
160	-0.197304905	-0.094521188	-0.174464999	-0.586529211	-0.163251404	7.45E-04	0.000731304	0.0007367	0.00074799	0.000744071
161	-0.24728795	-0.159371149	-0.198245192	-0.435498628	-0.225049323	5.93E-05	5.82E-05	5.87E-05	5.95E-05	5.92E-05
162	-0.326162218	-0.085315213	-0.088836455	-0.214215711	-0.10277264	0.001055448	0.001036083	0.001044483	0.001059975	0.001054953
163	-0.125199233	-0.44138323	-0.267145907	-0.591696019	-0.63989968	0.001057423	0.001037713	0.001046479	0.001061943	0.001056045
164	-0.198516079	-0.02108185	-0.269847666	-0.528689864	-0.233920126	6.47E-04	0.000634589	0.000640288	0.000649586	0.000646056
165	-0.244277517	-0.121838018	-0.245846747	-0.403468781	-0.260374847	5.97E-05	5.86E-05	5.90E-05	5.99E-05	5.95E-05
166	-0.279262432	0.134067877	-0.031174293	-0.750247106	-0.156999837	0.001062173	0.001042955	0.001051108	0.001066231	0.001059369
167	-0.279860124	-0.472526758	-0.172092441	-0.264342066	-0.03541311	8.33E-04	0.000817746	0.000824371	0.000835691	0.000831303
168	-0.285641891	-0.35333362	-0.197665759	-0.260895202	-0.157202044	6.00E-05	5.88E-05	5.93E-05	6.01E-05	5.98E-05
169	-0.469570673	-0.459361087	-0.243445224	-0.060057549	-0.055460326	0.001067195	0.001046862	0.001050503	0.001069666	0.001064584
170	-0.546413365	-0.031960802	-0.094758389	-0.092393388	0.028997404	1.07E-03	0.001048668	0.001056762	0.001071244	0.001066389
171	-0.419893892	-0.133572545	-0.157514215	-0.169873182	-0.122495983	6.02E-05	5.91E-05	5.95E-05	6.04E-05	6.00E-05
172	-0.408343058	-0.019178979	-0.279616169	-0.206238212	-0.30067997	0.00107113	0.001050686	0.001059551	0.001073588	0.001068893
173	-0.329654144	0.105389125	-0.637801586	-0.304412341	-0.357245646	8.40E-04	0.001052338	0.001060657	0.000841793	0.00083842
174	-0.307204581	-0.058870453	-0.428373767	-0.274912438	-0.316682199	6.04E-05	5.93E-05	5.98E-05	6.05E-05	6.03E-05
175	-0.126316902	-0.480546108	-0.032788767	-0.202119822	-0.099728037	0.001075522	0.001054872	0.001064028	0.001077153	0.001073615
176	-0.206274614	-0.305598297	-0.205291212	-0.366541997	0.017715948	8.44E-04	0.000827292	0.000834553	0.00084477	0.000841996
177	-0.26424217	-0.264277054	-0.207519551	-0.301259479	-0.125302292	6.07E-05	5.95E-05	6.00E-05	6.08E-05	6.06E-05
178	-0.374267189	-0.092177064	-0.116759846	0.094674021	-0.731022707	0.001079491	0.001059226	0.001067954	0.00108126	0.001078268
179	-0.120501452	-0.052790054	-0.005212817	0.028270491	-0.338121047	8.47E-04	0.000837723	0.000837723	0.00084778	0.000844919
180	-0.198576657	-0.139602371	-0.1073106	-0.09601206	-0.302393515	6.09E-05	5.97E-05	6.02E-05	6.09E-05	6.08E-05

Tabel 4.9. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi/(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
181	-0.265339346	0.236105587	-0.040861007	-0.212323176	-0.422129292	0.001084025	0.001063145	0.001071954	0.001084456	0.001081924
182	-0.341715538	-0.213899184	-0.284868796	-0.325577174	-0.314472448	8.50E-04	0.000833078	0.000840572	0.000850268	0.000848263
183	-0.306316018	-0.217319638	-0.243848665	-0.270710714	-0.288633392	6.11E-05	5.99E-05	6.04E-05	6.11E-05	6.10E-05
184	-0.349671475	-0.310664792	-0.102517486	0.057710942	0.040801492	0.001088654	0.001066597	0.001076172	0.001088015	0.001085908
185	-0.201746974	0.015347651	-0.044344967	-0.443303634	0.297384114	8.53E-04	0.000835782	0.000843689	0.000853128	0.000851736
186	-0.232535777	-0.099759309	-0.123154935	-0.322802468	0.0273755277	6.13E-05	6.01E-05	6.07E-05	6.13E-05	6.12E-05
187	-0.158663971	-0.107407315	-0.205307853	-0.506656994	-0.07853611	0.001090792	0.001068808	0.001079814	0.001091076	0.001089746
188	-0.07158885	-0.058372903	-0.196907664	-0.396086953	-0.295690979	8.53E-04	0.000838518	0.00084635	0.000855437	0.000854514
189	-0.155633006	-0.135047513	-0.201021715	-0.295708337	-0.271301411	6.13E-05	6.03E-05	6.09E-05	6.13E-05	6.15E-05
190	-0.430920487	-0.100769295	-0.363947616	-0.303127133	-0.502812713	0.001094163	0.001072856	0.001083332	0.001095253	0.001094545
191	-0.309867547	0.024349328	-0.329592886	0.271037025	-0.303839789	8.58E-04	0.000841222	0.000849414	0.000858205	0.000858173
192	-0.27305139	-0.093537451	-0.26729471	0.038984164	-0.276872001	6.16E-05	6.05E-05	6.11E-05	6.17E-05	6.17E-05
193	-0.074654385	-0.043472404	0.020941046	0.151729124	-0.072707193	0.001096234	0.001076403	0.001087841	0.001097591	0.001098547
194	-0.137695131	-0.421623438	-0.10336174	-0.047947333	-0.147436061	8.59E-04	0.000844291	0.000852311	0.000860453	0.000861748
195	-0.177325276	-0.317895405	-0.152446539	-0.12211625	-0.201572619	6.18E-05	6.07E-05	6.13E-05	6.19E-05	6.20E-05
196	-0.405791875	-0.245611067	-0.107499997	-0.33930544	0.160942009	0.001098894	0.001080531	0.001091135	0.00110067	0.001102626
197	-0.848640003	-0.292876589	-0.023188962	-0.27926304	-0.447143086	8.61E-04	0.000847172	0.000855375	0.000862706	0.000863986
198	-0.530727008	-0.257483314	-0.112182442	-0.228719657	-0.350928262	6.20E-05	6.10E-05	6.15E-05	6.20E-05	6.21E-05
199	-0.528433478	-0.367823091	-0.614225357	-0.512546934	-0.26974135	0.001102692	0.001085354	0.001094292	0.001102982	0.001104711
200	-0.647106824	-0.322885473	-0.137774878	-0.480903853	-0.224308008	8.64E-04	0.000851355	0.000857774	0.000864676	0.000866135
201	-0.419576015	-0.278783349	-0.170571421	-0.328759812	-0.233605016	6.21E-05	6.12E-05	6.17E-05	6.22E-05	6.23E-05
202	-0.763976183	-0.385216215	-0.372625533	-0.254239394	-0.32764972	0.001104937	0.00109027	0.001097785	0.00110665	0.001108695
203	-0.521345648	-0.63595271	-0.108737422	-0.237155226	-0.48943549	8.66E-04	0.000855152	0.000861335	0.000867296	0.000869049
204	-0.350835063	-0.42853555	-0.151669829	-0.205234188	-0.3637768	6.23E-05	6.15E-05	6.19E-05	6.24E-05	6.25E-05
205	-0.369959214	-0.746733646	-0.375781135	-0.317807247	-0.313018382	0.001107835	0.001093947	0.0011022	0.001109607	0.001112409
206	0.053033157	-0.78882017	-0.379230116	-0.097169159	-0.165405889	8.69E-04	0.00085763	0.000864289	0.000870092	0.000871984
207	-0.056374124	-0.39321061	-0.283820186	-0.128744268	-0.196490955	6.25E-05	6.17E-05	6.21E-05	6.26E-05	6.27E-05
208	0.057820844	-0.55223917	-0.484158834	-0.586158335	-0.860677282	0.001110019	0.001098089	0.00110552	0.001113088	0.00111462
209	-0.1795356837	-0.317764405	-0.114117431	-0.312186881	-0.480303226	8.70E-04	0.000860572	0.000866585	0.000872473	0.00087291
210	-0.165655735	-0.262318346	-0.149032452	-0.236019635	-0.344655122	6.25E-05	6.19E-05	6.23E-05	6.27E-05	6.28E-05

