



TUGAS AKHIR - KM184801

KONTROL OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN VIRUS INFLUENZA TIPE A H1N1 DENGAN MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN

INDAH RAHMADHANIA
NRP 0611154000034

Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



TUGAS AKHIR - KM184801

**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL
PENYEBARAN VIRUS INFLUENZA TIPE A
H1N1 DENGAN MENGGUNAKAN PRINSIP
MINIMUM PONTRYAGIN**

**INDAH RAHMADHANIA
NRP 0611154000034**

**Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020**



FINAL PROJECT - KM184801

**OPTIMAL CONTROL OF SPREADING
INFLUENZA VIRUS MODEL TYPE A H1N1
USING PONTRYAGIN MINIMUM PRINCIPLE**

**INDAH RAHMADHANIA
NRP 0611154000034**

**Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty Of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020**

LEMBAR PENGESAHAN

**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN
VIRUS INFLUENZA TIPE A H1N1 DENGAN
MENGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN**
**OPTIMAL CONTROL OF SPREADING INFLUENZA VIRUS
MODEL TYPE A H1N1 USING PONTRYAGIN MINIMUM
PRINCIPLE**

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

INDAH RAHMADHANIA
NRP. 0611154000034

Menyetujui,
Dosen Pembimbing


Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
NIP. 19730930 199702 1 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS


Subchan, Ph.D

NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, 23 Januari 2020

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatar-belakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir ini akan diuraikan di bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Penyakit menular adalah penyakit yang disebabkan oleh sebuah agen biologi seperti virus, bakteri, atau parasit. Suatu individu dapat terjangkit penyakit menular melalui kontak langsung maupun tidak langsung dengan individu terinfeksi. Akibat kontak antarindividu tersebut terjadilah suatu infeksi baru yang menjadi tanda adanya kasus penyebaran penyakit menular. Penyebaran penyakit menular yang terus terjadi akan mengakibatkan kondisi yang disebut epidemi. Epidemi adalah kejadian tersebarnya penyakit menular dalam masyarakat yang jumlah penderitanya meningkat secara nyata melebihi keadaan yang lazim pada waktu dan daerah tertentu. Jika penyebaran penyakit tersebut tidak lenyap dan jumlah orang terinfeksi tetap stabil, maka suatu penyakit dikatakan dalam keadaan epidemi.

Munculnya suatu penyakit tersebut mendapat perhatian dari berbagai kalangan, khususnya para ahli bidang kedokteran yang memang mempunyai peranan penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit. Perkembangan ilmu pengetahuan di dalam matematika juga turut memberikan peranan yang penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit. Peranan tersebut berupa model matematika yang dapat menggambarkan penyebaran suatu penyakit di masa yang akan datang dengan melihat

kondisi masa sekarang atau masa lalu. Model matematika tersebut disebut model epidemi.

Secara umum, model epidemi mempertimbangkan tingkat kejadian terinfeksi penyakit (*incidence rate*). Tingkat kejadian infeksi menyatakan banyaknya kasus infeksi baru akibat interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi. Dalam beberapa waktu terakhir, penyebaran penyakit menular terjadi dalam bentuk yang beragam, seperti pada penyakit Influenza H1N1. Keberagaman yang terjadi yaitu adanya perbedaan periode *exposed* dalam setiap individu yang terinfeksi virus H1N1. Terdapat individu yang melewati fase *exposed*, dan ada yang tidak. Hal tersebut terjadi karena variasi virus dan keadaan jasmani yang berbeda dari setiap individu.

Influenza H1N1 merupakan penyakit pernapasan akut pada manusia yang memengaruhi hidung, tenggorokan, dan paru-paru yang disebabkan oleh virus influenza H1N1. Pada tahun 2009, terdeteksi jumlah kasus terinfeksi virus pandemi influenza A H1N1 di Mexico dan AS kian bertambah dalam waktu singkat. Departemen kesehatan Mexico mencatat adanya kenaikan kejadian *influenza-like-illness* pada musim dingin; berarti di belahan bumi utara terjadi sekitar bulan November-Februari, dan di belahan bumi selatan sekitar bulan April-Juli. Berdasarkan data dari WHO, hasil analisis dari 3734 pasien positif virus influenza A H1N1 di Mexico bahwa sebagian terbesar pasien berusia muda : 28% berumur 0-9 tahun, sedangkan 25,1% berumur 10-19 tahun. Sedangkan hasil analisis data AS dari 532 pasien juga sebagian besar pasien berusia muda: 20% berumur 0-9 tahun dan 38,99% berumur 10-18 tahun.[19]

Beberapa literatur telah dibahas beberapa model penyebaran penyakit menular Influenza A H1N1. Pada tahun 2003, Neil dan rekannya membangun model matematika simulasi penularan influenza efek terapi penghambat neuraminidase pada tingkat infeksi dan penularan virus yang

resistan terhadap obat. Mereka berkonsentrasi pada penyelidikan numerik tanpa mempertimbangkan stabilitas model. Baru-baru ini, Zhou dan Guo menganalisis model influenza dengan vaksinasi. Namun, banyak artikel tidak peduli dengan resistensi penyakit pada manusia.[7]

Pencegahan pada penyebaran penyakit Influenza A H1N1 dapat dilakukan dengan dapat dikendalikan dengan pemberian obat pada individu terinfeksi sehingga seseorang mempunyai ketahanan tubuh yang lebih baik, dan mampu mempertahankan diri terhadap penyakit atau masuknya virus dari luar. Oleh karena itu, untuk mengetahui penyebaran penyakit, diperlukan suatu model matematika yang dapat merepresentasikan permasalahan yang terjadi guna mencegah penyebaran penyakit tersebut.

Penelitian yang dilakukan oleh Nguyen Huu Khanh pada tahun 2015 dengan judul “*Stability analysis of an influenza virus model with disease resistance*”. Pada penelitian ini mempelajari model baru yang menggambarkan penularan virus influenza tipe A dengan resistansi penyakit pada manusia. Analisis matematis menunjukkan bahwa dinamika penyebaran ditentukan oleh angka reproduksi dasar R_0 . [7]

Dalam Tugas Akhir ini dibahas model penyebaran virus influenza tipe A H1N1 dengan memasukkan parameter kontrol yaitu pemberian obat influenza pada individu terinfeksi dan pengendalian lingkungan berupa penyuluhan, seminar dan juga kerja bakti sebagai upaya dalam mengendalikan penyebaran penyakit. Setelah itu akan dilakukan simulasi dari penyelesaian numerik metode Runge-Kutta Orde Empat menggunakan *software* MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dituliskan, maka rumusan masalah pada proposal Tugas Akhir ini yaitu:

1. Analisis kestabilan dan keterkontrolan model penyebaran virus influenza tipe A H1N1
2. Design kontrol optimal pada model penyebaran virus influenza tipe A H1N1 dengan prinsip minimum pontryagin
3. Bagaimana pengaruh kontrol yang diberikan pada hasil simulasi model penyebaran virus influenza tipe A H1N1

1.3 Batasan Masalah

Pada proposal Tugas Akhir ini, penulis membatasi permasalahan sebagai berikut:

1. Kontrol yang digunakan pada model dinamik penyebaran virus influenza untuk upaya mengurangi jumlah individu yang meninggal akibat terinfeksi penyakit influenza dan upaya dalam meminimalkan laju kontak penularan virus
2. Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini berdasarkan jurnal : “*Stability analysis of an influenza virus model with disease resistance*” ref [7].
3. Penyelesaian kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin
4. Simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4
5. Simulasi dilakukan dengan menggunakan *software* MATLAB.

1.4 Tujuan

Tujuan dalam penulisan proposal Tugas Akhir ini yaitu:

1. Melakukan analisis kestabilan dan keterkontrolan model penyebaran influenza tipe A H1N1

2. Mendapatkan design kontrol optimal untuk upaya mengurangi jumlah individu yang meninggal akibat terinfeksi penyakit influenza dan upaya dalam meminimalkan laju kontak penularan virus.
3. Mengetahui hasil simulasi pada model penyebaran virus influenza tipe A sebelum dan sesudah dikontrol.

1.5 Manfaat

Pada penulisan proposal Tugas Akhir ini, penulis mengharapkan agar penelitian ini dapat bermanfaat yaitu sebagai berikut :

1. Memberikan informasi mengenai design kontrol optimal dalam model penyebaran virus influenza tipe A H1N1 sehingga dapat mengurangi jumlah individu yang meninggal akibat terinfeksi penyakit influenza dan upaya dalam meminimalkan laju kontak penularan virus.
2. Sebagai referensi solusi terkait penerapan teori kontrol optimal dalam upaya pengendalian penyebaran virus influenza tipe A H1N1.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam laporan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. **BAB I PENDAHULUAN**
Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan.
2. **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**
Bab ini berisi tentang teori dasar yang mendukung dalam Tugas Akhir ini, antara lain model sistem dinamik yang digunakan, teori-teori analisis model antara lain kestabilan, keterkontrolan, teori kendali optimal, prinsip

minimum pontryagin dan metode runge-kutta orde empat.

3. **BAB III METODEDELOGI**

Bab ini menjelaskan tentang tahapan-tahapan yang digunakan untuk penyelesaian Tugas Akhir ini.

4. **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Bab ini membahas tentang analisis model pada model dinamik virus influenza, penerapan prinsip minimum pontryagin dan Hamiltonian untuk mencari kendali optimal, mencari solusi numerik dengan metode runge-kutta orde empat dan simulasi model tersebut.

5. **BAB V PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan Tugas Akhir yang diperoleh dari bab pembahasan serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan, serta untuk membantu memahami permasalahan yang akan dibahas.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada tahun 2003, Neil dan rekannya membangun model matematika simulasi penularan influenza efek terapi penghambat neuraminidase pada tingkat infeksi dan penularan virus yang resistan terhadap obat. Mereka berkonsentrasi pada penyelidikan numerik tanpa mempertimbangkan stabilitas model. Fraser et al. mempelajari model transmisi influenza A (H1N1) pada populasi manusia, tetapi mereka tidak memasukkan transmisi lintas spesies. Baru-baru ini, Zhou dan rekannya menganalisis model influenza dengan vaksinasi. Namun, banyak artikel tidak peduli dengan resistensi penyakit pada manusia. [7]

Dalam penulisan Tugas Akhir ini, penulis merujuk pada beberapa penelitian sebelumnya yang sesuai dengan topik yang diambil. Salah satu penelitian adalah yang dilakukan oleh Nguyen Huu Khanh dengan judul “*Stability analysis of an influenza virus model with disease resistance*”. Pada penelitian ini mempelajari model baru yang menggambarkan penularan virus influenza tipe A dengan resistansi penyakit pada manusia. Analisis matematis menunjukkan bahwa dinamika penyebaran ditentukan oleh angka reproduksi dasar R_0 . [7]

2.2 Virus Influenza

Tipe A merupakan virus penyebab influenza yang bersifat epidemik. Salah satu contohnya adalah Influenza tipe A H1N1 merupakan penyakit pernapasan akut pada manusia yang memengaruhi hidung, tenggorokan, dan paru-paru yang disebabkan oleh virus influenza H1N1. Pada tahun 2009, terdeteksi jumlah kasus terinfeksi virus pandemi influenza A H1N1 di

Mexico dan AS kian bertambah dalam waktu singkat. Departemen kesehatan Mexico mencatat adanya kenaikan kejadian *influenza-like-illness* pada musim dingin; berarti di belahan bumi utara terjadi sekitar bulan November-Februari, dan dibelahan bumi selatan sekitar bulan April-Juli. Berdasarkan data dari WHO, hasil analisis dari 3734 pasien positif virus influenza A H1N1 di Mexico bahwa sebagian terbesar pasien berusia muda : 28% berumur 0-9 tahun, sedangkan 25,1% berumur 10-19 tahun. Sedangkan hasil analisis data AS dari 532 pasien juga sebagian besar pasien berusia muda: 20% berumur 0-9 tahun dan 38,99% berumur 10-18 tahun.[19]

2.3 Model Penyakit Virus Influenza (Nguyen Huu Khanh)

Model dinamik penyakit virus influenza menurut Nguyen Huu Khanh sebagai berikut[6] :

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \Lambda - \gamma\bar{S}(t) \left(\frac{\bar{E}(t) + \bar{I}(t)}{N(t)} \right) + c\bar{E}(t) + b\bar{I}(t) + \alpha\bar{R}(t) - \mu\bar{S}(t)$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \gamma\bar{S}(t) \left(\frac{\bar{E}(t) + \bar{I}(t)}{N(t)} \right) - (c + \varepsilon + \mu)\bar{E}(t)$$

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \varepsilon\bar{E}(t) - (\beta + b + \mu)\bar{I}(t)$$

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \beta\bar{I}(t) - (\alpha + \mu)\bar{R}(t)$$

Dengan kondisi awal : $\bar{S}(t) + \bar{E}(t) + \bar{I}(t) + \bar{R}(t) = N(t)$

dengan keterangan variabel dan parameter sebagai berikut:

$\bar{S}(t)$: Jumlah individu yang sehat dan rentan terhadap penyakit pada saat t

$\bar{E}(t)$: Jumlah individu yang terpapar pada saat t

$\bar{I}(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi pada saat t

$\bar{R}(t)$: Jumlah individu yang sehat setelah menjalani pengobatan pada saat t

Λ : rekrutmen individu rentan.

dan dengan parameter sebagai berikut :

- c : rate individu *exposed* menjadi *susceptible* tanpa pengobatan
 b : rate individu *infected* menjadi *susceptible* tanpa pengobatan.
 μ : konstanta kematian dari setiap kompartemen.
 ε : 1/IPP. Dimana IPP adalah periode inkubasi virus
 α : rate individu *recovered* menjadi *susceptible* lagi.
 β : rate individu *infected* menjadi *recovered*.
 γ : rate kontak penularan virus

2.4 Titik Setimbang

Definisi 2.1 [5]

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$$

dengan $x \in R^n$. Sebuah vektor \bar{x} yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut **titik setimbang**.

2.5 Linierisasi

Linearisasi diperlukan karena bentuk model matematika penyebaran penyakit adalah persamaan diferensial nonlinear. Linearisasi adalah proses mentransformasi sistem persamaan diferensial nonlinear ke bentuk persamaan diferensial linear. Proses ini dilakukan dengan linearisasi di sekitar titik kesetimbangan.

