



TESIS - KS185411

**ESTIMATOR MATRIKS *VARIANCE-COVARIANCE* SPLINE
TRUNCATED PADA REGRESI NONPARAMETRIK BIRESPO**
(Studi Kasus: Pada Data IPM dan IPG Kabupaten/Kota
di Pulau Jawa)

LUTFIA SEPTININGRUM
06211850010006

Dosen Pembimbing

Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.
Jerry Dwi T. Purnomo, M.Si, Ph.D

Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2020



TESIS - KS185411

**ESTIMATOR MATRIKS *VARIANCE-COVARIANCE*
SPLINE *TRUNCATED* PADA REGRESI
NONPARAMETRIK BIRESPON**

(Studi Kasus: Pada Data IPM dan IPG di Pulau Jawa)

Lutfia Septiningrum
062118 5001 0006

Dosen Pembimbing
Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.
Jerry Dwi T Purnomo, M.Si, Ph.D

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
2020



THESIS - KS185411

**THE ESTIMATOR OF VARIANCE COVARIANCE
MATRIX OF SPLINE TRUNCATED ON
BIRESPONSE NONPARAMETRIC REGRESSION**
(Case Study: Data HDI and GDI in Java District)

Lutfia Septiningrum
062118 5001 0006

Supervisor
Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.
Jerry Dwi T Purnomo, M.Si, Ph.D

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN OF STATISTICS
FACULTY OF SCIENCE AND DATA ANALYTICS
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2020

LEMBAR PENGESAHAN TESIS

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Statistika (M.Stat)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

LUTFIA SEPTININGRUM

NRP: 06211850010006

Tanggal Ujian: 23 Januari 2020

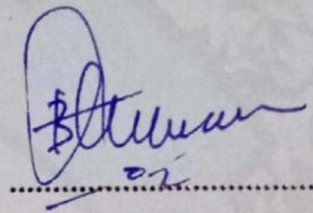
Periode Wisuda: Maret 2020

Disetujui oleh:

Pembimbing:

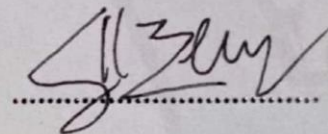
1. Prof. Dr. I Nyoman Budiantara, M.Si

NIP: 19650603 198903 1 003



2. Jerry Dwi Trijoyo Purnomo, M.Si, Ph.D

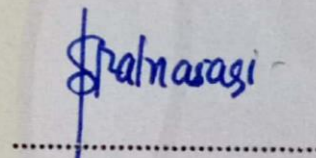
NIP: 19810223 200812 1 003



Penguji:

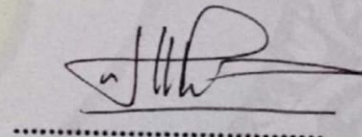
1. Dr. Vita Ratnasari, M.Si

NIP: 19700910 199702 2 001



2. Dr. Suhartono, M.Sc

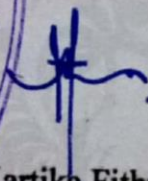
NIP: 19710929 199512 1 001



Kepala Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data

Dr. Kartika Fithriasari, M.Si

NIP: 19691212 199303 2 002



Estimator Matriks *Variance-Covariance Spline Truncated* dalam Regresi Nonparametrik Birespon

(Studi Kasus: Pada Data IPM Dan IPG di Pulau Jawa)

Nama Mahasiswa : Lutfia Septiningrum

NRP : 06211850010006

Pembimbing : Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.
Jerry Dwi T Purnomo, M.Si, Ph.D

ABSTRAK

Regresi nonparametrik birespon berbeda dengan regresi nonparametrik respon tunggal, dimana model birespon terdiri dari dua variabel respon dengan asumsi terdapat korelasi antar respon. Untuk mengakomodir korelasi antar respon, maka estimasi fungsi regresi memuat matriks bobot berupa matriks *variance covariance error*. Berdasarkan penelitian sebelumnya, matriks *variance covariance* diasumsikan sebagai *fixed value*. Sedangkan dalam kasus riil tidak diketahui nilainya, maka matriks *variance covariance* tersebut harus diestimasi dari data. Sehingga, tujuan penelitian ini adalah mengestimasi matriks *variance covariance* untuk mendapatkan model regresi nonparametrik birespon menggunakan *spline truncated*. Terdapat dua tahap untuk mengestimasi matriks *variance covariance*. Tahap pertama adalah melakukan estimasi terhadap koefisien regresi nonparametrik birespon menggunakan metode *Weighted Least Square* (WLS). Tahap kedua adalah mengestimasi matriks *variance covariance* menggunakan metode MLE dengan mengasumsikan *error* berdistribusi normal bivariat dengan mean $\mathbf{0}$ dan *variance covariance* \mathbf{W} . Selanjutnya dilakukan penerapan terhadap data riil yaitu pada data Indeks Pembangunan Manusia (IPM) dan Indeks Pembangunan Gender (IPG). Variabel prediktor yang digunakan adalah angka kesakitan, angka partisipasi kasar SMA dan PDRB Perkapita. Kriteria pemilihan model terbaik berdasarkan titik knot optimum menggunakan nilai *Generalized Cross Validation* (GCV). Diperoleh model terbaik pada satu titik knot spline linier dengan GCV 14,183. Model hasil estimasi parameter menggunakan matriks *variance covariance* lebih baik dalam memodelkan data IPM dan IPG Kabupaten/Kota di Pulau Jawa karena mempunyai RMSE sebesar 3,597 lebih kecil dibandingkan model hasil estimasi parameter dengan matriks *variance covariance* diketahui mempunyai RMSE sebesar 5,019.

Kata Kunci: Birespon, GCV, IPG, IPM, Matriks *Variance-Covariance*

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

The Estimator of Variance Covariance Matrix of Spline Truncated on Biresponse Nonparametric Regression

(Case Study: Data HDI and GDI in Java District)

By : Lutfia Septiningrum
Student Identity Number : 06211850010006
Supervisor : Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.
Jerry Dwi T Purnomo, M.Si, Ph.D

ABSTRACT

Bi-response nonparametric regression is different from uniresponse nonparametric regression, where bi-response model consists of two response variables with the assumption of dependency. To accommodate the correlation between responses, the estimation of regression function should be consisted of weight in the form of variance covariance matrix of residuals. It can be estimated using variance covariance error matrix. Based on previous research, the variance covariance matrix is assumed to be a fixed value. Whereas in the real case the value is unknown so that the variance covariance matrix must be estimated from the data. The purpose of this study is to estimate the variance covariance matrix of spline truncated on bi-response nonparametric regression models. There are two steps to estimate the variance covariance matrix. The first step is to estimate the Bi-response nonparametric regression coefficient using the Weighted Least Square (WLS) method and the second step is estimated the variance covariance matrix using the MLE method by assuming a bivariate normal distribution error with mean $\mathbf{0}$ and variance covariance \mathbf{W} . Then, the result of the estimation is applied to the Human Development Index (HDI) and Gender Development Index (IPG) data. The predictor variables used were morbidity, gross participation rates of SMA and GDP per capita. Criteria for selecting the best model based on the optimum knot point uses the Generalized Cross Validation (GCV) value. The best model found was spline truncated use one knot with GCV 14.183. The estimation parameter model by using the variance covariance matrix is fit in modeling the HDI and GDI data since the RMSE is smaller than that of fixed variance covariance matrix.

Key Word: Bi-response, GCV, GDI, HDI, Nonparametrics, Variance Covariance

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

KATA PENGANTAR

Puji syukur “Alhamdulillah” senantiasa penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul ” Estimator Matrik *Variance-Covariance Spline Truncated* pada Regresi Nonparametrik Birespon”. Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Statistika, Program Pascasarjana, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Selesaiannya tesis ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, untuk itu penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Kepada Bapak dan Ibuk, Nyoto Harsoyo dan Puji Ayuni, serta saudara-saudara Jauhar Mustikarani, Maulida Meirisdiana yang tidak henti-hentinya mendoakan, memotivasi dan memberikan kepercayaan sehingga menjadi salah satu bentuk dukungan untuk penulis agar dapat menyelesaikan perkuliahan dengan sebaik-baiknya.
2. Dr. Kartika Fithriasari, M.Si, selaku Kepala Departemen Statistika Fakultas Sains dan Analitika Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si, selaku Kepala Program Studi Pascasarjana Statistika Fakultas Sains dan Analitika Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
4. Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si dan Jerry Dwi T. Purnomo, P.hD selaku dosen pembimbing yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan petunjuk, bimbingan dan arahan kepada penulis untuk dapat menyelesaikan tesis.
5. Para dosen penguji, Dr. Vita Ratnasari dan Dr. Suhartono, M.Sc atas saran, masukan dan koreksi yang diberikan bagi tercapainya hasil yang lebih baik.
6. Seluruh dosen dan staff Departemen Statistika Fakultas Sains dan Analitika Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

7. Teman seperjuangan dalam proses perkuliahan hingga pengerjaan Tesis yaitu Fauzah, Endah, Paramita, Vania dan Dini.
8. Serta semua pihak yang tidak dapat saya sebutkan satu-persatu.

Besar harapan penulis agar Tesis ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa Tesis ini belum sempurna, oleh karena itu saran dan kritik yang membangun sangat penulis harapkan.

DAFTAR ISI

ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR GAMBAR.....	xix
DAFTAR NOTASI.....	xxi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	6
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	7
2.1. Statistika Deskriptif	7
2.2. Analisis Regresi.....	8
2.2.1. Regresi Parametrik	8
2.2.2. Regresi Nonparametrik	9
2.3. Spline Truncated pada Regresi Nonparametrik.....	9
2.4. Matrik Variance-Covariance	11
2.5. Spline <i>Truncated</i> pada Regresi Nonparametrik Birespon	11
2.6. <i>Weighted Least Square</i> (WLS)	13
2.7. Pengujian Dependensi Variabel Respon.....	14
2.8. Pemilihan Titik Knot Optimal	14

2.9. Teorema Matriks Aljabar	15
2.10. Indeks Pembangunan Manusia dan Indeks Pembangunan Gender.....	15
2.11. Ukuran Kesesuaian Model	17
2.11.1. Dimensi Kesehatan	18
2.11.2. Dimensi Pendidikan.....	19
2.11.3. Dimensi Standar Hidup Layak	19
BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	21
3.1. Sumber Data.....	21
3.2. Variabel Penelitian	21
3.3. Struktur Data	22
3.4. Langkah Analisis.....	23
3.4.1. Estimasi Parameter Model Spline <i>Truncated</i> dalam Regresi Nonparametrik Birespon.....	23
3.4.2. Estimasi Matriks <i>Variance-Covariance</i> Model Spline <i>Truncated</i> dalam Regresi Nonparametrik Birespon.....	24
3.4.3. Aplikasi pada Data IPM dan IPG di Pulau Jawa	25
3.5. Diagram Alir	26
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	29
4.1. Estimasi Parameter Spline <i>Truncated</i> dalam Regresi Nonparametrik Birespon	29
4.2. Estimasi Matrik <i>Variance Covariance</i> Spline <i>Truncated</i> dalam Regresi Nonparametrik Birespon.....	33
4.3. Pemodelan IPM dan IPG dengan Spline <i>Truncated</i> pada Regresi Nonparametrik Birespon	38
4.3.1. Eksplorasi Data.....	38
4.3.2. Korelasi antar Variabel Respon.....	44
4.3.3. Pemilihan Titik Knot Optimal	45

4.4. Interpretasi Model.....	50
BAB V KESIMPULAN	57
5.1. Kesimpulan	57
5.2. Saran.....	58
DAFTAR PUSTAKA	61
LAMPIRAN.....	67

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Penelitian Sebelumnya Terkait Faktor yang Mempengaruhi	16
Tabel 3. 1 Variabel Penelitian	21
Tabel 3. 2 Definisi Operasional Variabel Penelitian	21
Tabel 3. 3 Struktur Data	22
Tabel 4. 1. Statistik Deskriptif Variabel Penelitian Tingkat Provinsi	41
Tabel 4. 2 Statistik Deskriptif Variabel Penelitian Tingkat Kabupaten/Kota	44
Tabel 4. 3 Korelasi antar Variabel Respon.....	44
Tabel 4. 4 Nilai GCV Menggunakan Satu Titik Knot.....	45
Tabel 4. 5. Nilai GCV Menggunakan Dua Titik Knot	46
Tabel 4. 6 Estimasi Parameter pada Pemodelan IPM dan IPG di Pulau Jawa	48

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Kerangka Pemikiran Teoritis	20
Gambar 3.1 Flowchart Memodelkan Data IPM dan IPG	26
Gambar 3.2 Flowchart Memodelkan Data IPM dan IPG (Lanjutan)	27
Gambar 4.1 Kepadatan Penduduk Provinsi di Pulau Jawa.....	38
Gambar 4.2 Perkembangan (a) IPM dan (b) IPG di Indonesia	40
Gambar 4.3 Perbandingan IPM dan IPG Provinsi di Pulau Jawa	40
Gambar 4.4 Scatterplot Variabel Respon terhadap Variabel Prediktor.....	43
Gambar 4.5 Nilai GCV dari pembagian titik knot.....	45
Gambar 4.6 Plot Perbandingan antara data actual dengan data prediksi pada data (a) IPM dan (b) IPG	49
Gambar 4.7 Angka Kesakitan pada Respon IPM berdasarkan Interval Titik Knot	51
Gambar 4.8 Angka Partisipasi Kasar SMA pada Respon IPM berdasarkan Interval Titik Knot	52
Gambar 4.9 PDRB Perkapita pada Respon IPM berdasarkan Interval Titik Knot	53
Gambar 4.10 Angka Kesakitan pada Respon IPG berdasarkan Interval Titik Knot	54
Gambar 4.11 Angka Partisipasi Kasar SMA pada Respon IPG Berdasarkan Interval Titik Knot	55
Gambar 4.12 PDRB Perkapita pada Respon IPG berdasarkan Interval Titik Knot	56

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR NOTASI

Simbol	Pengertian
y_{ij}	respon ke -i dan observasi ke-j, untuk $i=1,2$ dan $j=1,2,...,n$
x_{kj}	prediktor ke-k dan observasi ke-p, untuk $k=1,2,...,p$ dan $j=1,2,...,n$
K_{ikl}	knot ke-l, prediktor ke-k dan respon ke-i, untuk $i=1,2$; $k=1,2,...,p$ dan $l=1,2,...,m$
ε_{ij}	<i>random error</i> respon ke-i dan observasi ke-j
\bar{x}	rata-rata
m	banyaknya titik knot
n	banyaknya pengamatan/observasi
p	banyaknya prediktor
W	matriks <i>variance-covariance</i> dalam estimator spline <i>truncated</i> pada regresi nonparametrik birespon
I	matriks identitas
y	matriks yang berisi variabel respon
A(x,β)	matriks yang berisi komponen nonparametrik dan <i>truncated</i>
β	matriks yang berisi koefisien dari komponen nonparametrik dan <i>truncated</i>

Simbol	Pengertian
<i>RMSE</i>	<i>Root Mean Square Error</i>
<i>GCV</i>	<i>Generalized Cross Validation</i>
R^2	koefisien determinasi
<i>MLE</i>	<i>Maximum Likelihood Estimation</i>

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemodelan statistika umumnya sangat memperhatikan beberapa konsep dasar yang menjadi landasan, diantaranya adalah konsep kemudahan matematika, konsep kesederhanaan model, konsep interpretasi model dan konsep kemudahan dalam implementasi model. Jika konsep dasar tersebut dapat terealisasi, maka model yang digunakan menjadi sangat baik dan sempurna. Banyak kasus pada pemodelan yang rumit, mungkin sangat sulit memenuhi konsep dasar ini, sehingga seseorang perlu membatasi diri pada beberapa konsep dasar yang lain (Budiantara, 2014). Salah satu pemodelan yang sering digunakan dalam bidang statistika adalah analisis regresi.

Analisis regresi umumnya digunakan untuk memodelkan sebuah persoalan riil ke dalam bentuk persamaan matematis yang dapat menjelaskan pola hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor. Disamping itu, analisis regresi sangat bermanfaat untuk peramalan (*forecasting*). Pada saat memodelkan satu atau lebih variabel, hal pertama yang semestinya dilakukan adalah apakah variabel tersebut saling berkorelasi. Apabila terjadi korelasi, maka dapat dilakukan pemodelan statistika dengan menggunakan analisis regresi (Budiantara, 2009). Pada analisis regresi terdapat dua pendekatan yang sering digunakan yaitu regresi parametrik dan nonparametrik. Perbedaan utama dari kedua pendekatan tersebut terletak pada bentuk kurva regresi yang digunakan dalam pemodelan data. Regresi parametrik bentuk kurvanya harus diketahui, misalnya linier, kuadratik, kubik, polinomial derajat- p dan lain-lain. Sedangkan dalam regresi nonparametrik apabila pola hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor tidak mengikuti suatu pola tertentu atau kurva regresi tidak diketahui. Kurva regresi hanya diasumsikan halus (smooth) (Budiantara, 2009)

Pemodelan pada kasus tertentu seringkali tidak dapat diselesaikan dengan pendekatan regresi parametrik dan harus diselesaikan dengan pendekatan regresi nonparametrik. Pendekatan regresi nonparametrik mempunyai fleksibilitas dalam

memodelkan pola data (Eubank, 1999). Pendekatan regresi nonparametrik telah banyak digunakan antara lain Spline *Truncated*, Kernel, Polinomial Lokal, Deret Fourier, *Multivariate Adaptive Regression Spline* (MARS), Wavelets, dan lain-lain. Namun, dari beberapa estimasi dalam regresi nonparametrik, *spline* lebih banyak disukai dan mendapatkan perhatian dari para peneliti regresi nonparametrik, karena model *spline* merupakan model yang mempunyai interpretasi statistik dan interpretasi visual sangat khusus dan sangat baik (Eubank, 1999; Budiantara, 2009). Spline merupakan potongan polinomial tersegmen sehingga memiliki fleksibilitas lebih dari polinomial biasa, oleh karena itu spline lebih efektif dalam penyesuaian diri terhadap karakteristik suatu data (Fajriyyah dan Budiantara, 2015). Salah satu basis fungsi yang digunakan pada spline yaitu spline *truncated* (Lyche dan Morken, 2008).

Spline *truncated* merupakan model polinomial tersegmen yaitu memiliki perubahan pola perilaku kurva yang berbeda pada interval tertentu, yang ditandai dengan adanya titik knot. Estimasi kurva regresi nonparametrik spline *truncated* dapat dilakukan dengan memilih parameter yaitu orde dan banyaknya titik knot. Pada penelitian ini akan digunakan kriteria *Generalized Cross Validation* (GCV) yaitu dengan memilih nilai GCV yang minimum. GCV digunakan karena memiliki sifat optimal asimtotik yang tidak dimiliki metode lain (Wahba, 1990).

Penelitian tentang spline *truncated* dalam regresi nonparametrik telah banyak dikembangkan berdasarkan banyaknya respon. Para peneliti yang menerapkan regresi dengan satu respon pada regresi nonparametrik diantaranya Merdekawati dan Budiantara (2013) melakukan pemodelan regresi spline *truncated* multivariabel pada faktor-faktor yang mempengaruhi kemiskinan di provinsi Jawa Tengah. Bintaningrum dan Budiantara (2014) juga melakukan pemodelan regresi nonparametrik spline *truncated* pada angka kelahiran kasar di Surabaya. Solicha, Budiantara dan Ratna (2018) melakukan pemodelan regresi nonparametrik spline *truncated* untuk memodelkan persentase unmet need di Kabupaten Gresik. Namun, dalam penelitian tersebut masih terbatas hanya membahas kasus dengan satu variabel respon, sehingga belum bisa mengakomodasi kasus dengan dua variabel respon. Selanjutnya, beberapa penelitian yang telah mengkaji pemodelan regresi bi-respon pada metode regresi nonparametrik diantaranya Adyana (2011)

menggunakan regresi nonparametrik birespon *spline* dengan dua variabel prediktor pada kasus tingkat kesejahteraan Indonesia. Pratiwi (2017) menggunakan *spline truncated* dalam regresi nonparametrik birespon pada kasus angka kematian bayi dan balita. Fernandes, dkk (2014) menggunakan estimasi *spline truncated* dalam regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal. Regresi nonparametrik birespon berbeda dengan model regresi respon tunggal, dimana model birespon terdiri dari beberapa persamaan dengan asumsi terdapat korelasi antar respon. Para peneliti umumnya mengakomodir adanya korelasi ini dengan menggunakan matriks *variance covariance* yang digunakan pada saat estimasi parameter model. Matriks *variance-covariance* secara teori diasumsikan sebagai *fixed variable*, sedangkan dalam kasus riil tidak diketahui nilainya. Beberapa penelitian tentang estimasi matriks *variance-covariance* pada metode nonparametrik adalah Ampulembang, Otok dan Tuti (2015) mengestimasi matriks *variance covariance* pada model MARS. Islamiyati, Fatmawati dan Chamidah (2018) mengestimasi matriks *covariance* pada data longitudinal birespon menggunakan regresi *spline penalized*. Hal ini berarti bahwa matriks *variance-covariance* tersebut harus diestimasi dari data. Pada penelitian tersebut, aplikasi dari hasil estimasi hanya dilakukan pada data simulasi. Berdasarkan simulasi dari penelitian tersebut, didapatkan hasil bahwa estimasi menggunakan matrik *variance-covariance* lebih baik dibandingkan dengan estimasi tanpa menggunakan matrik *variance covariance*. Permasalahan statistik yang muncul dalam penelitian ini adalah bagaimana mengestimasi matriks *variance-covariance* dengan menggunakan pendekatan *spline truncated* dalam regresi nonparametrik birespon pada sebuah data riil. *Spline truncated* dalam regresi nonparametrik birespon juga pernah diaplikasikan ke dalam bidang-bidang sosiologi, ekonomi serta bidang sosial kependudukan, diantaranya IPM dan IPG.

Indeks Pembangunan Manusia (IPM) dan Indeks Pembangunan Gender (IPG) merupakan salah satu contoh kasus pada bidang sosial dan kependudukan. IPM dan IPG adalah salah satu tolak ukur peningkatan sumber daya manusia suatu daerah atau negara yang dilihat berdasarkan tiga dimensi yaitu : (1) *life expectancy at birth*; (2) *literacy rate dan mean years of schooling*; (3) *purchasing power*

parity. Ketiga indikator tersebut saling mempengaruhi satu sama lain dan dapat dipengaruhi oleh faktor-faktor lain (UNDP,1990).

UNDP (1990) merumuskan bahwa pembangunan sumber daya manusia merupakan suatu proses meningkatkan pilihan-pilihan kehidupan yang lebih baik. Pengertian ini lebih ditujukan kepada peningkatan kesehatan, pendidikan, dan pendapatan. Dalam bahasa yang lebih mudah dipahami adalah hidup lebih lama dan sehat, berpendidikan cukup dan memiliki ketrampilan dan mempunyai pendapatan yang cukup untuk pemenuhan kebutuhan dasar minimal.

Indeks Pembangunan Manusia (IPM) yang didasarkan pada perluasan pilihan-pilihan hidup yang lebih baik seperti hidup lebih lama dan sehat, lebih berpendidikan dan terampil agar mendapatkan penghasilan yang cukup untuk pemenuhan kebutuhan dasar. Indikator IPM masih digunakan sebagai tolak ukur pembangunan dengan beberapa penyempurnaan terhadap variabel pembentuknya. Kemudian tahun 1995 dikembangkan pula indikator pembangunan gender dengan parameter IPG.