Tabel 4.10. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
211	-0.215997814	-0.204180287	0.110328799	-0.012072234	-0.394963397	0.001111976	0.001100698	0.001108167	0.001115719	0.001117215
212	0.306304217	0.062533039	0.318243806	-0.454384449	-0.593818333	8.71E-04	0.000863298	0.00086746	0.000874147	0.000875461
213	0.091436872	-0.066196959	0.071814914	-0.301295705	-0.398328814	6.26E-05	6.20E-05	6.24E-05	6.28E-05	6.29E-05
214	0.1362223454	-0.331729856	-0.415046353	0.140530631	-0.64902394	0.001113699	0.001110348	0.001110515	0.001117717	0.001118984
215	-0.489778729	-0.174315927	-0.138315539	0.10081663	-0.738288623	8.73E-04	0.000865317	0.000870261	0.000876035	0.00087676
216	-0.309103878	-0.180492726	-0.152063358	0.014070448	-0.461147921	6.28E-05	6.22E-05	6.26E-05	6.30E-05	6.30E-05
217	-0.145650379	-0.099700479	-0.281882014	-0.358374681	-0.383934291	0.001116079	0.001107669	0.00111388	0.001120749	0.001120789
218	-0.264000684	0.041285312	-0.002984675	-0.125786463	-0.21688119	8.74E-04	0.000868161	0.000873358	0.000878415	0.000878373
219	-0.190011452	-0.069250487	-0.087914592	-0.126382566	-0.183515915	6.28E-05	6.24E-05	6.28E-05	6.32E-05	6.31E-05
220	-0.383207236	-0.030108924	-0.241037614	-0.068413536	0.397452308	0.001118051	0.001110996	0.001116679	0.001124106	0.001121426
221	-0.093408919	-0.304980993	0.070682384	-0.464403446	0.074052336	8.76E-04	0.000871533	0.000875142	0.000881188	0.000878401
222	-0.097242435	-0.246513416	-0.0497453	-0.300620793	-0.029069532	6.30E-05	6.27E-05	6.29E-05	6.33E-05	6.31E-05
223	0.014905996	0.139693971	0.200713602	0.131624279	0.148418496	0.001120181	0.001114983	0.001119728	0.001126384	0.001122494
224	-0.117170032	0.022484785	0.027860962	-0.026229098	-0.106757682	8.77E-04	0.000873712	0.000877572	0.000883233	0.000879742
225	-0.107788545	-0.081881066	-0.072764419	-0.078924895	-0.113080331	6.30E-05	6.28E-05	6.31E-05	6.35E-05	6.32E-05
226	-0.359219073	-0.26116234	0.088559328	-0.212070134	-0.376042895	0.001121061	0.001117164	0.001122464	0.001129126	0.001124074
227	-0.322996143	0.015771647	-0.135513618	-0.427332125	-0.463783	8.79E-04	0.000876161	0.000879824	0.000885005	0.000880668
228	-0.20952082	-0.081485632	-0.155511939	-0.283199954	-0.287674924	6.32E-05	6.30E-05	6.32E-05	6.36E-05	6.33E-05
229	-0.38331373	-0.177545157	-0.375450357	-0.1801025	-0.1502839	0.001122801	0.001120444	0.001124925	0.001131898	0.001125688
230	0.005229896	-0.333040717	-0.321622302	-0.043624115	-0.061805434	8.80E-04	0.000878184	0.000881594	0.000887068	0.000882227
231	-0.039500345	-0.251226221	-0.246146286	-0.087360194	-0.082243634	6.32E-05	6.31E-05	6.34E-05	6.37E-05	6.34E-05
232	0.185283795	-0.458246496	-0.11789791	0.246134725	-0.236694045	0.001122492	0.001122789	0.001127441	0.001134024	0.001127473
233	-0.227858279	-0.33938716	0.304915471	-0.203248382	-0.373795312	8.81E-04	0.00088022	0.00088327	0.000888967	0.000883429
234	-0.151848845	-0.252446167	0.070087988	-0.159892103	-0.23250248	6.33E-05	6.33E-05	6.35E-05	6.39E-05	6.35E-05
235	-0.377812215	-0.243661744	0.046233272	-0.166630556	-0.246720956	0.00112538	0.001126568	0.001129613	0.001135963	0.001129148
236	-0.261404923	-0.33429787	-0.353592001	-0.078103402	-0.042128532	8.82E-04	0.000882851	0.000884882	0.00089005	0.000883976
237	-0.160965787	-0.250115097	-0.253361573	-0.097341964	-0.059399523	6.34E-05	6.34E-05	6.36E-05	6.40E-05	6.35E-05
238	-0.247040376	0.120424815	0.147040687	-0.108657029	-0.119512488	0.001126994	0.001128009	0.001131494	0.001138039	0.00112935
239	-0.2757274725	-0.249524803	-0.408199483	-0.026409477	-0.098326782	8.83E-04	0.00088737	0.000886602	0.000891563	0.000884852
240	-0.165590279	-0.203679385	-0.284501794	-0.067616119	-0.079065831	6.35E-05	6.35E-05	6.37E-05	6.41E-05	6.36E-05

Tabel 4.11. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
241	-0.143569501	-0.278657998	-0.600107324	-0.371694752	0.18704237	0.001128249	0.001129373	0.00113388	0.001139691	0.001131131
242	0.131197035	-0.213691811	-0.460902147	0.127858003	0.318064729	8.84E-04	0.000884846	0.000888994	0.000893	0.000886188
243	0.045557799	-0.181737412	-0.309136628	0.013939973	0.13649595	6.35E-05	6.36E-05	6.39E-05	6.42E-05	6.37E-05
244	0.275182129	-0.511243873	-0.46992909	-0.250992074	-0.115696985	0.001130223	0.001113192	0.001136453	0.001141545	0.001132864
245	0.26863973	-0.079168432	0.172462913	0.235736597	-0.18977808	8.86E-04	0.000886393	0.000890471	0.000894706	0.000887444
246	0.115490885	-0.109752977	0.012017328	0.071411443	-0.123872532	6.37E-05	6.37E-05	6.40E-05	6.43E-05	6.38E-05
247	0.273164699	-0.100282533	0.357566469	0.051470741	-0.710257663	0.00113342	0.001133622	0.001138105	0.001143711	0.00113389
248	0.403402822	-0.305190456	0.303835496	0.043232488	-0.700860339	8.88E-04	0.000887849	0.000891639	0.000896367	0.000888436
249	0.177432147	-0.216629334	0.080098927	-0.02640237	-0.374940018	6.38E-05	6.38E-05	6.41E-05	6.44E-05	6.39E-05
250	0.091876157	-0.020876051	-0.311628808	-0.094359919	-0.170253337	0.001135195	0.001135761	0.001140009	0.001145484	0.001136252
251	-0.402543997	-0.205193372	-0.394659918	0.121609685	0.158346664	8.90E-04	0.000890439	0.0008933	0.000897729	0.000890233
252	-0.228533826	-0.162138289	-0.267323508	0.014803817	0.062654131	6.39E-05	6.40E-05	6.42E-05	6.45E-05	6.40E-05
253	-0.409150895	-0.095642905	0.466604449	-0.334319366	0.092710193	0.001135921	0.001138371	0.001142697	0.001147155	0.001138103
254	-0.089448781	-0.027127791	-0.021580083	-0.215319752	-0.173626668	8.90E-04	0.000892376	0.000895537	0.000899066	0.000892132
255	-0.063982681	-0.072666687	-0.080324376	-0.157400751	-0.109782223	6.40E-05	6.42E-05	6.43E-05	6.46E-05	6.41E-05
256	-0.019873722	-0.017218583	0.091317093	0.058502274	0.058502274	0.001138067	0.001141118	0.001144233	0.001149856	0.001140047
257	0.072459176	0.042858877	-0.411803356	0.06946602	0.01795717	8.92E-04	0.000894356	0.000896291	0.000900593	0.000894023
258	0.014138842	-0.03959281	-0.275463261	-0.046187086	-0.010707037	6.41E-05	6.43E-05	6.44E-05	6.47E-05	6.42E-05
259	0.549342165	-0.456184261	-0.31502265	0.093606567	-0.237735535	0.001139835	0.001142902	0.001145229	0.001151873	0.00114067
260	-0.207278266	-0.422239436	-0.019534391	-0.008817055	-0.255051344	8.93E-04	0.000895747	0.000897396	0.000902577	0.000893723
261	-0.126978122	-0.274339774	-0.075041966	-0.05475677	-0.143576098	6.42E-05	6.44E-05	6.45E-05	6.49E-05	6.42E-05
262	0.531209751	-0.127060086	-0.530859251	-0.31785219	-0.021104611	0.001141422	0.001145781	0.001147747	0.001154063	0.001142379
263	0.169488549	-0.023531263	-0.405879478	-0.198100792	0.075282884	8.94E-04	0.000897309	0.000899234	0.000904723	0.000894022
264	0.062903861	-0.068921942	-0.268922983	-0.157366082	0.022421987	6.42E-05	6.45E-05	6.46E-05	6.51E-05	6.42E-05
265	-0.315471809	-0.363017672	-0.174198309	-0.60976272	-0.0894403	0.001142176	0.00114646	0.00114885	0.001157035	0.001142423
266	-0.310371743	0.0533501946	-0.038989963	-0.185608829	-0.199727889	8.94E-04	0.00089806	0.00089866	0.000907078	0.000894581
267	-0.183140241	-0.027128913	-0.079986948	-0.148370632	-0.106924217	6.43E-05	6.45E-05	6.47E-05	6.52E-05	6.43E-05
268	0.271682514	-0.210200686	-0.017180691	-0.040445253	0.107845371	0.001142796	0.001147289	0.001149889	0.001158995	0.001144023
269	-0.196842607	0.084836922	-0.459447039	-0.21765967	-0.046884442	8.95E-04	0.000899126	0.000900604	0.000907728	0.00089612
270	-0.126027369	-0.004076338	-0.285313929	-0.16010888	-0.022680831	6.43E-05	6.46E-05	6.47E-05	6.52E-05	6.44E-05