Definisi 2.2 [8]

Diberikan sistem *autonomous* non linear

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Misalkan $\hat{x} = \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ adalah titik kesetimbangan sistem (2.5), maka pendekatan linear sistem (2.5) di sekitar titik kesetimbangan diperoleh dengan menggunakan deret Taylor dari fungsi f di sekitar titik kesetimbangan $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T$ yaitu

$$\begin{aligned}
 f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T &= f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\
 &+ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_1 - \hat{x}_1) + \dots \\
 &+ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_1} \\
 f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T &= f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\
 &+ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_1 - \hat{x}_1) + \dots \\
 &+ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_2} \\
 &\vdots \\
 &\qquad\qquad\qquad (2.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T &= f_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\
 &+ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_1 - \hat{x}_1) + \dots \\
 &+ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_n}
 \end{aligned}$$

Karena nilai $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$ mendekati 0, maka $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$ dapat diabaikan. Oleh karena itu, pendekatan linear sistem (2.5) adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_2 - \hat{x}_2) \\
 &+ \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_1 - \hat{x}_1) \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_2 - \hat{x}_2) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_n - \hat{x}_n) \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_n(t)}{dt} &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_1 - \hat{x}_1) \\
&\quad + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_2 - \hat{x}_2) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_n - \hat{x}_n)
\end{aligned}$$

Apabila sistem (2.3) diubah dalam bentuk matriks, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - \hat{x}_1) \\ (x_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ (x_n - \hat{x}_n) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Misalkan $y_1 = x_1 - \hat{x}_1, y_2 = x_2 - \hat{x}_2, \dots, y_n = x_n - \hat{x}_n$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1(t)}{dt} \\ \frac{dy_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_n(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Matriks Jacobian dari persamaan (2.8) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \end{bmatrix}$$

Persamaan (2.5) disebut hasil linearisasi dari sistem (2.5).

2.6 Kestabilan Asimtotis Lokal

Kestabilan asimtotik local merupakan kestabilan dari sistem linear atau kestabilan dari linearisasi sistem tak linear. Kestabilan asimtotik local pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.

Teorema 2.2 [18]

Titik setimbang (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

2.7 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai-nilai karakteristik dari matrik A adalah akar-akar polynomial dari

$$\det(\lambda I - A) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \lambda^n$$

dengan $a_0 = 1$. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat dipakai untuk mengecek langsung kestabilan melalui koefisien a_i tanpa menghitung akar-akar dari polynomial yang ada. [5]

$$\begin{array}{c|c} \lambda^n & a_0 a_2 \dots a_{n-1} \\ \lambda^{n-1} & a_1 a_3 \dots a_n \\ \lambda^{n-2} & b_1 b_2 \dots \\ \lambda^{n-3} & c_1 c_2 \\ \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot \\ \lambda^0 & z \end{array}$$

dimana b_1, \dots, c_1, \dots dan z secara rekursif didapat dari :

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \dots; \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}, \dots$$

Kriteria Routh-Hurwitz menyimpulkan bahwa banyaknya perubahan tanda dalam kolom pertama pada tabel, sama dengan banyaknya akar-akar polynomial yang bagian realnya positif. Bila dalam kolom pertama tidak ada perubahan tanda (semuanya bertanda positif atau semuanya bertanda negative), maka semua akar polynomial bagian realnya adalah tak positif dan sistem stabil [5].

2.8 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan suatu parameter yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Bilangan reproduksi dasar menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit disebabkan oleh satu individu infeksi. Kondisi yang akan timbul adalah satu diantara tiga kemungkinan berikut.

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang dalam populasi.
2. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap dalam populasi.
3. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah dalam populasi.

Bilangan reproduksi dasar(R_0) dapat diperoleh dengan beberapa metode, salah satunya adalah dengan membangun matriks yang membangkitkan jumlah individu baru yang terinfeksi. Matriks ini dinotasikan dengan G dan dinamakan NGM (*Next Generation Matrix*). Dimana g_{ij} adalah jumlah infeksi sekunder tipe i yang disebabkan oleh individu yang terinfeksi tunggal tipe j , dengan asumsi bahwa populasi tipe i sepenuhnya *susceptible*.

Bilangan reproduksi dasar diberikan oleh nilai eigen dari G . NGM terdiri dari dua bagian : \mathbb{F} dan \mathbb{V} di mana

$$\mathbb{F} = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_j} \right]$$

dan

$$\mathbb{V} = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_j} \right]$$

\mathcal{F}_i adalah matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit yang menambah kelas infeksi, sementara \mathcal{V}_i adalah matriks laju perkembangan, kematian, dan kesembuhan yang mengurangi kelas infeksi. x_0 adalah keadaan ekuilibrium bebas penyakit . R_0 adalah nilai eigen dari matriks $G = \mathbb{F}\mathbb{V}^{-1}$ [3].

2.9 Keterkontrolan

Keterkontrolan sistem dapat digunakan untuk mentsbilkan sistem, selain itu permasalahan kontrol optimal mungkin tidak akan diperoleh jika sistem tidak terkontrol. Maka perlu dianalisis mengenai keterkontrolan sistem

Teorema 2.3 [8]

Jika terdapat persamaan matrik state sebagai berikut :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Syarat perlu dan cukup suatu sistem linear dikatakan terkontrol, jika matriks

$$M_C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Mempunyai rank sama dengan n.

2.10 Teori Kontrol Optimal

Pada prinsipnya, tujuan dari pengendalian optimal adalah menentukan signal atau kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi beberapa *constraint*, dengan tujuan memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J) yang sesuai[9]. Adapun masalah formulasi kendali optimal terdiri dari :

1. Mendeskripsikan secara sistematis suatu model (secara umum dalam bentuk *variable state*)
2. Menentukan fungsi objektif(*performance index*)
3. Menentukan kendala dan kondisi batas yang harus dipenuhi

Fungsi objektif (*performance index*) dapat diformulasikan sebagai berikut :

$$J(u(t)) = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2.9)$$

Dengan kendala :

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.10)$$

Dan kondisi batas $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$, t_0 , dan t_f masing-masing adalah waktu awal dan akhir. S, V dan f adalah fungsi skalar.

Serta kontrol $u^*(t)$ merupakan kontrol optimal, jika disubstitusikan ke dalam sistem (2.10) akan diperoleh keadaan yang optimal $x^*(t)$ dan pada saat yang sama juga dapat mengoptimalkan indeks performansi (2.9).

2.11 Prinsip Minimum Pontryagin

Langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah kendali optimal adalah sebagai berikut[9] :

a) Langkah 1

Bentuk fungsi Hamiltonian (H) sebagai berikut,

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t) \quad (2.11)$$

dengan tanda 'menyatakan suatu transpose

b) Langkah 2

Meminimumkan H terhadap $u(t)$ dengan cara :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u(t)} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Sehingga diperoleh kondisi stationer $u^*(t)$.

$$u^*(t) = h(x(t), u(t), t) \quad (2.13)$$

c) Langkah 3

Dengan menggunakan hasil yang diperoleh dari langkah 2 akan didapatkan fungsi Hamiltonian yang optimal, H^* yaitu :

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (2.14)$$

d) Langkah 4

Mencari persamaan *statedan co-state*

$$x^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_* \text{ dan } \lambda^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_* \quad (2.15)$$

Dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir

$$\left[H^* + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{t_f} + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f} \delta x_f = 0 \quad (2.16)$$

e) Langkah 5

Untuk memperoleh kendali optimal, Substitusi solusix*(t), $\lambda^*(t)$ dari langkah (4) ke dalam persamaan $u^*(t)$ pada langkah (2).

2.12 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar karena metode ini menawarkan penyelesaian persamaan diferensial dengan pertumbuhan error yang jauh lebih kecil dan tidak memerlukan turunan dari fungsi.

Diberikan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f_1(t, x, y, z)$$

$$\dot{y} = f_2(t, x, y, z)$$

$$\dot{z} = f_3(t, x, y, z)$$

Metode Runge-Kutta orde empat untuk sistem persamaan diatas adalah sebagai berikut [15]:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y})$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(k_{1,z} + 2k_{2,z} + 2k_{3,z} + k_{4,z})$$

dengan

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$k_{1,x} = hf_1(t_i, x_i, y_i, z_i)$$

$$k_{1,y} = hf_2(t_i, x_i, y_i, z_i)$$

$$k_{1,z} = hf_3(t_i, x_i, y_i, z_i)$$

$$k_{2,x} = hf_1\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{1,x}, y_i + \frac{1}{2}k_{1,y}, z_i + \frac{1}{2}k_{1,z}\right)$$

$$k_{2,y} = hf_2(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{1,x}, y_i + \frac{1}{2}k_{1,y}, z_i + \frac{1}{2}k_{1,z})$$

$$k_{2,z} = hf_3(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{1,x}, y_i + \frac{1}{2}k_{1,y}, z_i + \frac{1}{2}k_{1,z})$$

$$k_{3,x} = hf_1(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{2,x}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,y}, z_i + \frac{1}{2}k_{2,z})$$

$$k_{3,y} = hf_2(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{2,x}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,y}, z_i + \frac{1}{2}k_{2,z})$$

$$k_{3,z} = hf_3(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{2,x}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,y}, z_i + \frac{1}{2}k_{2,z})$$

$$k_{4,x} = hf_1(t_i + h, x_i + k_{3,x}, y_i + k_{3,y}, z_i + k_{3,z})$$

$$k_{4,y} = hf_2(t_i + h, x_i + k_{3,x}, y_i + k_{3,y}, z_i + k_{3,z})$$

$$k_{4,z} = hf_3(t_i + h, x_i + k_{3,x}, y_i + k_{3,y}, z_i + k_{3,z})$$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n}$$

dimana:

h = ukuran langkah

n = banyaknya langkah

t_0 = waktu awal

t_f = waktu akhir

Jenis metode Runge-Kutta yang digunakan adalah metode *foward backward sweep* Runge-Kutta orde 4 karena sistem persamaan diferensial pada tugas akhir ini terdapat persamaan yang diketahui nilai awal dan persamaan lain yang diketahui nilai akhir. Alur pengerjaannya adalah menyelesaikan persamaan yang diketahui nilai awalnya terlebih dahulu secara *foward*, kemudian persamaan yang lain yang diketahui nilai akhir dikerjakan secara *backward*. Secara matematika ditulis sebagai berikut :

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = f(t, \lambda_1, X(t)), x(t_0) = y_1 \quad (2.17)$$

$$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = f(t, \lambda_2, X(t)), x(t_f) = y_2 \quad (2.18)$$

Integrasi numerik dari persamaan dengan metode Runge-Kutta orde empat dinyatakan sebagai berikut :

- *Forward Sweep*

$$f_{i,n+1}(t) = f_{i,n}(t) + \frac{h}{6}(k_{1,f_i} + 2k_{2,f_i} + 2k_{3,f_i} + k_{4,f_i})$$

- *Backward Sweep*

$$\lambda_{i,n-1}(t) = \lambda_{i,n}(t) - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_i} + 2k_{2,\lambda_i} + 2k_{3,\lambda_i} + k_{4,\lambda_i})$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada tugas akhir ini. Dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Langkah Pengerjaan

Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Pada langkah ini, dilakukan pencarian dan pengumpulan referensi yang menunjang topik penelitian. Yaitu studi referensi tentang penyebaran virus influenza, analisis sistem yang meliputi kestabilan, keterkontrolan, dan keselamatan, metode *Runge-Kutta Orde 4*, serta teori kontrol optimal dengan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Referensi yang digunakan adalah jurnal ilmiah, buku tugas akhir, thesis atau hasil penelitian lainnya yang berkaitan dengan permasalahan pada proposal Tugas Akhir ini.

2. Identifikasi Model

Pada langkah ini, untuk memahami model penyebaran virus influenza dengan resistensi penyakit disusun dengan asumsi-asumsi tertentu sehingga dapat dibuat model kompartemen dengan populasi *Susceptible, Exposed, Infected, dan Recovered*.

3. Analisis Model Matematika

Pada model penyebaran virus influenza ini akan ditentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Kemudian untuk menentukan kestabilan lokal yaitu

dengan membentuk matriks Jacobian pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik yang selanjutnya dapat ditentukan nilai eigen matrik Jacobian dari modelnya. Kestabilan lokal pada titik kesetimbangan bebas penyakit akan didapatkan bilangan reproduksi dasar (R_0).

4. Formulasi Masalah Kontrol Optimal dan Penyelesaian

Pada langkah ini dilakukan perancangan masalah kontrol optimal dari model penyebaran virus influenza yang meliputi membentuk fungsi objektif serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi. Setelah formulasi masalah kontrol optimal sudah dilakukan, maka langkah selanjutnya yaitu penyelesaian kontrol optimal dari model matematika yang diberikan dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap ini sebagai berikut:

1. Membentuk fungsi Hamiltonian
2. Menentukan persamaan *state* dan *costate*
3. Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi
4. Menentukan kontrol optimal.

5. Simulasi, Analisis Hasil dan Pembahasan

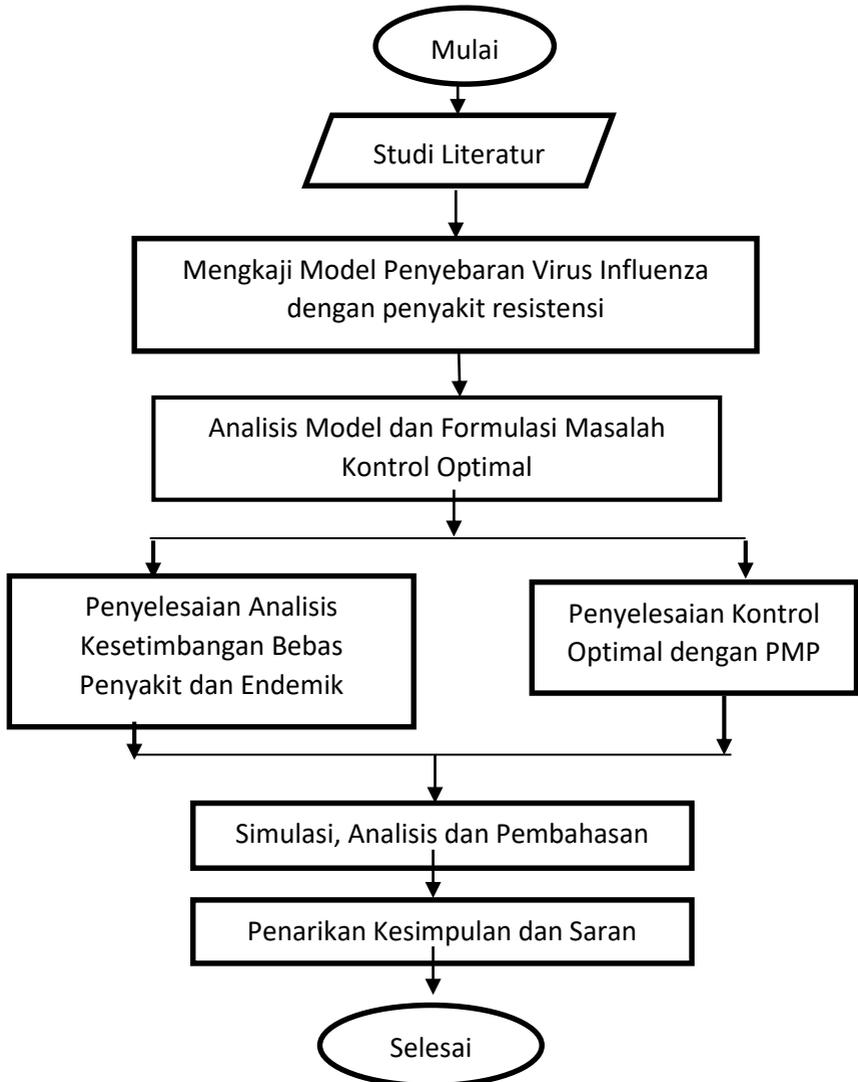
Pada tahap ini sistem persamaan disimulasikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta Orde empat dengan bantuan aplikasi MATLAB R2013a, dengan langsung menggambarkan grafik kestabilan serta penyelesaian numerik dari model penyebaran virus influenza sebelum dan sesudah dikontrol.

6. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada langkah ini, dilakukan penarikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil pembahasan. Serta diberikan saran sebagai perbaikan dan pengembangan untuk penelitian selanjutnya.

3.2 Diagram Alur Penelitian

Alur penelitian yang dilakukan dalam Tugas Akhir ini disajikan dalam **Gambar 3.1** berikut ini.



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai deskripsi model penyebaran penyakit influenza, titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, bilangan reproduksi dasar serta analisa sifat sistem dari model tersebut. Selain itu akan dicari solusi kontrol optimal dari model dengan menggunakan prinsip minimum pontryagn, dan akan disimulasikan model tersebut secara numerik menggunakan metode Rungge-Kutta Orde 4 menggunakan Matlab R2013a.

4.1 Deskripsi Model Penyebaran Virus Influenza Tipe A

Model dinamik penyebaran virus influenza yang dibahas pada Tugas Akhir ini adalah model dinamik menurut Nguyen Huu Khanh [7] yang meninjau model SEIR terbaru yang menggambarkan penularan virus influenza dengan resistensi penyakit pada manusia.

Berikut ini diberikan asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit *influenza* menurut Nguyen Huu Khanh [7], yaitu :

1. Populasi bersifat tertutup yang berarti bahwa penambahan atau pengurangan jumlah individu melalui emigrasi dan imigrasi tidak diperhatikan.
2. Populasi terbagi menjadi 4 bagian yaitu $S(t)$ subpopulasi individu rentan, $E(t)$ individu terpapar, $I(t)$ Individu yang terinfeksi dan $R(t)$ individu yang sembuh.
3. Terjadi pada lingkungan homogen dengan laju kelahiran dan laju kematian diasumsikan sama. Setiap individu yang lahir masuk kedalam kelas individu *Susceptible* dan setiap individu yang mati dari setiap kelas mempunyai laju proporsional dengan jumlah individu pada masing-masing kelas.
4. Dalam model ini, individu yang terpapar dan yang terinfeksi dapat kembali ke kelompok rentan tanpa pengobatan.

Adapun notasi serta definisi dari variabel dan parameter yang digunakan pada model matematika penyebaran virus influenza tipe A yaitu tertera pada table di bawah ini:

Tabel 4.1 Tabel Variabel pada Model Matematika Penyebaran Virus Influenza tipe A H1N1

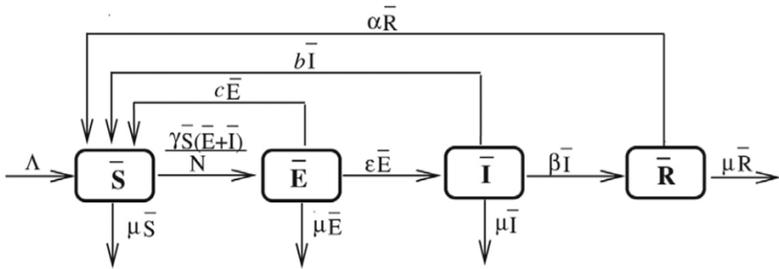
Variabel	Keterangan
$\bar{S}(t)$	Jumlah individu yang sehat dan rentan terhadap penyakit pada saat t
$\bar{E}(t)$	Jumlah individu yang terpapar pada saat t
$\bar{I}(t)$	Jumlah individu yang terinfeksi pada saat t
$\bar{R}(t)$	Jumlah individu yang sehat setelah menjalani pengobatan pada saat t
Λ	rekrutmen individu rentan.

Tabel 4.2 Tabel Parameter pada Model Matematika Penyebaran Virus Influenza tipe A H1N1

Parameter	Keterangan
μ	<i>Rate</i> kelahiran atau kematian alami
b	<i>Rate</i> individu <i>infected</i> menjadi <i>susceptible</i> tanpa pengobatan.
c	<i>Rate</i> individu <i>exposed</i> menjadi <i>susceptible</i> tanpa pengobatan.
ε	$\varepsilon : 1/IPP$. Dimana IPP adalah periode inkubasi virus.
α	<i>Rate</i> individu <i>recovered</i> menjadi <i>susceptible</i> lagi
β	<i>Rate</i> individu <i>infected</i> menjadi <i>recovered</i> .
γ	<i>Rate</i> kontak penularan virus
$\gamma S(t)(E(t) + I(t))$	adanya interaksi antara subpopulasi yang rentan dengan subpopulasi yang terinfeksi dan antara subpopulasi yang rentan dengan subpopulasi terpapar, sehingga terjadi kontak penularan virus.

Berdasarkan mekanisme penyebaran virus influenza yang telah dijelaskan serta asumsi-asumsi dan parameter yang telah

disebutkan, dapat dibentuk diagram penyebarannya sebagai berikut.



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Matematika Penyebaran Virus Influenza Tipe A

Berdasarkan diagram kompartemen diatas, model matematika penyebaran virus influenza tipe A dapat disajikan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \Lambda - \gamma\bar{S}(t) \left(\frac{\bar{E}(t)+\bar{I}(t)}{N(t)} \right) + c\bar{E}(t) + b\bar{I}(t) + \alpha\bar{R}(t) - \mu\bar{S}(t),$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \gamma\bar{S}(t) \left(\frac{\bar{E}(t)+\bar{I}(t)}{N(t)} \right) - (c + \varepsilon + \mu)\bar{E}(t),$$

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \varepsilon\bar{E}(t) - (\beta + b + \mu)\bar{I}(t), \quad (4.1)$$

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \beta\bar{I}(t) - (\alpha + \mu)\bar{R}(t).$$

dengan kondisi awal $N(t) = \bar{S}(t) + \bar{E}(t) + \bar{I}(t) + \bar{R}(t)$

Dari persamaan dimensional yang diberikan pada (4.1), selanjutnya akan dicari laju pertumbuhan populasi manusia sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} N(t) = \frac{d}{dt} [\bar{S}(t) + \bar{E}(t) + \bar{I}(t) + \bar{R}(t)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} N(t) = \frac{d}{dt} \bar{S}(t) + \frac{d}{dt} \bar{E}(t) + \frac{d}{dt} \bar{I}(t) + \frac{d}{dt} \bar{R}(t)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}N(t) &= \Lambda - \gamma\bar{S}(t) \left(\frac{\bar{E}(t) + \bar{I}(t)}{N(t)} \right) + c\bar{E}(t) + b\bar{I}(t) + \alpha\bar{R}(t) \\ &\quad - \mu\bar{S}(t) + \gamma\bar{S}(t) \left(\frac{\bar{E}(t) + \bar{I}(t)}{N(t)} \right) - (c + \varepsilon + \mu)\bar{E}(t) \\ &\quad + \varepsilon\bar{E}(t) - (\beta + b + \mu)\bar{I}(t) + \beta\bar{I}(t) - (\alpha + \mu)\bar{R}(t) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}N(t) = \Lambda - \mu\bar{S}(t) + \mu\bar{E}(t) + \mu\bar{I}(t) + \mu\bar{R}(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}N(t) = \Lambda - \mu[\bar{S}(t) + \bar{E}(t) + \bar{I}(t) + \bar{R}(t)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}N(t) = \Lambda - \mu N$$

Sehingga dengan menggunakan integrasi persamaan diferensial didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{\Lambda - \mu N} = dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dN}{\Lambda - \mu N} = \int dt \quad \text{Misal } v = \Lambda - \mu N \Leftrightarrow dv = -\mu dN$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu} \int \frac{1}{v} dv = \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu} \ln v = t + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \ln v = -(t + C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} v = e^{-(t+C)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} v = \frac{1}{\mu} e^{-\mu(t+C)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda - \mu N}{\mu} = \frac{1}{\mu} e^{-\mu(t+C)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda}{\mu} - N = \frac{1}{\mu} e^{-\mu(t+C)}$$

$$\Leftrightarrow N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu(t+C)}$$

$$\Leftrightarrow N(t) = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{c} e^{-\mu t} - \Lambda \right).$$

Dari persamaan pertumbuhan populasi manusia $N(t)$ yang didapatkan, semakin besar nilai t atau semakin lama waktu yang dibutuhkan, maka nilai $\frac{1}{c} e^{-\mu t}$ akan semakin besar.

Sehingga
$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{c} e^{-\mu t} - \Lambda \right) = \frac{\Lambda}{\mu}$$

Hal ini menunjukkan bahwa jumlah populasi tak konstan. Jadi $N(t)$ memiliki batas atas yaitu $\frac{\Lambda}{\mu}$. sehingga $N(t) \in \left[0, \frac{\Lambda}{\mu} \right]$.

Daerah penyelesaian model pada populasi manusia adalah

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}; S > 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, N(t) \geq 0$$

Untuk menyederhanakan sistem PD (4.1), dilakukan proses nondimensialiasi dengan menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut :

$$S(t) = \frac{\bar{S}(t)}{N}; E(t) = \frac{\bar{E}(t)}{N}; I(t) = \frac{\bar{I}(t)}{N}; R(t) = \frac{\bar{R}(t)}{N}$$

Sehingga sistem PD (4.1) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu - \gamma S(t)(E(t) + I(t)) + cE(t) + bI(t) + \alpha R(t) - \mu S(t) \\ \frac{dE}{dt} &= \gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu)E(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu)I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I(t) - (\alpha + \mu)R(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dengan kondisi,

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N; S > 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0$$

Berdasarkan diagram kompartemen model penyebaran virus influenza di atas, maka dapat diuraikan sebagai berikut :

- a. Persamaan (4.1a) merepresentasikan laju perubahan populasi individu yang sehat dan rentan terinfeksi penyakit (*susceptible*) tiap satuan waktu. Populasi individu *susceptible* bertambah karena adanya rekrutmen individu *susceptible*, individu yang terinfeksi dan terpapar dapat kembali ke kelompok rentan tanpa melalui pengobatan serta individu yang sembuh dapat menjadi rentan lagi. Sedangkan berkurang karena adanya interaksi antara subpopulasi yang rentan dengan subpopulasi yang terinfeksi dan antara subpopulasi yang rentan dengan subpopulasi terpapar, sehingga terjadi kontak penularan virus.
- b. Persamaan (4.1b) merepresentasikan laju perubahan populasi individu *exposed* virus influenza (sudah terinfeksi tapi belum bisa menginfeksi) tiap satuan waktu. Populasi individu *exposed* ini bertambah karena adanya interaksi antara dari populasi rentan menjadi populasi yang terinfeksi dan terpapar, dikarenakan terjadi kontak penularan virus dan berkurang karena adanya kemajuan populasi *exposed* menjadi *infected* dan ada juga yang kembali pada populasi rentan lagi tanpa melalui pengobatan serta kematian alami populasi *exposed*.
- c. Persamaan (4.1c) merepresentasikan laju perubahan populasi individu yang terinfeksi virus influenza (*infected*) tiap satuan waktu. Populasi individu *infected* ini bertambah karena adanya kemajuan populasi individu *exposed* menjadi *infected*. Berkurang karena kemajuan populasi *infected* menjadi populasi *recovered* dengan adanya pengobatan dan ada juga yang kembali pada populasi rentan lagi tanpa melalui pengobatan serta kematian alami populasi *infected*.
- d. Persamaan (4.1d) merepresentasikan laju perubahan populasi individu *recovered* (populasi individu yang kondisinya lebih baik setelah menjalani pengobatan) tiap satuan waktu. Populasi *recovered* bertambah karena adanya kemajuan populasi individu *infected* menjadi individu *recovered*. Berkurang karena adanya individu *recovered* menjadi *susceptible* dan kematian alami pada populasi *recovered*.

4.2 Analisa Sistem Awal tanpa Kontrol

4.2.1 Titik Kesetimbangan Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza Tipe A

Keadaan setimbang adalah suatu keadaan ketika perubahan jumlah subpopulasi tertentu sepanjang waktu adalah nol. Berdasarkan *Definisi 2.1*, model matematika penyebaran penyakit Influenza memenuhi keadaan setimbang saat persamaan model dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \gamma S(t)(E(t) + I(t)) + cE(t) + bI(t) + \alpha R(t) - \mu S(t) = 0 \quad (4.3a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu)E(t) = 0 \quad (4.3b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu)I(t) = 0 \quad (4.3c)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I(t) - (\alpha + \mu)R(t) = 0 \quad (4.3d)$$

Titik setimbang dalam penyebaran penyakit terdiri atas titik setimbang non endemik atau bebas penyakit dan titik setimbang endemik.

4.2.1.1 Titik Kesetimbangan Non Endemik

Titik setimbang non endemik atau titik setimbang bebas penyakit merupakan suatu kondisi saat tidak terjadi penyebaran penyakit pada suatu wilayah. Keadaan ini terjadi ketika tidak ada manusia yang terinfeksi. Oleh karena itu dapat dinyatakan bahwa populasi manusia yang terinfeksi sama dengan nol ($I = 0$).

Titik kesetimbangan penyakit dapat diperoleh dengan menyatakan ruas kiri pada persamaan (4.31), (4.3b), (4.3c), (4.3d) bernilai nol, kemudian disubstitusikan nilai $I = 0$ sehingga akan diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0(S^0, E^0, I^0, R^0)$. Selanjutnya akan dicari nilai $S^0, E^0, dan R^0$.