Pembangunan gender atau pembangunan yang berhubungan dengan gender (*Gender Development* atau *Gender Related Development*) ditujukan untuk mengetahui ada tidaknya ketimpangan yang terjadi antara laki-laki dan perempuan dalam pembangunan. Ketimpangan di antara laki-laki dan perempuan dinyatakan dalam suatu angka atau indeks. Semakin besar ketimpangan diantara keduanya dalam pembangunan manusia, semakin rendah nilai indeks tersebut.

Penelitian telah mengkaji pemodelan dari masing-masing respon tersebut seperti Pratoowo (2011) mengkaji pemodelan IPM yang dipengaruhi pola konsumsi non makanan dan angka beban ketergantungan. Nurbaeti (2013) mengkaji pemodelan IPM yang dipengaruhi angka pengangguran di provinsi Jawa Tengah. Fajriyyah dan Budiantara (2015) mengkaji pemodelan IPG yang dipengaruhi oleh angka partisipasi sekolah, angka buta huruf, TPAK dan persentase penduduk mempunyai keluhan kesehatan berdasarkan gender.

Terpusatnya pembangunan di Pulau Jawa khususnya dikota-kota besar seperti Jakarta, Surabaya, Yogyakarta dan Semarang, menyebabkan pembangunan di Indonesia belum merata baik ekonomi, kesehatan dan pendidikan. Menurut data BPS setiap tahunnya keadaan IPM dan IPG di Pulau Jawa meningkat tetapi pada

level kabupaten/kota masih banyak yang berada dibawah rata-rata indeks Indonesia. Namun untuk mencapai tingkat pembangunan yang merata ditingkat kabupaten/kota tidaklah mudah. Pertumbuhan pembangunan dapat dicapai dengan berbagai faktor pendukung seperti rendahnya angka kesakitan, Pendidikan yang layak yang dapat dilihat dari angka partisipasi kasar dan tingginya PDRB suatu daerah. Alasan lain yaitu setelah dilakukan pemeriksaan awal menggunakan visualisasi plot dari hasil masing-masing variabel prediktor terhadap variabel respon IPM dan IPG tidak mengikuti suatu pola tertentu atau kurva regresi tidak diketahui dan berubah pada interval tertentu. Dengan demikian, pada penelitian ini digunakan data IPM dan IPG di Pulau Jawa yang meliputi kabupaten/kota di provinsi-provinsi Banten, Jawa barat, DKI Jakarta, Jawa tengah, DI Yogyakarta dan Jawa Timur dengan menggunakan model spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon menggunakan hasil estimasi matrik *variance covariance*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan, maka permasalahan yang akan diselesaikan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana mendapatkan bentuk estimasi model spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon.
2. Bagaimana mendapatkan estimasi matriks *variance covariance* model spline *truncated* pada nonparametrik birespon.
3. Bagaimana memodelkan data IPM dan IPG menggunakan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disusun, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mendapatkan bentuk estimasi model spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon.
2. Mendapatkan estimasi matriks *variance-covariance* model spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon.

3. Memodelkan IPM dan IPG di Pulau Jawa menggunakan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini antara lain:

1. Menambah wawasan mengenai estimasi parameter model spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon menggunakan metode *weighted least square*
2. Menambah wawasan mengenai estimasi matriks *variance-covariance* model spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon
3. Memberikan informasi tambahan mengenai faktor-faktor yang berpengaruh terhadap IPM dan IPG di Pulau Jawa.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Penelitian ini dilakukan pada 119 Kabupaten/Kota di Provinsi Jawa dengan menggunakan data tahun 2018.
2. Masing-masing variabel respon menggunakan variabel prediktor yang sama
3. Mendapatkan estimasi parameter model regresi nonparametrik birespon menggunakan metode *Weighted Least Square* (WLS).
4. Mendapatkan estimasi matrik *variance-covariance* menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).
5. Metode yang digunakan dalam pemilihan titik knot optimal adalah *Generalized Cross Validation* (GCV).
6. Fungsi spline yang digunakan dalam penelitian ini adalah fungsi spline linier.
7. Banyak titik knot yang digunakan dalam fungsi spline adalah 1,2 knot.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan mengenai beberapa konsep, teorema dan dasar teori yang digunakan untuk menunjang penelitian. Penjelasan diawali dengan teori analisis regresi yang meliputi regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Pembahasan regresi difokuskan pada salah satu metode regresi nonparametrik yang digunakan dalam penelitian ini yaitu spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon. Metode spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon merupakan pengembangan dari metode spline yang diuraikan pula dalam bab ini. Selanjutnya, menjelaskan tentang asumsi model regresi nonparametrik birespon dan ukuran kesesuaian model. Dasar teori juga dilengkapi dengan menyebutkan beberapa teorema yang akan digunakan untuk mendukung penyelesaian tujuan penelitian ini. Model spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon yang digunakan dalam penelitian ini akan diterapkan pada pemodelan data yang melibatkan dua respon yaitu Indeks Pembangunan Manusia (IPM) dan Indeks Pembangunan Gender (IPG) serta beberapa prediktor yang diduga mempengaruhinya.

2.1. Statistika Deskriptif

Statistika deskriptif adalah metode-metode yang berkaitan dengan pengumpulan dan penyajian suatu gugus data sehingga memberikan informasi yang berguna. Statistika deskriptif hanya memberikan informasi mengenai data dan tidak menarik suatu kesimpulan (inferensi). Ukuran pemusatan data, ukuran penyebaran data, grafik, dan diagram termasuk dalam katagori statistika deskriptif.

Ukuran pemusatan data dan ukuran penyebaran data merupakan suatu alat yang dapat digunakan untuk mendefinisikan ukuran-ukuran numerik yang menjelaskan karakteristik dari data. Rata-rata dan varians sering digunakan untuk mendeskripsikan segugus data. Rata-rata adalah hasil pembagian antara jumlahan nilai setiap pengamatan dengan banyaknya data pengamatan yang dapat dituliskan dengan persamaan (2.1) (Walpole, 1995).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

Indeks \bar{x} menunjukkan rata-rata variabel. Indeks x_j menunjukkan pengamatan ke- j , dan indeks n menunjukkan banyaknya pengamatan.

Varians (s^2) adalah kuadrat simpangan dari semua nilai data terhadap rata-rata yang dituliskan dengan persamaan (2.2).

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2.2)$$

nilai maksimum merupakan nilai tertinggi/terbesar yang terdapat dalam segugus data. Sedangkan nilai minimum adalah nilai terendah yang terdapat dalam sekumpulan data.

2.2. Analisis Regresi

Analisis regresi dalam statistika digunakan untuk menjelaskan dugaan tentang adanya hubungan kausal antara respon dengan prediktor. Terdapat dua pendekatan yang sering digunakan dalam analisis regresi yaitu regresi parametrik dan nonparametrik. Perbedaan utama dari kedua pendekatan regresi ini terletak pada bentuk pola kurva regresi yang digunakan dalam pemodelan data.

2.2.1. Regresi Parametrik

Regresi parametrik merupakan metode yang sederhana dalam kajian analisis regresi, namun disisi lain menuntut terpenuhinya asumsi. Salah satu asumsi yang harus dipenuhi adalah bentuk kurva regresinya harus diketahui, misalnya linier, kuadratik, kubik, polinomial derajat- p dan lain-lain (Budiantara, 2011). Pengetahuan terhadap kurva regresi memudahkan dalam memilih salah satu bentuk kurva atau fungsi regresi yang memungkinkan dari beberapa bentuk alternatif yang ada. Jika bentuk kurva atau fungsi regresi parametrik yang dipilih tepat maka hasil interpretasinya akan lebih sederhana dan mudah dianalisis. Regresi parametrik memiliki beberapa kelebihan yaitu sederhana, mudah interpretasinya, estimator tidak bias, efisien dan konsisten (Budiantara, 2009). Secara matematis bentuk persamaan regresi linier dapat ditulis sebagai berikut.

$$y_j = g(x_j) + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

dengan y_j adalah variabel respon, fungsi $g(x_j)$ adalah fungsi kurva regresi parametrik yang memiliki *error* ε_j yang diasumsikan identik, independen dan berdistribusi normal (Eubank, 1999).

2.2.2. Regresi Nonparametrik

Regresi nonparametrik digunakan apabila pola hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor tidak mengikuti suatu pola tertentu atau kurva regresi tidak diketahui. Kurva regresi hanya diasumsikan halus (smooth) (Budiantara, 2009). Dalam regresi nonparametrik data akan mencari sendiri bentuk estimasi kurvanya tanpa dipengaruhi oleh subyektivitas peneliti.

Pendekatan regresi nonparametrik yang menyatakan hubungan antara p prediktor dengan respon tunggal yang melibatkan n pengamatan dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan regresi sebagai berikut :

$$y_j = f(x_{kj}) + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

dengan n adalah banyaknya pengamatan dan p adalah banyaknya prediktor y_j adalah variabel respon, x_{kj} adalah variabel prediktor dan random error ε_j diasumsikan identik, independen dan berdistribusi normal dengan mean 0 dan varians σ^2 (Wahba, 1990).

Terdapat beberapa metode dalam regresi nonparametrik yang dapat digunakan untuk mengestimasi bentuk kurva regresi $f(x_{kj})$, diantaranya adalah metode spline *truncated* yang menjadi fokus penelitian dalam penelitian ini. Metode spline *truncated* merupakan pengembangan dari metode spline yang berfokus terhadap optimasi titik knot.

2.3. Spline Truncated pada Regresi Nonparametrik

Spline merupakan model yang mempunyai interpretasi statistik dan interpretasi visual yang sangat khusus dan sangat baik (Budiantara, 2009). Spline sebagai pendekatan pola data diperkenalkan oleh Whittaker pada tahun 1923, sedangkan spline sebagai persoalan optimasi dikembangkan oleh Reinsch pada tahun 1967 (Wahba, 1990). Metode spline dalam regresi nonparametrik dapat

ditemui dalam banyak bentuk, diantaranya adalah *smoothing* spline (Wang, 1998; Kim, dkk., 2004; Howell, 2007; Aydin, 2008) dan *truncated* spline (Smith, 1979; Budiantara, 2006; Sudiarsa, dkk., 2015; Ruliana, dkk., 2015). Kedua metode spline tersebut masing-masing menggunakan parameter yang berbeda untuk membuat estimasi kurva regresi lebih fleksibel, yaitu parameter penghalus pada *smoothing* spline dan titik knot pada *truncated* spline. Perbedaan jenis parameter tersebut, menyebabkan optimasi untuk mendapatkan estimator pada kedua metode spline tersebut juga berbeda. Estimator *smoothing* spline yang bergantung pada parameter penghalus diperoleh dengan optimasi *penalized least square* (PLS) (Wahba, 1990; Eubank, 1999), sedangkan estimator spline *truncated* yang bergantung pada titik knot diperoleh dengan optimasi OLS (Budiantara, 2006).

Pendekatan spline umumnya menyatakan hubungan antara p prediktor dengan respon tunggal pada persamaan (2.5), dalam model aditif berikut ini:

$$y_j = f(x_{1j}) + f(x_{2j}) + \dots + f(x_{pj}) + \varepsilon_j \quad (2.5)$$

persamaan (2.5) dapat ditulis dalam bentuk:

$$y_j = \sum_{k=1}^p f(x_{kj}) + \varepsilon_j \quad (2.6)$$

Secara umum, bentuk pendekatan fungsi spline *truncated* linier (orde 1) dalam regresi nonparametrik birespon dengan titik titik knot K_1, K_2, \dots, K_m dapat dinyatakan dalam persamaan berikut (2.7).

$$y_j = \beta_0 + \sum_{k=1}^p \left(\beta_k x_{kj} + \sum_{l=1}^m \gamma_{kl} (x_{kj} - K_{kl})_+ \right) + \varepsilon_j \quad (2.7)$$

dengan:

$$\beta_0 + \sum_{k=1}^p \left(\beta_k x_{kj} + \sum_{l=1}^m \gamma_{kl} (x_{kj} - K_{kl})_+ \right) = f(x_{kj})$$

sehingga dapat dijelaskan bahwa y_j merupakan respon pada pengamatan ke- j , x_{kj} merupakan prediktor ke- k pada pengamatan ke- j , β_0 merupakan intersep, β_k merupakan koefisien nonparametrik pada prediktor ke- k , γ_{kl} merupakan koefisien *truncated* pada prediktor ke- k dan knot ke- l , K_{kl} merupakan nilai knot pada prediktor ke- k dan knot ke- l . Jika fungsi regresi $f(x_{kj})$ dalam model persamaan

(2.6) dihampiri dengan fungsi spline *truncated*, maka didapat spline *truncated* dalam regresi nonparametrik pada persamaan (2.7).

2.4. Matrik Variance-Covariance

Variance σ_{11}, σ_{22} dari $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dan *covariance* σ_{ij} untuk semua $i \neq j$ merupakan elemen-elemen dari matrik *covariance* yang dinotasikan dengan

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{11} & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{11} & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{12} \\ \hline \sigma_{12} & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{12} & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

diagonal matrik \mathbf{W} mengandung *variance* ε dan yang lainnya adalah *covariance* ε .

2.5. Spline Truncated pada Regresi Nonparametrik Birespon

Regresi nonparametrik birespon adalah model regresi yang bertujuan untuk mengetahui hubungan antara dua variabel respon dengan dua atau lebih variabel prediktor, dimana variabel yang digunakan tidak mengikuti pola tertentu. Asumsi mendasar regresi nonparametrik birespon adalah antara variabel respon saling berkorelasi tetapi bukan sebab akibat yang berarti perubahan data pada variabel respon satu tidak berpengaruh terhadap perubahan data pada variabel respon lainnya.

Wang (1998) dalam penelitiannya pada *smoothing* spline, menyatakan model regresi nonparametrik birespon dalam bentuk persamaan regresi sebagai berikut:

$$y_{ij} = f(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj}) + \varepsilon_{ij} \quad (2.9)$$

dimana indeks i menunjukkan banyaknya variabel respon ke- i , $i = 1, 2$; indeks j menunjukkan banyaknya pengamatan data ke- j , $j = 1, 2, \dots, n$; indeks k menunjukkan banyaknya variabel prediktor ke- k , $k = 1, 2, \dots, p$. Dengan y_{ij} adalah dua respon yang saling berkorelasi dan $f(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj})$ adalah fungsi dalam

model dan ε_{ij} adalah residual pengukuran dengan mean $\mathbf{0}$ dan *variance covariance*.
dengan matrik *variance covariance* sebagai berikut. (Welsh dan Yee,2006)

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \text{var}(\varepsilon_{ij}) = \text{var} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1j} \\ \varepsilon_{2j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{var}(\varepsilon_{1j}) & \text{Cov}(\varepsilon_{1j}, \varepsilon_{2j}) \\ \text{Cov}(\varepsilon_{1j}, \varepsilon_{2j}) & \text{var}(\varepsilon_{2j}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

diasumsikan persamaan (2.9) bersifat aditif sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{ij} &= f(x_{1j}) + f(x_{2j}) + \dots + f(x_{pj}) + \varepsilon_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^p f(x_{kj}) + \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (2.11)$$

kurva regresi $f(x_{kj})$ dihamperi menggunakan fungsi spline *truncated* linier dengan titik- titik knot K_1, K_2, \dots, K_m , sebagai berikut:

$$f(x_{kj}) = \beta_{0i} + \sum_{k=1}^p \left(\beta_{ki} x_{kj} + \sum_{l=1}^m \gamma_{kil} (x_{kj} - K_{kil})_+^1 \right) \quad (2.12)$$

dimana $\sum_{k=1}^p \beta_{ki} x_{kj}$ merupakan komponen nonparametrik dan $\sum_{l=1}^m \gamma_{kil} (x_{kj} - K_{kil})_+^1$

merupakan komponen *truncated* dengan:

$$(x_{kj} - K_{kil})_+^1 = \begin{cases} (x_{kj} - K_{kil})_+^1, & x_{kj} \geq K_{kil} \\ 0, & x_{kj} < K_{kil} \end{cases}$$

indeks l menunjukkan banyaknya titik knot dimana $l=1, 2, \dots, m$. Berdasarkan persamaan (2.11) dan (2.12) didapatkan model regresi nonparametrik birespon spline *truncated* sebagai berikut:

$$y_{ij} = \beta_{0i} + \sum_{k=1}^p \left(\beta_{ki} x_{kj} + \sum_{l=1}^m \gamma_{kil} (x_{kj} - K_{kil})_+^1 \right) + \varepsilon_{ij} \quad (2.13)$$

persamaan (2.13) dapat diubah dalam bentuk matriks menjadi:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.14)$$

dimana komponen-komponen matrik pada persamaan (2.14) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in})^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{in})^T$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_{0i}, \beta_{1i}, \dots, \beta_{li}, \gamma_{li1}, \dots, \gamma_{lim}, \beta_{p1}, \dots, \beta_{p1}, \gamma_{pi1}, \dots, \gamma_{pim})^T$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & (x_{11} - K_{li1})_+^1 & \cdots & (x_1 - K_{lim})_+^1 & \cdots & x_{p1} & (x_{p1} - K_{pi1})_+^1 & \cdots & (x_{p1} - K_{pim})_+^1 \\ 1 & x_{12} & (x_{12} - K_{li1})_+^1 & \cdots & (x_2 - K_{lim})_+^1 & \cdots & x_{p2} & (x_{p2} - K_{pi1})_+^1 & \cdots & (x_{p2} - K_{pim})_+^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & (x_{1n} - K_{li1})_+^1 & \cdots & (x_n - K_{lim})_+^1 & \cdots & x_{pn} & (x_{pn} - K_{pi1})_+^1 & \cdots & (x_{pn} - K_{pim})_+^1 \end{pmatrix}$$

orde matrik \mathbf{y} dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah $2n \times 1$, untuk matrik $\boldsymbol{\beta}$ berorde $((2p(1+m)+2) \times 1)$, sedangkan matrik $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ berorde $2n \times (p(1+m)+2)$.

2.6. Weighted Least Square (WLS)

Dalam pemodelan regresi nonparametrik birespon, diasumsikan bahwa *error* variabel respon yang sama identik dan independen, sedangkan *error* variabel respon yang berbeda tidak identik dan dependen. Metode *Ordinary Least Square* (OLS) mengasumsikan bahwa terdapat variansi konstan dalam error yang pada umumnya disebut keadaan homoskedastisitas. Metode *Weighted Least Square* (WLS) dapat digunakan ketika asumsi variansi konstan dalam error dilanggar atau dalam kata lain disebut heterokedastisitas (Greene, 2003). Penelitian sebelumnya yang menyatakan bahwa metode WLS dapat digunakan dalam estimasi pemodelan birespon adalah Hidayati, Chamidah dan Budiantara (2019) pada regresi semiparametric multirespon spline *truncated*.

Metode WLS mengestimasi parameter dengan meminimumkan jumlah kuadrat *error* antar pengamatan, Estimasi fungsi regresi spline *truncated* regresi nonparametrik birespon pada persamaan (2.14), diperoleh dengan menggunakan optimasi WLS, yaitu dengan menyelesaikan persamaan sebagai berikut:

$$\min \{ \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon} \} = \min \{ (\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \boldsymbol{\beta}) \} \quad (2.15)$$

dimana $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ berisi variabel prediktor nonparametrik dan $\boldsymbol{\beta}$ adalah parameter dari variabel prediktor nonparametrik.

2.7. Pengujian Dependensi Variabel Respon

Keberadaan korelasi respon pada model regresi birespon dapat diketahui dengan menggunakan koefisien korelasi Pearson yang diperoleh dengan persamaan sebagai berikut:

$$\rho_{12} = \frac{\text{cov}(y_1, y_2)}{[\text{var}(y_1) \text{var}(y_2)]^{1/2}} \quad (2.16)$$

nilai koefisien korelasi pada persamaan (2.14) berkisar antara -1 hingga 1 . Jika koefisien korelasi mendekati -1 atau 1 maka hubungan atau korelasi diantara respon semakin kuat, dan sebaliknya jika mendekati nol maka hubungan atau korelasi diantara respon semakin lemah (Draper dan Smith,1998). Sehingga, Hipotesis untuk pengujian dependensi antar variabel respon sebagai berikut

H_0 : $\rho_{12} = 0$ (tidak terdapat korelasi antar variabel respon)

H_1 : $\rho_{12} \neq 0$ (terdapat korelasi antar variabel respon)

maka statistik uji $|t| = \frac{\rho_{12}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}$ (2.17)

H_0 akan ditolak jika nilai statistik uji $|t| > t_{(\alpha/2; n-2)}$ dengan menggunakan $\alpha = 5\%$ (Walpole, 1995).

2.8. Pemilihan Titik Knot Optimal

Pemilihan titik knot optimal pada regresi nonparametrik spline *truncated* sangatlah penting. Spline *truncated* yang terbaik adalah spline memiliki titik knot optimal. Salah satu metode untuk menentukan titik knot optimal adalah *Generalized Cross Validation* (GCV). Model spline *truncated* terbaik memiliki knot optimal diperoleh dari nilai GCV yang minimum. Persamaan berikut menunjukkan fungsi GCV (Eubank, 1999).

$$GCV(K_1, K_2, \dots, K_m) = \frac{MSE(K_1, K_2, \dots, K_m)}{(n^{-1} \text{trace}[I - A(K_1, K_2, \dots, K_m)])^2}, \quad (2.18)$$

dengan

$$MSE(K_1, K_2, \dots, K_m) = n^{-1} \sum_{j=1}^n \left(y_{ij} - \hat{f}(x_{kj}) \right)^2$$

dimana $K = (K_1, K_2, \dots, K_m)$ merupakan titik knot pada masing-masing variabel prediktor sedangkan matrik $A(K_1, K_2, \dots, K_m)$ diperoleh dari persamaan $\hat{y} = A(K_1, K_2, \dots, K_m)y$ (Eubank, 1999).

2.9. Teorema Matriks Aljabar

Sub bab berikut ini menyajikan beberapa teorema dan proposisi tentang matriks aljabar. Teorema dan proposisi tersebut akan dipergunakan pada pembahasan teori (Bab 4) untuk mendapatkan estimasi matriks *variance-covariance* dari model *Spline Truncated* pada Regresi Nonparametrik Birespon yang akan dibuktikan. Teorema yang digunakan sebagai berikut.

Teorema 2.10.1 (Gupta dan Nagar, 2000)

Jika **A** dan **B** masing-masing adalah matriks nonsingular berorde $m \times m$ dan $n \times n$, maka:

$$|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|^n |\mathbf{B}|^m$$

Teorema 2.10.2 (Christensen, 1991)

$$\frac{\partial \mathbf{H}(t)^{-1}}{\partial t} = -\mathbf{H}(t)^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}(t)}{\partial t} \mathbf{H}(t)^{-1}$$

Teorema 2.10.3 (Searle, Casella dan McCulloch, 2006)

Jika $\mathbf{H}(t)$ adalah matriks berorde $r \times r$, dengan elemen dari $\mathbf{H}(t)$ adalah fungsi dari skalar t , maka:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln |\mathbf{H}(t)| = \text{tr} \left(\mathbf{H}(t)^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}(t)}{\partial t} \right)$$

Teorema 2.10.4 (Broxon, 2006)

Jika **A**, **B**, **C** dan **D** masing-masing adalah matriks berorde $p \times m$, $m \times n$, $p \times q$ dan $q \times n$, maka:

$$(\text{vec}(\mathbf{A}))^T (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})^{-1} (\text{vec}(\mathbf{A})) = \text{tr}(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})$$

2.10. Indeks Pembangunan Manusia dan Indeks Pembangunan Gender

Menurut UNDP, Indeks Pembangunan Manusia (IPM) mengukur capaian pembangunan manusia berbasis sejumlah komponen dasar kualitas hidup. Sebagai ukuran kualitas hidup, IPM dibangun melalui pendekatan tiga dimensi yaitu,

dimensi umur panjang dan sehat, dimensi pengetahuan, dan dimensi kehidupan yang layak (BPS, 2015). Komponen penyusun IPM mencerminkan keberhasilan dalam pembangunan kesehatan, pendidikan dan kehidupan ekonomi yang layak.

$$IPM = \sqrt[3]{IS \times IP \times IL} \times 100,$$

dimana

(2.19)

$$IP = \frac{IHLS + IRLS}{2}$$

dengan IS menunjukkan indeks kesehatan, IP menunjukkan indeks pendidikan, IL menunjukkan indeks standar hidup layak, IHLS menunjukkan indeks harapan lama sekolah dan IRLS menunjukkan indeks rata-rata lama sekolah.