Tabel 4.12. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi/(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
271	-0.407573181	0.171903263	-0.496500982	0.032697549	0.062951588	0.001144523	0.001148795	0.001151255	0.001160063	0.001144674
272	-0.331759879	0.439670354	-0.413742784	-0.033090139	-0.050570523	8.97E-04	0.000899813	0.000902071	0.000908971	0.000896297
273	-0.188400596	0.1793609	-0.256382336	-0.065251229	-0.030001402	6.45E-05	6.47E-05	6.48E-05	6.53E-05	6.44E-05
274	-0.173168849	-0.193389648	-0.558984531	-0.242848178	0.040786053	0.001146278	0.001150475	0.001152217	0.001160002	0.001144816
275	0.014251934	-0.912087681	-0.100174457	-0.275983404	-0.023372938	8.98E-04	0.000901779	0.000902444	0.000908809	0.000897012
276	-0.018492491	-0.500741881	-0.091319793	-0.185816999	-0.010878189	6.45E-05	6.48E-05	6.49E-05	6.53E-05	6.45E-05
277	-0.1408371266	0.131885599	-0.100672264	0.114310383	-0.094378369	0.001146826	0.001152456	0.001153248	0.001161591	0.001147447
278	-0.236216427	-0.177692441	-0.002274454	-0.144441456	-0.093134106	8.98E-04	0.000903106	0.000903845	0.000909929	0.000898781
279	-0.197485233	-0.131885599	-0.042514989	-0.115873656	-0.046919416	6.45E-05	6.49E-05	6.49E-05	6.54E-05	6.46E-05
280	-0.197485233	-0.088885068	-0.050348431	-0.198249579	-0.134106638	0.001146979	0.001154255	0.001154583	0.001161696	0.001148213
281	0.04339356	0.056212309	-0.36149283	0.076794853	0.012043056	8.99E-04	0.000904591	0.000904944	0.000910889	0.000899513
282	0.009083275	-0.009561155	-0.215758415	0.000592921	0.004628073	6.46E-05	6.50E-05	6.50E-05	6.55E-05	6.46E-05
283	-0.218120638	0.063553845	-0.087607853	-0.774231797	-0.026658264	0.00114818	0.001155232	0.001156095	0.001163473	0.001148198
284	-0.394089157	0.103218863	-0.083755698	-0.299058522	0.441333776	1.15E-03	0.001155787	0.001156284	0.001164006	0.001149406
285	-0.3646701	0.232392712	-0.199929796	0.0198406	0.097960607	0.000542957	0.000545962	0.000545855	0.000549337	0.000542312
286	-0.196395144	0.083052366	-0.131158619	-0.024686224	0.044912754	6.47E-05	6.50E-05	6.51E-05	6.55E-05	6.47E-05
287	0.003874633	-0.139168828	-0.033016304	-0.05036786	-0.309384043	1.15E-03	0.001155033	0.001158282	0.001164843	0.001149626
288	0.258467231	-0.193046957	0.114483224	-0.029767336	-0.621955374	0.000900291	0.000905328	0.000907429	0.000912183	0.000900672
289	0.12163825	-0.127074568	0.029058843	0.043555061	-0.318274233	6.47E-05	6.50E-05	6.52E-05	6.56E-05	6.47E-05
290	0.302574195	-0.195308029	0.05794468	0.2876099	0.372690231	1.15E-03	0.001156477	0.001160637	0.001165252	0.001151364
291	0.309191161	-0.037179696	0.024804526	0.102639837	-0.193244195	0.001150381	0.001156761	0.00116099	0.001166132	0.00115111
292	0.235891491	0.300010711	-0.015317396	-0.324466572	-0.324466572	0.000710234	0.000714144	0.000716053	0.000719368	0.000710105
293	0.105614839	0.117060024	-0.039172071	-0.191634511	-0.134056187	6.48E-05	6.52E-05	6.53E-05	6.56E-05	6.47E-05
294	-0.089950241	-0.053171901	0.160938789	-0.160410438	-0.0295859	0.001151355	0.001159537	0.001160835	0.001166953	0.001151202
295	-0.153711532	-0.088112892	0.084985585	-0.116389613	0.28928447	0.000901487	0.000908488	0.000909933	0.00091395	0.000902459
296	-0.278941003	-0.104936809	0.334561847	0.012405874	-0.221713447	7.03E-04	0.000709049	0.000709524	0.000713054	0.000704116
297	-0.149233617	-0.089692009	0.143051918	-0.017498397	-0.11121767	6.48E-05	6.53E-05	6.53E-05	6.57E-05	6.49E-05
298	0.145286107	-0.021717509	-0.457522592	0.208798521	-0.217847073	0.001152356	0.001161337	0.001161792	0.001167668	0.001153443
299	-0.134656009	0.185358817	-0.178769252	-0.37042021	0.049441263	9.03E-04	0.000909731	0.000910458	0.000914698	0.000903669
300	-0.25109213	0.197213487	0.092646501	-0.172046469	-0.106734215	0.000737059	0.000742997	0.000743711	0.000746233	0.000738022