Langkah-langkah menentukan nilai $S^0, E^0, dan R^0$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= 0 \\
\Leftrightarrow \varepsilon E - (\beta + b + \mu)I &= 0 \\
\Leftrightarrow \varepsilon E &= 0 \\
\Leftrightarrow E &= 0, \text{ maka} \\
\Leftrightarrow E^0 &= 0 \\
\frac{dS}{dt} &= 0 \\
\Leftrightarrow \mu - \gamma S(E + I) + cE + bI + \alpha R - \mu S &= 0 \\
\Leftrightarrow \mu &= \mu S \\
\Leftrightarrow S &= 1, \text{ maka} \\
\Leftrightarrow S^0 &= 1 \\
\frac{dR}{dt} &= 0 \\
\Leftrightarrow \beta I - (\alpha + \mu)R &= 0 \\
\Leftrightarrow -(\alpha + \mu)R &= 0 \\
\Leftrightarrow R &= 0, \text{ maka} \\
\Leftrightarrow R^0 &= 0
\end{aligned}$$

Maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dari model penyebaran penyakit influenza Tipe A H1N1.

$$E_0 = (S^0, E^0, I^0, R^0) = (1, 0, 0, 0)$$

Selanjutnya akan ditentukan *basic reproduction number* (R_0) sebagai parameter ambang penentuan kriteria endemik penyakit pada populasi. Penentuan R_0 menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM), yaitu dengan membangun matriks yang membangkitkan jumlah individu baru yang terinfeksi. Dari perhitungan dengan metode tersebut, diperoleh nilai R_0 , yaitu

$$R_0 = \frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(c + \varepsilon + \mu)(\beta + b + \mu)}$$

Perhitungan R_0 secara lengkap dapat dilihat pada **Lampiran A**

4.2.1.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik Kesetimbangan Endemik merupakan kondisi saat adanya kemungkinan penyebaran penyakit pada suatu wilayah. Keadaan ini terjadi ketika individu manusia terinfeksi penyakit. Oleh karena

itu dapat dinyatakan populasi manusia yang terinfeksi ($I \neq 0$) tidak sama dengan nol.

Sehingga akan didapatkan titik setimbang S, E, I, R endemik yang dapat dinyatakan dengan $E^* = (S^*, E^*, I^*, R^*)$, sebagai berikut :

$$S^* = \frac{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)(\beta+b+\mu+\varepsilon)}{(\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)+(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon)(\beta+b+\mu)R_0}$$

$$E^* = \frac{P}{Q}$$

$$I^* = \frac{(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)} \left(\frac{P}{Q} \right)$$

$$R^* = \frac{\beta\varepsilon}{(\beta+b+\mu)(\alpha+\mu)} \left(\frac{P}{Q} \right)$$

dengan

$$\begin{aligned} P &= \mu - \mu \left(\frac{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)(\beta+b+\mu+\varepsilon)}{(\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)+(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon)(\beta+b+\mu)R_0} \right) \\ Q &= \left\{ \gamma \left(\frac{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)(\beta+b+\mu+\varepsilon)}{(\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)+(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon)(\beta+b+\mu)R_0} \right) - c \right. \\ &\quad + \gamma \left(\frac{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)(\beta+b+\mu+\varepsilon)}{(\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)+(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon)(\beta+b+\mu)R_0} \right) \left(\frac{(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)} \right) \\ &\quad \left. - b \left(\frac{(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)} \right) - \alpha \left(\frac{\beta\varepsilon}{(\beta+b+\mu)(\alpha+\mu)} \right) \right\} \end{aligned}$$

Perhitungan secara lengkap dapat dilihat pada **Lampiran C**

4.2.2 Analisis Kestabilan Pada Titik Setimbang

Setelah diperoleh titik setimbang dari sistem dinamik model penyebaran penyakit, langkah selanjutnya adalah menganalisis kestabilan dari sistem tersebut. Berdasarkan persamaan model yang diberikan terlihat bahwa model matematika penyebaran penyakit merupakan sistem PD Autonomous yang tak linear. Maka

untuk mendapatkan kestabilan akan dilakukan linearisasi dengan menggunakan matriks jacobian seperti berikut :

$$f_1 = \frac{dS}{dt} = \mu - \gamma S(t)(E(t) + I(t)) + cE(t) + bI(t) + \alpha R(t) - \mu S(t)$$

$$f_2 = \frac{dE}{dt} = \gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu)E(t)$$

$$f_3 = \frac{dI}{dt} = \varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu)I(t)$$

$$f_4 = \frac{dR}{dt} = \beta I(t) - (\alpha + \mu)R(t)$$

Selanjutnya akan dicari matriks Jacobian, sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\gamma(E+I) - \mu & -S\gamma + c & -S\gamma + b & \alpha \\ \gamma(E+I) & S\gamma - (c + \varepsilon + \mu) & \gamma S & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\beta + b + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix}$$

Berikutnya akan dilakukan analisis kestabilan lokal dari titik setimbang non endemik (E_0), dan titik setimbang endemik (E_1), pada penyebaran virus influenza tipe A.

4.2.2.1 Kestabilan Lokal Titik Setimbang Non Endemik atau Bebas Penyakit

Untuk menentukan kestabilan local dari titik setimbang bebas penyakit (E_0), langkah pertama yang dilakukan adalah mensubstitusikan nilai dari titik setimbang bebas penyakit

$E_0 = (S^0, E^0, I^0, R^0) = (1, 0, 0, 0)$ pada matriks jacobian yang telah didapatkan sebelumnya, sehingga diperoleh :

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\gamma + c & -\gamma + b & \alpha \\ 0 & \gamma - (c + \varepsilon + \mu) & \gamma & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\beta + b + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, akan dicari nilai eigen dari $J(E_0)$

Untuk mencari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dapat dicari dengan menggunakan $|\lambda I - J(E_0)| = 0$, yaitu

$$|\lambda I - J(E_0)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \gamma - c & \gamma - b & -\alpha \\ 0 & \lambda - [\gamma - (c + \varepsilon + \mu)] & -\gamma & 0 \\ 0 & -\varepsilon & \lambda + (\beta + b + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda + (\mu + \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu) \begin{vmatrix} \lambda - [\gamma - (c + \varepsilon + \mu)] & -\gamma & 0 \\ -\varepsilon & \lambda + (\beta + b + \mu) & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda + (\mu + \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu) \begin{vmatrix} \lambda - [\gamma - (c + \varepsilon + \mu)] & -\gamma & 0 \\ -\varepsilon & \lambda + (\beta + b + \mu) & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda + (\mu + \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu) \{ (\lambda - [\gamma - (c + \varepsilon + \mu)])(\lambda + (\beta + b + \mu))(\lambda + (\mu + \alpha)) - \varepsilon\gamma(\lambda + (\mu + \alpha)) \} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda + (\mu + \alpha)) \{ (\lambda - [\gamma - (c + \varepsilon + \mu)])(\lambda + (\beta + b + \mu)) - \varepsilon\gamma \} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda + (\mu + \alpha)) \{ \lambda^2 + [c + \varepsilon + \mu - \gamma + \beta + b + \mu]\lambda - \varepsilon\gamma + [c + \varepsilon + \mu - \gamma][\beta + b + \mu] \} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda + (\mu + \alpha)) \{ \lambda^2 + L\lambda - G_1 \} = 0$$

Dari persamaan karakteristik di atas, didapatkan nilai beberapa nilai eigen, antara lain :

$$\lambda_1 = -\mu \quad \lambda_2 = -(\mu + \alpha)$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} \left(L + \sqrt{L^2 + 4G_1} \right) \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2} \left(L - \sqrt{L^2 + 4G_1} \right)$$

Dengan $L = \beta + b + c + \varepsilon + 2\mu - \gamma > 0$ dan

$$G_1 = (\beta + b + \varepsilon + \mu)\gamma - (\beta + b + \mu)(c + \varepsilon + \mu)$$

Titik setimbang bebas penyakit (non endemik) stabil asimtotis jika dan hanya jika persamaan karakteristik tersebut mempunyai akar-akar yang negatif. Dari persamaan karakteristik tersebut terlihat bahwa nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ selalu negatif. Jika $R_0 < 1$ maka $G_1 < 0$ sehingga $\lambda_4 < 0$. Jadi P_0 adalah stabil asimtotik. Sebaliknya jika $R_0 > 1$ sehingga $\lambda_4 > 0$, maka P_0 tak stabil.

4.2.2.2 Kestabilan Lokal Titik Setimbang Endemik

Langkah pertama dalam menentukan kestabilan titik setimbang endemik adalah dengan mengevaluasi nilai titik setimbang $E = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ sebagai berikut :

$$S^* = \frac{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)(\beta+b+\mu+\varepsilon)}{(\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)+(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon)(\beta+b+\mu)R_0}$$

$$E^* = \frac{P}{Q}$$

$$I^* = \frac{(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)} \left(\frac{P}{Q} \right)$$

$$R^* = \frac{\beta\varepsilon}{(\beta+b+\mu)(\alpha+\mu)} \left(\frac{P}{Q} \right)$$

dengan

$$P = \mu - \mu \left(\frac{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)(\beta+b+\mu+\varepsilon)}{(\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)+(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon)(\beta+b+\mu)R_0} \right)$$

Q

$$= \left\{ \gamma \left(\frac{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)(\beta+b+\mu+\varepsilon)}{(\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)+(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon)(\beta+b+\mu)R_0} \right) - c \right. \\ \left. + \gamma \left(\frac{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)(\beta+b+\mu+\varepsilon)}{(\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)+(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon)(\beta+b+\mu)R_0} \right) \left(\frac{(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)} \right) \right. \\ \left. - b \left(\frac{(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)} \right) - \alpha \left(\frac{\beta\varepsilon}{(\beta+b+\mu)(\alpha+\mu)} \right) \right\}$$

Selanjutnya, disubstitusikan nilai titik setimbang tersebut ke matriks Jacobian yang telah didapatkan sebelumnya, sehingga diperoleh :

$$J(E) = \begin{bmatrix} -c_1 - \mu & -c_2 + c & -c_2 + b & \alpha \\ c_1 & c_2 - (c + \varepsilon + \mu) & c_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\beta + b + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix}$$

dimana :

$$c_1 = \gamma(E^* + I^*) \quad c_2 = S^*\gamma$$

Untuk mencari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dapat dicari dengan menggunakan $|\lambda I - J(E)| = 0$, yaitu

$$|\lambda I - J(E)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + c_1 + \mu & c_2 - c & c_2 - b & -\alpha \\ -c_1 & \lambda - c_2 + (c + \varepsilon + \mu) & -c_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & \lambda + (\beta + b + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda + (\mu + \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + c_1 + \mu) \begin{vmatrix} \lambda - c_2 + (c + \varepsilon + \mu) & -c_2 & 0 \\ -\varepsilon & \lambda + (\beta + b + \mu) & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda + (\mu + \alpha) \end{vmatrix}$$

$$+ c_1 \begin{vmatrix} c_2 - c & c_2 - b & -\alpha \\ -\varepsilon & \lambda + (\beta + b + \mu) & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda + (\mu + \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

Dengan $L_1 = \beta + b + \mu$; $L_2 = c + \varepsilon + \mu$

$$\Leftrightarrow (\lambda + c_1 + \mu) \{ (\lambda - c_2 + L_2)(\lambda + L_1)(\lambda + \mu + \alpha) - c_2 \varepsilon (\lambda + \mu + \alpha) \}$$

$$+ c_1 \{ (c_2 - c)(\lambda + L_1)(\lambda + \mu + \alpha) - \varepsilon \alpha \beta + \varepsilon (c_2 - b)(\lambda + \mu + \alpha) \}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + c_1 + \mu)(\lambda + \mu + \alpha) \{ (\lambda - c_2 + L_2)(\lambda + L_1) - c_2 \varepsilon \}$$

$$+ c_1 \{ (c_2 - c)(\lambda^2 + \lambda(\mu + \alpha + L_1) + L_1(\mu + \alpha)) - \varepsilon \alpha \beta + \varepsilon (c_2 - b)(\lambda + \mu + \alpha) \}$$

$$\Leftrightarrow [\lambda^2 + \lambda(c_1 + 2\mu + \alpha) + (\mu + \alpha)(c_1 + \mu)] \{ \lambda^2 + \lambda(L_1 - c_2 + L_2) - c_2(L_1 + \varepsilon) + L_1 L_2 \}$$

$$+ c_1 \{ \lambda^2 (c_2 - c) + \lambda(\mu + \alpha + L_1)(c_2 - c) + L_1(\mu + \alpha)(c_2 - c) - \varepsilon \alpha \beta + \varepsilon (c_2 - b)(\lambda + \mu + \alpha) \}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & \lambda^4 + \lambda^3(L_1 - c_2 + L_2 + c_1 + 2\mu + \alpha) \\
& + \lambda^2((L_1 - c_2 + L_2)(c_1 + 2\mu + \alpha) - c_2(L_1 + \varepsilon) + L_1L_2 \\
& + (\mu + \alpha)(c_1 + \mu) + c_1(c_2 - c)) \\
& + \lambda((c_1 + 2\mu + \alpha)(-c_2(L_1 + \varepsilon) + L_1L_2) \\
& + (L_1 - c_2 + L_2)(\mu + \alpha)(c_1 + \mu) + \varepsilon c_1(c_2 - b)) \\
& + (-c_2(L_1 + \varepsilon) + L_1L_2)(\mu + \alpha)(c_1 + \mu) \\
& + L_1c_1(\mu + \alpha)(c_2 - c) - \varepsilon\alpha\beta + \varepsilon(c_2 - b)(\mu + \alpha)
\end{aligned}$$

Sehingga persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dapat dicari dengan menggunakan $|\lambda I - J(E)| = 0$ diperoleh :

$$\Leftrightarrow \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0$$

Dengan

$$A_1 = L_1 - c_2 + L_2 + c_1 + 2\mu + \alpha$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & ((L_1 - c_2 + L_2)(c_1 + 2\mu + \alpha) - c_2(L_1 + \varepsilon) + L_1L_2 \\
& + (\mu + \alpha)(c_1 + \mu) + c_1(c_2 - c))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & ((c_1 + 2\mu + \alpha)(-c_2(L_1 + \varepsilon) + L_1L_2) \\
& + (L_1 - c_2 + L_2)(\mu + \alpha)(c_1 + \mu) + \varepsilon c_1(c_2 - b))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & (-c_2(L_1 + \varepsilon) + L_1L_2)(\mu + \alpha)(c_1 + \mu) + L_1c_1(\mu + \alpha)(c_2 - c) \\
& - \varepsilon\alpha\beta + \varepsilon(c_2 - b)(\mu + \alpha)
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari kestabilan dari persamaan di atas dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Menentukan syarat untuk persamaan

$$\{\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4\} = 0$$

$$\begin{array}{l|ll}
\lambda^4 & 1 & A_2 & A_4 \\
\lambda^3 & A_1 & A_3 & \\
\lambda^2 & b_1 & b_2 & \\
\lambda & c_1 & & \\
1 & d_1 & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{A_1 A_2 - A_3}{A_1} & b_2 &= \frac{A_1 A_4}{A_1} = A_4 \\
c_1 &= \frac{b_1 A_3 - b_2 A_1}{b_1} = \left(\frac{A_1 A_2 - A_3}{A_1} (A_3) - A_1 A_4 \right) \frac{A_1}{A_1 A_2 - A_3} \\
&= \left(\frac{A_1 A_2 - A_3}{A_1} (A_3) \times \frac{A_1}{A_1 A_2 - A_3} \right) - \left(A_1 A_4 \times \frac{A_1}{A_1 A_2 - A_3} \right) \\
&= A_3 - \frac{A_1^2 A_4}{A_1 A_2 - A_3} = \frac{A_3 (A_1 A_2 - A_3) - A_1^2 A_4}{A_1 A_2 - A_3} \\
d_1 &= \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \\
&= \left[\frac{A_3 (A_1 A_2 - A_3) - A_1^2 A_4}{A_1 A_2 - A_3} A_4 \right] \left[\frac{A_1 A_2 - A_3}{A_3 (A_1 A_2 - A_3) - A_1^2 A_4} \right] = A_4
\end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz sebelumnya, Persamaan ini memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika

$$\leftrightarrow A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, A_4 > 0$$

$$\leftrightarrow A_1 A_2 - A_3 > 0$$

$$\leftrightarrow (A_1 A_2 - A_3) A_3 - A_1^2 A_4 > 0$$

4.2.3 Keterkontrolan

Untuk melakukan analisis keterkontrolan, maka perlu adanya sistem yang telah dilinearakan menggunakan matriks Jacobi yaitu