Indeks Pembangunan Gender (IPG) dapat digunakan untuk mengetahui kesenjangan pembangunan manusia antara laki-laki dan perempuan. Nilai IPG berkisar antara 0-100 persen. Bila selisih antara nilai IPM dan IPG semakin jauh maka semakin tinggi kesenjangan pembangunan antara laki-laki dan perempuan (BPS, 2015).

$$IPG = \frac{IPM_{Perempuan}}{IPM_{laki-laki}} \quad (2.20)$$

IPM dan IPG merupakan suatu indeks komposit yang mencakup tiga dimensi pokok pembangunan manusia yang dinilai mencerminkan status kemampuan dasar penduduk yaitu kesehatan, pencapaian pendidikan, dan standar hidup layak. Beberapa pertimbangan yang digunakan sebagai dasar pemilihan variabel penelitian adalah adanya penelitian yang telah dilakukan sebelumnya yang telah dirangkum pada Tabel 2.1 sebagai berikut.

Tabel 2. 1 Penelitian Sebelumnya Terkait Faktor yang Mempengaruhi IPM dan IPG

Peneliti	Judul	Variabel Prediktor
Madan (2012)	<i>Human Development and Poverty – A Perspective Across Indian States</i>	Rata-rata lama sekolah, Angka Kematian Bayi, Nutrisi Bayi, Sanitasi pada Rumah Tangga, Air minum bersih pada Rumah Tangga

Tabel 2. 2 Penelitian Sebelumnya Terkait Faktor yang Mempengaruhi IPM dan IPG (lanjutan)

Peneliti	Judul	Variabel Prediktor
Bhakti (2012)	Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Indeks Pembangunan Manusia di Indonesia Periode 2008-2012	PDRB, rasio ketergantungan, konsumsi rumah tangga untuk makanan, APBD untuk pendidikan, dan APBD untuk kesehatan.
Melliana dan Zain (2013)	Analisis Statistika faktor yang Mempengaruhi IPM di Kabupaten/Kota di Jawa Timur menggunakan Regresi Panel	Rasio Guru-Siswa, Angka Partisipasi Sekolah, Jumlah Sarana Kesehatan, Rumah tangga dengan Akses Air Bersih, Kepadatan Penduduk, TPAK
Fajriyyah dan Budiantara (2015)	Pemodelan IPG dengan Pendekatan Regresi Spline di Indonesia	Angka Partisipasi Kasar, Angka Partisipasi Sekolah, Angka Buta Huruf, Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja, Persentase Penduduk Punya Keluhan Kesehatan, Rasio Jenis Kelamin
Klasen (2018)	Human Development Indices and Indicators: A Critical Evaluation	Tingkat Pengangguran Terbuka, Angka Kesakitan, Angka Kematian, Pertumbuhan ekonomi

2.11. Ukuran Kesesuaian Model

Model yang sesuai adalah model yang memiliki ukuran yang baik pada tahap evaluasi. Dalam penelitian ini menggunakan dua ukuran yaitu *Root of Mean Square Error (RMSE)* serta R^2 atau koefisien determinasi. *RMSE* adalah ukuran yang digunakan untuk mengevaluasi model dengan cara menghitung selisih antara nilai observasi y_{ij} dengan nilai estimasi $\hat{f}(x_{kj})$ pada setiap respon ($i=1,2$), dengan persamaan sebagai berikut (Greene, 2003):

$$RMSE_{y_i} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (y_{ij} - \hat{f}(x_{kj}))^2}{n-2}}, i=1,2. \quad (2.21)$$

Nilai R^2 mengukur seberapa besar rasio antara keragaman data yang mampu dijelaskan oleh model dibandingkan dengan total keragaman data, dengan persamaan sebagai berikut:

$$R_{y_i}^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n (y_{ij} - \hat{f}(x_{kj}))^2}{\sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}, i = 1, 2. \quad (2.22)$$

Hal yang perlu diperhatikan dalam pemodelan data adalah bagaimana membentuk model yang sesuai/tepat menggambarkan fenomena riil yang kompleks bukan mendapatkan model yang sempurna. Salah satu cara untuk mengetahuinya adalah dengan melakukan pemilihan model terbaik. Model yang baik adalah model yang memiliki nilai $RMSE_{y_1}$ dan $RMSE_{y_2}$ kecil serta nilai $R_{y_1}^2$ dan $R_{y_2}^2$ yang besar.

2.11.1. Dimensi Kesehatan

Dimensi kesehatan untuk mengukur IPM dan IPG adalah Angka Harapan Hidup (AHH). AHH merupakan rata-rata perkiraan lama tahun yang dapat ditempuh oleh seseorang selama hidup. Penghitungan angka harapan hidup melalui pendekatan tak langsung (*indirect estimation*). Jenis data yang digunakan adalah Anak Lahir Hidup (ALH) dan Anak Masih Hidup (AMH).

Menurut BPS tahun 2018 selain dari sisi angka harapan hidup, perubahan AHH dapat dilihat dari beberapa indikator lain. Salah satunya adalah angka kesakitan. Angka kesakitan merupakan gangguan terhadap kondisi fisik maupun jiwa, termasuk karena kecelakaan, atau hal lain yang menyebabkan terganggunya kegiatan sehari-hari. Indikator Angka Kesakitan dapat dimanfaatkan untuk mengukur tingkat kesehatan masyarakat secara umum yang dilihat dari adanya keluhan yang mengindikasikan terkena suatu penyakit tertentu. Pengetahuan mengenai derajat kesehatan suatu masyarakat dapat menjadi pertimbangan dalam pembangunan bidang kesehatan, yang bertujuan agar semua lapisan masyarakat memperoleh pelayanan kesehatan secara mudah, murah dan merata. Melalui upaya tersebut, diharapkan akan tercapai derajat kesehatan masyarakat yang lebih baik.

Sehingga pada penelitian ini dimensi kesehatan pada pemodelan IPM dan IPG akan diukur dengan menggunakan Angka Kesakitan.

2.11.2. Dimensi Pendidikan

Dimensi Pendidikan yang digunakan sebagai penghitung IPM dan IPG adalah Harapan Lama Sekolah dan Rata-rata Lama Sekolah. Menurut Kemdikbud 2017, keberhasilan pembangunan suatu wilayah ditentukan oleh sumber daya manusia yang berkualitas. Pendidikan merupakan salah satu cara meningkatkan kualitas SDM tersebut. Oleh karena itu peningkatan mutu pendidikan harus terus diupayakan, dimulai dengan membuka kesempatan seluas-luasnya kepada penduduk untuk mengenyam pendidikan, hingga pada peningkatan kualitas dan kuantitas sarana dan prasarana pendidikan. Untuk mengetahui seberapa banyak penduduk yang memanfaatkan fasilitas pendidikan dapat dilihat dari persentase penduduk menurut partisipasi sekolah. Untuk melihat partisipasi sekolah dalam suatu wilayah biasa dikenal beberapa indikator untuk mengetahuinya salah satunya adalah Angka Partisipasi Kasar (APK).

APK merupakan perbandingan antara siswa pada jenjang pendidikan tertentu dengan penduduk usia sekolah dan dinyatakan dalam persentase. Pada penelitian ini APK dipilih untuk mengukur dimensi pendidikan pada pemodelan IPM dan IPG, hal ini berdasarkan pernyataan oleh BPS, 2018 Program pemerintah yang berfokus pada pendidikan seperti Indonesia Pintar dan Bantuan Operasional Sekolah mulai terasa dampaknya. Hal ini dapat dilihat dari Angka Partisipasi Kasar (APK). APK SMA merupakan siswa usia 16-18 tahun pada jenjang pendidikan SMA dalam persentase. APK SMA sangat berpengaruh terhadap Harapan Lama Sekolah dan Rata-rata lama sekolah karena merupakan jenjang yang paling tinggi diantara pendidikan formal.

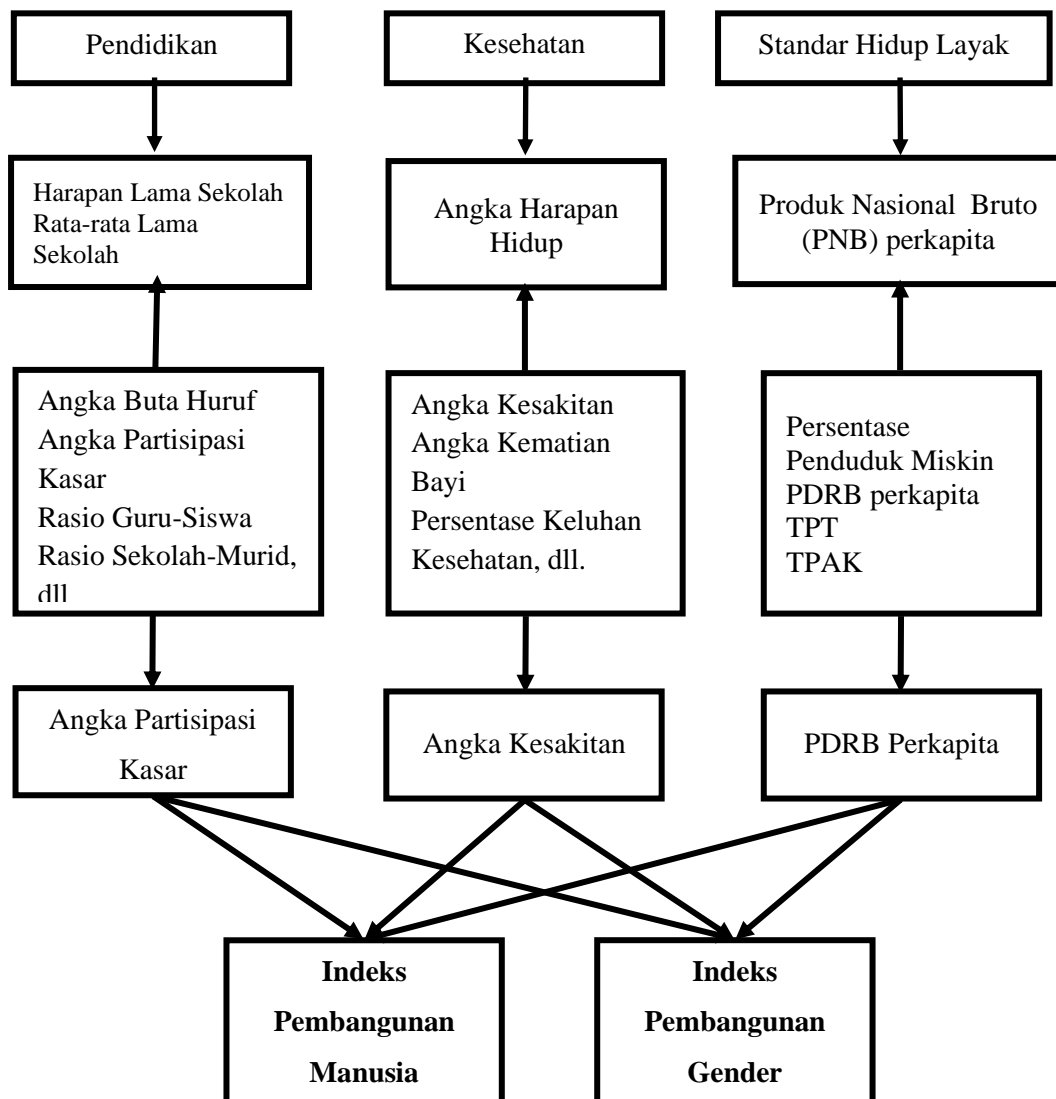
Sehingga pada penelitian ini dimensi Pendidikan pada pemodelan IPM dan IPG akan diukur dengan menggunakan Angka Partisipasi Kasar SMA.

2.11.3. Dimensi Standar Hidup Layak

Dimensi lain dari ukuran kualitas hidup manusia adalah standar hidup layak. Dalam cakupan lebih luas, standar hidup layak menggambarkan tingkat kesejahteraan yang dinikmati oleh penduduk sebagai dampak semakin membaiknya ekonomi. UNDP mengukur standar hidup layak menggunakan Produk Nasional Bruto (PNB) per kapita yang disesuaikan, sedangkan BPS dalam menghitung

standar hidup layak menggunakan rata-rata pengeluaran per kapita riil yang disesuaikan dengan paritas daya beli (*purchasing power parity*).

PDRB Perkapita merupakan salah satu indikator penting untuk mengetahui kondisi ekonomi di suatu daerah dalam suatu periode tertentu, baik atas dasar harga berlaku maupun atas dasar harga konstan. Maka dapat dikatakan ketika terjadi perubahan PDRB perkapita maka paritas daya beli akan berubah. Sehingga pada penelitian ini dimensi Pendidikan pada pemodelan IPM dan IPG akan diukur dengan menggunakan PDRB Perkapita. Berikut kerangka pemikiran teoritis berdasarkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya dan alasan pemilihan variabel yang telah dijelaskan sebelumnya.



Gambar 2.1 Kerangka Pemikiran Teoritis

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini membahas metodologi penelitian yang terdiri atas sumber data yang digunakan, penjelasan mengenai variabel-variabel penelitian yaitu variabel respon maupun variabel prediktor, langkah-langkah metode analisis serta rencana jadwal penelitian.

3.1. Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder, yaitu data yang telah dipublikasikan oleh BPS Provinsi Jawa dalam website resminya www.bps.go.id. Unit observasi yang digunakan adalah seluruh kabupaten/kota yang ada di Pulau Jawa yaitu sebanyak 119 kabupaten/kota.

3.2. Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari dua variabel respon (y) dan tiga variabel prediktor (x), dapat dilihat pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Variabel Penelitian

No.	Faktor	Notasi
1	Indeks Pembangunan Manusia (IPM)	Y_1
2	Indeks Pembangunan Gender (IPG)	Y_2
3	Angka Kesakitan	X_1
4	Angka Partisipasi Kasar SMA	X_2
5	PDRB Perkapita	X_3

Adapun definisi operasional dari variabel-variabel penelitian diatas menurut Badan Pusat Statistik dan beberapa literatur lain disajikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Definisi Operasional Variabel Penelitian

Variabel Penelitian	Definisi Operasional
Indeks Pembangunan Manusia (IPM)	IPM merupakan ukuran perbandingan dari harapan hidup, pendidikan, dan standar hidup. IPM digunakan sebagai

Tabel 3.3 Definisi Operasional Variabel Penelitian (Lanjutan)

Variabel Penelitian	Definisi Operasional
Indeks Pembangunan Manusia (IPM)	indikator untuk menilai aspek kualitas dari pembangunan dan untuk mengklasifikasikan apakah sebuah negara termasuk negara maju, negara berkembang, atau negara terbelakang dan juga untuk mengukur pengaruh dari kebijakan ekonomi terhadap kualitas hidup. (BPS, 2015)
Indeks Pembangunan Gender (IPG)	IPG merupakan indeks yang mengukur pencapaian pembangunan kapabilitas dasar manusia pada bidang kesehatan, pendidikan, dan ekonomi di suatu wilayah yang dibagi berdasarkan jenis kelamin laki-laki dan perempuan. (Kemenppa, 2015)
Angka Kesakitan	Angka kesakitan merupakan jumlah penduduk yang mengalami keluhan kesehatan dan terganggunya aktivitas dibagi banyaknya jumlah penduduk.
Angka Partisipasi Kasar SMA	Angka partisipasi kasar SMA merupakan proporsi anak sekolah pada jenjang SMA terhadap penduduk pada kelompok usia 16-18 tahun.
PDRB Perkapita	Pendapatan regional dibagi dengan jumlah penduduk yang tinggal di daerah itu.

3.3. Struktur Data

Struktur data yang digunakan dalam penelitian berdasarkan variabel yang digunakan adalah sebagai berikut

Tabel 3.4 Struktur Data

Kab/Kota	Respon		Prediktor		
	Y₁	Y₂	X₁	X₂	X₃
1	Y ₁₁	Y ₂₁	X _{(1) 1}	X _{(2) 1}	X _{(3) 1}
2	Y ₁₂	Y ₂₂	X _{(1) 2}	X _{(2) 2}	X _{(3) 2}
3	Y ₁₃	Y ₂₃	X _{(1) 3}	X _{(2) 3}	X _{(3) 3}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
119	Y ₁₁₁₉	Y ₂₁₁₉	X ₍₁₎₁₁₉	X _{(2) 119}	X _{(3) 119}

3.4. Langkah Analisis

Sub-bab ini merupakan bagian dari langkah-langkah yang digunakan untuk menjawab tujuan penelitian yaitu sebagai berikut.

3.4.1. Estimasi Parameter Model Spline *Truncated* dalam Regresi Nonparametrik Birespon

Tujuan pertama dari penelitian ini adalah mendapatkan bentuk estimasi model spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon. Untuk menyelesaikan tujuan pertama dilakukan dengan langkah-langkah sebagai :

1. Diberikan data berpasangan $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj}, y_{1j}, y_{2j})$, $j = 1, 2, \dots, n$ dan p menunjukkan banyaknya variabel prediktor, diasumsikan mengikuti model regresi nonparametrik birespon

$$y_{ij} = f(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj}) + \varepsilon_{ij}$$

2. Asumsikan model regresi nonparametrik birespon pada langkah (1) merupakan model yang bersifat aditif

$$\begin{aligned} y_{ij} &= f(x_{1j}) + f(x_{2j}) + \dots + f(x_{pj}) + \varepsilon_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^p f(x_{kj}) + \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

dimana indeks i menunjukkan banyaknya variabel respon ke- i , $i = 1, 2$; indeks j menunjukkan banyaknya pengamatan data ke- j , $j = 1, 2, \dots, n$; indeks k menunjukkan banyaknya variabel prediktor ke- k , $k = 1, 2, \dots, p$ dan

$\sum_{k=1}^p f(x_{kj})$ adalah komponen nonparametrik.

3. Komponen nonparametrik $\sum_{k=1}^p f(x_{kj})$ dihipotesiskan menggunakan fungsi spline *truncated* linier dengan m knot.

$$f(x_{kj}) = \sum_{k=0}^p \beta_{ki} x_{kj} + \sum_{l=1}^m \gamma_{kil} (x_{kj} - K_{kil})_+, \quad l = 1, 2, \dots, m$$

4. Berdasarkan langkah (3) didapat model spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon.

$$y_{ij} = \beta_{0i} + \beta_{1i}x_{1j} + \sum_{l=1}^m \gamma_{1il}(x_{1j} - K_{1il})_+ + \dots + \beta_{pi}x_{pj} + \sum_{l=1}^m \gamma_{pil}(x_{pj} - K_{pil})_+ + \varepsilon_{ij}$$

5. Menyajikan (4) dalam bentuk matriks.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

\mathbf{y} merupakan matriks yang memuat komponen respon, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ merupakan matriks yang memuat komponen nonparametrik dan *truncated* dan $\boldsymbol{\beta}$ merupakan matriks yang memuat koefisien parameter nonparametrik dan *truncated*.

6. Mendapatkan estimasi parameter $\boldsymbol{\beta}$ menggunakan metode *Weighted Least Square* dengan membentuk fungsi $Q(\boldsymbol{\beta})$

$$Q(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{A}(x, k)\boldsymbol{\beta})'\mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{A}(x, k)\boldsymbol{\beta})$$

7. Dari persamaan (6) nilai dapat $\boldsymbol{\beta}$ diestimasi menggunakan metode *Weighted Least Square* dengan menyelesaikan optimasi:

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \{Q(\boldsymbol{\beta})\} = \min_{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{y} - \mathbf{A}(x, k)\boldsymbol{\beta})'\mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{A}(x, k)\boldsymbol{\beta})$$

8. Menyelesaikan persamaan (7) dengan derivatif parsial, kemudian hasilnya disama dengankan nol (0)

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$$

9. Mendapatkan estimasi dari $\boldsymbol{\beta}$ yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

3.4.2. Estimasi Matriks *Variance-Covariance* Model Spline *Truncated* dalam Regresi Nonparametrik Birespon

Tujuan kedua dari penelitian ini adalah mendapatkan estimasi matriks *variance covariance* model spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon menggunakan metode MLE dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Asumsikan random error $\boldsymbol{\varepsilon}$ dalam model regresi nonparametrik birespon memiliki distribusi normal multivariat $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{W})$
2. Membentuk fungsi likelihood $L(\mathbf{W})$
3. Membuat transformasi fungsi likelihood $L(\mathbf{W})$ menjadi $\ln L(\mathbf{W})$
4. Menderivatifkan fungsi $\ln L(\mathbf{W})$ terhadap \mathbf{W} kemudian disamadengankan nol, sehingga didapatkan $\hat{\mathbf{W}}$

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} = 0$$

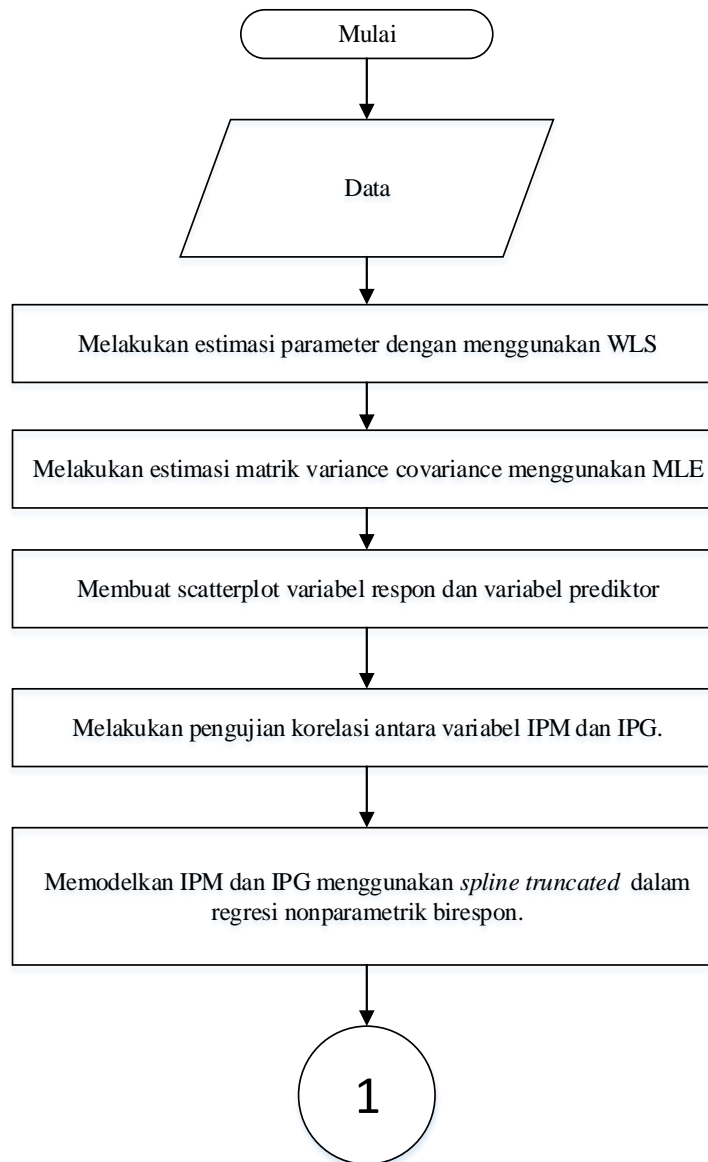
3.4.3. Aplikasi pada Data IPM dan IPG di Pulau Jawa