Tabel 4.13. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
301	-0.134754233	0.06563064	0.021999857	-0.10870409	-0.054003854	6.49E-05	6.54E-05	6.54E-05	6.57E-05	6.50E-05
302	-0.107857281	-0.123128906	-0.228931976	0.380332431	-0.074070599	1.15E-03	0.001163359	0.001163738	0.001167242	0.001154936
303	-0.184086588	-0.282600412	-0.149548555	-0.419563562	0.134266313	0.000904313	0.00091184	0.000911699	0.000914647	0.000904431
304	-0.137959161	0.005170342	-0.219434728	-0.187203419	0.076489159	0.000761924	0.000768262	0.000767961	0.000770479	0.000761452
305	-0.081406407	-0.037830063	-0.130633336	-0.110657423	0.043219682	6.50E-05	6.56E-05	6.55E-05	6.57E-05	6.50E-05
306	-0.157340844	0.084094654	-0.041247643	-0.093051319	-0.019439751	0.001155876	0.001158762	0.001164652	0.001169278	0.001158388
307	-0.165426793	0.082255588	-0.179035269	-0.067782894	0.000276843	0.000904674	0.000914452	0.00091247	0.000915965	0.000904939
308	-0.052355383	-0.230246401	0.009569423	-0.033429051	0.023269259	7.95E-04	0.000802985	0.000801724	0.000804793	0.000794776
309	-0.037704829	-0.158295693	-0.015943963	-0.03443149	0.011981921	6.50E-05	6.57E-05	6.56E-05	6.59E-05	6.51E-05
310	-0.037581824	-0.353178697	0.105873502	0.302969066	-0.167516647	0.001156439	0.001168744	0.001165991	0.001171955	0.001156429
311	0.184502949	-0.014077022	0.337406005	0.21212766	-0.163607919	1.16E-03	0.001168376	0.001166546	0.001172757	0.001156752
312	0.239680982	-0.201545085	0.704938982	0.220686965	-0.086596919	0.00081853	0.000827069	0.000825829	0.000830197	0.000818719
313	0.11767485	-0.142562265	0.337576627	0.088831157	-0.043428932	6.51E-05	6.57E-05	6.56E-05	6.60E-05	6.51E-05
314	0.336920472	-0.428180407	-0.188853665	0.100350495	-0.023528269	1.16E-03	0.001168728	0.001167323	0.00117263	0.00115797
315	0.07823408	-0.662112652	-0.474953064	0.43993182	-0.025682048	0.001157493	0.001169044	0.001166942	0.001172273	0.001157979
316	0.082338894	-0.353303473	-0.19987493	-0.027581895	0.00412004	0.000852126	0.000860634	0.000858551	0.00086309	0.00085212
317	0.034852703	-0.215507582	-0.120275352	-0.033448096	0.007506561	6.52E-05	6.58E-05	6.57E-05	6.60E-05	6.52E-05
318	-0.248883031	0.338907969	-0.097718903	-0.000261719	-0.100320399	0.001159164	0.001170848	0.00116674	0.001173597	0.00115923
319	0.004787989	0.218755621	0.205183654	-0.004295983	0.085610057	0.001159738	0.001171066	0.001167253	0.001174005	0.001158913
320	0.097797741	0.297163027	0.201450675	-0.267126263	0.276648372	8.53E-04	0.000861746	0.000858877	0.000863528	0.000853219
321	0.041332365	0.118087205	0.08873536	-0.154255986	0.14052277	6.53E-05	6.59E-05	6.57E-05	6.60E-05	6.53E-05
322	-0.094619843	-0.096741182	-0.046373388	-0.282624911	0.028580716	0.001160489	0.001171966	0.001168097	0.001174307	0.001160169
323	-0.172093474	-0.183381683	0.274573027	-0.191503998	-0.142703197	1.16E-03	0.001172726	0.001168538	0.001174253	0.001161077
324	-0.150838714	-0.333750059	-0.068238792	0.095282567	0.19482114	0.000852783	0.000863533	0.000860023	0.000864236	0.000854347
325	-0.082960584	-0.203200651	-0.053191458	0.027879362	0.095463988	6.52E-05	6.60E-05	6.57E-05	6.61E-05	6.53E-05
326	0.121245663	-0.420657524	0.217745409	-0.42463987	-0.039040762	1.16E-03	0.001173774	0.001168068	0.00117522	0.001161516
327	-0.306170081	-0.164122627	0.129328728	0.301599295	0.077125482	0.001159862	0.001174087	0.001168257	0.00117571	0.001161421
328	-0.048489248	0.185865216	-0.245656097	0.069251037	-0.127155402	0.000908484	0.000919676	0.000914738	0.000920572	0.000910146
329	-0.274128949	0.269710326	-0.011682115	-0.219161413	-0.022664378	6.63E-04	0.000671846	0.000667629	0.000672238	0.000664698
330	-0.144573126	0.10119739	-0.02010544	-0.131059976	-0.011675339	6.53E-05	6.61E-05	6.57E-05	6.61E-05	6.54E-05

Tabel 4.14. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi/(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
331	0.068645547	-0.031165866	0.069839641	0.263442682	-0.036780563	0.001159857	0.00117548	0.001168525	0.00117599	0.001163371
332	-0.130239969	0.408109686	0.038512769	0.248364111	0.248364111	1.16E-05	0.001175649	0.001168267	0.001176274	0.001165387
333	-0.365750214	-0.122609117	0.165358648	-0.102163676	-0.112026764	0.000908921	0.000920882	0.000914951	0.000921191	0.000911727
334	-0.466998092	0.1174682	-0.238585677	0.02391725	-0.143381319	0.000765151	0.00077552	0.00077049	0.000776044	0.000767936
335	-0.23700567	0.028543123	-0.133854186	-0.008880714	-0.080152566	6.53E-05	6.62E-05	6.58E-05	6.62E-05	6.55E-05
336	-0.211231816	-0.208188903	-0.048640481	0.111290841	-0.129350378	0.001160794	0.001176981	0.001169407	0.001177216	0.001165345
337	-0.176560724	-0.671209193	0.035239196	-0.063782772	-0.307394339	0.00116144	0.001177147	0.001169469	0.001177872	0.001165887
338	-0.039113187	-0.541814082	-0.128130046	0.113919611	0.07798317	9.10E-04	0.000922365	0.000915805	0.00092248	0.000913412
339	-0.214301161	-0.379104361	0.122405322	-0.461220333	-0.077240318	0.000822369	0.000833581	0.000827565	0.000834259	0.000824814
340	0.313798129	-0.13011538	0.133379734	-0.076849709	-0.054315473	0.000753438	0.000763592	0.000758293	0.000764396	0.000756171
341	0.503823493	-0.163643379	-0.059593246	0.017493132	-0.108271669	7.24E-04	0.000734239	0.000728973	0.000735217	0.000727594
342	0.320884146	0.202021232	0.238954762	0.092828761	-0.06200736	0.000724681	0.000726739	0.000729366	0.000727196	0.000727515
343	0.394307184	0.350946487	0.226349953	-0.15325935	-0.274853602	0.000724919	0.000735154	0.000729623	0.000735042	0.000727579
344	0.039299126	0.191660322	0.029500948	-0.181422465	-0.117568707	7.33E-04	0.000744672	0.000738788	0.000743799	0.000736187
345	0.381631831	-0.090660515	-0.243084536	-0.30289707	0.142979309	0.000742833	0.000754515	0.000748405	0.000753464	0.000745747
346	0.498588188	0.065077897	-0.209626096	-0.261287429	-0.121077817	0.000754016	0.00076579	0.000759339	0.000764399	0.000757111
347	-0.253129266	-0.162907108	-0.160595767	-0.112471158	0.172276171	7.66E-04	0.000778832	0.000777233	0.000777179	0.000769955
348	0.201474617	-0.345369199	-0.224589038	0.057599617	0.040814278	0.00076663	0.000779126	0.000772784	0.000777718	0.000770415
349	-0.292785976	-0.059597814	0.196579566	0.171442096	-0.0323967944	0.000781731	0.00078764	0.000792903	0.000792903	0.000784961
350	-0.358580975	-0.212530501	0.100921323	0.19962797	-0.105418406	7.82E-04	0.000794728	0.000788189	0.00079333	0.000785574
351	-0.12760882	-0.055558844	0.006626087	0.317273628	-0.16688627	0.000799618	0.000813514	0.00080652	0.000811747	0.000804014
352	0.274888391	-0.063280834	0.010453007	0.179843109	0.006158234	0.000800122	0.000813611	0.000807116	0.000812272	0.000803862
353	0.205803291	-0.490350389	0.249449251	0.060176531	-0.313373752	8.23E-04	0.000837254	0.000831224	0.0008357	0.000827522
354	0.053136027	-0.113271024	0.161840148	0.004946682	-0.2496302044	0.000823369	0.000837441	0.000831441	0.000836017	0.00082736
355	-0.275088865	-0.361819972	0.11046409	-0.339659119	0.02298002	0.000823916	0.000837482	0.00083125	0.000836142	0.000826985
356	-0.12728219	-0.240736685	-0.275850816	-0.001706655	-0.170698651	8.24E-04	0.000837611	0.000831474	0.000836817	0.00082732
357	0.175502342	-0.669331096	0.049056465	-0.200967278	-0.154985554	0.000837159	0.000838186	0.000834448	0.000837255	0.00080605
358	0.091342921	-0.297427017	0.011312857	-0.108773063	0.051441809	0.000857445	0.000871062	0.00086432	0.000870363	0.0008660574
359	0.340654615	0.055947494	0.158568627	-0.07463478	0.009217011	8.58E-04	0.000871323	0.000864582	0.000871011	0.0008660242
360	0.156596189	-0.262335112	0.119563227	-0.361804948	0.2334305815	0.00085815	0.00087064	0.000865291	0.000871319	0.0008660262