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & d_6 & d_{10} \\ d_2 & d_4 & d_7 & 0 \\ 0 & d_5 & d_8 & 0 \\ 0 & 0 & d_9 & d_{11} \end{bmatrix}$$

Dengan memisalkan :

$$d_1 = -\gamma(E + I) - \mu \quad d_8 = -(\beta + b + \mu)$$

$$d_2 = \gamma(E + I) \quad d_9 = \beta$$

$$d_3 = -S\gamma + c \quad d_{10} = \alpha$$

$$d_4 = S\gamma - (c + \varepsilon + \mu) \quad d_{11} = -(\mu + \alpha)$$

$$d_5 = \varepsilon$$

$$d_6 = -s\gamma + b$$

$$d_7 = s\gamma$$

dan matriks \bar{B} diperoleh:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ -b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan **Teorema 2.3** dapat disusun matriks keterkontrolan (M_c) sebagai berikut :

$$(M_c) = (\bar{B} | \overline{AB} | \overline{A^2B} | \overline{A^3B})$$

dan diperoleh matriks M_c keterkontrolan seperti berikut :

$$M_c = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} b_1 & 0 & p_1 & p_4 & q_1 & q_5 & r_1 & r_5 \\ -b_1 & 0 & p_2 & p_5 & q_2 & q_6 & r_2 & r_6 \\ 0 & b_2 & p_3 & p_6 & q_3 & q_7 & r_3 & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & p_7 & q_4 & q_8 & r_4 & r_8 \end{array} \right]$$

Dengan memasukan nilai titik kesetimbangan E_0 pada matriks M_c dan melakukan operasi baris elementer (OBE) diperoleh kesimpulan bahwa sistem dinamik model penyebaran penyakit bersifat terkontrol karena didapatkan rank matriks M_c sama dengan dimensi matriks \bar{A} yaitu 4 , Dengan demikian dapat simpulkan bahwa pada model penyebaran virus influenza tipe A bersifat terkontrol.

Perhitungan (M_c) secara lengkap dapat dilihat pada **Lampiran B**

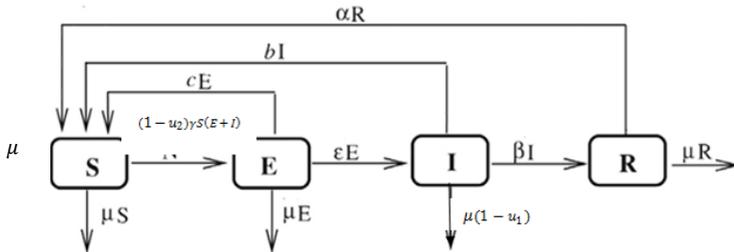
4.3 Design Kontrol

4.3.1 Model Penyebaran Virus Influenza tipe A dengan Kontrol Optimal

Model dikonstruksi dengan menambahkan strategi kontrol yang diinginkan. Berikut ini diberikan beberapa asumsi yang digunakan dalam strategi kontrol pada model penyebaran virus influenza tipe A dengan resistansi penyakit pada manusia, yaitu :

1. Kontrol u_1 merupakan proporsi pemberian obat influenza. Sehingga, tingkat kematian individu yang meninggal karena terinfeksi virus influenza berkurang dengan faktor $1 - u_1$
2. Strategi kontrol u_2 merupakan upaya untuk mengurangi laju kontak penularan virus antara dari populasi rentan menjadi populasi yang terinfeksi dan terpapar melalui pengendalian lingkungan berupa penyuluhan, seminar dan juga kerja bakti dengan faktor $1 - u_2$

Sehubungan dengan asumsi yang mendasari ini, model kontrol optimal untuk penyebaran virus influenza tipe A yang menyimpulkan strategi pencegahan dan pengobatan digambarkan dengan diagram kompartemen yaitu sebagai berikut :



Gambar 4.2 Diagram Kompartemen Model Matematika Penyebaran Virus Influenza Tipe A dengan Kontrol u_1 dan u_2

Berdasarkan diagram kompartemen diatas, model matematika penyebaran virus influenza tipe A dapat disajikan dalam system persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu - (1 - u_2)\gamma S(t)(E(t) + I(t)) + cE(t) + bI(t) + \alpha R(t) - \mu S(t) \quad (4.1a)$$

$$\frac{dE}{dt} = (1 - u_2)\gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu)E(t) \quad (4.1b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu(1 - u_1))I(t) \quad (4.1c)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I(t) - (\alpha + \mu)R(t) \quad (4.1d)$$

Dengan $0 \leq u_1 \leq 1$ dan $0 \leq u_2 \leq 1$

Dan fungsi tujuan untuk model di atas diberikan sebagai berikut :

$$J(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left(E(t) + I(t) + \frac{C_1}{2} u_1^2(t) + \frac{C_2}{2} u_2^2(t) \right) dt$$

Dimana :

$E(t)$ = jumlah individu yang terpapar yang infeksi

$I(t)$ = jumlah individu yang terinfeksi yang infeksi

C_1 = bobot pada kontrol pengendalian lingkungan

C_2 = bobot pada kontrol pengobatan individu terinfeksi

Koefisien $C_1 \geq 0$ dan $C_2 \geq 0$ merupakan koefisien bobot untuk meminimumkan jumlah infeksi yang didasarkan pada manfaat dan biaya dari kontrol yang dilakukan.

$\int_0^{t_f} \left(\frac{C_1}{2} u_1^2(t) \right) dt$: faktor biaya yang melibatkan proses pengendalian lingkungan

$\int_0^{t_f} \left(\frac{C_2}{2} u_2^2(t) \right) dt$: faktor biaya yang melibatkan proses pengobatan individu yang terinfeksi

Tipe permasalahan kontrol optimal dari penelitian ini yaitu

- *fixed-final time* (t_f) dengan kondisi $0 \leq t \leq t_f$
- *free-final state* ($x(t_f)$)
pada waktu awal ($x(t_0)$) sudah ditetapkan dan *state* pada waktu akhir ($x(t_f)$) tidak ditetapkan. Sehingga, setiap sistem yang ada menggunakan kondisi batas *state* pada kondisi awal berikut :

$$S(t_0) = S_0, E(t_0) = E_0, I(t_0) = I_0, R(t_0) = R_0$$

Kondisi batas yang memenuhi pada tipe *fixed-final time* dan *free-final state* yaitu sebagai berikut :

$$x(t_0) = x_0, \lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{*t_f} \text{ dengan } x_0 = \{S_0, E_0, I_0, R_0\}.$$

Fixed-final time artinya waktu akhir penelitian ini *fixed* atau tidak ada variasi waktu sehingga $\delta t_f = \mathbf{0}$ dan *free-final state* artinya di waktu akhir tidak ditentukan berarti terdapat variasi *state* di waktu akhir sehingga $\delta x_f \neq \mathbf{0}$. Oleh sebab itu persamaan (2.16) dapat didefinisikan menjadi

$$\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f} \delta x_f = \mathbf{0}$$

Sehingga, pembuat nolnya adalah $\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f}$.

Selanjutnya sesuai persamaan (2.9) fungsi tujuan pada persamaan $J(u_1, u_2)$ tidak mengandung persamaan meyer dianggap sama dengan nol dan diperoleh

$$\lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{*t_f} = \left(\frac{\partial}{\partial x} 0 \right)_{*t_f} = 0$$

Dengan $\lambda^*(t_f) = 0$ merupakan kondisi transversalitas.

Oleh karena itu, diperoleh *costate* pada waktu akhir $(\lambda^*(t_f)) = 0$.

Jadi setiap sistem yang ada pada persamaan ini diinisialisasikan dengan kondisi batas *costate* pada waktu akhir sebagai berikut :

$$\lambda_S^*(t_f) = 0, \lambda_E^*(t_f) = 0, \lambda_E^*(t_f) = 0, \lambda_R^*(t_f) = 0$$

4.3.2 Penyelesaian Kontrol Optimal

Langkah-langkah penyelesaian :

1. Bentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t)$$

$$= V(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t)$$

$$H = E(t) + I(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2(t) + \frac{C_2}{2}u_2^2(t)$$

$$+ \lambda_s (\mu - (1 - u_2)\gamma S(t)(E(t) + I(t)) + cE(t) + bI(t) + aR(t) - \mu S(t))$$

$$+ \lambda_E ((1 - u_2)\gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu)E(t))$$

$$+ \lambda_I (\varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu(1 - u_1))I(t)) + \lambda_R (\beta I(t) - (\alpha + \mu)R(t))$$

2. Menentukan kondisi stationer untuk mendapatkan kontrol optimal. Persamaan H diturunkan terhadap u_1 dan u_2 , sehingga diperoleh

- a. $\left(\frac{\partial H}{\partial u_1} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2C_1 u_1^* + \lambda_I (\mu I) = 0$$

$$\Leftrightarrow u_1^* = - \frac{\lambda_I (\mu I)}{2C_1}$$

Karena $0 \leq u_1 \leq 1$, sehingga

$$u_1^* = \begin{cases} 0 & \text{jika } -\frac{\lambda_I(\mu I)}{2C_1} \leq 0 \\ -\frac{\lambda_I(\mu I)}{2C_1} & \text{jika } 0 < -\frac{\lambda_I(\mu I)}{2C_1} < 1 \\ 1 & \text{jika } -\frac{\lambda_I(\mu I)}{2C_1} \geq 1 \end{cases}$$

Fungsi kontrol yang optimal u_1^* berdasarkan tiga kemungkinan di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, -\frac{\lambda_I(\mu I)}{2C_1} \right\}, 1 \right\}$$

b. $\left(\frac{\partial H}{\partial u_2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2C_2 u_2^* + \lambda_s(\gamma SE + \gamma S) - \lambda_E(\gamma SE + \gamma S) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2C_2 u_2^* = (\lambda_E - \lambda_s)(\gamma SE + \gamma S)$$

$$\Leftrightarrow u_2^* = \frac{(\lambda_E - \lambda_s)(\gamma SE + \gamma S)}{2C_2}$$

Karena $0 \leq u_2 \leq 1$, sehingga

$$u_2^* = \begin{cases} 0 & \text{jika } \frac{(\lambda_E - \lambda_s)(\gamma SE + \gamma S)}{2C_2} \leq 0 \\ \frac{(\lambda_E - \lambda_s)(\gamma SE + \gamma S)}{2C_2} & \text{jika } 0 < \frac{(\lambda_E - \lambda_s)(\gamma SE + \gamma S)}{2C_2} < 1 \\ 1 & \text{jika } \frac{(\lambda_E - \lambda_s)(\gamma SE + \gamma S)}{2C_2} \geq 1 \end{cases}$$

Fungsi kontrol yang optimal u_2^* berdasarkan tiga kemungkinan di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_E - \lambda_s)(\gamma SE + \gamma S)}{2C_2} \right\}, 1 \right\}$$

3. Menentukan H optimal

Persamaan kontrol optimal yang diperoleh pada persamaan u_1^* dan u_2^* disubstitusikan ke dalam persamaan H. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} H^* = & E(t) + I(t) + \frac{C_1}{2}(u_1^*)^2(t) + \frac{C_2}{2}(u_2^*)^2(t) \\ & + \lambda_s \left(\mu - (1 - u_2^*)\gamma S(t)(E(t) + I(t)) + cE(t) + bI(t) + \alpha R(t) - \mu S(t) \right) \\ & + \lambda_E \left((1 - u_2^*)\gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu)E(t) \right) \\ & + \lambda_I (\varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu(1 - u_1^*))I(t)) + \lambda_R (\beta I(t) - (\alpha + \mu)R(t)) \end{aligned}$$

4. Menyelesaikan persamaan *state* dan *costate* untuk memperoleh sistem yang optimal

a. Persamaan state

Persamaan *state* dalam kondisi optimal diperoleh dengan cara menurunkan fungsi Pontryagin H^* yang sudah optimal terhadap λ dapat dinyatakan secara matematis melalui persamaan (2.15) seperti berikut:

$$x^*(t) = \left(\frac{\partial H^*}{\partial \lambda} \right)$$

Berdasarkan persamaan di atas, sehingga diperoleh persamaan *state* untuk setiap populasi sebagai berikut:

$$\dot{S}^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_S} = \mu - (1 - u_2^*)\gamma S(t)(E(t) + I(t)) + cE(t) + bI(t) + \alpha R(t) - \mu S(t)$$

$$\dot{E}^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_E} = (1 - u_2^*)\gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu)E(t)$$

$$\dot{I}^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_I} = \varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu(1 - u_1^*))I(t)$$

$$\dot{R}^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_R} = \beta I(t) - (\alpha + \mu)R(t)$$

b. Persamaan costate

Persamaan *costate* dalam kondisi optimal diperoleh dengan cara menurunkan negative fungsi pontryagin H yang sudah optimal terhadap λ dapat dinyatakan secara matematis melalui persamaan (2.15) seperti berikut ini :

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H^*}{\partial x} \right)$$

Berdasarkan persamaan di atas, sehingga diperoleh persamaan *costate* untuk setiap populasi sebagai berikut :

$$\dot{\lambda}_S = - \frac{\partial H}{\partial S} = [\lambda_S - \lambda_E][\gamma(1 - u_2^*)(E + I)] + \lambda_S \mu$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_E &= -\frac{\partial H}{\partial E} = -1 + \gamma S[1 - u_2^*][\lambda_S - \lambda_E] + \lambda_E(c - \varepsilon + \mu) - c\lambda_S \\ &\quad - \varepsilon\lambda_I \\ \dot{\lambda}_I &= -\frac{\partial H}{\partial I} = -1 - b\lambda_S + \gamma S[1 - u_2^*][\lambda_S - \lambda_E] \\ &\quad + \lambda_I[\mu(1 - u_1^*) + \beta + b] - \beta\lambda_R \\ \dot{\lambda}_R &= -\frac{\partial H}{\partial R} = [\alpha + \mu]\lambda_R - \alpha\lambda_S\end{aligned}$$

4.4 Analisis dan Hasil Solusi Numerik

Pada bagian ini dilakukan simulasi dengan menggunakan *software* Matlab untuk melihat perubahan banyaknya individu di masing-masing populasi pada saat $R_0 < 0$, $R_0 > 0$. Metode yang digunakan pada simulasi ini adalah metode Runge-Kutta Orde 4 dan metode Sweep Maju-Mundur. Adapun *source code* program dapat dilihat pada Lampiran.

