



TUGAS AKHIR - SF184801

**Q-BALL BEROTASI DALAM RUANG-WAKTU
BERDIMENSI $D = 5$**

**DONI LUTFI ANGGARA
NRP 01111440000102**

**Dosen Pembimbing:
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo, M.Si.**

**DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020**



TUGAS AKHIR - SF184801

**Q-BALL BEROTASI DALAM RUANG-WAKTU
BERDIMENSI $D = 5$**

DONI LUTFI ANGGARA
NRP 01111440000102

Dosen Pembimbing:
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo, M.Si.

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

Halaman ini sengaja dikosongkan



FINAL PROJECT - SF184801

ROTATING Q-BALL IN $D = 5$ SPACETIME

DONI LUTFI ANGGARA
NRP 01111440000102

Supervisor:
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo, M.Si.

DEPARTMENT OF PHYSICS
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

Halaman ini sengaja dikosongkan

LEMBAR PENGESAHAN

Q-BALL BEROTASI DALAM RUANG-WAKTU
BERDIMENSI $D = 5$

ROTATING Q-BALL IN $D = 5$ SPACETIME

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Bidang Fisika Teori
Program Studi S-1 Departemen Fisika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
oleh

DONI LUTFI ANGGARA

NRP. 01111440000102

Menyetujui

Dosen Pembimbing


Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo
NIP. 19790713 200501 1 015

Surabaya, Januari 2020



Halaman ini sengaja dikosongkan

Q-BALL BEROTASI DALAM RUANG-WAKTU BERDIMENSI $D = 5$

Nama : Doni Lutfi Anggara
NRP : 01111440000102
Departemen : Fisika
Pembimbing : Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

Abstrak

Salah satu objek dari solusi soliton non-topologi dalam teori medan adalah Q-ball dan telah dikaji hampir selama setengah abad dalam berbagai metode. Q-ball dapat dibangun dengan model simetri bola ataupun model simetri axial dan dengan berbagai ruang-waktu dan dimensi. Pada studi ini akan dimodelkan Q-ball berotasi dalam ruang-waktu Minkowski lima dimensi. Pemodelan ini dilakukan baik secara analitik maupun numerik. Hasil yang diperoleh dari pemodelan ini berupa persamaan medan, rapat energi, energi Q-ball, dan muatan Q-ball. Di sini juga akan dibahas tentang kestabilan Q-ball baik secara klasik ataupun secara kuantum.

Kata kunci : Q-ball, Simetri bola, Simetri axial, Ansatz

Halaman ini sengaja dikosongkan

ROTATING Q-BALL IN $D = 5$ SPACETIME

Name : Doni Lutfi Anggara
NRP : 01111440000102
Department : Fisika
Supervisor : Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

Abstract

One object that arises from non-topological soliton solutions in field theory is Q-ball. Q-balls have been studied in various methods for almost a half century. Q-balls could be constructed by spherical symmetric model or axial symmetric model and also could be discussed in various spacetime background. In this work, rotating Q-ball is constructed in five dimensional Minkowski spacetime background. Both analytical and numerical methods were used in this work. The result of this approach is the field equation, energy density, energy of Q-ball, and charge of Q-ball. We also discuss about its stability.

Keywords : Q-ball, Spherical Symmetry, Axial Symmetry

Halaman ini sengaja dikosongkan

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur penulis panjatkan pada Tuhan yang masa esa, atas berkat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul

Q-BALL BEROTASI DALAM RUANG-WAKTU BERDIMENSI $D = 5$

sebagai salah satu syarat kelulusan pada program studi fisika di departemen fisika ITS.

Penulis juga mengucapkan banyak terimakasih kepada pihak-pihak yang membantu dan memberi dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Keluarga Penulis atas dukungan yang diberikan sepenuhnya kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Dr.rer.nat. Bintoro A. Subagyo selaku pembimbing penulis atas perhatian dan kesabarannya yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
3. Agus Purwanto, D.Sc. Selaku dosen fisika teori ITS yang telah banyak memberikan motivasi kepada kami semua, khususnya penulis yang sedang menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis juga ucapkan terima kasih atas waktunya untuk menghadiri dan bersedia menjadi penguji penulis dalam ujian tugas akhir ini.
4. Heru Sukamto, M.Si. Sebagai dosen fisika teori yang telah banyak membantu penulis selama menjalani perkuliahan dan penyelesaian tugas akhir ini. Penulis juga mengucapkan banyak terima kasih atas waktunya untuk

menghadiri dan bersedia menjadi penguji penulis dalam ujian tugas akhir ini.