Tabel 4.15. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
361	-0.003122455	-0.137602783	0.393755974	0.023791824	0.151920603	0.000858173	0.000871013	0.000865334	0.000871253	0.000860013
362	-0.192659539	-0.046536377	0.0772532872	-0.236477693	-0.0562238327	8.58E-04	0.000870933	0.000865608	0.000871252	0.00086022
363	-0.365040298	-0.20234375	-0.37936139	-0.160964791	-0.03229347	0.000858286	0.00087065	0.000866091	0.000871292	0.000860216
364	-0.139148794	0.043835702	-0.315579495	-0.266500445	-0.055077699	0.000858346	0.00087055	0.000866181	0.000871729	0.000860178
365	0.030562064	0.146331916	-0.389962565	-0.295641058	-0.014667995	9.14E-04	0.00087028	0.000922555	0.000871811	0.000916501
366	0.079888581	0.163053486	-0.257620881	-0.19763888	-0.189769988	0.000913482	0.000926152	0.000922494	0.000927791	0.000915486
367	0.018045182	-0.010445859	0.04188687	-0.299609161	-0.040118411	0.000913664	0.000926275	0.000922282	0.000928306	0.000915684
368	0.195891685	0.021621549	0.155279948	-0.271008012	0.128233685	9.14E-04	0.000926073	0.000922574	0.000928257	0.000915687
369	-0.035609462	-0.226134188	0.153616524	0.06664171	0.255340721	0.000913972	0.000926073	0.000922997	0.00092802	0.000915794
370	-0.005249713	-0.202437123	-0.161223215	0.108203315	0.295024087	0.000914135	0.000925796	0.00092334	0.000928156	0.000915746
371	-0.036526486	0.04576905	0.227527713	-0.230472639	0.363436402	9.15E-04	0.000925617	0.000923835	0.000928333	0.000915469
372	-0.031888264	-0.086430153	0.27600984	0.046815328	-0.042771755	0.000914195	0.000925621	0.000923725	0.000928426	0.000915863
373	-0.238370115	-0.049003844	-0.260658119	-0.02566142	-0.045988917	0.000914596	0.000925939	0.000924427	0.000928599	0.000916173
374	-0.188855943	-0.103609731	-0.14197593	0.110125053	0.083910411	9.14E-04	0.000926122	0.000924854	0.000928266	0.000916485
375	0.128914806	-0.15963612	-0.199940801	-0.06383544	0.430696171	0.000914535	0.000926875	0.000925399	0.000928838	0.000916232
376	-0.054416318	0.018366369	-0.206901387	-0.286526559	0.211883198	0.000914274	0.000926782	0.000925313	0.000928971	0.000916257
377	0.220860997	0.238123683	-0.15577069	-0.318235062	0.177090293	9.15E-04	0.000927652	0.000925751	0.000928915	0.000916271
378	0.166051086	0.141095075	0.03023471	-0.337520488	0.206441101	0.000914407	0.000927828	0.000925791	0.000929091	0.000916667
379	0.032812371	0.067975633	0.208060953	-0.338718071	0.426686054	0.000915079	0.000927958	0.000925829	0.000929086	0.000916927
380	0.092261445	-0.310284248	-0.080556335	-0.364429359	0.191054138	9.15E-04	0.000927321	0.000925647	0.000929528	0.000916985
381	0.075803903	0.015667979	-0.152587019	-0.12233446	0.124790969	0.000915042	0.00092736	0.000925769	0.000929661	0.000917257
382	-0.267173377	0.134662014	-0.322704508	0.200039774	0.028748952	0.000915046	0.000927416	0.000926157	0.000930022	0.00091737
383	-0.123157112	0.008223331	0.013535708	0.05819628	-0.247116448	9.16E-04	0.000926955	0.000926436	0.000929838	0.000917731
384	0.2761750995	-0.038762315	0.099607943	-0.058335275	-0.034127529	0.000915851	0.000927499	0.000926663	0.000929732	0.000918142
385	0.12528121	-0.006770609	-0.059168625	0.093960464	-0.156377452	0.000915684	0.0009274	0.000926684	0.000930034	0.000918343
386	0.079646227	-0.082937698	0.102287481	0.120583037	-0.252303695	9.16E-04	0.00092802	0.000926347	0.000929771	0.000918521
387	0.208857978	0.175243578	0.542347471	0.134816019	-0.221908388	0.000915842	0.000928191	0.000926733	0.000930022	0.00091921
388	0.049832892	0.0918993	0.073653966	-0.092641181	-0.219420291	0.00091605	0.000927882	0.000926977	0.000930415	0.000919152
389	0.15086133	-0.232798611	0.171475219	0.007916959	-0.078815462	9.16E-04	0.000927759	0.000927826	0.00093042	0.000919436
390	0.428191297	-0.646916643	-0.447442051	-0.010519755	-0.126658301	0.000916469	0.000928341	0.00092842	0.000930946	0.000919678

Tabel 4.16. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^{*TX} = \psi/(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
391	0.169003691	-0.318019129	-0.127336908	0.000685949	-0.1748203	0.000916653	0.000928343	0.000929109	0.00093122	0.000920225
392	0.394359639	-0.033975238	-0.051146717	0.074285338	-0.004933676	9.17E-04	0.000928204	0.000929186	0.000931739	0.000920474
393	0.289675923	0.121543386	-0.12852628	-0.150314136	0.00227998	0.000916851	0.00092796	0.000929712	0.000931989	0.000920953
394	0.115041732	-0.19527214	-0.16656662	-0.117688614	0.111599368	0.000917222	0.000927659	0.000929801	0.000932513	0.000921087
395	0.001514268	-0.146916016	-0.022421719	-0.011990989	0.125720525	9.17E-04	0.00092772	0.000930105	0.000932587	0.000921416
396	0.154816869	-0.004795963	-0.030731648	-0.292954552	-0.133498772	0.000917023	0.000926887	0.000930449	0.00093206	0.000921154
397	0.040333276	-0.181438646	0.097974572	-0.216198015	-0.109859518	0.000917087	0.000926397	0.000930617	0.000932392	0.000921646
398	-0.00480927	-0.131186105	0.215390908	-0.45556532	-0.130300383	9.18E-04	0.000926423	0.000930774	0.000932274	0.00092164
399	-0.333250689	0.227934491	0.100652971	-0.309556169	0.103420667	0.00091773	0.000926037	0.000931242	0.000932635	0.000921752
400	-0.047165927	0.509468393	-0.0292932099	-0.174355125	-0.176888298	0.000918432	0.000926131	0.000931722	0.000932335	0.00092239
401	0.174649691	-0.001555034	-0.038522126	0.159273021	0.000890076	9.19E-04	0.000925948	0.000931602	0.000932328	0.000922699
402	-0.082795838	-0.32578482	0.20825075	-0.177882886	0.066261003	0.000919209	0.0009258	0.000932087	0.000932441	0.000922607
403	-0.021666901	0.049804209	-0.118780151	-0.054311064	0.032227543	0.000919146	0.000925373	0.000931711	0.000932353	0.000922511
404	-0.005041352	0.310098362	0.126992879	-0.018284398	0.00060401	9.20E-04	0.000924975	0.0009321	0.000932778	0.000922505
405	-0.053286018	0.087765357	-0.037629002	-0.111976537	-0.082660669	0.000919816	0.000925213	0.000931885	0.00093282	0.00092243
406	0.027619372	0.234195426	0.431642008	0.064831143	-0.205338545	0.000919908	0.000925447	0.000932797	0.000932292	0.00092224
407	-0.037057372	0.240414022	0.156729097	-0.158630545	0.013227644	9.21E-04	0.000925702	0.000932779	0.000931915	0.000922669
408	-0.1063266	0.271249574	-0.033099649	0.102487055	-0.166782846	0.0009203	0.000925842	0.000933163	0.0009316	0.000922377
409	-0.107597701	0.015923824	-0.005272729	0.126942285	0.047733532	0.000920397	0.000925622	0.000933345	0.000931462	0.000922488
410	0.104893176	-0.1717998648	-0.082986044	0.086129347	0.09103205	9.21E-04	0.000925999	0.000933928	0.000931156	0.000922519
411	0.279001598	-0.201928397	0.085116424	0.068069288	0.016368075	0.000921085	0.000925768	0.000934239	0.000931828	0.000922928
412	0.249087521	-0.044812871	0.023433708	-0.075117318	0.01227554	0.000921701	0.00092565	0.000934543	0.000931861	0.000922826
413	0.177115529	0.228478238	0.344368928	-0.099509389	-0.03261212	9.23E-04	0.000925662	0.000935099	0.000931925	0.000922557
414	-0.182831673	0.021411612	-0.039063182	0.059908721	-0.402962247	0.000922878	0.000925439	0.000934979	0.000931951	0.000922444
415	-0.285765607	-0.190802145	0.178509084	0.103211909	-0.059034093	0.000923138	0.000925416	0.000935026	0.000931749	0.000922374
416	0.126002499	-0.177887432	0.127831549	0.184552376	-0.072240752	9.24E-04	0.000925058	0.000934959	0.000931478	0.000922345
417	0.103863683	-0.07574932	0.164475985	0.071159744	-0.090173815	0.000923975	0.000925136	0.000934867	0.000931393	0.000922924
418	0.033553257	-0.250845566	0.142239427	-0.083374768	0.081644917	0.000924132	0.000925128	0.000935136	0.0009314	0.000923122
419	-0.124706364	0.164025903	-0.089977293	-0.033191738	0.186400855	9.25E-04	0.000925182	0.000935353	0.000931477	0.0009237
420	-0.012544529	-0.185167873	-0.231238857	-0.425977563	0.165684804	0.000924789	0.000925958	0.000935809	0.000931232	0.000924059