Tujuan ketiga dari penelitian ini adalah memodelkan IPM dan IPG di Jawa dengan menggunakan pendekatan estimasi model *spline truncated* dalam regresi nonparametrik birespon. Untuk menyelesaikan tujuan ketiga dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

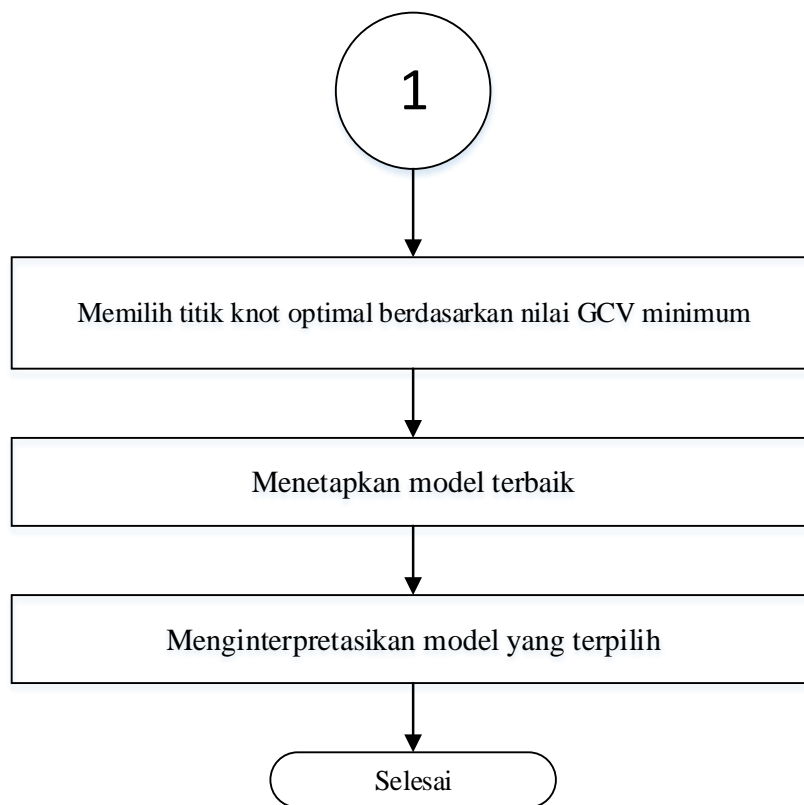
1. Membuat eksplorasi data untuk mengetahui statistik deskriptif dari masing-masing variabel penelitian.
2. Membuat *scatter plot* antara IPM dan variabel prediktor yang mempengaruhi.
3. Membuat *scatter plot* antara IPG dan variabel prediktor yang mempengaruhi.
4. Melakukan pengujian korelasi antara variabel IPM dan IPG.
5. Memodelkan IPM dan IPG dengan variabel yang diduga mempengaruhi menggunakan model *spline truncated* dalam regresi nonparametrik birespon.
6. Memilih titik knot optimal berdasarkan nilai GCV minimum.
7. Menetapkan model terbaik berdasarkan langkah (6) menggunakan perhitungan MSE dan R^2 sebagai kriteria dari kebaikan model.
8. Menguji *random error* berdistribusi normal multivariat.
9. Membuat kesimpulan dari model yang terbentuk

3.5. Diagram Alir

Berdasarkan langkah analisis yang sudah ditentukan maka diperoleh diagram alir dari penelitian ini adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Flowchart Memodelkan Data IPM dan IPG



Gambar 3.2 *Flowchart* Memodelkan Data IPM dan IPG (Lanjutan)

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini menyajikan hasil pembahasan teori untuk menjawab Tujuan 1, 2 dan 3 yang disebutkan dalam Bab 1, yang umumnya membahas pembuktian estimator spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon. Pembahasan mengenai Tujuan 1 difokuskan pada teori untuk mendapatkan estimasi fungsi spline *truncated* dalam model regresi nonparametrik birespon menggunakan metode WLS. Pembahasan mengenai Tujuan 2 difokuskan pada kajian teori untuk mendapatkan estimasi bobot menggunakan matrik *variance covariance* yang mengakomodasi adanya korelasi antar respon dalam model regresi nonparametrik birespon. Metode yang digunakan untuk mendapatkan estimasi fungsi regresi dan estimasi matrik *variance covariance* dalam penelitian ini adalah metode MLE. Sedangkan pembahasan mengenai Tujuan 3 menerapkan hasil estimasi fungsi dan estimasi matrik *variance covariance* yang diperoleh terhadap data IPM dan IPG untuk mengetahui kebaikan model. Hasil pembahasan diperoleh berdasarkan tahapan metodologi pada Bab 3, yang dapat dijabarkan dalam sub bab dibawah ini.

4.1. Estimasi Parameter Spline *Truncated* dalam Regresi Nonparametrik Birespon

Diberikan data berpasangan $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj}, y_{1j}, y_{2j})$. Terdapat p variabel prediktor dan jumlah data sebanyak n pengamatan. Sehingga model spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon yang digunakan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{1j} &= f_1(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj}) + \varepsilon_{1j} \\ y_{2j} &= f_2(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj}) + \varepsilon_{2j} \end{aligned} \tag{4.1}$$

dengan $j = 1, 2, \dots, n$. Bentuk kurva $f_1(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj})$ dan $f_2(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj})$ diasumsikan tidak diketahui. Sedangkan *error random* di dalam ε_{1j} dan ε_{2j} saling independen dengan *mean* $\mathbf{0}$ dan *variance covariance* \mathbf{W} . Persamaan (4.1) jika disajikan dalam bentuk matrik, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} y_{1_1} \\ y_{1_2} \\ \vdots \\ y_{1_119} \\ y_{2_1} \\ y_{2_2} \\ \vdots \\ y_{2_119} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_{11}) + f_1(x_{21}) + \dots + f_1(x_{p1}) \\ f_1(x_{12}) + f_1(x_{22}) + \dots + f_1(x_{p2}) \\ \vdots \\ f_1(x_{1119}) + f_1(x_{2119}) + \dots + f_1(x_{p119}) \\ f_2(x_{11}) + f_2(x_{21}) + \dots + f_2(x_{p1}) \\ f_2(x_{12}) + f_2(x_{22}) + \dots + f_2(x_{p2}) \\ \vdots \\ f_2(x_{1119}) + f_2(x_{2119}) + \dots + f_2(x_{p119}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1_1} \\ \varepsilon_{1_2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1_119} \\ \varepsilon_{2_1} \\ \varepsilon_{2_2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2_119} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$f_i(x_{kj})$ merupakan komponen nonparametrik yang dihamperi dengan fungsi spline *truncated*, dimana i merupakan banyaknya respon. Berdasarkan persamaan (2.11), maka persamaan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik biresepon dengan p variabel prediktor dan m titik knot sebagai berikut:

$$y_{ij} = \beta_{0i} + \left(\beta_{1i}x_{1j} + \sum_{l=1}^m \gamma_{1il}(x_{1j} - K_{1il})_+ \right) + \left(\beta_{2i}x_{2j} + \sum_{l=1}^m \gamma_{2il}(x_{2j} - K_{2il})_+ \right) + \dots + \left(\beta_{pi}x_{pj} + \sum_{l=1}^m \gamma_{pil}(x_{pj} - K_{pil})_+ \right) + \varepsilon_{ij} \quad (4.3)$$

dengan $i = 1, 2$ dan $j = 1, 2, \dots, n$, sehingga dapat dijabarkan model dengan 1 (satu) knot sebagai berikut:

$$y_{ij} = \beta_{0i} + \left(\beta_{1i}x_{1j} + \gamma_{1i1}(x_{1j} - K_{1i1})_+ \right) + \left(\beta_{2i}x_{2j} + \gamma_{2i1}(x_{2j} - K_{2i1})_+ \right) + \dots + \left(\beta_{pi}x_{pj} + \gamma_{pi1}(x_{pj} - K_{pi1})_+ \right) + \varepsilon_{ij} \quad (4.4)$$

Sedangkan model dengan 2 (dua) knot dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$y_{ij} = \beta_{0i} + \left(\beta_{1i}x_{1j} + \gamma_{1i1}(x_{1j} - K_{1i1})_+ + \gamma_{1i2}(x_{1j} - K_{1i2})_+ \right) + \left(\beta_{2i}x_{2j} + \gamma_{2i1}(x_{2j} - K_{2i1})_+ + \gamma_{2i2}(x_{2j} - K_{2i2})_+ \right) + \dots + \left(\beta_{pi}x_{pj} + \gamma_{pi1}(x_{pj} - K_{pi1})_+ + \gamma_{pi2}(x_{pj} - K_{pi2})_+ \right) + \varepsilon_{ij} \quad (4.5)$$

Fungsi spline *truncated* $f_i(x_{kj})$ pada persamaan matrik (4.2) dapat diuraikan sehingga terpisah antara parameter dan variabel-variabelnya dalam bentuk:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

dimana komponen $\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ dan $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 x_{11} (x_{11} - K_{li1})_+ & \cdots & (x_1 - K_{lim})_+ \cdots x_{p1} (x_{p1} - K_{pi1})_+ & \cdots & (x_{p1} - K_{pim})_+ \\ 1 x_{12} (x_{12} - K_{li1})_+ & \cdots & (x_2 - K_{lim})_+ \cdots x_{p2} (x_{p2} - K_{pi1})_+ & \cdots & (x_{p2} - K_{pim})_+ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 x_{1n} (x_{1n} - K_{li1})_+ & \cdots & (x_n - K_{lim})_+ \cdots x_{pn} (x_{pn} - K_{pi1})_+ & \cdots & (x_{pn} - K_{pim})_+ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 x_{11} (x_{11} - K_{li1})_+ & \cdots & (x_1 - K_{lim})_+ \cdots x_{p1} (x_{p1} - K_{pi1})_+ & \cdots & (x_{p1} - K_{pim})_+ \\ 1 x_{12} (x_{12} - K_{li1})_+ & \cdots & (x_2 - K_{lim})_+ \cdots x_{p2} (x_{p2} - K_{pi1})_+ & \cdots & (x_{p2} - K_{pim})_+ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 x_{1n} (x_{1n} - K_{li1})_+ & \cdots & (x_n - K_{lim})_+ \cdots x_{pn} (x_{pn} - K_{pi1})_+ & \cdots & (x_{pn} - K_{pim})_+ \end{pmatrix}$$

Dengan $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2$ adalah vektor berukuran $(n \times 1)$, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ adalah vektor berukuran $((p(1+m)+1) \times 1)$ serta $\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ dan $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ adalah matrik berukuran $n \times (p(1+m)+1)$. Sehingga persamaan matrik di atas dapat disederhanakan seperti pada persamaan (2.14) sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan \mathbf{y} adalah vektor yang memuat vektor y_1 dan y_2 mempunyai orde $2n \times 1$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor yang memuat vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ mempunyai orde $2n \times 1$. $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ adalah matrik berukuran $2n \times (2p(1+m)+2)$. Serta $\boldsymbol{\beta}$ adalah matrik berukuran $((2p(1+m)+2) \times 1)$.

Berdasarkan asumsi spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon yaitu *random error* saling berkorelasi tetapi saling independen dengan *mean* nol dan *variance covariance* tidak sama (heterogen) maka untuk memperoleh estimator digunakan optimasi WLS. Untuk mendapatkan estimator yang menjamin terjadinya nilai minimum maka terdapat syarat yang harus dipenuhi yaitu syarat perlu dan syarat cukup. Syarat perlu dapat dilihat pada turunan pertama disamakan dengan nol dan syarat cukup dilihat dari turunan kedua merupakan matrik definit positif. Matriks *variance covariance* \mathbf{W} merupakan matrik simetris berukuran $2n \times 2n$ sebagai berikut:

$$\mathbf{W} = |\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}|$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}$$

Optimasi pada persamaan 2.14 dapat dilakukan dengan melakukan *derivative* parsial. Pertama memisalkan fungsi $Q(\beta) = \epsilon^T W \epsilon = (y - A(x, k)\beta)^T W (y - A(x, k)\beta)$ sehingga:

$$\begin{aligned}
 Q(\beta) &= (y - A(x, k)\beta)^T W (y - A(x, k)\beta) \\
 &= (y^T - A^T(x, k)\beta^T) W (y - A(x, k)\beta) \\
 &= (y^T - A^T(x, k)\beta^T) (Wy - WA(x, k)\beta) \\
 &= y^T Wy - \beta^T A^T(x, k) Wy - y^T WA(x, k)\beta + \beta^T A(x, k)^T WA(x, k)\beta \\
 &= y^T Wy - 2\beta^T A^T(x, k) Wy + \beta^T A(x, k)^T WA(x, k)\beta
 \end{aligned}$$

Kedua, dilakukan proses turunan persamaan di atas terhadap β , sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q(\beta)}{\partial \beta} &= \frac{\partial (y^T Wy - 2\beta^T A^T(x, k) Wy + \beta^T A(x, k)^T WA(x, k)\beta)}{\partial (\beta)} \\
 &= -2A^T(x, k) Wy + 2A^T(x, k) WA(x, k)\beta.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ketiga, untuk mendapatkan estimator β maka hasil persamaan (4.7) disamakan dengan nol.

$$\begin{aligned}
 0 &= -2A^T(x, k) Wy + 2A^T(x, k) WA(x, k)\beta \\
 A^T(x, k) WA(x, k)\hat{\beta} &= A^T(x, k) Wy \\
 \hat{\beta} &= (A^T(x, k) WA(x, k))^{-1} A^T(x, k) Wy
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

jika estimator telah memenuhi syarat perlu dan cukup maka bentuk estimasi fungsi spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(x, k) &= A(x, k)\hat{\beta} \\
 &= A(x, k)(A(x, k)^T WA(x, k))^{-1} A(x, k)^T Wy \\
 &= H(x, k)y
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

dimana $H(x, k) = A(x, k)(A(x, k)^T WA(x, k))^{-1} A(x, k)^T W$ matrik berukuran $2n \times 2n$.

Matrik $H(x, k)$ memuat titik knot sedangkan penentuan titik knot optimal diperoleh dengan memilih GCV yang paling minimum sesuai dengan persamaan 2.15.

4.2. Estimasi Matrik *Variance Covariance Spline Truncated* dalam Regresi Nonparametrik Birespon

Diasumsikan $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{W})$ dengan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor berorde $2n \times 1$ sedangkan \mathbf{W} adalah matriks berorde $2n \times 2n$, maka fungsi probabilitas bersama diberikan dalam persamaan berikut:

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}) = (2\pi)^{-2n/2} |\mathbf{W}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}\right] \quad (4.10)$$

dimana $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - f(x)$ dan $f(x) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta}$ adalah fungsi dari *spline truncated* pada regresi nonparametrik birespon yang diberikan oleh persamaan (2.14). Maka fungsi *likelihood* dari persamaan (4.10) sebagai berikut:

$$L(\mathbf{W}) = (2\pi)^{-2n/2} |\mathbf{W}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta})\right] \quad (4.11)$$

Jika $(\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta})$ dapat dijabarkan seperti $\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 - \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta}_1 \\ \mathbf{y}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}$ maka persamaan (4.11) menjadi

$$L(\mathbf{W}) = (2\pi)^{-2n/2} |\mathbf{W}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 - \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta}_1 \\ \mathbf{y}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}^T \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 - \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta}_1 \\ \mathbf{y}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}\right] \quad (4.12)$$

dimana hasil estimasi $\boldsymbol{\beta}$ adalah

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))^{-1} \mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{y}_1$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = (\mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))^{-1} \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{y}_2$$

Sehingga, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}) (\mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))^{-1} \mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{y}_1 = \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{y}_1$$

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) (\mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))^{-1} \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{y}_2 = \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{y}_2$$

dengan

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}) (\mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))^{-1} \mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, \mathbf{k})$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) (\mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))^{-1} \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, \mathbf{k})$$

fungsi likelihood pada persamaan (4.12) dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{W}) &= (2\pi)^{-2n/2} |\mathbf{W}|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\mathbf{y}_1) \\ (\mathbf{y}_2 - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\mathbf{y}_2) \end{pmatrix}^T \mathbf{W} \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_1 - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\mathbf{y}_1) \\ (\mathbf{y}_2 - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\mathbf{y}_2) \end{pmatrix} \right] \\
&= (2\pi)^{-2n/2} |\mathbf{W}|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T \mathbf{W} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Matriks varian kovarian *error* \mathbf{W} dalam persamaan (4.13) merupakan matriks bobot dengan struktur matriks seperti dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\mathbf{W} = |\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}| \tag{4.14}$$

dimana \mathbf{I} merupakan matrik identitas berukuran $n \times n$. Dengan mensubstitusi persamaan (4.14) ke dalam persamaan (4.13), maka diperoleh:

$$L(\boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-2n/2} |\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T |\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}| \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \right] \tag{4.15}$$

Dengan menggunakan Teorema 2.10.1, maka diperoleh

$$|\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}| = |\boldsymbol{\Sigma}|^n |\mathbf{I}|^2 = |\boldsymbol{\Sigma}|^n$$

Sehingga persamaan (4.15) menjadi:

$$L(\boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-2n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T |\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}| \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \right] \tag{4.16}$$

dengan mengambil transformasi \ln , maka fungsi *log likelihood* dalam persamaan (4.16), dapat dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\ln L(\boldsymbol{\Sigma}) = -n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T |\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}|^{-1} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

apabila dalam persamaan (4.17), $\begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$ dinyatakan dalam bentuk

$\text{vec}(\mathbf{H})$ (vektor berorde $n \times n$), dimana $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$, maka dengan

menggunakan Teorema 2.10.4 diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T |\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}|^{-1} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix} &= (\text{vec}(\mathbf{H}))^T (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{-1} (\text{vec}(\mathbf{H})) \\ &= (\text{vec}(\mathbf{H}))^T (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}) (\text{vec}(\mathbf{H})) \\ &= \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

dengan mensubstitusi persamaan (4.18) ke dalam persamaan (4.17), diperoleh:

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\Sigma}) &= -n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}| \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nilai maksimum dari fungsi *likelihood* pada persamaan (4.19) diperoleh dengan menurunkan secara parsial $\ln L(\mathbf{W})$ terhadap $\sigma_{ij} = (i, j = 1, 2)$ kemudian hasilnya disamakan dengan nol, dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \sigma_{ij}} &= -n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \ln |\boldsymbol{\Sigma}| \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T \right) \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

untuk mendapatkan turunan parsial dari persamaan (4.20), maka dapat digunakan Teorema 2.10.3 maka diperoleh hasil:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \ln |\boldsymbol{\Sigma}| = \text{tr} \left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \right] \quad (4.21)$$

dan dengan menggunakan Teorema 2.10.2, diperoleh hasil:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial \sigma_{ij}} &= -\Sigma^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_{ij}} \Sigma^{-1} \\ &= -\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{i,j} \Sigma^{-1}\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \ln |\Sigma| &= \text{tr} \left[\Sigma^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_{ij}} \right] \\ &= \text{tr} [\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{i,j}]\end{aligned}\quad (4.23)$$

dimana $\mathbf{T}(i, j)$ adalah matriks simetris berorde 2×2 yang elemennya bernilai 1 pada baris i kolom j dan baris j kolom i dan bernilai 0 untuk elemen lainnya. Dengan menggunakan persamaan (4.21), (4.22), dan (4.23) ke dalam persamaan (4.20), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}} &= -\frac{n}{2} \left(\text{tr} [\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{i,j}] \right) \\ 0 &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\Sigma^{-1} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T \right) \right) \\ \left(\text{tr} [\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{i,j}] \right) &= -\frac{1}{n} \text{tr} \left(\left(\frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T \right) \\ &= -\frac{1}{n} \text{tr} \left(\left(-\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{(i,j)} \Sigma^{-1} \right) \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T \right) \\ &= \text{tr} \left(\left(\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{(i,j)} \Sigma^{-1} \right) \frac{1}{n} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T \right)\end{aligned}\quad (4.24)$$

$$\left(\text{tr} [\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{i,j}] \right) = \text{tr} \left(\left(\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{(i,j)} \Sigma^{-1} \right) \left(\frac{1}{n} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T \right) \right)\quad (4.25)$$

$$\text{Misalkan } \Sigma = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}^T \quad (4.26)$$

Maka, hal ini dapat dibuktikan dengan mensubstitusikan persamaan (4.26) ke dalam persamaan (4.25) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left(tr \left[\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{i,j} \right] \right) &= tr \left(-\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{(i,j)} \Sigma^{-1} \Sigma \right) \\ &= tr \left(\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{i,j} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Akibatnya diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} \left(tr \left[\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{i,j} \right] \right) &= tr \left(\left(\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{(i,j)} \Sigma^{-1} \right) \left(\frac{1}{n} \left(\begin{array}{c} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{c} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{array} \right) \right) \right) \\ &= tr \left(\Sigma^{-1} \mathbf{T}_{i,j} \right) \left(\frac{1}{n} \left(\begin{array}{c} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{c} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{array} \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{n} \left(\begin{array}{c} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{c} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \end{array} \right) \right) \end{aligned}$$

maka estimasi $\hat{\Sigma}$ pada persamaan (4.27) dapat dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\left[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \right]^T \left[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \right]}{n} & \frac{\left[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \right]^T \left[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \right]}{n} \\ \frac{\left[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \right]^T \left[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_1 \right]}{n} & \frac{\left[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \right]^T \left[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})) \mathbf{y}_2 \right]}{n} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Berdasarkan persamaan (4.28), maka diperoleh estimasi matriks bobot \mathbf{W} dalam persamaan (4.14) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}} &= \left| \hat{\Sigma} \otimes \mathbf{I} \right| \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} \\ \hline \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{22} \end{array} \right] \otimes \mathbf{I} \end{aligned}$$

dengan

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{[(y_1 - H_1(x, k)y_1)]^T [(y_1 - H_1(x, k)y_1)]}{n}$$

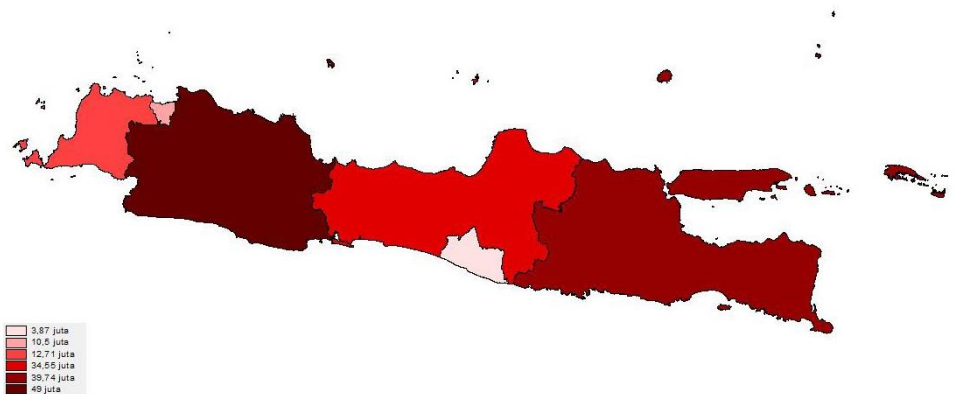
$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{[(y_2 - H_2(x, k)y_2)]^T [(y_2 - H_2(x, k)y_2)]}{n}$$

$$\hat{\sigma}_{12} = \hat{\sigma}_{21} = \frac{[(y_1 - H_1(x, k)y_1)]^T [(y_2 - H_2(x, k)y_2)]}{n}$$