4.4.1 Solusi Numerik Ketika $R_0 < 0$

Untuk simulasi numerik saat kondisi $R_0 < 0$, yang artinya setiap individu yang terinfeksi memproduksi kurang dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi.

Sub Populasi	Nilai Awal	Sumber
$S(t)$	0.4	[17]
$E(t)$	0.15	[17]
$I(t)$	0.25	[17]
$R(t)$	0.2	[17]

Tabel 4.3 Nilai Awal Sub-Populasi

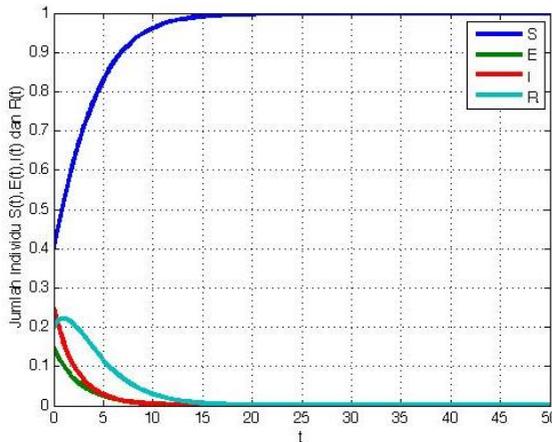
Parameter	Nilai	Sumber
μ	0.015	[6]
b	0.025	[6]

c	0.35	[7]
ε	0.15	[7]
α	0.35	[7]
β	0.5	[7]
γ	0.1	[7]

Tabel 4.4 Nilai Parameter

Dari nilai-nilai parameter yang diberikan dari Tabel 4.2, didapatkan

$$R_0 = \frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(c + \varepsilon + \mu)(\beta + b + \mu)} = \frac{(0.1)(0.69)}{(0.515)(0.54)} = 0.2481$$



Gambar 4.3 Grafik Perubahan banyaknya individu untuk $R_0 < 1$

Dari Gambar 4.3 diketahui dengan kondisi awal yang berbeda, populasi *susceptible*, *exposed*, *infected*, dan *recovered* stabil asimtotik dan memperlihatkan bahwa solusi konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (1, 0, 0, 0)$. Hal tersebut sesuai dengan perhitungan yang menunjukkan jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik.

Banyaknya individu *susceptible* terus bertambah. Hal tersebut karena disebabkan oleh tingginya tingkat kelahiran dan

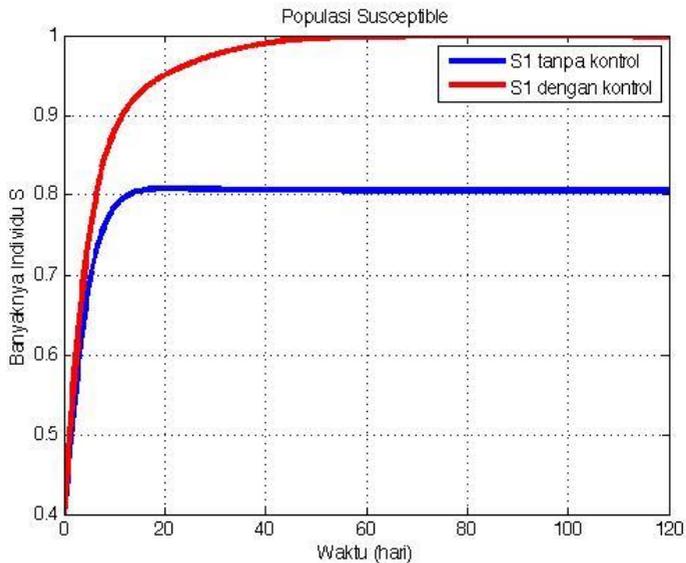
menurunnya daya tahan tubuh pada individu *recovered*. Disisi lain, adanya kematian alami yang menyebabkan individu *exposed*, *infected* dan *recovered* semakin berkurang. Sehingga pada akhirnya akan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (1, 0, 0, 0)$.

4.4.2 Solusi Numerik Ketika $R_0 > 0$

Untuk simulasi numerik saat kondisi $R_0 > 0$, yang artinya individu yang terinfeksi memproduksi lebih dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan menyebar pada populasi. Nilai parameter yang digunakan pada Tabel 4.2 dengan memperbesar nilai parameter γ menjadi 0.5. Kemudian simulasi yang dilakukan pada kondisi $R_0 > 0$ adalah menunjukkan pengaruh kontrol pengobatan dan kontrol pengendalian lingkungan yang diberikan. Sehingga dapat dibuat simulasi perubahan banyaknya individu pada setiap populasi sebelum dan setelah diberikan kontrol.

a. Populasi *Susceptible*

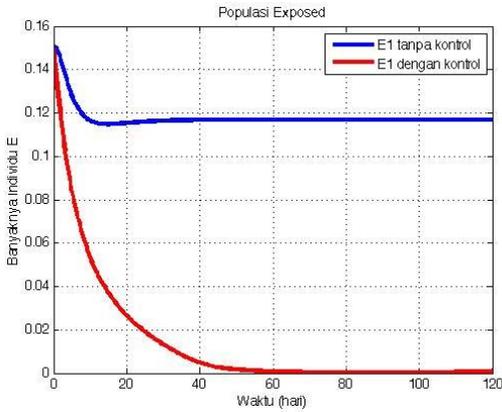
Berdasarkan Gambar 4.4 dengan kondisi awal yang berbeda, diketahui bahwa banyaknya individu *Susceptible* tanpa kontrol mengalami peningkatan dan penurunan sampai akhirnya stabil mulai hari ke-40 dengan jumlah 810 individu. Kemudian setelah diberikan kontrol pengobatan pada individu *infected*, banyaknya individu *susceptible* mengalami peningkatan dan stabil mulai hari ke-75 dengan jumlah 990 individu. Hal ini diakibatkan banyaknya individu yang sembuh atau terbebas dari infeksi setelah diberikan pengobatan sebanyak 180 individu.



Gambar 4.4 Grafik perbandingan perubahan banyaknya individu *Susceptible* tanpa dan dengan kontrol

b. Populasi *Exposed*

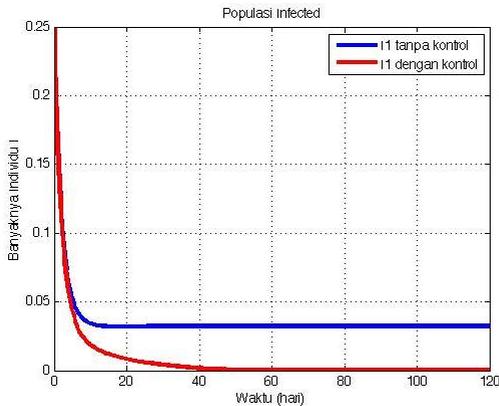
Berdasarkan Gambar 4.5 dengan kondisi awal yang berbeda, diketahui bahwa banyaknya individu *Exposed* tanpa kontrol mengalami penurunan dan stabil pada hari ke-40 dengan jumlah 120 individu. Menurunnya populasi *exposed* dikarenakan besarnya pengaruh parameter γ yaitu laju kontak penularan virus yang mengakibatkan adanya interaksi antara subpopulasi yang rentan dengan subpopulasi yang terinfeksi dan antara subpopulasi yang rentan dengan subpopulasi terpapar. Jika nilai γ semakin besar, maka jumlah individu tanpa kontrol akan semakin berkurang. Sedangkan banyaknya individu setelah diberikan kontrol mengalami penurunan dan stabil pada hari ke-60



Gambar 4.5 Grafik perbandingan perubahan banyaknya individu *Exposed* tanpa dan dengan kontrol

c. Populasi *Infected*

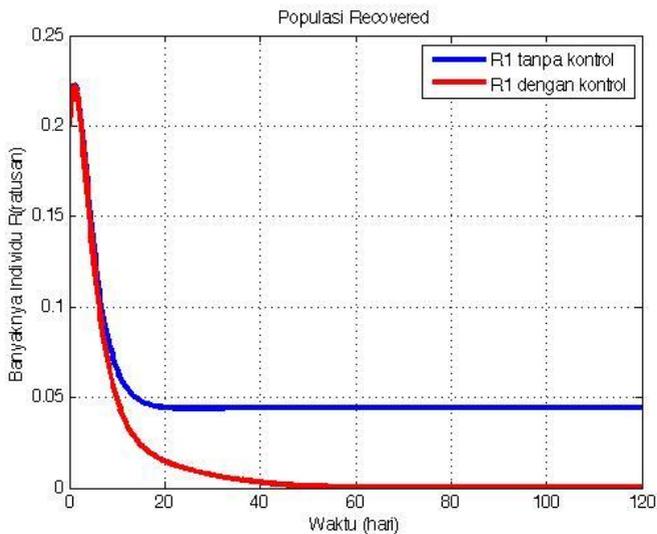
Berdasarkan Gambar 4.6 dengan kondisi awal yang berbeda, diketahui bahwa banyaknya individu *Infected* tanpa kontrol mengalami penurunan dan stabil pada hari ke-36. Sedangkan setelah diberikan kontrol mengalami penurunan lebih tajam dan stabil pada hari ke-56. Hal ini menunjukkan bahwa tingkat efektifitas pada pemberian kontrol populasi *Infected* memberikan pengaruh yang nyata.



Gambar 4.6 Grafik perbandingan perubahan banyaknya individu *Infected* tanpa dan dengan kontrol

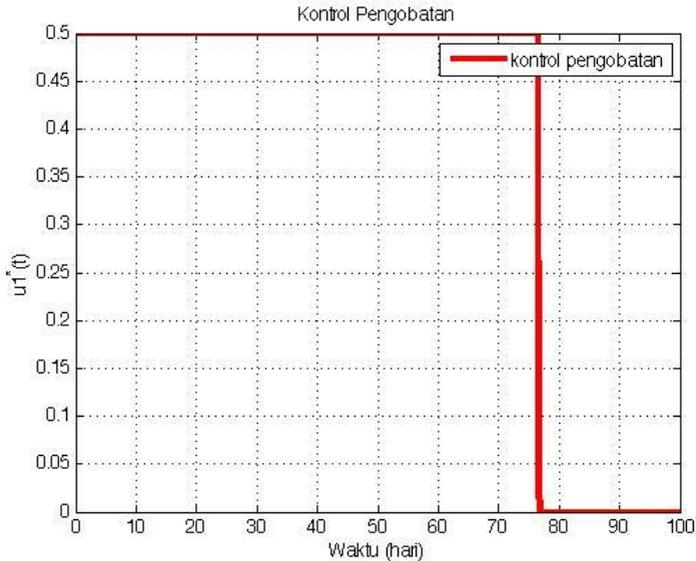
d. Populasi *Recovered*

Berdasarkan Gambar 4.7 dengan kondisi awal yang berbeda, diketahui bahwa banyaknya individu *Recovered* tanpa kontrol mengalami peningkatan dan penurunan sampai akhirnya stabil mulai hari ke-40. Kemudian setelah diberikan kontrol, banyaknya individu *Recovered* mengalami peningkatan dan penurunan lalu stabil mulai hari ke-60. Adanya peningkatan lalu penurunan diakibatkan banyaknya individu yang sembuh atau terbebas dari infeksi setelah diberikan pengobatan. Namun individu *Recovered* ini berkurang dikarenakan ada yang kembali menjadi individu *Susceptible* dan juga adanya tingkat kematian alami.



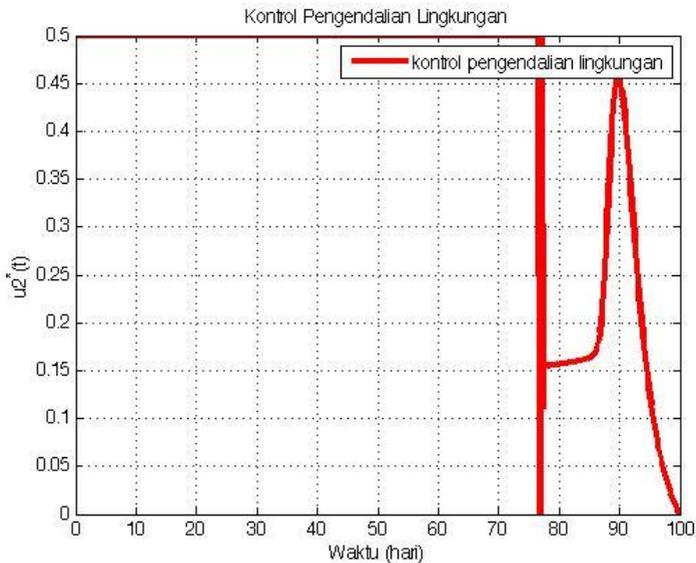
Gambar 4.7 Grafik perbandingan perubahan banyaknya individu *Recovered* tanpa dan dengan kontrol

Grafik tingkat pemberian kontrol optimal berupa kontrol pengobatan dan kontrol pengendalian lingkungan dapat dilihat pada Gambar 4.8 dan Gambar 4.9



Gambar 4.8 Grafik Tingkat Pemberian Kontrol Optimal Berupa Pengobatan

Berdasarkan Gambar 4.8 ditunjukkan bahwa tingkat pemberian kontrol pengobatan maksimal berada pada nilai 0,5. Hal ini menunjukkan bahwa pada waktu $t=100$ hari, pemberian kontrol dapat mempengaruhi secara maksimal.



Gambar 4.9 Grafik Tingkat Pemberian Kontrol Optimal Berupa Pengendalian Lingkungan

Berdasarkan Gambar 4.9 ditunjukkan bahwa tingkat pemberian kontrol Pengendalian Lingkungan seperti penyuluhan, seminar dan sosialisasi, maksimal berada pada nilai 0.5. Hal ini menunjukkan bahwa pada waktu $t=100$ hari, pemberian kontrol dapat mempengaruhi secara maksimal.