Tabel 4.17. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^*TX = \psi/(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
421	0.113082452	0.073335679	0.056144001	-0.452571018	0.162932532	0.000924771	0.000925468	0.000935765	0.000931468	0.000924196
422	-0.222883987	0.229566261	-0.166756343	-0.158788149	0.189207702	9.25E-04	0.000925708	0.000936059	0.000930993	0.000923974
423	-0.250187795	0.138884251	-0.201786695	-0.007937439	0.135795448	0.000925884	0.000925583	0.000936096	0.000930625	0.000923924
424	-0.145644126	0.051050172	-0.057127301	0.003562774	-0.039496669	0.000925723	0.000925667	0.000936454	0.00093071	0.000923805
425	-0.063794844	-0.001575555	-0.152515213	-0.028883633	-0.179472701	9.26E-04	0.000925988	0.000936816	0.000930651	0.000923731
426	-0.221468208	-0.030001331	-0.021622342	-0.02555568	-0.4543634381	0.000926222	0.000926106	0.000937208	0.000931107	0.000924211
427	0.072777744	0.029799453	-0.216823848	0.221048454	-0.234719315	0.000926614	0.000926143	0.000937075	0.000931068	0.000924536
428	0.038040363	0.059062251	-0.074799211	0.045792399	0.033921688	9.27E-04	0.000925841	0.000937366	0.000931844	0.000924853
429	-0.007975247	0.068861767	-0.020882612	-0.257515832	0.080822216	0.000927221	0.000925655	0.000937549	0.000931773	0.000924577
430	0.186101023	0.002728056	0.113251362	-0.067805923	-0.02888155	0.000927441	0.000925631	0.000938013	0.000931913	0.000925164
431	0.173766314	-0.070524346	0.173570336	0.113443292	-0.222849003	9.28E-04	0.000925494	0.000938268	0.000931919	0.000924698
432	-0.16467763	-0.112490999	0.17272222	0.050681962	-0.254366549	0.000927992	0.00092564	0.000938771	0.000932569	0.000924825
433	-0.117386286	0.174349102	0.057548636	0.022222935	-0.078477263	0.000927804	0.00092569	0.000938899	0.000933285	0.000925048
434	-0.030282784	0.049229636	-0.09957933	0.174870031	-0.313134187	9.28E-04	0.000925657	0.000939248	0.000933291	0.000924901
435	-0.108996747	-0.007615336	0.007293565	0.269261868	-0.136501536	0.000928578	0.00092532	0.000939987	0.000933561	0.000925078
436	-0.078689632	-0.007511039	-0.107535315	-0.065506633	-0.15655593	0.000928865	0.00092484	0.000940291	0.000934007	0.000924928
437	0.121503346	0.027584087	-0.134004508	-0.12550563	0.032327248	9.29E-04	0.000924309	0.000940004	0.000933334	0.000925172
438	-0.311120594	-0.041672446	-0.162375332	0.035237313	-0.023012126	0.000929101	0.000924191	0.000940559	0.000933414	0.000925402
439	-0.343020815	0.212779817	-0.128973615	0.041008751	-0.109439543	0.000929016	0.000924185	0.00094056	0.000933522	0.000925333
440	-0.188392783	0.103524598	-0.12143866	-0.071452228	-0.03798308	9.29E-04	0.000923514	0.000940467	0.000933234	0.000925448
441	-0.171535387	0.074270847	-0.197798832	-0.197798832	-0.117999947	0.000928851	0.000923664	0.00094054	0.000932684	0.000925695
442	-0.096893667	0.049766976	-0.130855683	-0.195936346	-0.167267707	0.000929007	0.000923137	0.000941203	0.000932968	0.000925591
443	0.060763346	0.039901383	-0.194647635	-0.121670006	-0.058391092	9.29E-04	0.000923108	0.000941109	0.000932747	0.000925342
444	0.127111045	0.086622895	0.034236701	-0.048681123	0.009432139	0.000930277	0.000923104	0.000941486	0.000932786	0.000925619
445	-0.092413256	0.008243967	-0.050954126	0.035973719	0.177432268	0.000930289	0.000923203	0.000941805	0.000932796	0.00092506
446	-0.201175842	-0.098143667	-0.098143667	0.069353728	0.073751355	9.30E-04	0.000923123	0.000942291	0.000932132	0.0009245
447	-0.167509122	-0.017331512	-0.045408587	0.263843103	0.083369587	0.00092995	0.000922898	0.000942537	0.000931843	0.000924231
448	0.155343609	-0.136712062	-0.134957275	-0.177907036	-0.1394736	0.000930288	0.00092289	0.000942859	0.000931932	0.000924227
449	0.060717693	0.046542834	-0.177506009	-0.112775388	0.005175705	9.30E-04	0.000923025	0.000943513	0.000931939	0.000923932
450	0.070877264	0.004075256	-0.258453599	-0.096333447	-0.038800742	0.000930335	0.00092292	0.000944125	0.000931801	0.000923701

Tabel 4.18. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^{*TX} = \psi(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
451	0.125108306	0.102958571	-0.077164129	-0.092616111	-0.08424402	0.000930702	0.000922747	0.000945028	0.000932176	0.00092382
452	-0.042874974	0.062630584	-0.132030658	0.0433218537	0.012420691	9.31E-04	0.000922733	0.000944971	0.000931841	0.000923508
453	-0.103714415	0.055981565	-0.011355688	0.019505326	-0.334891556	0.000930829	0.000922394	0.00094529	0.000931949	0.000923037
454	0.044155856	0.020501122	-0.153293957	0.067135846	-0.212051416	0.000931018	0.000922229	0.000945786	0.000932369	0.000922834
455	-0.204190411	-0.1214947	0.0772059043	0.053954193	-0.024973572	9.31E-04	0.000922336	0.000945681	0.000932236	0.000922878
456	-0.088465676	0.151025821	0.072102176	-0.106339689	0.065430101	0.000930957	0.000922136	0.000946403	0.000932404	0.000922736
457	-0.188049165	0.168614317	0.175161555	-0.090868471	-0.226721586	0.000931347	0.000921652	0.000946478	0.000932409	0.000922784
458	-0.139839871	0.147560112	0.065535394	0.044524217	-0.146772677	9.32E-04	0.000921507	0.000946637	0.000932262	0.000923339
459	0.087279342	0.02746242	-0.097104135	0.076622188	-0.023685938	0.000931397	0.000921858	0.000947097	0.000932391	0.000923259
460	0.11444953	0.016915805	0.005008206	0.001803143	-0.100305726	0.00093143	0.000921797	0.000946786	0.000931855	0.000923208
461	0.044263761	-0.002405995	0.102654682	0.015316115	-0.050268804	9.31E-04	0.000921998	0.000946306	0.000931979	0.000922854
462	-0.101777443	-0.211235172	-0.133435332	0.08506678	-0.116569096	0.000931424	0.00092164	0.000946883	0.000931742	0.000922544
463	-0.050473737	-0.14340417	-0.165011485	0.050222324	-0.130831364	0.000931988	0.000921468	0.000947188	0.000931887	0.00092185
464	-0.047818207	0.058255626	-0.029855885	-0.162112983	-0.145925815	9.32E-04	0.000922011	0.000947426	0.000932656	0.000922321
465	-0.073325168	0.06867623	0.012571709	-0.180379767	-0.040461444	0.000932395	0.000921777	0.000948261	0.000932766	0.000922076
466	-0.034298778	-0.028981258	0.0411533	-0.132616986	0.03643192	0.000932726	0.000921775	0.000948603	0.000933156	0.000922261
467	-0.090746152	-0.131167063	0.027015923	-0.111652446	0.076525259	9.33E-04	0.000922077	0.000948876	0.000932555	0.000922717
468	-0.101167742	-0.052321992	0.031135872	-0.110965804	0.013599972	0.000933211	0.000922268	0.000949417	0.000932512	0.000922784
469	-0.079590976	0.063137063	0.061959046	-0.079174865	-0.049770603	0.000933067	0.000922859	0.000949208	0.000932813	0.000922651
470	-0.101643132	-0.035270806	-0.104584898	-0.060109181	-0.062384794	9.33E-04	0.000923374	0.000949152	0.000932465	0.000922705
471	-0.179610788	-0.003934861	-0.133931077	0.090283579	-0.111031881	0.000933536	0.000923419	0.000948893	0.000932816	0.000922388
472	-0.0207452	-0.035010449	-0.103481512	0.027037574	-0.072204415	0.000933322	0.000923298	0.000948996	0.000932355	0.000923105
473	0.027665295	-0.066801339	-0.115142333	0.141753384	0.003629751	9.33E-04	0.00092323	0.000949142	0.000932094	0.000923305
474	-0.136109558	-0.0500170443	-0.141207046	0.010209863	0.041409092	0.000932881	0.000923659	0.000891528	0.000932089	0.000923137
475	0.034240638	-0.067365038	-0.166901311	-0.058159942	0.013698256	0.000876985	0.000923593	0.000891748	0.000875497	0.000923516
476	-0.007141638	-0.047783573	-0.080038532	-0.029250916	0.03141924	8.77E-04	0.000867481	0.000891797	0.000875192	0.00086765
477	-0.030592131	0.025517747	-0.091704828	-0.057591335	-0.10745221	0.000876989	0.000867331	0.000892268	0.000874867	0.000867643
478	-0.10504763	-0.043800973	-0.061078096	0.030462169	-0.10517376	0.000877321	0.000867513	0.000892326	0.000875102	0.000868187
479	-0.088349864	-0.091590325	-0.157858394	-0.018524771	-0.010611527	8.77E-04	0.000867969	0.000892193	0.000874258	0.000867798
480	-0.051815944	0.004073289	-0.117745776	-0.010550027	-0.006372391	0.000877348	0.000867833	0.000891726	0.000874065	0.000867348