4.3. Pemodelan IPM dan IPG dengan Spline *Truncated* pada Regresi Nonparametrik Birespon

4.3.1. Eksplorasi Data

Indonesia terbagi menjadi lima gugusan pulau besar. Diantara lima pulau besar di Indonesia yaitu Sulawesi, Kalimantan, Sumatera, Papua dan Jawa. Jawa merupakan pulau terkecil tetapi juga merupakan pulau terpadat. Populasi di Pulau Jawa sebesar 60% dari total populasi Indonesia. Luas Pulau Jawa adalah 138.793,6 kilometer persegi dengan jumlah kepadatan populasi sebanyak 1.317 jiwa/km². Pulau Jawa dibagi menjadi 6 provinsi, yaitu Banten, DKI Jakarta, Jawa Barat, Jawa Tengah, Jawa Timur, dan Daerah Istimewa Yogyakarta. Adapun provinsi di Jawa yang memiliki penduduk terbanyak adalah Jawa Barat, yakni mencapai 49 juta jiwa. Kemudian diikuti Jawa Timur sebanyak 39,74 juta jiwa, Jawa Tengah 34,55 juta jiwa, Banten dengan jumlah penduduk 12,71 juta jiwa, DKI Jakarta 10,5 juta jiwa dan Daerah Istimewa Yogyakarta 3,87 juta jiwa. Kepadatan penduduk provinsi di Pulau Jawa dapat divisualisasikan dalam Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Kepadatan Penduduk Provinsi di Pulau Jawa

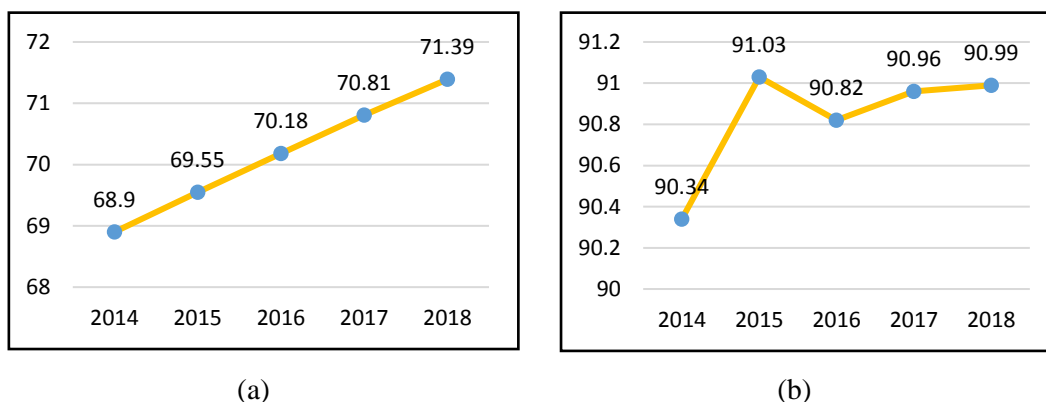
Banyaknya populasi yang terdapat di Pulau Jawa, membuat pemerintah selalu memberikan penanganan khusus dalam upaya meningkatkan sumber daya manusia. Salah satu dari beberapa ukuran meningkatnya sumber daya manusia dapat dilihat pada Indeks Pembangunan Manusia (IPM) dan Indeks Pembangunan Gender (IPG). IPM adalah salah satu indeks yang digunakan untuk mengukur keberhasilan pembangunan manusia di suatu wilayah. Indeks tersebut tersusun dari tiga indeks yaitu indeks pendidikan, indeks kesehatan dan indeks hidup layak. Penduduk sebagai sasaran pembangunan manusia terbagi berdasarkan beberapa kategori, antara lain adalah gender. Istilah “Gender” digunakan untuk menjelaskan perbedaan peran perempuan dan laki-laki yang bersifat bawaan sebagai ciptaan Tuhan. Gender adalah perbedaan peran, kedudukan, tanggung jawab, dan pembagian kerja antara laki-laki dan perempuan yang ditetapkan oleh masyarakat berdasarkan sifat perempuan dan laki-laki yang dianggap pantas menurut norma, adat istiadat, kepercayaan atau kebiasaan masyarakat.

Menciptakan kondisi setara dan mengurangi ketimpangan gender menjadi beberapa hal yang menjadi fokus pembangunan. Hal tersebut guna menciptakan keadaan yang adil dan ideal antara laki-laki dan perempuan, memiliki kesempatan yang sama dalam peningkatan kualitas hidup seperti kesehatan, pendidikan dan ekonomi tanpa adanya diskriminasi. Kualitas pembangunan manusia tinggi dan merata tentu akan mendorong pembangunan gender ke arah yang lebih baik. Idealnya, kualitas pembangunan manusia akan berbanding lurus dengan kualitas pembangunan gender.

Pemerataan keberhasilan pembangunan manusia seringkali hanya dilihat secara global saja meski pada dasarnya pembangunan manusia harus memberikan keadilan dan kemakmuran kepada semua masyarakat, baik laki-laki maupun perempuan. Dalam pemenuhan tujuan tersebut, terbentuklah sebuah indeks yang disebut dengan indeks pembangunan gender. Indeks tersebut bertujuan untuk melihat pemerataan pembangunan manusia bagi penduduk laki-laki dan perempuan.

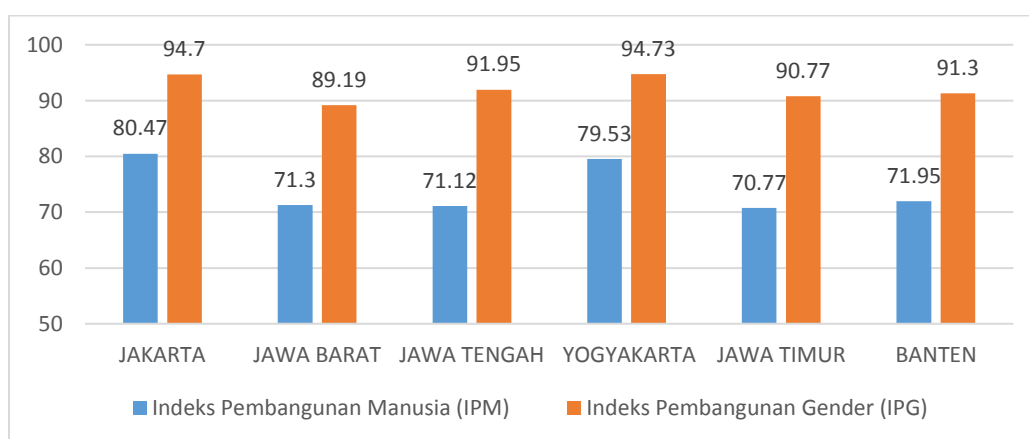
Berdasarkan data BPS, Pembangunan Manusia Indonesia menurut kesetaraan gender menunjukkan tren perbaikan. Ini tercermin dari Indeks Pembangunan Gender (IPG) Indonesia pada 2018 yang berada di level 90,99 dari

skala 0-100. Indeks tersebut naik 0,03 poin persentase dari tahun sebelumnya. Meskipun IPG mengalami kenaikan, namun Indeks Pembangunan Manusia (IPM) perempuan Indonesia masih berada di level 71,39. Perkembangan IPM dan IPG ini sesuai dengan Gambar 4.2



Gambar 4.2 Perkembangan (a) IPM dan (b) IPG di Indonesia

Secara umum, pembangunan manusia dan pembangunan gender di tingkat provinsi terus mengalami kemajuan dari tahun ke tahun. Pada tahun 2018, IPM dan IPG di seluruh provinsi meningkat meskipun peningkatannya bervariasi antarprovinsi, dimana IPM dan IPG di 11 provinsi yang tumbuh lebih tinggi dibandingkan dengan IPM dan IPG Indonesia, sedangkan 23 provinsi lainnya tumbuh lebih rendah. Beberapa provinsi yang mengalami pertumbuhan lebih tinggi dibandingkan dengan IPM dan IPG Indonesia berada di pulau Jawa. Berikut ini adalah visualisasi yang menunjukkan perbandingan antara IPM dan IPG provinsi di Pulau Jawa.



Gambar 4.3 Perbandingan IPM dan IPG Provinsi di Pulau Jawa

Pada gambar 4.3 terlihat bahwa, nilai IPM untuk seluruh provinsi di Pulau Jawa sangat bervariasi. Provinsi DKI Jakarta memiliki nilai IPM yang masuk dalam kategori “tinggi”. Sedangkan kelima provinsi lainnya, masih masuk dalam IPM kategori “sedang”. Selanjutnya akan dilihat bagaimana pemerataan pembangunan manusia diantara penduduk laki-laki dan perempuan di semua provinsi yang ada di Pulau Jawa. Pada Gambar 4.3, nilai IPG untuk keenam provinsi masuk dalam kategori “tinggi”. Nilai IPG terendah ditempati oleh Provinsi Jawa Barat sedangkan nilai IPG tertinggi ditempati oleh Provinsi DKI Jakarta. Terlihat pula secara visual, bahwa IPM dan IPG memiliki pola yang searah dimana provinsi dengan IPM yang tinggi juga memiliki IPG yang tinggi. Hal tersebut dapat diartikan jika provinsi dengan kualitas pembangunan manusia yang baik akan memiliki kualitas pembangunan gender yang baik pula dengan catatan tidak ada kesenjangan peningkatan kualitas hidup antara laki-laki dan perempuan. Dari Gambar 4.3 terdapat perbedaan antara IPM dan IPG yang menunjukkan bahwa pembangunan manusia tidak sama dengan pembangunan gender artinya masih ada ketidaksetaraan gender dalam proses pembangunan di Pulau Jawa. Selanjutnya akan dilihat deskriptif dari data IPM dan IPG Provinsi di Pulau Jawa data tahun 2018, hasilnya sebagai berikut.

Tabel 4. 1. Statistik Deskriptif Variabel Penelitian Tingkat Provinsi

	Rata Rata	Minimum	Maksimum
IPM	74,19	70,77	80,47
IPG	92,11	89,19	94,73

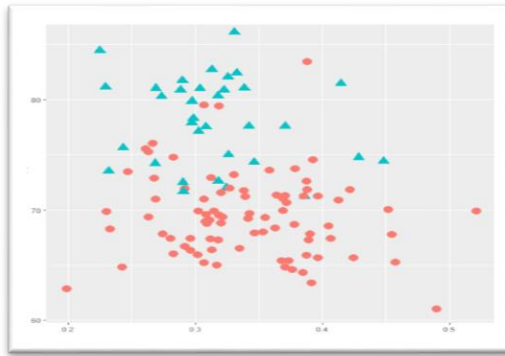
Tabel 4.1 menunjukkan deskriptif dari variabel respon. Nilai rata-rata biasanya digunakan untuk melihat kecondongan data dengan membandingkan pada rentang nilai minimum dan maksimum. Nilai rata-rata IPM dan IPG tidak berada ditengah antara nilai minimum dan nilai maksimum, artinya pembangunan manusia dan gender belum merata di pulau Jawa. Nilai rata-rata IPM provinsi di pulau Jawa mendekati nilai minimum, hal ini menunjukkan bahwa banyak provinsi yang berada pada rentang antara rata-rata dan nilai maksimum, sehingga IPM provinsi di pulau Jawa banyak yang berada diatas rata-rata IPM pulau Jawa. Pada tahun 2018, IPM provinsi tertinggi sebesar 80,47 dicapai oleh Provinsi DKI Jakarta, sedangkan IPM

provinsi terendah sebesar 70,77 adalah Provinsi Jawa Timur. Nilai rata-rata IPG provinsi di pulau Jawa mendekati nilai maksimum, yang berarti banyak IPG provinsi yang berada dibawah rata-rata. Berdasarkan data, IPG provinsi tertinggi sebesar 94,73 dicapai oleh Provinsi DKI Jakarta, sedangkan IPM provinsi terendah sebesar 89,19 adalah Provinsi Jawa Barat.

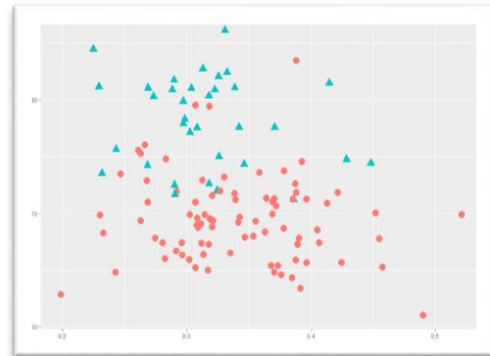
Provinsi DKI Jakarta sudah menjadi provinsi dengan IPM dan IPG tertinggi sejak indeks pembangunan manusia dihitung BPS. Sebagai ibukota negara, Provinsi DKI Jakarta merupakan pusat dari seluruh kegiatan, baik pendidikan, perekonomian, bisnis, dan lain-lain. Hal ini mendukung Provinsi DKI Jakarta dalam pencapaian pembangunan manusia. Sarana dan prasarana Provinsi DKI Jakarta cukup lengkap dan memadai. Akses untuk mendapatkan pendidikan maupun kesehatan pun mudah. Selain itu, sebagai provinsi dengan banyak pusat kegiatan, secara tidak langsung menjadikan Provinsi DKI Jakarta menarik bagi sumber daya manusia dengan pendidikan tinggi. Dari sisi level, capaian IPM dan IPG yang tinggi memang penting untuk melihat kemajuan pembangunan suatu wilayah. Jika dilihat dari Kabupaten/kota di Pulau Jawa masih banyak Kabupaten/Kota yang berada dibawah IPM dan IPG Indonesia bahkan berada di bawah IPM dan IPG provinsi.

Metode penghitungan IPM dan IPG yang digunakan BPS mengacu pada metodologi yang digunakan oleh UNDP. Sejak tahun 2015, BPS telah menggunakan penghitungan IPM dan IPG yang terbaru dengan melakukan penyesuaian pada beberapa indikator. IPM dan IPG dihitung dari agregasi tiga dimensi, yaitu umur panjang dan hidup sehat, pengetahuan, serta standar hidup layak. Setiap dimensi diwakili oleh indikator. Dimensi umur panjang dan hidup sehat diwakili oleh indikator umur harapan hidup saat lahir. Sementara itu, rata-rata lama sekolah dan harapan lama sekolah merupakan indikator yang mewakili dimensi pengetahuan. Terakhir, dimensi standar hidup layak Indonesia diwakili oleh indikator pengeluaran per kapita yang disesuaikan. Maka pada penelitian ini akan diambil indikator lain yang diduga dapat digunakan untuk mengukur perubahan IPM dan IPG, indikator yang digunakan adalah Angka Kesakitan untuk mengukur dimensi umur Panjang dan hidup sehat, Angka Partisipasi Kasar SMA untuk mengukur dimensi pengetahuan serta PDRB Perkapita digunakan untuk mengukur dimesi standar hidup layak.

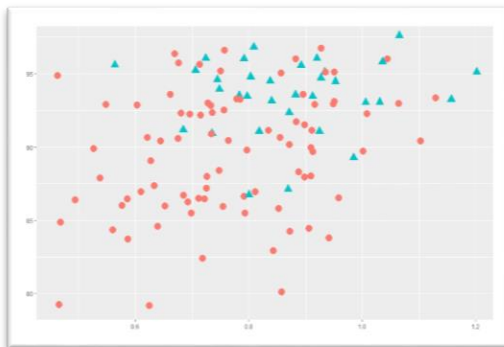
Gambaran antara hubungan IPM dan IPG dengan variabel yang diduga mempengaruhi perubahan nilai IPM dan IPG dapat dilihat dari visualisasi menggunakan *Scatterplot*. Identifikasi awal mengenai pola data dibutuhkan untuk melihat kesesuaian metode yang akan digunakan. Berikut adalah *Scatterplot* antara IPM (y_1) dan IPG (y_2) terhadap variabel yang diduga mempengaruhi yaitu Angka Kesakitan(x_1), Angka Partisipasi Kasar SMA(x_2), PDRB Perkapita(x_3).



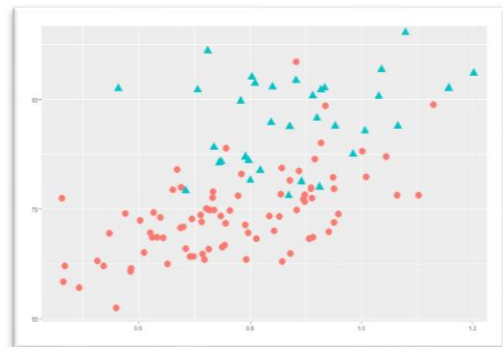
(a) *Scatterplot* y_1 dan x_1



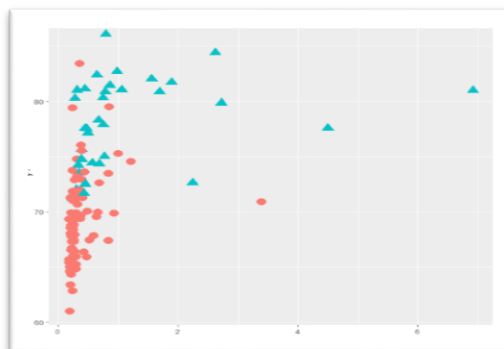
(d) *Scatterplot* y_2 dan x_1



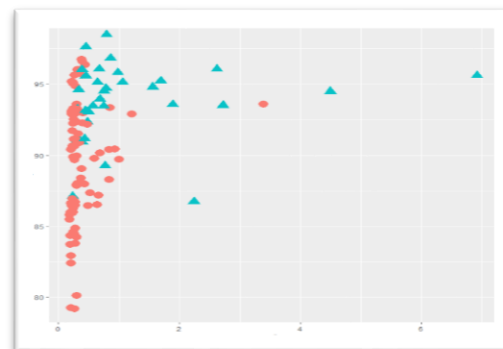
(b) *Scatterplot* y_1 dan x_2



(e) *Scatterplot* y_2 dan x_2



(c) *Scatterplot* y_1 dan x_3



(f) *Scatterplot* y_2 dan x_3

Gambar 4.4 *Scatterplot* Variabel Respon terhadap Variabel Prediktor

Berdasarkan Gambar 4.4 perbedaan warna menjelaskan kabupaten/kota,. Warna biru menjelaskan kota dan warna merah menjelaskan kabupaten. Sehingga, karakteristik anatar kabupaten/kota dapat terlihat jelas. Pada plot Angka Kesakitan, Angka Partisipasi Kasar SMA dan PDRB Perkapita terhadap IPM dan IPG mengindikasikan bahwa terdapat beberapa plot yang tidak menunjukkan pola yang jelas atau ada kecenderungan plot data memiliki perubahan perilaku pada suatu interval tertentu. Untuk melihat lebih rinci eksplorasi variabel yang digunakan, berikut disajikan tabel statistik deskriptif dari masing-masing variabel penelitian.

Tabel 4. 2. Statistik Deskriptif Variabel Penelitian Tingkat Kabupaten/Kota

	Rata Rata	Standar Deviasi	Minimum	Maksimum
IPM	71,98	5,46	61,00	86,11
IPG	90,79	4,24	79,18	98,48
Angka Kesakitan	0,33	0,06	0,20	0,52
APK SMA	0,80	0,16	0,46	1,20
PDRB PerKapita	0,598	0,864	0,182	6,922

Berdasarkan informasi Tabel 4.2 pada kolom minimum dan maksimum, nilai IPM terendah berada pada Kabupaten Sampang sedangkan nilai IPM tertinggi terdapat pada Kota Yogyakarta. Sedangkan nilai IPG terendah terdapat pada Kabupaten Bandung Barat dan nilai IPG tertinggi terdapat pada Kota Yogyakarta. Angka kesakitan terendah berada pada Kabupaten Bangkalan sedangkan angka kesakitan tertinggi berada pada Kabupaten Blitar. APK SMA terendah berada pada Kabupaten Sumedang, sedangkan APK SMA tertinggi berada pada Kota Salatiga. PDRB Perkapita terendah pada Kabupaten Pemalang dan PDRB Perkapita tertinggi pada Kota Jakarta Pusat.

4.3.2. Korelasi antar Variabel Respon

Berdasarkan asumsi pemodelan menggunakan spline *truncated* pada regresi nonparametriK birespon yaitu terdapat korelasi antar variabel respon maka, table 4.3 menunjukkan pengujian korelasi menggunakan metode pearson.

Tabel 4. 3. Korelasi antar Variabel Respon

	Pearson	P Value
IPM dan IPG	0,7159	0.000

Pada **Tabel 4.3** hasil pengujian korelasi *pearson* antara respon IPM dan IPG menunjukkan adanya korelasi positif yang signifikan yaitu 0,7159 dengan hipotesis untuk pengujian korelasi sebagai berikut.

H_0 : $\rho_{12} = 0$ (tidak terdapat korelasi antar variabel respon)

H_1 : $\rho_{12} \neq 0$ (terdapat korelasi antar variabel respon)

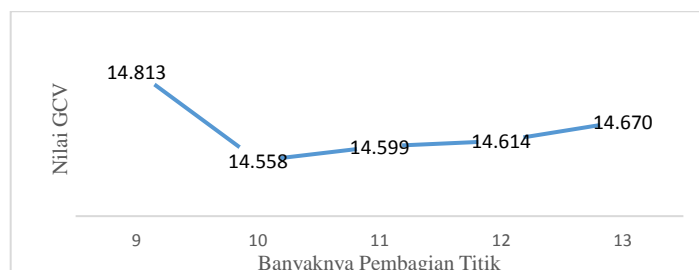
maka statistik uji

$$Pvalue = P\left(t_{(0,025;117)} > 11,078\right)$$

Sehingga diperoleh *pvalue* sebesar 0.000 maka, terdapat korelasi antar variabel respon dan pemodelan regresi nonparametrik birespon merupakan salah satu solusi yang tepat dalam memodelkan data.

4.3.3. Pemilihan Titik Knot Optimal

Tahapan pemodelan spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon diawali dengan mencari titik knot optimal berdasarkan nilai *GCV*. Pada penelitian ini, kriteria yang digunakan dalam pemilihan titik knot optimal adalah dengan nilai *GCV* terkecil. Titik knot yang digunakan adalah satu knot dan dua knot. Pembagian titik knot yang digunakan pada penelitian ini sebanyak 185 berdasarkan rentang minimum hingga maksimum dari data masing-masing variabel prediktor yang sesuai dengan perilaku datanya. Nilai *GCV* menggunakan satu titik knot sebagai berikut:



Gambar 4.5 Nilai GCV dari pembagian satu titik knot

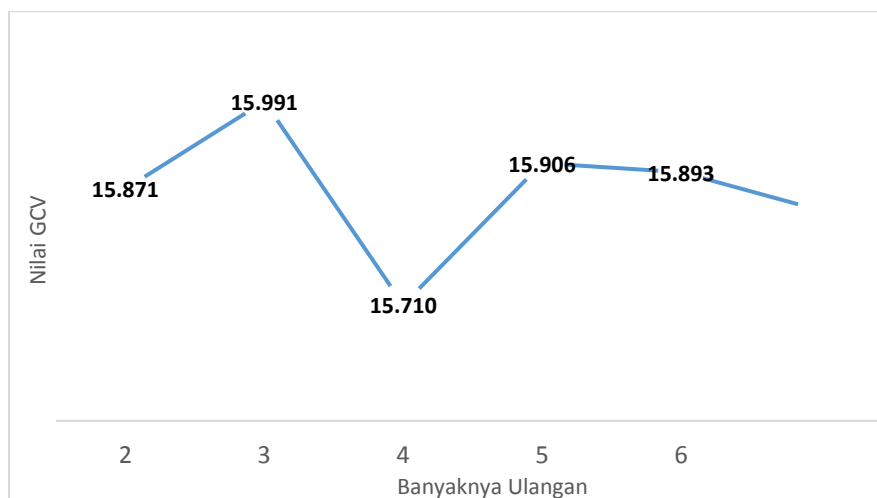
Pada Gambar 4.5 hanya ditampilkan 5 titik yang terbentuk yang mengandung *GCV* optimal. Sedangkan untuk nilai *GCV* dan titik knot yang terbentuk ditampilkan

pada Lampiran 4. Titik knot optimal ditandai dengan nilai GCV minimum, nilai tersebut berada pada pembagian titik knot yang ke-10. Nilai-nilai titik knot dapat ditunjukkan pada Tabel 4.4

Tabel 4. 4. Nilai GCV Menggunakan Satu Titik Knot

Pembagian Titik ke-	Respon 1			Respon 2			GCV
	K_{111}	K_{211}	K_{311}	K_{121}	K_{221}	K_{321}	
9	0,299	0,604	0,563	0,399	0,866	3,427	14,813
10	0,299	0,616	0,563	0,399	0,899	3,777	14,558*
11	0,299	0,628	0,563	0,399	0,933	4,126	14,599
12	0,299	0,639	0,563	0,399	0,966	4,476	14,614
13	0,299	0,651	0,563	0,399	1,000	4,825	14,670

Berdasarkan Tabel 4.4, nilai GCV minimum adalah sebesar 14,558 untuk satu titik knot. Nilai tersebut diperoleh dari satu titik knot optimal pada setiap variabel prediktor, Titik knot optimal respon 1 yaitu Indeks Pembangunan Manusia (IPM) untuk variabel Angka Kesakitan (X_1) berada pada titik knot 0,299. Variabel Angka Partisipasi Kasar SMA (X_2) berada pada titik knot 0,616. Variabel PDRB Perkapita (X_3) berada pada titik knot 0,563. Titik knot optimal respon 2 yaitu Indeks Pembangunan Gender (IPG) untuk variabel Angka Kesakitan (X_1) berada pada titik knot 0,399. Variabel Angka Partisipasi Kasar SMA (X_2) berada pada titik knot 0,899. Variabel PDRB Perkapita (X_3) berada pada titik knot 3,777.