5. Teman-teman dan kolega anggota LAFTIFA ITS Dittho, mas Bayu, mbak Rafika, pak Nengah, mas Dwi, mas Fatih, mas Reza, Kasyfil, dan Nusur yang telah banyak memberikan canda tawa dikala penulis merasa jenuh dalam pengerjaan tugas akhir ini.
6. Teman-teman dan kolega seperjuangan penulis Dani (Kordes), Rahman, Setiyono (cak Yono) serta teman-teman angkatan 2014 (α Scorpii) yang sama-sama menyelesaikan tugas akhir masing - masing. Terima kasih penulis sampaikan atas kebersamaan serta saling mendukung diantara kita semua.
7. Teman-teman dan kolega anggota LAFTIFA ITS dari angkatan 2016 (α CMa) Afif, Amir, Andri, Gutivan, dan Lindung atas tingkah lakunya yang sering membuat penulis merasa jengkel. Pesan penulis untuk kalian semua ialah tetap semangat dan tetap bergotong royong terutama dalam membeli air minum. Khusus untuk Andri dan Gutivan, penulis minta maaf atas tindakan penulis pada akun media sosial kalian.
8. Pembaca yang budiman, terima kasih penulis sampaikan atas meluangkan waktunya untuk membaca tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat menginspirasi kita semua.

Penulis menyadari banyak kesalahan dalam pengerjaan tugas akhir ini baik itu dikarenakan kesalahan teknis atau kurangnya wawasan penulis. Penulis akan sangat berterima kasih bila ada saran dan kritik terhadap isi dari tugas akhir ini. Semua kesalahan yang terdapat dalam tugas akhir ini sepenuhnya tanggung jawab penulis sendiri, oleh karena itu kritik

dan saran dapat ditunjukkan langsung kepada penulis. Akhirnya setelah 5 bulan proses pengerjaan, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini beserta laporannya. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua.

Surabaya, Januari 2020

Doni Lutfi Anggara

”Halaman ini sengaja dikosongkan”

Daftar Isi

Halaman Judul	i
Lembar Pengesahan	v
Abstrak	vii
Abstract	ix
Daftar Isi	xv
Daftar Gambar	xvii
1 Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	2
1.5 Metode Penelitian	3
1.6 Sistematika Penelitian	3
2 Tinjauan Pustaka	5
2.1 Medan Skalar	5
2.2 Teorema Noether	8
2.3 Teorema Derrick	12

3	Q-Balls	15
3.1	Model Q-Balls	15
3.2	Ansatz	17
3.3	Q-ball 4 Dimensi	18
4	Q-Balls dalam 5 Dimensi	31
4.1	Ansatz	31
4.2	Metrik	32
4.3	Persamaan Medan	35
4.4	Tensor Energi-Momentum	36
4.5	Solusi Numerik	38
5	Penutup	49
5.1	Kesimpulan	49
5.2	Saran	50
	Daftar Pustaka	51
	Lampiran A Q-Ball dalam Empat Dimensi	53
A.1	Persamaan Medan	53
A.2	Elemen Volume Bola-4	55
A.3	Tensor Energi-Momentum Q-ball	60
A.4	Q-ball Bersimetri Bola	61
A.5	Q-Ball bersimetri Axial dalam Empat Dimensi	69
	Lampiran B Q-ball dalam Lima Dimensi	81
	Biodata Penulis	95