Tabel 4.19. Nilai Kontrol Input dan Daya Transmisi Optimal pada Lima Kali Simulasi (Lanjutan)

Step ke-	Nilai Keputusan Kontrol Optimal μ^* pada percobaan ke-					Nilai Daya Transmisi Optimal $p^{*T}X = \psi^*(\pi^*)$ pada percobaan ke-				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
481	-0.091850463	-0.058979005	-0.114283284	-0.060188078	-0.050441434	0.000877526	0.000867775	0.000891971	0.000873531	0.000867151
482	-0.031085468	-0.07383873	-0.070652551	-0.084005291	-0.09520457	8.78E-04	0.000867543	0.000892229	0.000873094	0.000867183
483	-0.05763348	-0.028681301	-0.026629846	-0.016491235	-0.124229836	0.000877957	0.000867233	0.000892385	0.000872522	0.000867082
484	0.000932926	-0.028789167	0.001573852	-0.043209033	-0.091753457	0.000877994	0.00086753	0.000892761	0.000872327	0.000866873
485	-0.012716849	-0.036993483	-0.017071854	-0.007120506	-0.113539542	8.44E-04	0.000834154	0.000858664	0.000838957	0.000833492
486	0.018312508	-0.048862097	-0.095395694	-0.061474738	-0.075851225	0.000843964	0.000834474	0.000858682	0.000839198	0.000833155
487	-0.001711315	-0.021939819	-0.002368655	-0.051451794	-0.014762476	0.000844102	0.000834302	0.000858685	0.000838767	0.000832993
488	0.027989612	-0.04656071	-0.041326458	0.016687211	-0.012537578	8.21E-04	0.000810487	0.000834415	0.000814972	0.000809272
489	0.01475061	-0.076246646	-0.034506936	-0.028197444	-0.00678816	0.000802198	0.000792144	0.000800651	0.000796146	0.000791052
490	-0.019255441	0.003711846	-0.071948831	-0.017259724	0.017773731	0.000763195	0.00075319	0.000776428	0.000757101	0.000751973
491	-0.047931418	-0.010526325	0.026054456	-0.049733318	-0.014236808	7.05E-04	0.00069611	0.000717437	0.000699834	0.000694574
492	-0.034468511	-0.021754787	0.000174396	-0.045656493	-0.02925534	6.71E-05	6.63E-05	6.83E-05	6.66E-05	6.61E-05
493	-0.023876287	0.055428791	-0.051508713	-0.043378638	-0.020931438	0.000845126	0.000833972	0.000859518	0.000838629	0.00083163
494	-0.020569451	0.020789737	-0.042428623	-0.043232773	-0.031327465	6.72E-05	6.63E-05	6.83E-05	6.67E-05	6.61E-05
495	-0.038106526	0.115004616	0.000428246	0.054255942	0.03463665	0.00078733	0.000776972	0.000801133	0.000781396	0.000775351
496	-0.029281474	0.062560106	-0.01076888	0.017138785	0.004345765	6.72E-05	6.63E-05	6.83E-05	6.66E-05	6.62E-05
497	-0.02394784	0.035684401	-0.015479712	-0.0001621575	-0.010759693	6.72E-05	6.63E-05	6.84E-05	6.66E-05	6.62E-05
498	-0.019960298	0.021491071	-0.016482257	-0.010504354	-0.017451442	6.72E-05	6.63E-05	6.84E-05	6.66E-05	6.62E-05
499	-0.015824664	0.013234233	-0.014742604	-0.013192476	-0.018418262	6.72E-05	6.64E-05	6.83E-05	6.66E-05	6.62E-05
500	-0.009972548	0.007035141	-0.009883329	-0.010360066	-0.013571054	6.71E-05	6.64E-05	6.84E-05	6.65E-05	6.61E-05
Rerata	0.027896086	0.01809526	0.019692307	0.011177636	0.016247102	0.000730729	0.00072919	0.00073405	0.000735592	0.000730123

BAB V

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dipaparkan kesimpulan dan saran dari Tugas Akhir ini.

5.1 Kesimpulan

Mengenai optimasi daya transmisi pada pendulum terbalik beroda dengan kontrol LQG melalui kanal nirkabel dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Estimator optimal pada pendulum terbalik beroda dalam NCS dirancang dengan menggunakan Kalman filter. Tujuan dari Kalman filter yang dikonstruksi adalah meminimumkan MSE estimasi *full state*, dalam hal ini *trace* eror kovarian estimasi *a posteriori*, pada kanal nirkabel dengan *arrival process* γ .
2. Kontrol optimal pada pendulum terbalik beroda dalam NCS dirancang dengan LQR. Dalam proses ini dikonstruksi dan diselesaikan persamaan Riccati dengan pemrograman dinamik yang disesuaikan dengan jenis kanal komunikasi nirkabel IEEE 802.15.4.
3. Daya transmisi optimal pada NCS didapat dengan menentukan PSR optimal. Sebab, daya transmisi merupakan fungsi PSR. Selain itu, dibuktikan berlakunya prinsip pemisahan pada estimator, pengontrol, dan mekanisme daya transmisi. Dengan demikian, daya transmisi yang didapat adalah optimal pada keseluruhan NCS.

Untuk mempermudah simulasi NCS pada Matlab, digunakan algoritma aproksimasi pada keputusan daya transmisi optimal. Hasilnya daya transmisi yang dibutuhkan terkait perubahan jarak antara WSN-pengontrol dan waktu *sleep mode* adalah

minimum, dengan tetap menjaga *plant* stabil di sekitar kondisi acuan. Berdasarkan hasil simulasi, didapat beberapa kesimpulan berikut:

- a. Semakin tinggi daya transmisi yang digunakan *plant* untuk mengirim data baca sensor ke pengontrol, maka semakin tinggi pula peluang data sukses diterima oleh pengontrol.
- b. Semakin kecil kovarian *noise* pada NCS, maka *state* sistem semakin stabil terhadap kondisi acuan.
- c. Saat *state* sistem tidak berada di (menjauh dari) persekitaran kondisi acuan, daya transmisi yang digunakan oleh WSN pada *plant* menjadi besar untuk memastikan data baca sensor terbaru dapat diterima oleh pengontrol. Dengan demikian, pengontrol dapat mengirimkan kontrol input optimal sehingga *state* dari *plant* berada di persekitaran kondisi acuan.
- d. Semakin jauh *plant* dari pengontrol, maka semakin tinggi daya transmisi yang dibutuhkan untuk tingkat kesuksesan pengiriman data yang sama.

5.2 Saran

Berikut saran untuk penelitian lanjutan:

1. Dalam tugas akhir ini penentuan matriks bobot parameter optimasi daya transmisi masih menggunakan *trial and error* sehingga disarankan diimplementasi pembelajaran mesin dalam proses *tuning*. Dengan demikian, mekanisme optimasi daya transmisi dapat lebih adaptif terhadap perubahan *sampling time* atau kovarian *noise* yang signifikan.
2. Dimungkinkan pengkajian optimasi daya transmisi melalui jenis *lossy wireless channel* yang lain.