Gambar 4.6 Nilai GCV dari pembagian dua titik knot

Pada Gambar 4.6 hanya ditampilkan 5 titik yang terbentuk yang mengandung GCV optimal. Sedangkan untuk nilai GCV dan titik knot yang terbentuk ditampilkan pada Lampiran 5. Titik knot optimal ditandai dengan nilai GCV minimum, nilai tersebut berada pada pembagian titik knot yang ke-4. Nilai-nilai titik knot dapat ditunjukkan pada Tabel 4.5

Tabel 4. 5. Nilai GCV Menggunakan Dua Titik Knot

Respon 1						Respon 2						GCV
K_{111}	K_{112}	K_{211}	K_{212}	K_{311}	K_{312}	K_{121}	K_{122}	K_{221}	K_{222}	K_{321}	K_{322}	
0,223	0,292	0,272	0,486	0,680	2,121	0,230	0,320	0,279	0,515	0,684	2,135	15,871
0,223	0,315	0,272	0,558	0,680	2,601	0,230	0,351	0,279	0,593	0,684	2,619	15,991
0,223	0,246	0,272	0,343	0,680	1,160	0,230	0,260	0,279	0,357	0,684	1,167	15,710*
0,223	0,338	0,272	0,629	0,680	3,081	0,230	0,381	0,279	0,672	0,684	3,102	15,906
0,223	0,269	0,272	0,415	0,680	1,641	0,230	0,290	0,279	0,436	0,684	1,651	15,893

Berdasarkan Tabel 4.5, nilai GCV minimum adalah sebesar 15,710 untuk dua titik knot. Nilai tersebut diperoleh dari dua titik knot optimal pada setiap variabel prediktor, Titik knot optimal respon 1 yaitu Indeks Pembangunan Manusia (IPM) untuk variabel Angka Kesakitan (X_1) berada pada titik knot 0,223 dan 0,246 variabel Angka Partisipasi Kasar SMA (X_2) berada pada titik knot 0,272 dan 0,343, variabel PDRB Perkapita (X_3) berada pada titik knot 0,680 dan 1,160. Titik knot optimal respon 2 yaitu Indeks Pembangunan Gender (IPG) untuk variabel Angka Kesakitan (X_1) berada pada titik knot 0,230 dan 0,260 variabel Angka Partisipasi Kasar SMA (X_2) berada pada titik knot 0,279 dan 0,357; variabel PDRB Perkapita (X_3) berada pada titik knot 0,684 dan 1,167.

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada pemilihan titik knot optimal dengan menggunakan satu dan dua titik knot yang terbentuk, nilai GCV untuk satu titik knot dan dua titik knot berturut-turut adalah 14,558 dan 15,710, sehingga titik knot optimum yang diambil untuk pemodelan spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon adalah spline linier dengan satu titik knot.

4.3.4. Penaksiran Parameter dan Interpretasi Model Spline Truncated pada Regresi Nonparametrik Birespon untuk Data IPM dan IPG

Setelah ditentukan titik knot optimal maka langkah selanjutnya adalah menghitung penaksiran parameter menggunakan model spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon dengan satu titik knot.

Pada persamaan (4.3) telah dituliskan model spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon dengan satu titik knot, sehingga dapat diuraikan berdasarkan masing-masing respon sebagai berikut.

$$y_{1j} = \beta_{01} + \beta_{11}x_{1j} + \gamma_{111}(x_{1j} - K_{111})_+ + \beta_{21}x_{2j} + \gamma_{211}(x_{2j} - K_{211})_+ + \beta_{31}x_{3j} + \gamma_{311}(x_{3j} - K_{311})_+ + \varepsilon_{1j} \quad (4.29)$$

$$y_{2j} = \beta_{02} + \beta_{12}x_{1j} + \gamma_{121}(x_{1j} - K_{121})_+ + \beta_{22}x_{2j} + \gamma_{221}(x_{2j} - K_{221})_+ + \beta_{32}x_{3j} + \gamma_{321}(x_{3j} - K_{321})_+ + \varepsilon_{2j} \quad (4.30)$$

Berdasarkan hasil dari estimasi parameter pada persamaan 4.8, berikut ini adalah hasil estimasi parameter data IPM dan IPG:

Tabel 4. 6. Estimasi Parameter Pemodelan IPM dan IPG di Pulau Jawa

Respon	Titik Knot	Nilai Titik Knot	Parameter
Respon 1	β_{01}	1 (Intersep)	50,076
	β_{11}	x_{1j}	-12,161
	γ_{11}	$(x_{1j} - 0,299)_+$	2,895
	β_{21}	x_{2j}	15,409
	γ_{21}	$(x_{2j} - 0,616)_+$	0,445
	β_{31}	x_{3j}	46,397
	γ_{31}	$(x_{3j} - 0,563)_+$	-44,479
Respon 2	β_{02}	1 (Intersep)	73,69
	β_{12}	x_{1j}	-4,505
	γ_{12}	$(x_{1j} - 0,399)_+$	5,619
	β_{22}	x_{2j}	14,468
	γ_{22}	$(x_{2j} - 0,899)_+$	-7,554
	β_{32}	x_{3j}	37,830
	γ_{32}	$(x_{3j} - 3,777)_+$	-37,048

Berdasarkan estimasi parameter dan titik knot optimal dalam Tabel 4.6, maka dapat dituliskan persamaan model spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon untuk pemodelan IPM dan IPG sebagai berikut:

Untuk respon yang pertama:

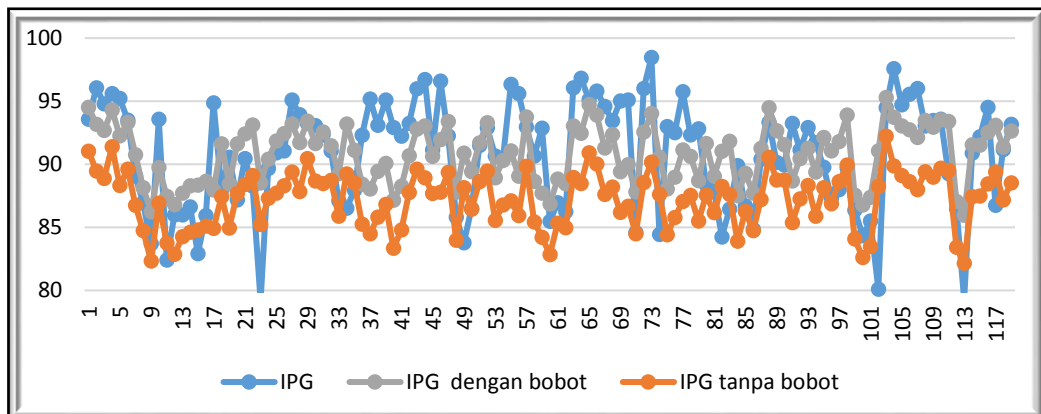
$$\hat{y}_{1j} = 50,076 - 12,161x_{1j} + 2,895(x_{1j} - 0,299)_+ + 15,409x_{2j} + 0,445(x_{2j} - 0,616)_+ + 46,397x_{3j} - 44,479(x_{3j} - 0,563)_+$$

Untuk respon yang kedua:

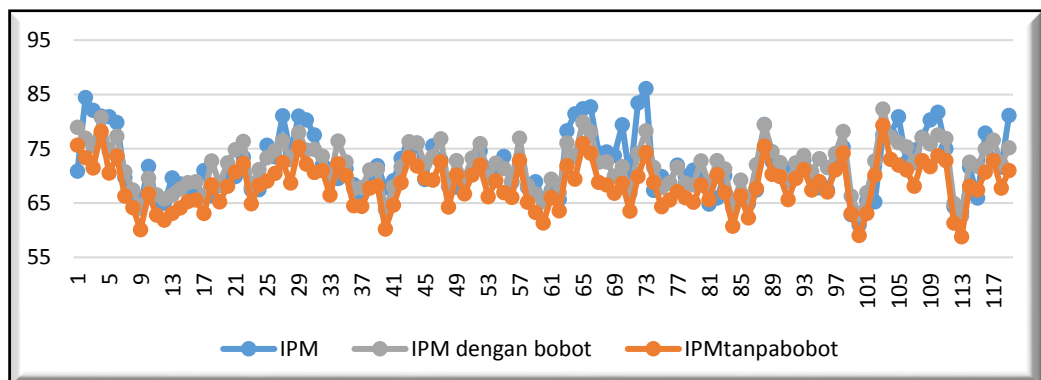
$$\hat{y}_{2j} = 73,69 - 4,505x_{1j} + 5,692(x_{1j} - 0,399)_+ + 14,468x_{2j} - 7,554(x_{2j} - 0,899)_+ + 37,830x_{3j} - 37,048(x_{3j} - 3,777)_+$$

dari kedua model tersebut didapatkan nilai R^2 sebesar 88,47%, nilai tersebut menjelaskan 88,47% variabilitas data mampu dijelaskan oleh model dan sisanya sebesar 11,53% dijelaskan oleh faktor lain yang tidak terdapat dalam model.

Setelah diperoleh model spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon, selanjutnya ditampilkan hasil perbandingan antara data aktual dan data prediksi diberikan pada Gambar 4.6.



(a)



(b)

Gambar 4.7 Plot Perbandingan antara data actual dengan data prediksi pada data (a) IPM dan (b) IPG

Berdasarkan Gambar 4.6 (a) dapat diketahui bahwa hasil prediksi spline *truncated* dengan menggunakan matrik *variance covariance* cenderung lebih mampu mengikuti pola data IPM jika dibandingkan dengan hasil prediksi tanpa menggunakan matrik *variance covariance*, begitu pula pada gambar 4.6 (b) hasil prediksi spline *truncated* dengan menggunakan matrik *variance covariance* cenderung lebih mampu mengikuti pola data IPG. Hal tersebut sesuai dengan nilai RMSE yang diperoleh dari masing-masing model. Hasil Prediksi model spline *truncated* pada regresi nonparamterik birespon dengan menggunakan matrik *variance covariance* memiliki RMSE sebesar 3,597, sedangkan prediksi model spline *truncated* pada regresi nonparamterik birespon tanpa menggunakan matrik *variance covariance* memiliki RMSE sebesar 5,019. Sehingga dapat disimpulkan bahwa model spline *truncated* pada regresi nonparamterik birespon dengan menggunakan matrik *variance covariance* lebih baik dalam memodelkan data IPM dan IPG Kabupaten/Kota di Pulau Jawa.

4.4. Interpretasi Model

Interpretasi model dari variabel-variabel prediktor dilakukan untuk mengetahui pengaruh dari masing-masing variabel prediktor tersebut terhadap masing-masing variabel respon. Untuk lebih mempermudah interpretasi model, maka penjabaran akan dilakukan untuk setiap segmen atau potongan yang terbentuk.

Untuk respon yang pertama:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{1j} = & 50,076 - 12,161x_{1j} + 2,895(x_{1j} - 0,299)_+ + 15,409x_{2j} + 0,445(x_{2j} - 0,616)_+ \\ & + 46,397x_{3j} - 44,479(x_{3j} - 0,563)_+\end{aligned}$$

Interpretasi pada model pertama dengan variabel respon indeks pembangunan manusia dan variabel prediktor angka kesakitan, angka partisipasi kasar SMA dan PDRB Perkapita.

1. Berikut adalah interpretasi model terhadap variabel angka kesakitan dengan asumsi variabel lain konstan adalah sebagai berikut :

$$y_{1j} = \begin{cases} 50,076 - 12,161x_{1j} & x_{1j} < 0,299 \\ 49,210 - 9,266x_{1j} & x_{1j} \geq 0,299 \end{cases} \quad (4.31)$$

Berdasarkan persamaan (4.31), dapat diinterpretasikan bahwa pada kabupaten/kota dengan angka kesakitan kurang dari 29,9 persen dan apabila angka kesakitan naik satu satuan, maka Indeks Pembangunan Manusia akan turun sebesar 12,161 persen. Sedangkan pada kabupaten/kota dengan angka kesakitan lebih dari 29,9 persen dan apabila angka kesakitan naik satu satuan, maka Indeks Pembangunan Manusia akan turun sebesar 9,266 persen. Berikut kabupaten/kota yang termasuk dalam pembagian interval ini.



Gambar 4.8 Angka Kesakitan pada Respon IPM berdasarkan Interval Titik Knot Kategori 1 dengan interval data kurang dari 0,299 yaitu Kota Jakarta Selatan, Kota Jakarta Barat, Kota Jakarta Utara, Sukabumi, Majalengka, Indramayu, Subang, Karawang, Bekasi, Bandung Barat, Kota Bogor, Kota Sukabumi, Kota Bekasi, Kota Depok, Klaten, Sukoharjo, Wonogiri, Karanganyar, Batang, Kota Magelang, Kota Pekalongan, Lumajang, Madiun, Magetan, Tuban, Lamongan, Gresik, Bangkalan, Kota Probolinggo, Kota Surabaya, Kota Tangerang, Kota Serang, Kota Tangerang Selatan, dan selainnya berada pada kategori 2 yaitu interval lebih dari 0,299.

2. Berikut adalah interpretasi model terhadap variabel angka partisipasi kasar SMA dengan asumsi variabel lain konstan adalah sebagai berikut :

$$y_{1j} = \begin{cases} 50,076 + 15,409x_{2j} & x_{2j} < 0,616 \\ 49,802 + 15,854x_{2j} & x_{2j} \geq 0,616 \end{cases} \quad (4.32)$$

Berdasarkan persamaan (4.32), dapat diinterpretasikan bahwa pada kabupaten/kota dengan angka partisipasi kasar SMA per 100 penduduk yang berusia 16-18 tahun, kurang dari 61,6 persen dan apabila angka partisipasi kasar SMA naik satu satuan, maka Indeks Pembangunan Manusia akan naik sebesar

15,409 persen. Sedangkan pada kabupaten/kota dengan angka partisipasi kasar SMA lebih dari 61,6 persen dan apabila angka partisipasi kasar SMA naik satu satuan, maka Indeks Pembangunan Manusia akan naik sebesar 15,854 persen. Berikut kabupaten/kota yang termasuk dalam pembagian kategori ini



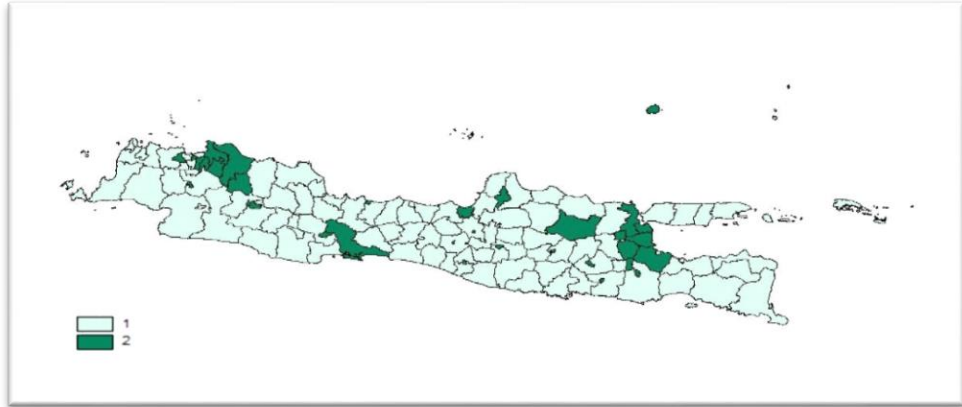
Gambar 4.9 Angka Partisipasi Kasar SMA pada Respon IPM berdasarkan Interval Titik Knot

Kategori 1 dengan interval data kurang dari 0,616 yaitu Sumedang, Probolinggo, Bangkalan, Lebak, dan selainnya berada pada kategori 2 yaitu interval lebih dari 0,616.

3. Berikut adalah interpretasi model terhadap variabel PDRB Perkapita dengan asumsi variabel lain konstan adalah sebagai berikut :

$$y_{1j} = \begin{cases} 50,076 + 46,397x_{3j} & x_{3j} < 0,616 \\ 75,118 + 1,918x_{3j} & x_{3j} \geq 0,616 \end{cases} \quad (4.33)$$

Berdasarkan persamaan (4.33), dapat diinterpretasikan bahwa pada kabupaten/kota dengan PDRB Perkapita kurang dari 61,6 juta dan apabila PDRB Perkapita naik 100 juta maka Indeks Pembangunan Manusia naik 4,6 persen. Sedangkan apabila PDRB perkapita lebih dari 61,6 juta dan PDRB Perkapita naik 100 juta maka Indeks Pembangunan Manusia naik 0,192 persen. Berikut kabupaten/kota yang termasuk dalam pembagian kategori ini



Gambar 4.10 PDRB Perkapita pada Respon IPM berdasarkan Interval Titik Knot

Kategori 2 dengan interval data lebih dari 0,563 yaitu Kepulauan Seribu, Kota Jakarta Selatan, Kota Jakarta Timur, Kota , Jakarta Pusat, Kota Jakarta Barat, Kota Jakarta Utara, Purwakarta, Karawang, Bekasi, Kota Bandung, Kota Cirebon, Cilacap, Kudus, Kota Magelang, Kota Surakarta, Kota Salatiga, Kota Semarang, Kota Tegal, Kota Yogyakarta, Pasuruan, Sidoarjo, Mojokerto, Bojonegoro, Gresik, Kotakediri, Kotamalang, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kota Batu, Kota Tangerang, Kota Cilegon dan selainnya berada pada kategori 1 yaitu interval kurang dari 0,563.

Untuk respon yang kedua:

$$\hat{y}_{2j} = 73,69 - 4,505x_{1j} + 5,692(x_{1j} - 0,399)_+ + 14,468x_{2j} - 7,554(x_{2j} - 0,899)_+ + 37,830x_{3j} - 37,048(x_{3j} - 3,777)_+$$

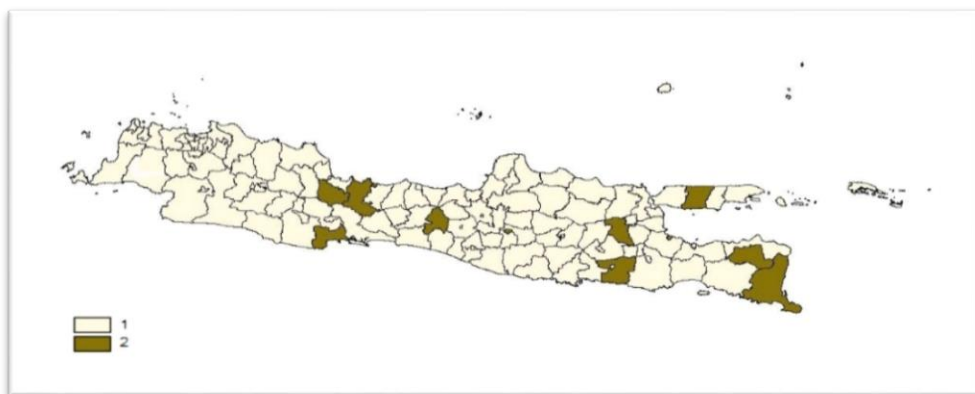
Interpretasi pada model kedua dengan variabel respon indeks pembangunan gender dan variabel prediktor angka kesakitan, angka partisipasi kasar SMA dan PDRB Perkapita.

1. Berikut adalah interpretasi model terhadap variabel angka kesakitan dengan asumsi variabel lain konstan adalah sebagai berikut :

$$y_{2j} = \begin{cases} 73,69 - 4,505x_{1j} & x_{1j} < 0,399 \\ 75,961 + 1,187x_{1j} & x_{1j} \geq 0,399 \end{cases} \quad (4.34)$$

Berdasarkan persamaan (4.34), dapat diinterpretasikan bahwa pada kabupaten/kota dengan angka kesakitan kurang dari 39,9 persen dan apabila angka kesakitan turun 1 persen, maka Indeks Pembangunan Gender akan naik sebesar 4,505 persen. Sedangkan pada kabupaten/kota dengan angka kesakitan

lebih dari 39,9 persen dan apabila angka kesakitan naik 1 persen, maka Indeks Pembangunan Gender akan naik sebesar 1,187 persen. Hal ini tidak sesuai dengan hipotesis peneliti, karena ketika angka kesakitan naik maka angka harapan hidup akan turun sehingga mempengaruhi turunnya nilai IPG. Tetapi jika diteliti lebih jauh terkait dengan pembangunan gender maka kasus ini mungkin terjadi jika kesadaran bahwa tidak ada perbedaan gender dalam proses pembangunan manusia. Kabupaten/kota yang termasuk dalam pembagian kategori ini adalah kabupaten/kota maju. Seperti Jakarta Pusat, Jakarta Timur, Jakarta Selatan, Semarang dan Surabaya. Kabupaten/kota tersebut merupakan pusat pemerintahan, perkantoran dan semua aktifitas yang berkaitan dengan industri di setiap provinsi. Sehingga baik gender laki-laki maupun perempuan akan memiliki keinginan untuk bekerja yang hampir sama. Hal itu menyebabkan ketika peran laki-laki sebagai pencari nafkah terganggu aktifitasnya maka dapat langsung digantikan oleh peran perempuan.



Gambar 4.11 Angka Kesakitan pada Respon IPG berdasarkan Interval Titik Knot
Berdasarkan gambar 4.9 kategori 1 dengan interval data kurang dari 0,399 yaitu Kepulauan Seribu, Kuningan, Pangandaran, Wonosobo, Brebes, Kota Surakarta, Kota Tegal, Blitar, Banyuwangi, Bondowoso, Jombang, Sampang, Kota Pasuruan dan selainnya berada pada kategori 2 yaitu interval lebih dari 0,399.