BAB V

PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilakukan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

1. Kontrol Optimal yang diperoleh dari model matematika penyebaran virus influenza tipe A menggunakan metode *Pontryagin Minimum Principle* dengan kontrol berupa u_1 yaitu pengobatan individu yang terinfeksi influenza untuk mengurangi tingkat kematian yang terjadi dan kontrol u_2 yaitu upaya untuk mengurangi laju kontak penularan virus melalui pengendalian lingkungan berupa penyuluhan, seminar dan kerja bakti, akan optimal jika nilai

$$u_1^* = - \frac{\lambda_I(\mu I)}{C_1}$$

$$u_2^* = \frac{(\lambda_E - \lambda_S)(\gamma SE + \gamma S)}{C_2}$$

2. Berdasarkan hasil simulasi numerik yang telah dilakukan, menunjukkan bahwa pemberian kontrol optimal dapat meminimumkan jumlah individu yang meninggal karena terinfeksi virus influenza tipe A dan meminimalisir laju kontak penularan virus yang ada sehingga didapatkan penurunan jumlah populasi terpapar dan terinfeksi.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan melakukan modifikasi upaya kontrol optimal selain yang dijelaskan pada penelitian ini, dengan data aktual yang dapat dijadikan sebagai estimasi parameter. Selain itu, dalam penelitian ini terdapat dua kontrol optimal, sehingga dapat dilakukan pengujian pada setiap kontrol optimal agar dapat membandingkan kontrol yang lebih efektif

DAFTAR PUSTAKA

Bridges CB, Keurhnet MJ, Hall CB.(2003).*Transmission of influenza : implecation for control in health care setting Clin Infect Dis.* 2003 ; 37 : 1094 – 1101.

Casagrandi, R., Bolzoni, L., Levin, S.A., &Andreasen, V.,(2006). *The SIRC Model and Influenza A, Mathematical Biosciences*, Elsevier, 200, 152-169.

Diekmann, O. Heesterbeek, "The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models," *The Royal Society Interface*, Vol. 7, Hal. 873885,2009.

El-Shahed, M. dan Eid, A. (2011).*The Fractional SIRC Model and Influenza A.Mathematical Problems in Engineering* Vol 2011.Hal 1-9

G.J. Olsder dan J.W.van der Waode.,(2003).*Mathematical Sistem Theory*.Delft University Press, Netherlands.

Herman RA, and Strock M.(2005).*Possibel Pandemic Threat on the horizon-Avian influenza A (H5N1)*. World Drug Infor. 2005; 16(4) : 1-4.

Huu Khanh, Nguyen.(2015). *Stability analysis of an influenza virus model with disease resistance*.College of Natural Sciences, CanTho University, Viet Nam.

Lawrence, Perko.(2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. USA : Departement of mathematics Northern Arizona University

Louie, J.K., Acosta, M.,Winter, K.,Jean,C., Gavali, S., Schechter, R., et al.(2009) *Factors associated with death orhospitalization due to pandemic 2009 influenza A (H1N1) infection inCalifornia*. JAMA 302 .2009:302(10):1902-1896.

Munir,R.,"Metode Numerik," Bandung: Informatika,2003.

Naidu, S. D. (2002). *Optimal Control System*.CRC:Manchester, United States of America.

Nashrullah, Alif., Supriyono., Kharis, Muhammad. (2013). *Pemodelan SIRS untuk Penyakit Influenza dengan Vaksinisasi pada Populasi Manusia Tak Konstan*. UNNES Journal of Mathematics. <http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm>

Neumann, G., Noda, T., and Kawaoka, Y.(2009).*Emergence and pandemic potential of swine-origin H1N1 influenza virus*.Nature. 2009:459(1):939-931.

Nichol, K.L., Nordin, J., Mullooly, J., Lask, R., Fillbrandt, K., & Iwane, M., 2003, *Influenza Vaccination and Reduction in Hospitalizations for Cardiac Disease and Stroke among the Elderly*, N Engl J Med 348:1322 – 1332.

Novitasari, Ika. (2013). *Analisa Kestabilan dan Penyelesaian Numerik Model Dinamik SIRC pada Penyebaran Virus Influenza*. Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya. JURNAL SAINS DAN SENI POMITS Vol. 1, No. 1, (2013) 1-6

Putri S, Shafarina dan Azarina, Natasha.(2015).*Pengendalian Optimal terhadap Model Epidemik Influenza dengan Kasus Mutasi Virus*.Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.

Rochmatika, Lalibah. (2010). *Penyelesaian Numerik dan Analisa Kestabilan pada Model Epidemik SIER dengan Memperhatikan Adanya Penularan pada Periode Laten*. Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya

Subiono. 2013. *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya. Subiono Jurusan Matematika ITS Surabaya.

World Health Organization. *Influenza Virus Infection in Humans*. 2014. [Online] [diunduh pada 2016 Mei 4].

Available from

:http://www.who.int/influenza/gisrs_laboratory/termonology_variant/en/index.html

LAMPIRAN

Lampiran A. Perhitungan *Basic Reproduction Number* (R_0)

Diketahui titik setimbang non endemik

$$E_0 = (S^0, E^0, I^0, R^0) = (1, 0, 0, 0)$$

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \gamma S(t)(E(t) + I(t)) + cE(t) + bI(t) + \alpha R(t) - \mu S(t) = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu)E(t) = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu)I(t) = 0$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I(t) - (\alpha + \mu)R(t) = 0$$

Sehingga dapat dibentuk matriks dan

\mathcal{F} : matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit yang menambah kelas infeksi

\mathcal{V} : matriks laju perkembangan, kematian, dan kesembuhan yang mengurangi kelas infeksi

Matriks dan sebagai berikut

Misal $X = (E, I, S, R)'$

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \gamma S(E + I) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V}(x) = \begin{pmatrix} (c + \varepsilon + \mu)E \\ (\beta + b + \mu)I - \varepsilon E \\ -\mu + \gamma S(E + I) - cE - bI - \alpha R + \mu S \\ -\beta I + (\alpha + \mu)R \end{pmatrix}$$

Selanjutnya matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} masing-masing diturunkan terhadap E dan I sehingga diperoleh matriks \mathbb{F} dan \mathbb{V} sebagai berikut

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \gamma S & \gamma S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

Substitusi nilai titik setimbang non endemik pada diperoleh

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V}(x) = \begin{pmatrix} c + \varepsilon + \mu & 0 \\ \varepsilon & \beta + b + \mu \end{pmatrix}$$

Kemudian didari \mathbb{V}^{-1} , sehingga diperoleh

$$\mathbb{V}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c + \varepsilon + \mu} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{(c + \varepsilon + \mu)(\beta + b + \mu)} & \frac{1}{\beta + b + \mu} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya didapatkan matrik $G = \mathbb{F}\mathbb{V}^{-1}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c + \varepsilon + \mu} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{(c + \varepsilon + \mu)(\beta + b + \mu)} & \frac{1}{\beta + b + \mu} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c + \varepsilon + \mu} + \frac{\gamma\varepsilon}{(c + \varepsilon + \mu)(\beta + b + \mu)} & \frac{\gamma}{\beta + b + \mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian ditentukan nilai eigen dari G dengan $\det(\lambda I - G) = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \left| \lambda - \left[\frac{\gamma}{c + \varepsilon + \mu} + \frac{\gamma\varepsilon}{(c + \varepsilon + \mu)(\beta + b + \mu)} \right] \quad - \frac{\gamma}{\beta + b + \mu} \right| &= 0 \\ \lambda \left[\lambda - \left[\frac{\gamma}{c + \varepsilon + \mu} + \frac{\gamma\varepsilon}{(c + \varepsilon + \mu)(\beta + b + \mu)} \right] \right] &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil determinan, didapatkan 2 nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = 0 \text{ dan } \lambda_2 = \frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(c + \varepsilon + \mu)(\beta + b + \mu)}$$

Dengan demikian diperoleh *basid reproduction number* yaitu

$$R_0 = \frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(c + \varepsilon + \mu)(\beta + b + \mu)}$$

Lampiran B. Perhitungan (M_c) Keterkontrolan

- Untuk Matriks AB diperoleh :

$$AB = \begin{pmatrix} p_1 & p_4 \\ p_2 & p_5 \\ p_3 & p_6 \\ 0 & p_7 \end{pmatrix}$$

dengan memisalkan

$$\begin{aligned} p_1 &= b_1 d_1 - b_1 d_3 & p_5 &= b_2 c d_7 \\ p_2 &= b_1 d_2 - b_1 d_4 & p_6 &= b_2 d_8 \\ p_3 &= -b_1 d_5 & p_7 &= b_2 d_9 \\ p_4 &= b_2 d_6 \end{aligned}$$

- Untuk Matriks A^2B diperoleh :

$$A^2B = \begin{pmatrix} q_1 & q_5 \\ q_2 & q_6 \\ q_3 & q_7 \\ q_4 & q_8 \end{pmatrix}$$

dengan memisalkan

$$\begin{aligned} q_1 &= b_1(d_1^2 + d_2 d_3) - b_1(d_3 d_1 + d_1 d_4 + d_5 d_6) \\ q_2 &= b_1(d_1 d_2 + d_2 d_4) - b_1(d_2 d_3 + d_4^2 + d_5 d_7) \\ q_3 &= b_1 d_2 d_5 - b_1(d_5 d_8 + d_5 d_4) \\ q_4 &= -b_1 d_5 d_9 \\ q_5 &= b_2(d_1 d_6 + d_7 d_3 + d_6 d_8 + d_9 d_{10}) \\ q_6 &= b_2(d_6 d_2 + d_4 d_7 + d_7 d_8) \\ q_7 &= b_2(d_7 d_5 + d_8^2) \\ q_8 &= b_2 d_8 d_9 \end{aligned}$$

- Untuk Matriks A^3B diperoleh :

$$A^3B = \begin{pmatrix} r_1 & r_5 \\ r_2 & r_6 \\ r_3 & r_7 \\ r_4 & r_8 \end{pmatrix}$$

dengan memisalkan

$$\begin{aligned} r_1 &= b_1 \left(d_1^3 + d_2 d_3 + d_2(d_1 d_3 + d_3 d_4 + d_5 d_6) - \right. \\ &\left. (d_3(d_1^2 + d_2 d_3) + d_4(d_1 d_3 + d_3 d_4 + d_5 d_6) + d_5(d_6 d_1 + \right. \\ &\left. d_3 d_7 + d_6 d_8 + d_9 d_{10})) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= b_1 \left(d_1 d_2 (d_1 + d_4) + d_2 (d_2 d_3 + d_4^2 + d_5 d_7) - \right. \\
&\quad \left. (d_3 d_2 (d_1 + d_4) + d_4 (d_2 d_3 + d_4^2 + d_5 d_7) + d_5 (d_2 d_6 + \right. \\
&\quad \left. d_7 d_4 + d_7 d_8)) \right) \\
r_3 &= b_1 \left(d_1 d_5 d_2 + d_5 d_2 (d_4 + d_8) - (d_3 d_5 d_2 + d_5 d_4 (d_4 + \right. \\
&\quad \left. d_8) + d_5 (d_5 d_7 + d_8^2)) \right) \\
r_4 &= b_1 (d_2 d_5 d_9 - (d_4 d_5 d_9 + d_5 d_8 d_9)) \\
r_5 &= b_2 (d_6 (d_1^2 + d_2 d_3) + d_7 (d_1 d_3 + d_3 d_4 + d_5 d_6) \\
&\quad + d_8 (d_6 d_1 + d_3 d_7 + d_6 d_8 + d_9 d_{10}) + d_9 d_{10} (d_1 \\
&\quad + d_{11})) \\
r_6 &= b_2 (d_6 d_2 (d_1 + d_4) + d_7 (d_2 d_3 + d_4^2 + d_5 d_7) \\
&\quad + d_8 (d_2 d_6 + d_7 d_4 + d_7 d_8) + d_2 d_9 d_{10}) \\
r_7 &= b_2 (d_6 d_5 d_2 + d_5 d_7 (d_4 + d_8) + d_8^2 (d_5 d_7 + d_8)) \\
r_8 &= b_2 (d_7 d_5 d_9 + d_8^2 d_9 + d_9 d_{11}^2)
\end{aligned}$$

Lampiran C

Perhitungan Titik Kesetimbangan Endemik

Dari angka reproduksi dasar diperoleh

$$R_0 = \frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(c + \varepsilon + \mu)(\beta + b + \mu)}$$

$$(\beta + b + \mu) = \frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(c + \varepsilon + \mu)R_0} \quad (4.4)$$

$$(c + \varepsilon + \mu) = \frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\beta + b + \mu)R_0} \quad (4.5)$$

Kemudian persamaan (4.4) disubstitusikan ke (4.3c)

$$\varepsilon E - (\beta + b + \mu)I = 0$$

$$\varepsilon E = (\beta + b + \mu)I$$

$$\varepsilon E = \frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(c + \varepsilon + \mu)R_0} I$$

$$I = \frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0 \varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)} E \quad (4.6)$$

Kemudian persamaan (4.5) disubstitusikan ke (4.3b)

$$\gamma S(E + I) - (c + \varepsilon + \mu)E = 0$$

$$\gamma S(E + I) = (c + \varepsilon + \mu)E$$

$$\gamma S(E + I) = \frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\beta + b + \mu)R_0} E$$

$$\frac{S(E + I)}{E} = \frac{(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\beta + b + \mu)R_0}$$

$$S \left(1 + \frac{I}{E} \right) = \frac{(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\beta + b + \mu)R_0}$$

$$S \left(1 + \frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0 \varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)} \right) = \frac{(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\beta + b + \mu)R_0}$$

$$S = \frac{\frac{(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\beta + b + \mu)R_0}}{1 + \frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0 \varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)}} = \frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon) + (c + \varepsilon + \mu)R_0 \varepsilon)(\beta + b + \mu)R_0} \quad (4.7)$$