3. Dimungkinkan pengkajian mekanisme daya transmisi nirkabel dengan kanal komunikasi antara pengontrol dan *plant* yang tak ideal.
4. Disarankan dilakukan pengkajian optimasi daya transmisi pada kanal nirkabel untuk *plant* sistem riil (alat/sistem nyata yang sudah ada).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kortuem, G., Kawsar, F., Sundramoorthy, V., Fitton, D. (2010). "Smart objects as building blocks for the Internet of things". **IEEE Internet Computing Vol. 14, No. 1**, Hal. 44–51.
- [2] Zorzi, M., Gluhak, A., Lange, S., Bassi, A. (2010). "From today's INTRANet of things to a future INTERNet of things: a wireless- and mobility-related view". **IEEE Wireless Communications Vol. 7, No. 6**, Hal. 44–51.
- [3] Rawat, P., Singh, K. D., Chaouchi, H., Bonnin, J. M. (2013). "Wireless sensor networks: a survey on recent developments and potential synergies". **Springer Science+Business Media Vol. 68**, Hal. 1-48.
- [4] Soleymani, T., Hirche, S., Baras, J. S. (2017). "Value of Information in Minimum-Rate LQG Control". **IFAC-PapersOnLine Vol. 50, No. 1**, Hal. 8963–8968.
- [5] Hespanha, J. P., Naghshtabrizi, P., Xu, Y. (2007). "A Survey of Recent Results in Networked Control Systems". **Proceedings of the IEEE Vol. 95 No. 1**, Hal. 138-162.
- [6] Grasser, F., D'Arrigo, A., Colombi, S. (2002). "JOE: A Mobile, Inverted Pendulum". **IEEE Transactions on Industrial Electronics Vol. 49, No. 1**, Hal. 107-114.
- [7] Music, Z., Molinari, F., Gallenmuller, S., Ayan, O., Zoppi, S., Kellerer, W., Georg, C.m Seel, T., Raisch, J. (2018). "Design of a Networked Controller for a Two-Wheeled Inverted Pendulum Robot". Preprint, tersedia di: <https://www.researchgate.net/publication/329324377>.
- [8] Xu, C., Yu, X. (2004). "Mathematical modeling of elastic inverted pendulum control system". **Journal of Control Theory and Applications Vo. 2, No. 3**, Hal. 281–282.

- [9] Bhargal, N. S. (2013). "Design and Performance of LQR and LQR based Fuzzy Controller for Double Inverted Pendulum System". **Journal of Image and Graphics Vol. 1, No. 3**, Hal. 143–146.
- [10] Shehu, M., Ahmad, M. R., Shehu, A., Alhassan, A. (2015). "LQR, double-PID and pole placement stabilization and tracking control of single link inverted pendulum". IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering (ICCSCE).
- [11] Sinopoli, B., Schenato, L., Franceschetti, M., Poolla, K., Jordan, M.I., Sastry, S.S. (2004). "Kalman filtering with intermittent observations". **IEEE Transaction on Automatic Control Vol. 49, No. 9**, Hal.1453-1464.
- [12] Schenato, L., Sinopoli, B., Franceschetti, M., Poolla, K., Sastry, S.S. (2007). "Foundations of control and estimation over lossy networks". **Proceedings of the IEEE Vol. 95, No. 1**, Hal. 163-187.
- [13] Wu, J., Li, Y., Quevedo, D.E., Lau, V., Shi, L. (2015). "Data-driven power control for state estimation: a bayesian inference approach". **Automatica Vol. 54**, Hal. 332-339.
- [14] Ren, X., Wu, J., Johansson, K.H., Shi, G., Shi, L. (2018). "Infinite horizon optimal transmission power control for remote state estimation over fading channels". **IEEE Trans. on Automatic Control Vol. 63, No. 1**, Hal. 85-100.
- [15] Leong, A.S., Dey, S., Nair, G.N., Sharma, P. (2011). "Power allocation for outage minimization in state estimation over fading channels". **IEEE Transactions on Signal Processing Vol. 59, No. 7**, Hal. 3382-3397.

- [16] Soleymani, T., Hirche, S., Baras, J. S. (2018). "LQG Control via Wireless Sensor Networks with Minimal Transmission Power". **IFAC PapersOnLine Vol. 51, No. 7**, Hal. 51-56.
- [17] Zanjireh, M. M., Shahrabi, A., Larijani, H. (2013). ANCH: A New Clustering Algorithm for Wireless Sensor Networks. 2013 27th International Conference on Advanced Information Networking and Applications Workshops.
- [18] Akyildiz, I. F., Su, S. W., Sankarasubramaniam, Y., Cayirci, E. (2002). "A Survey on Sensor Networks". **IEEE Communication Magazine Vol. 40, No. 8**, Hal. 102–114.
- [19] Culler, D. Estrin, D., Srivastava, M. (2004). "Guest Editors' Introduction: Overview of Sensor Networks". **IEEE Computer, Vol. 37, No. 8**, Hal. 41–49.
- [20] IEEE Computer Society. (2015). "IEEE Standard for Low-Rate Wireless Personal Area Networks (WPANs)".
- [21] Goldsmith, A. (2005). "Wireless communications". Cambridge university press.
- [22] Proakis, J. (1995). "Digital Communications". McGraw-Hill.
- [23] Anton, H., Rorres, C.(2005). "Elementary Linear Algebra 9th Ed.". John Willey & Sons.
- [24] Gubner, A. J. (2006). "Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers.". Cambridge University Press.
- [25] Magnus, J. R. Neudecker, H. (2007). "Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics". John Wiley & Sons.
- [26] Petersen, K. B. Pedersen, M. S. (2012). "The Matrix Cookbook". Tersedia di: <http://matrixcookbook.com>.

- [27] Johnson, R. A. Wichern, D. W. (2002). "Applied Multivariate Statistical Analysis 5th Edition". Prentice-Hall Inc.
- [28] Bain, L. J. Engelhardt, M. (1992). "Introduction to Probability and Mathematical Statistics 2nd Edition". Duxbury Thomson Learning.
- [29] Taboga, M. (2012). "Lectures on Probability Theory and Mathematical Statistics 2nd Edition". CreateSpace Independent Publishing Platform.
- [30] Dineen, S. (2005). "Probability Theory in Finance: A Mathematical Guide to the Black-Scholes Formula". American Mathematical Society.
- [31] Astrom, K. J. (1970). "Introduction to Stochastic Control Theory". Academic Press.
- [32] Zarchan, P., Musoff, H. (2000). "Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach". American Institute of Aeronautics and Astronautics, Incorporated.
- [33] Lewis, F. K., Xie, L., Popa, D. (2008). "Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory". CRC Press.
- [34] Lacey, T. Thacker, N. A. (1998). "Tutorial: the Kalman filter". University of Manchester.
- [35] Sinha, A. (2007). "Linear Systems: Optimal and Robust Control". CRC Press.
- [36] Michigan. "Control Tutorials for Matlab & Simulink". Tersedia di: <http://ctms.engin.umich.edu>.
- [37] Ogata, K. (2010). "Modern Control Engineering, Fifth Edition". Pearson.

- [38] Soleymani, T. (2018). “Value of Information Analysis in Feedback Control”. Technische Universitat Munchen.

BIODATA PENULIS

Penulis lahir di Temanggung, 15 Juni 1998. Penulis telah menempuh pendidikan di SD Negeri 1 Parakan Kauman, SMP Negeri 1 Parakan, dan SMA Negeri 1 Temanggung. Kemudian, pada tahun 2016 penulis melanjutkan pendidikannya di Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data (FSAD) ITS. Dalam perkuliahan penulis mengambil Rumpun Mata Kuliah Ilmu Komputer, dan Tugas Akhir di bidang Matematika Terapan (Optimasi dan Simulasi Sistem). Selain itu, selama menempuh pendidikan S1 penulis juga mengikuti kegiatan olimpiade ONMIPA-PT, menjadi koordinator Tim Soal Olimpiade Matematika ITS (OMITS) 12th, asisten dosen mata kuliah Kalkulus II, Matematika I, dan Matematika II, dan bergabung dalam kepengurusan Lembaga Dakwah Departemen Ibnu Muqlah. Pembaca dapat menghubungi penulis via email zuhair98zahir@gmail.com atau LINE [zuhairza-hir](https://www.whatsapp.com/channel/00291a11111111111111).