2. Berikut adalah interpretasi model terhadap variabel angka partisipasi kasar SMA dengan asumsi variabel lain konstan adalah sebagai berikut :

$$y_{2j} = \begin{cases} 73,69 + 14,468x_{2j} & x_{2j} < 0,899 \\ 80,472 + 6,914x_{2j} & x_{2j} \geq 0,899 \end{cases} \quad (4.35)$$

Berdasarkan persamaan (4.35), dapat diinterpretasikan bahwa pada kabupaten/kota dengan angka partisipasi kasar SMA per 100 penduduk yang berusia 16-18 tahun, kurang dari 89,9 persen dan apabila angka partisipasi kasar SMA naik 1 persen, maka Indeks Pembangunan Gender akan naik sebesar 14,468 persen. Sedangkan pada kabupaten/kota dengan angka partisipasi kasar SMA lebih dari 89,9 persen dan apabila angka partisipasi kasar SMA naik 1 persen, maka Indeks Pembangunan Gender akan naik sebesar 6,914 persen. Berikut kabupaten/kota yang termasuk dalam pembagian kategori ini



Gambar 4.12 Angka Partisipasi Kasar SMA pada Respon IPG Berdasarkan Interval Titik Knot

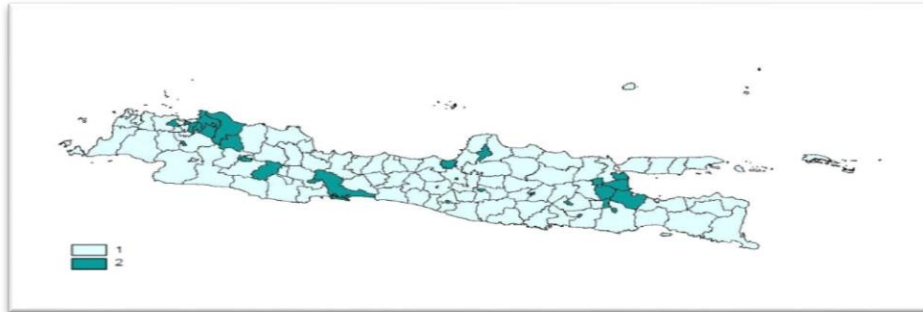
Berdasarkan Gambar 4.10 kategori 1 dengan interval data kurang dari 0,899 yaitu Kota Jakarta Pusat, Cianjur, Ciamis, Sumedang, Wonosobo, Lumajang, Bondowoso, Probolinggo, Bangkalan, Sampang, Pandeglang, Lebak dan selainnya berada pada kategori 2 yaitu interval lebih dari 0,899.

3. Berikut adalah interpretasi model terhadap variabel PDRB Perkapita dengan asumsi variabel lain konstan adalah sebagai berikut :

$$y_{2j} = \begin{cases} 73,69 + 37,830x_{3j} & x_{3j} < 3,777 \\ 213,620 + 0,782x_{3j} & x_{3j} \geq 3,777 \end{cases} \quad (4.36)$$

Berdasarkan persamaan 4.36, dapat diinterpretasikan bahwa pada kabupaten/kota dengan PDRB Perkapita per ratusan juta kurang dari 37,77 juta dan apabila PDRB Perkapita naik 37,830 juta maka Indeks Pembangunan Gender naik 1 satuan. Sedangkan apabila PDRB perkapita lebih dari 37,77 juta dan naik 0,782 juta maka Indeks Pembangunan Gender

turun 1 satuan. Berikut pembagian kabupaten/kota yang termasuk dalam kategori ini



Gambar 4.13 PDRB Perkapita pada Respon IPG berdasarkan Interval Titik Knot Berdasarkan Gambar 4.11 kategori 2 dengan interval data lebih dari 0,631 yaitu Kepulauan Seribu, Kota Jakarta Selatan, Kota Jakarta Timur, Kota Jakarta Pusat, Kota Jakarta Barat, Kota Jakarta Utara, Purwakarta, Karawang, Bekasi, Kota Bandung, Kota Cirebon, Cilacap, Kudus, Kota Magelang, Kota Surakarta, Kotasalatiga, Kotasemarang, Kota Yogyakarta, Pasuruan, Sidoarjo, Mojokerto, Gresik, Kota Kediri, Kota Malang, Kota Madiun, Kota Surabaya, Kota Batu, Kota Tangerang, Kota Cilegon dan selainnya berada pada kategori 1 yaitu interval kurang dari 0,631.

BAB V

KESIMPULAN

5.1. Kesimpulan

Jika diberikan model spline *truncated* pada regresi nonparametrik birespon sebagai berikut:

$$y_{ij} = \beta_{0i} + \sum_{k=1}^p \left(\beta_{ki} x_{kj} + \sum_{l=1}^m \gamma_{kil} (x_{kj} - K_{kil})_+^l \right) + \varepsilon_{ij}$$

dengan asumsi $\varepsilon_{ij} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{W})$ maka dari hasil pembahasan dan analisis yang telah dilakukan didapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Estimasi parameter spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{A}^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{W} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k}))^{-1} \mathbf{A}^T(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{W} \mathbf{y}$$

dengan $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ merupakan matrik berukuran $2n \times (2(m+2)p)$ yang berisi titik knot dan data observasi variabel prediktor. Hasil estimasi fungsi spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, k) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \hat{\beta} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})^T \mathbf{W} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k}))^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})^T \mathbf{W} \mathbf{y} \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{y} \end{aligned}$$

dengan $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})^T \mathbf{W} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k}))^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k})^T \mathbf{W}$, dan $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ merupakan matrik berukuran $2n \times 2n$.

2. Estimasi matriks *variance-covariance* spline *truncated* dalam regresi nonparametrik birespon adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}} &= |\hat{\Sigma} \otimes \mathbf{I}| \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{22} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I} \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11} &= \frac{\left[(\mathbf{y}_1 - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\mathbf{y}_1) \right]^T \left[(\mathbf{y}_1 - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\mathbf{y}_1) \right]}{n} \\ \hat{\sigma}_{22} &= \frac{\left[(\mathbf{y}_2 - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\mathbf{y}_2) \right]^T \left[(\mathbf{y}_2 - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\mathbf{y}_2) \right]}{n} \\ \hat{\sigma}_{12} = \hat{\sigma}_{21} &= \frac{\left[(\mathbf{y}_1 - \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\mathbf{y}_1) \right]^T \left[(\mathbf{y}_2 - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\mathbf{y}_2) \right]}{n}\end{aligned}$$

3. Model terbaik untuk data IPM dan IPG provinsi di Pulau Jawa tahun 2018 menggunakan hasil dari matrik *variance covariance* model *spline truncated* regresi nonparametrik birespon adalah menggunakan knot 1, Model untuk IPM dan IPG yang terbentuk sebagai berikut:

Untuk respon yang pertama:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{1j} &= 50,076 - 12,161x_{1j} + 2,895(x_{1j} - 0,299)_+ + 15,409x_{2j} + 0,445(x_{2j} - 0,616)_+ \\ &\quad + 46,397x_{3j} - 44,479(x_{3j} - 0,563)_+\end{aligned}$$

Untuk respon yang kedua:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{2j} &= 73,69 - 4,505x_{1j} + 5,692(x_{1j} - 0,399)_+ + 14,468x_{2j} - 7,554(x_{2j} - 0,899)_+ \\ &\quad + 37,830x_{3j} - 37,048(x_{3j} - 3,777)_+\end{aligned}$$

Model *spline truncated* pada regresi nonparametrik birespon yang diperoleh menghasilkan R^2 sebesar 88,47%. nilai tersebut menjelaskan 88,47% variabilitas data mampu dijelaskan oleh model dan sisanya sebesar 11,53% dijelaskan oleh faktor lain yang tidak terdapat dalam model.

5.2. Saran

Adapun saran berdasarkan analisis yang telah dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Dalam penelitian tesis ini hanya menggunakan *spline linier* saja dengan titik knot 1 dan 2 untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat lebih menggunakan banyak orde dan knot dari jumlah penelitian tesis ini agar mendapatkan GCV yang lebih optimum.
2. Untuk penelitian selanjutnya dapat dibuat suatu program untuk mencari lokasi titik *knot* untuk menghitung GCV yang optimal sesuai metode yang ingin digunakan,

agar memudahkan perhitungan ketika menggunakan *knot* yang banyak serta kombinasi orde.

3. Untuk variabel angka kesakitan terhadap IPG tidak memenuhi hipotesis peneliti, sehingga perlu dicari data pendukung terkait angka kesakitan terpilah antara laki-laki dan perempuan, serta faktor pendukung lain seperti banyaknya jumlah penduduk perempuan dan laki-laki masing-masing kabupaten/kota.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR PUSTAKA

- Adnyana, I.G. (2011). *Estimator Spline dalam Regresi Nonparametrik Multirespon (Studi Kasus di Indonesia Tahun 2009)*. Tesis. Surabaya, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Ampulembang, A.P., Otok, B.W., dan Rumiati, A.T. (2015). Biresponse Nonparametrik Regression Model Using MARS and Its Properties. *Applied Mathematical Sciences*. **Vol.9**. No.29, 1417-1427
- Aydin, D. (2008). A Comparison of the Nonparametric Regression Models using Smoothing Spline and Kernel Regression. *Proc. World Acad. Sci. Eng. Technol.*, **Vol.1**, No.12, 588-592.
- Bintaningrum, M.F., dan Budiantara, I.N. (2014). Pemodelan Regresi Nonparametrik Spline *Truncated* dan aplikasinya pada Angka Kelahiran Kasar di Surabaya. *Jurnal Sains dan POMITS*, **Vol. 3**. No.1, D7-D12
- Badan Pusat Statistik. (2015). Indeks Pembangunan Manusia tahun 2018. Direktorat Analisis dan Pengembangan Statistik BPS 2018.
- Badan Pusat Statistik. (2015). Indeks Pembangunan Manusia Jawa: BPS.
- Bhakti, N.A. (2012). Analisis Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Indeks Pembangunan Manusia di Indonesia Periode 2008-2012. *Jurnal Ekonomi dan Keuangan*. **Vol.3**. No.93, 452-459
- Broxson, B. J. (2006). *The Kronecker Product*. Theses and Disertations. University of North Florida.
- Budiantara, I.N. (2006). Model Spline dengan Knots Optimal. *Jurnal Ilmu Dasar*. **Vol.2**. No.7, 77-85.
- Budiantara, I.N. (2009). Spline Dalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik: Sebuah Pemodelan Statistika Masa Kini dan Masa Mendatang, *Pidato Pengukuhan Untuk Jabatan Guru Besar Dalam Bidang Ilmu Matematika Statistika dan Probabilitas, Pada Jurusan Statistika, Fakultas MIPA*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. ITS Press. Surabaya.

- Budiantara, I. N.(2011).Penelitian Bidang Regresi Spline Menuju Terwujudnya Penelitian Statistika yang Mandiri dan Berkarakter. *Prosiding Seminar Nasional MIPA Undiksha*, 9-28.
- Budiantara, I.N.(2014). Pemodelan Regresi Nonparametrik Dan Semiparametrik Spline Konsep, Metode Dan Aplikasinya. *Seminar Nasional Matematika 2014*. Universitas Udayana. **Vol.1**, No.1,1-16
- Christensen, R. (2011). *Plane Answer to Complex Questions: The Theory of Linear Models*. Springer-Verlag. New York.
- Draper, N.R. dan Smith, H. (1998). *Applied Regression Analysis, Second Edition*. John Wiley and sons, Inc. New York.
- Eubank, R.L. (1999). *Nonparametric Regression and Spline Smoothing 2nd Edition*. Mercel Dekker. New York.
- Fajriyyah, N. dan Budiantara, I.N. (2015). Pemodelan Indeks Pembangunan Gender dengan Pendekatan Regresi Nonparametrik Spline di Indonesia. *Jurnal Sains dan POMITS*, **Vol.4**. No.2, D217-D222
- Fernandes, A.A.R, Budiantara, I.N, Otok, B.W dan Suhartono. (2014). Spline Estimator for Bi-responses Nonparametrik Regression Model for Longitudinal Data. *Applied Mathematical Science*. **Vol.8**, No.114,5653-5665.
- Greene, W. H. (2003). *Econometrics Analysis 5th Edition*. New Jersey: Prentice Hall.
- Gupta, A. K. and Nagar, D. K. (1999). *Matrix Variate Distributions*. Chapman &Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics,104.
- Hidayah, L., Cahmidah, N. dan Budiantara, I.N. (2019). Spline *Truncated* Estimator in Multiresponse Semiparametric Regression Model for Computer based National Exam in West Nusa Tenggara. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. **Vol. 546**, No.05,20-29.
- Howell, J.R. (2007). *Analysis Using Smoothing Splines As Implemented In LME()* In R. Thesis. Brigham Young University.

- Islamiyati,A., Fatmawati dan Chamidah, N. (2018). Estimation of *Covariance Matrix* on Bi-Response Longitudinal Data Analysis with Penalized Spline Regression. *Journal of Physics: Conference Series*. **Vol. 979**. No.01, 20-93.
- Johnson, R.A. dan Wichern, D.W. (2007). *Applied Multivariat Statistical Analysis*. New Jersey, Pretice Hall.
- Kementrian Pemberdayaan Perempuan dan Perlindungan Anak. (2015). *Pembangunan Manusia Berbasis Gender 2015*. Jakarta: CV. Lintas Khatulistiwa.
- Kementrian Pemberdayaan Perempuan dan Perlindungan Anak. (2015). Rencana Strategis Kementrian Pemberdayaan *Perempuan dan Perlindungan Anaka Tahun 2015-2019*. Jakarta: Kementrian Pemberdayaan Perempuan dan Anak.
- Kim, Y.J. dan Gu, C. (2004). Smoothing Spline Gaussian Regression: More Scalable Computation via Efficient Approximation. *Royal Statistical Society: Series B*. **Vol.2**. No.66, 337-356.
- Klasen, S. (2018). *Human Development Indice and Indicators: A Critical Evaluation*. UNDP.
- Madan, S. (2012). Human Development and Poverty - A Perspective Across Indian States. *I. G. P. G. Regional Centre*, Mirpur, M. D. University, Rohtak, Haryana, India.
- Melliana, A. dan Zain, I. (2013). Analisis Statistika yang Mempengaruhi Indeks Pembangunan Manusia di Kabupaten/Kota Provinsi Jawa Timur dengan Menggunakan Regresi Panel. *Jurnal Sains dan Seni POMITS*. **Vol.2**. No.2, 237-242.
- Merdekawati dan Budiantara, I.N. (2013). Pemodelan Regresi Spline *Truncated* Multivariabel pada faktor-faktor yang mempengaruhi kemiskinan di kabupaten/kota di Jawa Tengah. *Jurnal Sains dan Seni POMITS*, **Vol. 2**. No.1,
- Nurdiani dan Dasari. (2017). Regresi Nonparametrik Birespon Spline. *Eurekamatika*, **Vol.5**. No.1, 106-121

- Nurbaeti (2013). Pengaruh Pengangguran dan Pertumbuhan Ekonomi terhadap Indeks Pembangunan Manusia Kabupaten/Kota di Propinsi Jawa Tengah Tahun 2007-2011. *Economics Development Analysis Journal. EDAJ*. **Vol.2**. No.3
- Pratiwi, L.P.S. (2017). Pemodelan Spline *Truncated* dalam Regresi Nonparametrik Birespon. *Makalah Peserta pada Konferensi Nasional Sistem dan Informatika*, STMIK STIKOM Bali, 441-445
- Pratowo, N.I. (2011). Analisis Faktor-Faktor yang Berpengaruh Terhadap Indeks Pembangunan Manusia. *Jurnal Studi Ekonomi Indonesia*. Fakultas Ekonomi Universitas Sebelas Maret. No.1, 15-21
- Rahmawati, A.S. Ispriyati, D., dan Warsito, B. (2017). Pemodelan kasus kemiskinan di hawa tengah menggunakan regresi nonparametrik metode B-Spline. *Jurnal Gaussian*, **Vol. 6**. No.1, 11-20.
- Ruliana, Budiantara, I.N. Otok, B.W. and Wibowo, W. (2015). Parameter Estimation of Nonlinear Structural Model SEM using Spline Approach. *Applied Mathematical Sciences*, **Vol. 9**. No. 149, 7439-7451.
- Setyawan, N.A.D. (2011). *Pendekatan Regresi Nonparametrik Birespon Spline Untuk Pemodelan Determinan Tingkat Pendidikan Di Pulau Papua*, Thesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Searle, S. R., Casella, G. dan McCulloch, C. E. (2006). *Variance Components*. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Smith, P.L. (1979). Splines As a Useful and Convenient Statistical Tool. *The American Statistician*. **Vol. 33**. No. 2, 57-62.
- Sudiarsa, I.W., Budiantara, I.N., Suhartono and Purnami, S.W. (2015). Combined Estimator Fourier Series and Spline *Truncated* in Multivariable Nonparametrik Regression. *Applied Mathematical Sciences*. **Vol. 9**. No. 100, 4997 – 5010.
- Sholicha C.N, Budiantara I.N., dan Ratna, M. (2018). Regresi Nonparametrik Spline *Truncated* untuk Memodelkan Persentase Unmet Need di Kabupaten Gresik. *Jurnal Sains Dan Seni POMITS*. **Vol. 7**. No. 2, 2337-3520

- United Nations Development Programme (UNDP). (1990). *Global Human Development Report*. Human Resources Department.
- Walpole, R.E. (1995). *Pengantar Statistika*. Penerjemah: Bambang Sumantri. Edisi Ketiga. Penerbit PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Wang, Y. (1998). Spline Smoothing Models with Correlated Errors. *Journal of the American Statistical Association*. **Vol.4**. No.93, 341-348.
- Wahba, G. (1990). *Spline Models for Observation Data*. SIAM Pennsylvania

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data IPM dan IPG Kabupaten/Kota di Pulau Jawa dan Faktor- Faktor Yang Mempengaruhi Tahun 2018

Kabupaten/Kota	IPM	IPG	AngkaKesakitan	APKSMA	PDRB
Kepulauan Seribu	70,91	93,57	0,41	0,90	3,38796
Kota Jakarta Selatan	84,44	96,07	0,22	0,72	2,61584
Kota Jakarta Timur	82,06	94,79	0,33	0,80	1,55531
Kota Jakarta Pusat	81,01	95,62	0,30	0,56	6,92243
Kota Jakarta Barat	80,88	95,22	0,29	0,71	1,68677
Kota Jakarta Utara	79,87	93,51	0,30	0,78	2,71854
Bogor	69,69	89,05	0,34	0,63	0,37721
Sukabumi	66,05	86,95	0,28	0,61	0,24984
Cianjur	64,62	83,72	0,38	0,59	0,18983
Bandung	71,75	93,59	0,34	0,66	0,30448
Garut	65,42	82,42	0,37	0,72	0,20338
Tasikmalaya	65	85,98	0,32	0,65	0,19393
Ciamis	69,63	86	0,31	0,58	0,2451
Kuningan	68,55	86,62	0,41	0,79	0,21176
Cirebon	68,05	82,92	0,35	0,84	0,2089
Majalengka	66,72	85,93	0,29	0,75	0,23386
Sumedang	70,99	94,88	0,31	0,46	0,28297
Indramayu	66,36	87,97	0,30	0,73	0,43386
Subang	68,31	90,57	0,23	0,68	0,23748
Purwakarta	69,98	87,19	0,37	0,72	0,66139
Karawang	69,89	90,45	0,23	0,76	0,93066
Bekasi	73,49	88,28	0,25	0,89	0,84096
Bandung Barat	67,46	79,18	0,28	0,62	0,26019
Pangandaran	67,44	89,68	0,41	0,91	0,26098
Kota Bogor	75,66	90,92	0,24	0,73	0,38489
Kota Sukabumi	73,55	91,07	0,23	0,82	0,35157
Kota Bandung	81,06	95,11	0,34	0,93	1,05664
Kota Cirebon	74,35	93,94	0,35	0,75	0,68295

Lampiran 1. Data IPM dan IPG Kabupaten/Kota di Pulau Jawa dan Faktor- Faktor Yang Mempengaruhi Tahun 2018 (Lanjutan)

Kabupaten/Kota	IPM	IPG	AngkaKesakitan	APKSMA	PDRB
Kota Bekasi	81,04	93,26	0,27	1,16	0,31032
Kota Depok	80,29	93,06	0,27	1,03	0,27589
Kota Cimahi	77,56	92,36	0,31	0,87	0,477
Kota Tasikmalaya	72,03	91,07	0,32	0,92	0,30321
Kota Banjar	71,25	87,11	0,39	0,87	0,23195
Cilacap	69,56	86,53	0,32	0,96	0,64512
Banyumas	71,3	87,94	0,37	0,90	0,29716
Purbalingga	68,41	92,32	0,36	0,68	0,25065
Banjarnegara	66,54	95,18	0,34	0,75	0,21872
Kebumen	68,8	93,09	0,31	0,95	0,21756
Purworejo	71,87	95,11	0,39	0,95	0,24216
Wonosobo	67,81	92,91	0,45	0,55	0,22162
Magelang	69,11	92,23	0,31	0,70	0,23698
Boyolali	73,22	93,24	0,33	0,78	0,30845
Klaten	74,79	96	0,28	1,04	0,31634
Sukoharjo	76,07	96,73	0,27	0,93	0,3864
Wonogiri	69,37	91,13	0,26	0,83	0,2845
Karanganyar	75,54	96,61	0,26	0,76	0,39004
Sragen	72,96	92,27	0,31	1,01	0,39529
Grobogan	69,32	85,81	0,36	0,85	0,18543
Blora	67,95	83,79	0,35	0,94	0,27999
Rembang	69,46	86,49	0,32	0,71	0,27786
Pati	70,71	91,5	0,37	0,90	0,31848
Kudus	74,58	92,89	0,39	0,92	1,21356
Jepara	71,38	90,66	0,36	0,86	0,22622
Demak	71,26	90,4	0,40	1,10	0,21219
Semarang	73,61	96,35	0,36	0,67	0,44425
Temanggung	68,83	95,62	0,32	0,71	0,26395
Kendal	71,28	92,96	0,39	1,06	0,40926

Lampiran 1. Data IPM dan IPG Kabupaten/Kota di Pulau Jawa dan Faktor- Faktor Yang Mempengaruhi Tahun 2018 (Lanjutan)

Kabupaten/Kota	IPM	IPG	AngkaKesakitan	APKSMA	PDRB
Batang	67,86	90,65	0,27	0,62	0,26508
Pekalongan	68,97	92,87	0,31	0,60	0,23886
Pemalang	65,67	85,49	0,40	0,70	0,18193
Tegal	67,33	86,95	0,32	0,81	0,23016
Brebes	65,68	86,24	0,42	0,69	0,23862
Kota Magelang	78,31	96,07	0,30	0,92	0,67268
Kota Surakarta	81,46	96,82	0,41	0,81	0,85787
Kota Salatiga	82,41	95,12	0,33	1,20	0,64219
Kota Semarang	82,72	95,82	0,31	1,04	0,97782
Kota Pekalongan	74,24	94,59	0,27	0,74	0,33219
Kota Tegal	74,44	93,45	0,45	0,80	0,56658
Kulon Progo	73,76	95,03	0,38	0,86	0,24235
Bantul	79,45	95,11	0,32	0,94	0,24281
Gunung Kidul	69,24	84,59	0,34	0,64	0,23825
Sleman	83,42	96,01	0,39	0,88	0,36291
Kota Yogyakarta	86,11	98,48	0,33	1,08	0,791
Pacitan	67,33	84,44	0,39	0,91	0,27076
Ponorogo	69,91	93	0,31	0,73	0,22117
Trenggalek	68,71	92,52	0,38	0,76	0,25033
Tulungagung	71,99	95,75	0,33	0,68	0,35375
Blitar	69,93	92,33	0,52	0,74	0,29549
Kediri	71,07	92,81	0,37	0,73	0,24693
Malang	69,4	88,38	0,32	0,75	0,37425
Lumajang	64,83	87,88	0,24	0,54	0,29594
Jember	65,96	84,23	0,30	0,87	0,29628
Banyuwangi	70,06	86,44	0,45	0,72	0,4848
Bondowoso	65,27	89,89	0,46	0,53	0,2399
Situbondo	66,42	86,69	0,31	0,68	0,27839
Probolinggo	64,85	84,86	0,37	0,47	0,27579