Selanjutnya dari persamaan (4.3d) diperoleh

$$\beta I - (\alpha + \mu)R = 0$$

$$\beta I = (\alpha + \mu)R$$

$$I = \frac{(\alpha + \mu)R}{\beta} \quad (4.8)$$

Substitusi I pada persamaan (4.8) pada persamaan (4.3c)

$$\varepsilon E - (\beta + b + \mu)I = 0$$

$$\varepsilon E = (\beta + b + \mu)I$$

$$\varepsilon E = (\beta + b + \mu) \frac{(\alpha + \mu)R}{\beta}$$

$$R = \frac{\beta \varepsilon}{(\beta + b + \mu)(\alpha + \mu)} E \quad (4.10)$$

Substitusi persamaan (4.10), (4.6) dan (4.7) pada persamaan (4.3a)

$$\mu - \gamma S(E + I) + cE + bI + \alpha R - \mu S = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu - \gamma SE - \gamma SI + cE + bI + \alpha R - \mu S = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma SE - cE + \gamma SI - bI - \alpha R = \mu - \mu S$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \gamma \left(\frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon) + (c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon)(\beta + b + \mu)R_0} \right) E - cE \\
&+ \gamma \left(\frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon) + (c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon)(\beta + b + \mu)R_0} \right) \left(\frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)} E \right) \\
&- b \left(\frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)} E \right) - \alpha \left(\frac{\beta\varepsilon}{(\beta + b + \mu)(\alpha + \mu)} E \right) \\
&= \mu - \mu \left(\frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon) + (c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon)(\beta + b + \mu)R_0} \right) \\
&\Leftrightarrow E \left\{ \gamma \left(\frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon) + (c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon)(\beta + b + \mu)R_0} \right) - c \right. \\
&+ \gamma \left(\frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon) + (c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon)(\beta + b + \mu)R_0} \right) \left(\frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)} \right) \\
&\left. - b \left(\frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)} \right) - \alpha \left(\frac{\beta\varepsilon}{(\beta + b + \mu)(\alpha + \mu)} \right) \right\} \\
&= \mu - \mu \left(\frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon) + (c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon)(\beta + b + \mu)R_0} \right)
\end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned}
P &= \mu - \mu \left(\frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon) + (c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon)(\beta + b + \mu)R_0} \right) \\
Q &= \left\{ \gamma \left(\frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon) + (c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon)(\beta + b + \mu)R_0} \right) - c \right. \\
&+ \gamma \left(\frac{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)(\beta + b + \mu + \varepsilon)}{(\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon) + (c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon)(\beta + b + \mu)R_0} \right) \left(\frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)} \right) \\
&\left. - b \left(\frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)} \right) - \alpha \left(\frac{\beta\varepsilon}{(\beta + b + \mu)(\alpha + \mu)} \right) \right\} \\
&\Leftrightarrow EQ = P \\
&\Leftrightarrow E = \frac{P}{Q} \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$I = \frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)} E \Leftrightarrow I = \frac{(c + \varepsilon + \mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta + b + \mu + \varepsilon)} \left(\frac{P}{Q} \right) \tag{4.12}$$

$$R = \frac{\beta\varepsilon}{(\beta + b + \mu)(\alpha + \mu)} E \Leftrightarrow R = \frac{\beta\varepsilon}{(\beta + b + \mu)(\alpha + \mu)} \left(\frac{P}{Q} \right) \tag{4.13}$$

Berdasarkan persamaan (4.7), (4.11), (4.12), (4.13) diperoleh titik kesetimbangan endemik $E^* = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ dengan

$$S^* = \frac{\frac{(\beta+b+\mu+\varepsilon)}{(\beta+b+\mu)R_0}}{1 + \frac{(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)}} = \frac{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)(\beta+b+\mu+\varepsilon)}{(\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon) + (c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon)(\beta+b+\mu)R_0}$$

$$E^* = \frac{P}{Q}$$

$$I^* = \frac{(c+\varepsilon+\mu)R_0\varepsilon}{\gamma(\beta+b+\mu+\varepsilon)} \left(\frac{P}{Q} \right)$$

$$R^* = \frac{\beta\varepsilon}{(\beta+b+\mu)(\alpha+\mu)} \left(\frac{P}{Q} \right)$$

Lampiran D

Sourde Code Matlab Model I

```

clear all;
clc;
S1=0.4;
E1=0.15;
I1=0.25;
R1=0.2;
h = 0.001; %ukuran langkah, n
takhir=50;

%Nilai Parameter
miu=0.015;
beta=0.5;
betakecil=0.025;
ckecil=0.35;
epsilon=0.15;
gamma=0.1;
alpa=0.35;

za=[S1 E1 I1 R1];
[T,Y]=RK4(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,
gamma,alpa,@f,takhir,h,za);
figure(1);
plot(T,Y,'LineWidth',3);
legend('S1','E1','I1','R1');
xlabel('t');
ylabel('Jumlah Individu S(t),E(t),I(t) dan
R(t)');
grid on

```

Function Sistem Model I

```
function
```

```
y=f(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamma,alpa
,t,x)
y(1) = miu-
gamma*x(1)*(x(2)+x(3))+ckecil*x(2)+betakecil*x(3
)+alpa*x(4)-miu*x(1);
y(2) = gamma*x(1)*(x(2)+x(3))-
(ckecil+epsilon+miu)*x(2);
y(3) = epsilon*x(2)-(beta+betakecil+miu)*x(3);
y(4) = beta*x(3)-(alpa+miu)*x(4);
```

Function RK4

```
function [T,
```

```
Y]=RK4(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamma,a
lpa,f,a2,h,za)
t=0:h:a2;
N=length(t);
w=length(za);
x=zeros(N,w);
x(1,:)=za;
for i=1:N-1
k1=h*f(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamma,a
lpa,t(i),x(i,:));
k2=h*f(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamma,a
lpa,t(i)+h/2,x(i,:)+k1/2);
k3=h*f(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamma,a
lpa,t(i)+h/2,x(i,:)+k2/2);
k4=h*f(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamma,a
lpa,t(i+1),x(i,:)+k3);
x(i+1,:)=x(i,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end;
T=t';
Y=x;
function
[T,Y]=RK4(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamm
a,alpa,f,a2,h,za)
t=0:h:a2;
N=length(t);
w=length(za);
```

```

x=zeros(N,w);
x(1,:)=za;
for i=1:N-1
k1=h*f(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamma,alpa,t(i),x(i,:));
k2=h*f(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamma,alpa,t(i)+h/2,x(i,:)+k1/2);
k3=h*f(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamma,alpa,t(i)+h/2,x(i,:)+k2/2);
k4=h*f(miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,gamma,alpa,t(i+1),x(i,:)+k3);
x(i+1,:)=x(i,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end;
T=t';
Y=x;

```

Source Code Matlab Model II

```

clear all;
clc;
S10=0.4;
E10=0.15;
I10=0.25;
R10=0.2;
miu=0.015;
beta=0.5;
betakecil=0.025;
ckecil=0.35;
epsilon=0.15;
gamma=0.5;
alpa=0.35;
u1max=1;
u2max=1;
u1min=0;
u2min=0;
C1 =15;
C2 =20;
a1=0;
a2=120;
M=500;
h=(a2-a1)/M;
t=a1:h:a2;

```

```
P=length(t);
u1 =zeros(P,1);
u2 =zeros(P,1);
uL1 =zeros(P,1);
uL2 =zeros(P,1);
S1 =zeros(P,1);
E1 =zeros(P,1);
I1 =zeros(P,1);
R1 =zeros(P,1);
S1L=zeros(P,1);
I1L=zeros(P,1);
T1L=zeros(P,1);
R1L=zeros(P,1);
lambdaS1=zeros(P,1);
lambdaE1=zeros(P,1);
lambdaI1=zeros(P,1);
lambdaR1=zeros(P,1);
lambdaS1L=zeros(P,1);
lambdaE1L=zeros(P,1);
lambdaI1L=zeros(P,1);
lambdaR1L=zeros(P,1);

cek=1;
it =0;
looping=0;
while (cek>1e-3) && (looping<120)
    uL1 =u1;
    uL2 =u2;
    S1L=S1;
    E1L=E1;
    I1L=I1;
    R1L=R1;

    lambdaS1L =lambdaS1;
    lambdaE1L =lambdaE1;
    lambdaI1L =lambdaI1;
    lambdaR1L =lambdaR1;

    S1(1)=S10;
    E1(1)=E10;
```

```

I1(1)=I10;
R1(1)=R10;

J(it+1)=0;
for i=1:P-1
J(it+1)=J(it+1)+h*(E1(i)+I1(i)+
1/2*C1*uL1(i)^2+1/2*C2*uL2(i)^2);
x=[S1(i) E1(i) I1(i) R1(i)];
k1=h*Fst(x,uL1(i),uL2(i),miu,beta,betakecil,ckec
il,epsilon,gamma,alpha);
k2=h*Fst(x+0.5*k1,uL1(i),uL2(i),miu,beta,betakec
il,ckecil,epsilon,gamma,alpha);
k3=h*Fst(x+0.5*k2,uL1(i),uL2(i),miu,beta,betakec
il,ckecil,epsilon,gamma,alpha);
k4=h*Fst(x+k3,uL1(i),uL2(i),miu,beta,betakecil,c
kecil,epsilon,gamma,alpha);
x=x+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
S1(i+1)=x(1);
E1(i+1)=x(2);
I1(i+1)=x(3);
R1(i+1)=x(4);

end
J(it+1)=J(it+1)+h*(E1(P)+I1(P)+
1/2*C1*uL1(P)^2+1/2*C2*uL2(P)^2);
%Plot populasi tanpa kontrol
if it==0
figure(1)
plot(t,S1,'b-','LineWidth',3);
hold on;

figure(2)
plot(t,E1,'b-','LineWidth',3);
hold on;

figure(3)
plot(t,I1,'b-','LineWidth',3);
hold on;

figure(4)
plot(t,R1,'b-','LineWidth',3);

```

```

hold on;

end
lambdaS1(P)=0;
lambdaE1(P)=0;
lambdaI1(P)=0;
lambdaR1(P)=0;

u1(P)= 0;
temp1 = min([-lambdaI1(P)*miu*I1(P)/2*C1
ulmax]); %persamaan kontrol 1
u1(P) = max([temp1 0]);

u2(P)= 0;
temp2 = min([(lambdaE1(P)-
lambdaS1(P))*gamma*S1(P)*(E1(P)+1)/2*C2 u2max]);
%persamaan kontrol 2
u2(P) = max([temp2 0]);

for i=1:P-1
j=P-i;
x=[lambdaS1(j+1) lambdaE1(j+1) lambdaI1(j+1)
lambdaR1(j+1) ];
k1=h*Fcs(x,S1(j+1),E1(j+1),I1(j+1),R1(j+1),uL1(j
+1),uL2(j+1),miu,beta,betakecil,ckecil,epsilon,g
amma,alpha);
k2=h*Fcs(x+0.5*k1,S1(j+1),E1(j+1),I1(j+1),R1(j+1
),uL1(j+1),uL2(j+1),miu,beta,betakecil,ckecil,ep
silon,gamma,alpha);
k3=h*Fcs(x+0.5*k2,S1(j+1),E1(j+1),I1(j+1),R1(j+1
),uL1(j+1),uL2(j+1),miu,beta,betakecil,ckecil,ep
silon,gamma,alpha);
k4=h*Fcs(x+k3,S1(j+1),E1(j+1),I1(j+1),R1(j+1),uL
1(j+1),uL2(j+1),miu,beta,betakecil,ckecil,epsilo
n,gamma,alpha);
x=x-(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
lambdaS1(j)=x(1);
lambdaE1(j)=x(2);
lambdaI1(j)=x(3);
lambdaR1(j)=x(4);

```

```

temp1 = min([-lambdaI1(j)*miu*I1(j)/2*C1
ulmax]); %persamaan kontrol 1
u1(j) = max([temp1 0]);

temp2 = min([(lambdaE1(j)-
lambdaS1(j))*gamma*S1(j)*(E1(j)+1)/2*C2 u2max]);
%persamaan kontrol 2
u2(j) = max([temp2 0]);

end;
eS1 =sum(abs(S1-S1L));
eE1 =sum(abs(E1-E1L));
eI1 =sum(abs(I1-I1L));
eR1 =sum(abs(R1-R1L));
elambdaS1=sum(abs(lambdaS1-lambdaS1L));
elambdaE1=sum(abs(lambdaE1-lambdaE1L));
elambdaI1=sum(abs(lambdaI1-lambdaI1L));
elambdaR1=sum(abs(lambdaR1-lambdaR1L));
eu1 =sum(abs(u1-uL1));
eu2 =sum(abs(u2-uL2));
cek=eS1+eE1+eI1+eR1+elambdaS1+elambdaE1+elambdaI
1+elambdaR1+eu1+eu2;
it= it+1;
u1 = ((0.5*u1)+(0.5*uL1));
u2 = ((0.5*u2)+(0.5*uL2));
looping=looping+1;
end;
figure (1)
plot(t,S1,'r-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('Banyaknya Individu S');
grid on
legend('S1 tanpa kontrol','S1 dengan kontrol');
title('Populasi Susceptible');

figure (2)
plot(t,E1,'r-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('Banyaknya Individu E');
grid on

```

```
legend('E1 tanpa kontrol','E1 dengan kontrol');  
title('Populasi Exposed');  
hold on;
```

```
figure (3)  
plot(t,I1,'r-','LineWidth',3);  
xlabel('Waktu (hari)');  
ylabel('Banyaknya Individu I');  
grid on  
legend('I1 tanpa kontrol','I1 dengan kontrol');  
title('Populasi Infected');  
hold on;
```

```
figure (4)  
plot(t,R1,'r-','LineWidth',3);  
xlabel('Waktu (hari)');  
ylabel('Banyaknya Individu R');  
grid on  
legend('R1 tanpa kontrol','R1 dengan kontrol');  
title('Populasi Recovered');  
hold on;
```

```
figure (5)  
plot(t,u1,'r-','LineWidth',3);  
xlabel('Waktu (hari)');  
ylabel('u1^(t)');  
grid on  
legend('kontrol pengobatan');  
title('Kontrol Pengobatan');  
hold on;
```

```
figure (6)  
plot(t,u2,'r-','LineWidth',3);  
xlabel('Waktu (hari)');  
ylabel('u2^(t)');  
grid on  
legend('kontrol pengendalian lingkungan');  
title('Kontrol Pengendalian Lingkungan');  
hold on;
```


BIODATA PENULIS



Indah Rahmadhania atau biasa dipanggil dengan Indah atau Rania, lahir di Surabaya, 29 Desember 1996. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Al-Hidayah, SDN Kandangan 1 No.121, SMPN 26 Surabaya, dan SMA 5 Surabaya. Kemudian melanjutkan studi ke jenjang S1 Jurusan Matematika ITS. Penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan yaitu Pemodelan Matematika.

Selama kuliah penulis juga aktif mengikuti kegiatan organisasi dalam bidang kewirausahaan UKM TDC ITS sebagai Kepala departemen *Entrepreneur Development*(2017), Lembaga Dakwah Jurusan IBNU MUQLAH ITS sebagai staff kaderisasi(2016-2017) dan BEM FMKSD ITS sebagai Sekretaris I (2018). Selain itu penulis juga aktif dalam mengisi outbond dalam acara-acara kepanitiaan, bergabung dengan tim bola volly FMKSD ITS dan juga aktif menulis karya tulis ilmiah berkolaborasi dengan Tim Wancak sebagai Ketua Tim dalam dua tahun terakhir.

Informasi lebih lanjut mengenai kritik, saran dan *sharing* mengenai Laporan Tugas akhir ini bisa melalui email : indahrania729@gmail.com maupun Id Line : ird729