Lampiran 1. Data IPM dan IPG Kabupaten/Kota di Pulau Jawa dan Faktor- Faktor Yang Mempengaruhi Tahun 2018 (Lanjutan)

Kabupaten/Kota	IPM	IPG	AngkaKesakitan	APKSMA	PDRB
Pasuruan	67,41	90,41	0,31	0,64	0,84109
Sidoarjo	79,5	93,33	0,31	1,13	0,85385
Mojokerto	72,64	90,15	0,39	0,87	0,69241
Jombang	71,86	89,94	0,42	0,91	0,30259
Nganjuk	71,23	93,26	0,34	0,78	0,23652
Madiun	71,01	91,13	0,27	0,91	0,25946
Magetan	72,91	92,93	0,27	0,95	0,28101
Ngawi	69,91	91,72	0,30	0,88	0,2318
Bojonegoro	67,85	89,77	0,39	0,80	0,59257
Tuban	67,43	87,34	0,30	0,63	0,5208
Lamongan	71,97	88	0,29	0,91	0,31401
Gresik	75,28	89,72	0,26	1,00	1,00544
Bangkalan	62,87	86,38	0,20	0,49	0,24402
Sampang	61	84,33	0,49	0,56	0,19854
Pamekasan	65,41	85,5	0,37	0,79	0,18304
Sumenep	65,25	80,11	0,31	0,86	0,30172
Kota Kediri	77,58	94,48	0,34	0,95	4,49235
Kota Blitar	77,58	97,6	0,37	1,06	0,44828
Kota Malang	80,89	94,71	0,32	0,93	0,78436
Kota Probolinggo	72,53	95,56	0,29	0,89	0,44821
Kota Pasuruan	74,78	96,02	0,43	0,79	0,38818
Kota Mojokerto	77,14	93,05	0,30	1,01	0,4953
Kota Madiun	80,33	93,47	0,32	0,91	0,7465
Kota Surabaya	81,74	93,57	0,29	0,88	1,88731
Kota Batu	75,04	89,27	0,33	0,98	0,76783
Pandeglang	64,34	86,47	0,38	0,59	0,21891
Lebak	63,37	79,26	0,39	0,47	0,20658
Tangerang	71,59	90,9	0,32	0,73	0,35251
Serang	65,93	92,18	0,39	0,71	0,47708

Lampiran 2. Program GCV Pemilihan Titik Knot

```
gcv1knot<-function(x,y,b,knot){
  #b adalah banyak titik yang dicoba sebagai knot
  x    =as.matrix(x)
  y    =as.matrix(y)
  gcv  =as.vector(0)
  knott =matrix(0,nrow=b-2,ncol=ncol(x))
  knots =vector("list",b)
  knott =knot
  kn    =vector("list",ncol(x))
  for (i in 1:nrow(knott))
  {
    knots[[i]]=knott[i,]
    kn=as.list(knots[[i]])
    gcv[i]=((1/nrow(x))*t(y)%*(diag(1,nrow=nrow(x),ncol=nrow(x))-
      mtruncated(x,kn)$H)%*%y)/(((1/nrow(x))*sum(diag(diag(1,nrow=
        nrow(x),ncol=nrow(x))-mtruncated(x,kn)$H)))^2)
  }
  n          =length(gcv)
  optimum    =min(gcv)
  indeks.knotoptimum=which.min(gcv)
  knot.optimum      =knott[indeks.knotoptimum,]
  hasil<-list(knot=knott,gcv=gcv,gcv.minimum=optimum,
    knot.optimum=knot.optimum)
  return(hasil)
}
gcv1knot(x,y,b,knot)
```

Lampiran 3. Estimasi Parameter Menggunakan Matrik *Variance-Covariance*

```
hitung<-function(x,y,knot){
  x=as.matrix(x)
  y=as.matrix(y)
  I=diag(1,nrow=nrow(x),ncol=nrow(x))
  J=matrix(1,nrow=nrow(x),ncol=nrow(x))
  matriksX=mtruncated(x,knot)$xtruncated
  Ak=mtruncated(x,knot)$H
  H=Ak%%(pinv(t(Ak)%%Ak)%%t(Ak))
  H1=H[1:119,1:119]
  H2=H[120:238,120:238]
  W11=t((I-H1)%%y1)%%((I-H1)%%y1)/n
  W22=t((I-H2)%%y2)%%((I-H2)%%y2)/n
  W12=t((I-H1)%%y1)%%((I-H2)%%y2)/n
  Wgab=rbind(c(W11,W12),c(W12,W22))
  W=kron(Wgab,eye(n,n))
  beta=(pinv(t(matriksX)%%W%%matriksX)%%t(matriksX)%%W%%
  %%y)
  SSE=t(y)%%(I-Ak)%%y
  SST=t(y)%%(I-(1/nrow(x))*J)%%y
  SSR=SST-SSE
  R.square=as.numeric((SSR/SST)*100)
  dbr=ncol(matriksX)-1
  dbe=nrow(x)-ncol(matriksX)
  dbt=nrow(x)-1
  MSE=SSE/dbe
  MSR=SSR/dbr
  Se=as.vector(sqrt(MSE%%diag(pinv(t(matriksX)%%matriksX))))
  Fhitung=MSR/MSE
  p.valueF=pf(Fhitung,dbr,dbe,lower.tail=FALSE )
  keputusan=NULL
  keputusan.1=NULL
  if (p.valueF < 0.05)
  {
    keputusan.1=c("tolak Hnol")
  } else
  {
    keputusan.1=c("gagal tolak hnol")
  }
}
```


Lampiran 3. Estimasi Parameter Menggunakan Matrik *Variance-Covariance* (Lanjutan)

```
for (i in 1:length(Se)){
  thitung=beta/Se
  p.value=2*pt(abs(thitung),df=nrow(x)-1,lower=FALSE)
  if (p.value[i]>=0.05) {
    keputusan[i]=c("gagal tolak Hnol")
  } else{
    keputusan[i]=c("tolak Hnol")
  }
}
ytopi=Ak%*%y
b<-data.frame(Sumber=c("regresi","error","total"),
Sum.of.Square=c(round(SSR,4),round(SSE,4),round(SST,4)),db=c(dbr,dbe
,dbt),mean.of.square=c(round(MSR,4),round(MSE,4),"-
"),Fhitung=c(round(Fhitung,4),"-","-"),p.value=c(p.valueF,"-","-
"),keputusan=c(keputusan.1,"-","-"))

inferensi=data.frame(beta=beta,standar.error=Se,t.hitung=thitung,p.value=
p.value,keputusan=keputusan)
hasil<-
list(ytopi=ytopi,beta=beta,tabel.anova=b,inferensi=inferensi,R.square=R.sq
uare)
return(hasil)
}
hitung(x,y,knot)
```

Lampiran 4. Nilai GCV Satu Titik Knot

Titik Knot ke-	K_{111}	K_{211}	K_{311}	K_{121}	K_{221}	K_{321}	GCV
1	0,299	0,511	0,563	0,399	0,597	0,631	14,773
2	0,299	0,522	0,563	0,399	0,630	0,981	14,784
3	0,299	0,534	0,563	0,399	0,664	1,330	14,785
4	0,299	0,546	0,563	0,399	0,697	1,680	14,792
5	0,299	0,557	0,563	0,399	0,731	2,029	14,810
6	0,299	0,569	0,563	0,399	0,765	2,379	14,810
7	0,299	0,581	0,563	0,399	0,798	2,728	14,812
8	0,299	0,593	0,563	0,399	0,832	3,078	14,814
9	0,299	0,604	0,563	0,399	0,866	3,427	14,813
10	0,299	0,616	0,563	0,399	0,899	3,777	14,558
11	0,299	0,628	0,563	0,399	0,933	4,126	14,599
12	0,299	0,639	0,563	0,399	0,966	4,476	14,614
13	0,299	0,651	0,563	0,399	1,000	4,825	14,670
14	0,299	0,663	0,563	0,399	1,034	5,175	14,731
15	0,299	0,675	0,563	0,399	1,067	5,524	14,775
16	0,299	0,686	0,563	0,399	1,101	5,874	14,807
17	0,299	0,698	0,563	0,399	1,134	6,223	14,819
18	0,299	0,710	0,563	0,399	1,168	6,573	14,816
19	0,299	0,721	0,563	0,399	1,202	6,922	14,817
20	0,311	0,522	0,597	0,411	0,630	0,981	14,829
21	0,311	0,534	0,597	0,411	0,664	1,330	14,831
22	0,311	0,546	0,597	0,411	0,697	1,680	14,838
23	0,311	0,557	0,597	0,411	0,731	2,029	14,856
24	0,311	0,569	0,597	0,411	0,765	2,379	14,856
25	0,311	0,581	0,597	0,411	0,798	2,728	14,858
26	0,311	0,593	0,597	0,411	0,832	3,078	14,859
27	0,311	0,604	0,597	0,411	0,866	3,427	14,858
28	0,311	0,616	0,597	0,411	0,899	3,777	14,603
29	0,311	0,628	0,597	0,411	0,933	4,126	14,648
30	0,311	0,639	0,597	0,411	0,966	4,476	14,704
31	0,311	0,651	0,597	0,411	1,000	4,825	14,765
32	0,311	0,663	0,597	0,411	1,034	5,175	14,810
33	0,311	0,675	0,597	0,411	1,067	5,524	14,841
34	0,311	0,686	0,597	0,411	1,101	5,874	14,854
35	0,311	0,698	0,597	0,411	1,134	6,223	14,850
36	0,311	0,710	0,597	0,411	1,168	6,573	14,852
37	0,311	0,721	0,597	0,411	1,202	6,922	14,864
38	0,322	0,534	0,630	0,422	0,664	1,330	14,866
39	0,322	0,546	0,630	0,422	0,697	1,680	14,873
40	0,322	0,557	0,630	0,422	0,731	2,029	14,892

Lampiran 4. Nilai GCV Satu Titik Knot (Lanjutan)

Titik Knot ke-	K_{111}	K_{211}	K_{311}	K_{121}	K_{221}	K_{321}	GCV
41	0,322	0,569	0,630	0,422	0,765	2,379	14,892
42	0,322	0,581	0,630	0,422	0,798	2,728	14,894
43	0,322	0,593	0,630	0,422	0,832	3,078	14,895
44	0,322	0,604	0,630	0,422	0,866	3,427	14,894
45	0,322	0,616	0,630	0,422	0,899	3,777	14,639
46	0,322	0,628	0,630	0,422	0,933	4,126	14,726
47	0,322	0,639	0,630	0,422	0,966	4,476	14,788
48	0,322	0,651	0,630	0,422	1,000	4,825	14,833
49	0,322	0,663	0,630	0,422	1,034	5,175	14,864
50	0,322	0,675	0,630	0,422	1,067	5,524	14,876
51	0,322	0,686	0,630	0,422	1,101	5,874	14,872
52	0,322	0,698	0,630	0,422	1,134	6,223	14,873
53	0,322	0,710	0,630	0,422	1,168	6,573	14,886
54	0,322	0,721	0,630	0,422	1,202	6,922	14,888
55	0,334	0,546	0,664	0,434	0,697	1,680	14,896
56	0,334	0,557	0,664	0,434	0,731	2,029	14,915
57	0,334	0,569	0,664	0,434	0,765	2,379	14,916
58	0,334	0,581	0,664	0,434	0,798	2,728	14,918
59	0,334	0,593	0,664	0,434	0,832	3,078	14,918
60	0,334	0,604	0,664	0,434	0,866	3,427	14,917
61	0,334	0,616	0,664	0,434	0,899	3,777	14,662
62	0,334	0,628	0,664	0,434	0,933	4,126	14,785
63	0,334	0,639	0,664	0,434	0,966	4,476	14,831
64	0,334	0,651	0,664	0,434	1,000	4,825	14,860
65	0,334	0,663	0,664	0,434	1,034	5,175	14,872
66	0,334	0,675	0,664	0,434	1,067	5,524	14,867
67	0,334	0,686	0,664	0,434	1,101	5,874	14,868
68	0,334	0,698	0,664	0,434	1,134	6,223	14,882
69	0,334	0,710	0,664	0,434	1,168	6,573	14,884
70	0,334	0,721	0,664	0,434	1,202	6,922	14,891
71	0,346	0,557	0,697	0,446	0,731	2,029	14,911
72	0,346	0,569	0,697	0,446	0,765	2,379	14,913
73	0,346	0,581	0,697	0,446	0,798	2,728	14,914
74	0,346	0,593	0,697	0,446	0,832	3,078	14,915
75	0,346	0,604	0,697	0,446	0,866	3,427	14,913
76	0,346	0,616	0,697	0,446	0,899	3,777	14,659
77	0,346	0,628	0,697	0,446	0,933	4,126	14,821
78	0,346	0,639	0,697	0,446	0,966	4,476	14,849
79	0,346	0,651	0,697	0,446	1,000	4,825	14,860
80	0,346	0,663	0,697	0,446	1,034	5,175	14,854
81	0,346	0,675	0,697	0,446	1,067	5,524	14,855

Lampiran 4. Nilai GCV Satu Titik Knot (Lanjutan)

Titik Knot ke-	K_{111}	K_{211}	K_{311}	K_{121}	K_{221}	K_{321}	GCV
82	0,346	0,686	0,697	0,446	1,101	5,874	14,870
83	0,346	0,698	0,697	0,446	1,134	6,223	14,871
84	0,346	0,710	0,697	0,446	1,168	6,573	14,879
85	0,346	0,721	0,697	0,446	1,202	6,922	14,900
86	0,357	0,569	0,731	0,457	0,765	2,379	14,902
87	0,357	0,581	0,731	0,457	0,798	2,728	14,904
88	0,357	0,593	0,731	0,457	0,832	3,078	14,903
89	0,357	0,604	0,731	0,457	0,866	3,427	14,902
90	0,357	0,616	0,731	0,457	0,899	3,777	14,648
91	0,357	0,628	0,731	0,457	0,933	4,126	14,827
92	0,357	0,639	0,731	0,457	0,966	4,476	14,837
93	0,357	0,651	0,731	0,457	1,000	4,825	14,831
94	0,357	0,663	0,731	0,457	1,034	5,175	14,832
95	0,357	0,675	0,731	0,457	1,067	5,524	14,847
96	0,357	0,686	0,731	0,457	1,101	5,874	14,849
97	0,357	0,698	0,731	0,457	1,134	6,223	14,857
98	0,357	0,710	0,731	0,457	1,168	6,573	14,877
99	0,357	0,721	0,731	0,457	1,202	6,922	14,880
100	0,369	0,581	0,765	0,469	0,798	2,728	14,881
101	0,369	0,593	0,765	0,469	0,832	3,078	14,880
102	0,369	0,604	0,765	0,469	0,866	3,427	14,879
103	0,369	0,616	0,765	0,469	0,899	3,777	14,625
104	0,369	0,628	0,765	0,469	0,933	4,126	14,813
105	0,369	0,639	0,765	0,469	0,966	4,476	14,807
106	0,369	0,651	0,765	0,469	1,000	4,825	14,808
107	0,369	0,663	0,765	0,469	1,034	5,175	14,823
108	0,369	0,675	0,765	0,469	1,067	5,524	14,825
109	0,369	0,686	0,765	0,469	1,101	5,874	14,833
110	0,369	0,698	0,765	0,469	1,134	6,223	14,854
111	0,369	0,710	0,765	0,469	1,168	6,573	14,856
112	0,369	0,721	0,765	0,469	1,202	6,922	14,857
113	0,381	0,593	0,798	0,481	0,832	3,078	14,857
114	0,381	0,604	0,798	0,481	0,866	3,427	14,856
115	0,381	0,616	0,798	0,481	0,899	3,777	14,602
116	0,381	0,628	0,798	0,481	0,933	4,126	14,792
117	0,381	0,639	0,798	0,481	0,966	4,476	14,794
118	0,381	0,651	0,798	0,481	1,000	4,825	14,810
119	0,381	0,663	0,798	0,481	1,034	5,175	14,812
120	0,381	0,675	0,798	0,481	1,067	5,524	14,820
121	0,381	0,686	0,798	0,481	1,101	5,874	14,841
122	0,381	0,698	0,798	0,481	1,134	6,223	14,844

Lampiran 4. Nilai GCV Satu Titik Knot (Lanjutan)

Titik Knot ke-	K_{111}	K_{211}	K_{311}	K_{121}	K_{221}	K_{321}	GCV
123	0,381	0,710	0,798	0,481	1,168	6,573	14,845
124	0,381	0,721	0,798	0,481	1,202	6,922	14,845
125	0,393	0,604	0,832	0,493	0,866	3,427	14,844
126	0,393	0,616	0,832	0,493	0,899	3,777	14,591
127	0,393	0,628	0,832	0,493	0,933	4,126	14,801
128	0,393	0,639	0,832	0,493	0,966	4,476	14,817
129	0,393	0,651	0,832	0,493	1,000	4,825	14,819
130	0,393	0,663	0,832	0,493	1,034	5,175	14,827
131	0,393	0,675	0,832	0,493	1,067	5,524	14,848
132	0,393	0,686	0,832	0,493	1,101	5,874	14,851
133	0,393	0,698	0,832	0,493	1,134	6,223	14,852
134	0,393	0,710	0,832	0,493	1,168	6,573	14,852
135	0,393	0,721	0,832	0,493	1,202	6,922	14,850
136	0,404	0,616	0,866	0,504	0,899	3,777	14,597
137	0,404	0,628	0,866	0,504	0,933	4,126	14,845
138	0,404	0,639	0,866	0,504	0,966	4,476	14,847
139	0,404	0,651	0,866	0,504	1,000	4,825	14,855
140	0,404	0,663	0,866	0,504	1,034	5,175	14,876
141	0,404	0,675	0,866	0,504	1,067	5,524	14,879
142	0,404	0,686	0,866	0,504	1,101	5,874	14,880
143	0,404	0,698	0,866	0,504	1,134	6,223	14,880
144	0,404	0,710	0,866	0,504	1,168	6,573	14,879
145	0,404	0,721	0,866	0,504	1,202	6,922	14,625
146	0,416	0,628	0,899	0,516	0,933	4,126	14,812
147	0,416	0,639	0,899	0,516	0,966	4,476	14,820
148	0,416	0,651	0,899	0,516	1,000	4,825	14,841
149	0,416	0,663	0,899	0,516	1,034	5,175	14,844
150	0,416	0,675	0,899	0,516	1,067	5,524	14,845
151	0,416	0,686	0,899	0,516	1,101	5,874	14,845
152	0,416	0,698	0,899	0,516	1,134	6,223	14,844
153	0,416	0,710	0,899	0,516	1,168	6,573	14,591
154	0,416	0,721	0,899	0,516	1,202	6,922	14,829
155	0,428	0,639	0,933	0,528	0,966	4,476	14,850
156	0,428	0,651	0,933	0,528	1,000	4,825	14,854
157	0,428	0,663	0,933	0,528	1,034	5,175	14,854
158	0,428	0,675	0,933	0,528	1,067	5,524	14,854
159	0,428	0,686	0,933	0,528	1,101	5,874	14,853
160	0,428	0,698	0,933	0,528	1,134	6,223	14,601
161	0,428	0,710	0,933	0,528	1,168	6,573	14,866
162	0,428	0,721	0,933	0,528	1,202	6,922	14,869
163	0,439	0,651	0,966	0,539	1,000	4,825	14,870

Lampiran 4. Nilai GCV Satu Titik Knot (Lanjutan)

Titik Knot ke-	K_{111}	K_{211}	K_{311}	K_{121}	K_{221}	K_{321}	GCV
164	0,439	0,663	0,966	0,539	1,034	5,175	14,869
165	0,439	0,675	0,966	0,539	1,067	5,524	14,868
166	0,439	0,686	0,966	0,539	1,101	5,874	14,616
167	0,439	0,698	0,966	0,539	1,134	6,223	14,865
168	0,439	0,710	0,966	0,539	1,168	6,573	14,865
169	0,439	0,721	0,966	0,539	1,202	6,922	14,865
170	0,451	0,663	1,000	0,551	1,034	5,175	14,864
171	0,451	0,675	1,000	0,551	1,067	5,524	14,612
172	0,451	0,686	1,000	0,551	1,101	5,874	14,856
173	0,451	0,698	1,000	0,551	1,134	6,223	14,856
174	0,451	0,710	1,000	0,551	1,168	6,573	14,855
175	0,451	0,721	1,000	0,551	1,202	6,922	14,603
176	0,463	0,675	1,034	0,563	1,067	5,524	14,842
177	0,463	0,686	1,034	0,563	1,101	5,874	14,841
178	0,463	0,698	1,034	0,563	1,134	6,223	14,590
179	0,463	0,710	1,034	0,563	1,168	6,573	14,837
180	0,463	0,721	1,034	0,563	1,202	6,922	14,585
181	0,475	0,686	1,067	0,575	1,101	5,874	14,593

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Departemen Statistika FMKSD ITS:

Nama : Lutfia Septiningrum

NRP : 06211850010006

Menyatakan bahwa data yang digunakan dalam Tesis/ ~~Disertasi~~ ini merupakan data sekunder yang diambil dari ~~penelitian/ buku/ Tugas Akhir/ Thesis/ Disertasi/~~ publikasi lainnya, yaitu:

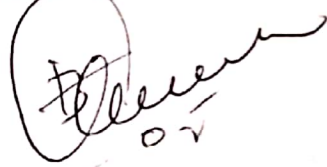
Sumber : Badan Pusat Statistik

Keterangan : Data Indeks Pembangunan Manusia dan Indeks Pembangunan Gender
Kabupaten/Kota di Pulau Jawa

Surat pernyataan ini dibuat dengan sebenarnya. Apabila terdapat permalsuan data maka saya siap menerima sanksi sesuai aturan yang berlaku.

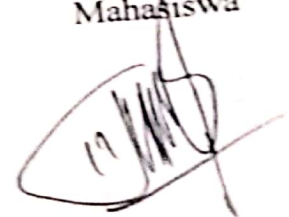
Surabaya, 03 Januari 2020

Mengetahui,
Pembimbing Tesis



Prof. Dr. I Nyoman Budiantara, M.Si
NIP. 19650603 198903 1 003

Mahasiswa



Lutfia Septiningrum
NRP. 06211850010006

BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Kudus, Jawa Tengah pada tanggal 16 September 1993 sebagai anak kedua dari pasangan Bapak Nyoto Harsoyo dan Ibu Puji Ayuni, Pendidikan formal yang telah ditempuh oleh penulis hingga saat ini adalah SDN 2 Wergu Wetan Kudus (1999-2005), SMPN 1 Kudus (2005- 2008) dan SMAN 1 Kudus (2008-2011), Pada tahun 2011 penulis melanjutkan pendidikan tinggi di jurusan Statistika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro, Semarang dan lulus tahun 2015. Setelah lulus penulis bekerja di salah satu perusahaan IT di Jakarta di Department Microsoft Dynamic Ax sampai dengan tahun 2018, kemudian pada tahun 2018, penulis melanjutkan studi program magister di Jurusan Statistika, Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Dengan ilmu yang telah didapat, penulis mempunyai keinginan untuk mengaplikasikan ilmu tersebut di dunia kerja khususnya dan masyarakat pada umumnya sehingga ilmu statistik semakin banyak diketahui dan dimanfaatkan untuk kepentingan nyata.

Surabaya, Januari 2020

lutfiaseptiningrum@gmail.com