Daftar Gambar

3.1	Potensial non-renormalisasi.	24
3.2	Potensial efektif dengan $\omega = 0, 2$	24
3.3	Potensial efektif dengan $\omega = 0, 75$	25
3.4	Potensial efektif dengan $\omega = 1, 1$	25
3.5	Ilustrasi dari $\phi(r)$ untuk Q-ball keadaan dasar dan keadaan eksitasi pertama dan kedua. . . .	27
4.1	Solusi untuk $N = 1$ dan $\omega = 0, 50$	41
4.2	Solusi untuk $N = 1$ dan $\omega = 0, 90$	41
4.3	Solusi untuk $N = 1$ dan $\omega = 1, 048$	42
4.4	Solusi untuk $N = 2$ dan $\omega = 0, 50$	42
4.5	Solusi untuk $N = 2$ dan $\omega = 0, 90$	43
4.6	Solusi untuk $N = 2$ dan $\omega = 1, 046$	43
4.7	Solusi untuk $N = 3$ dan $\omega = 0, 50$	44
4.8	Solusi untuk $N = 3$ dan $\omega = 0, 90$	44
4.9	Solusi untuk $N = 3$ dan $\omega = 1046$	45
4.10	Energi Q-ball E terhadap ω	46
4.11	Muatan Q-ball Q sebagai fungsi ω	46
4.12	Energi sebagai fungsi muatan Q-ball.	47

Halaman ini sengaja dikosongkan.

Bab 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Q-ball merupakan salah satu kelas soliton non-topologi dalam teori medan. Objek ini pertama kali diusulkan oleh R. Friedberg, T. D. Lee, dan A. Sirlin dalam artikelnya [1] yang dibangun dari medan skalar dan memiliki muatan Q yang kekal. Kemudian pada tahun 1985 Sydney Coleman memberikan nama Q-Ball [2] untuk objek tersebut. -ball memiliki total muatan sebesar Q dan kestabilan serta ukuran sebuah Q-ball bergantung pada kuantitas ini. Hal ini analog dengan sebuah bola yang tersusun dari materi biasa yang mana kestabilan serta ukurannya bergantung pada jumlah partikelnya. Karena alasan inilah objek ini disebut Q-ball.

Q-ball banyak menarik perhatian di berbagai bidang sains. Dalam bidang kosmolgi, Q-ball diperkirakan sebagai materi gelap (*dark matter*) [3][4][5] yang menyusun hingga 24% dari komposisi keseluruhan alam semesta. Materi gelap merupakan materi yang tidak dapat dideteksi secara langsung. Materi ini hanya berinteraksi melalui gravitasi dengan materi di sekitarnya.

Ketika Q-ball digabungkan dengan gravitasi maka akan muncul objek baru yang disebut *boson stars*[5][6]. Objek diusulkan pertama kali oleh Wheeler yang menggabungkan antara medan elektromagnetik dan gravitasi[7]. Wheeler menyebutnya sebagai *geons*. Akan tetapi, *geons* elektromagnetik tidak stabil terhadap gangguan kecil. Untuk mengatasi ketidakstabilan ini, Kaup, Ruffini, dan Bonazzola dalam artikelnya [8][9] menggantikan medan elektromagnetik dengan medan skalar. Hasil ini memberikan sebuah objek yang Mereka sebut sebagai *soliton stars*. Objek kelas baru ini akan mendobrak gerbang baru dalam sains terutama dalam bidang astrofisika.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah bagaimana membangun model Q-ball dalam ruang-waktu 5 dimensi beserta parameter fisiknya seperti energi dan muatannya.

1.3 Tujuan

Dalam tugas akhir ini akan diturun ulang fitur-fitur Q-ball dalam 4 dimensi dan 5 dimensi, serta dilakukan metoda pendekatan numerik untuk memperoleh solusinya. Tujuannya adalah dapat memodelkan Q-ball berotasi dalam ruang-waktu 5 dimensi.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam tugas akhir ini ialah

1. Solusi hanya pada ruang-waktu datar, dengan kata lain tidak melibatkan gravitasi.

2. Q-ball yang ditinjau tidak memiliki muatan topologi.
3. Solusi yang dihitung hanya untuk kasus 5 dimensi.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir ini adalah dengan metode analitis dan numerik dari studi literatur.

1.6 Sistematika Penelitian

Struktur tugas akhir ini terdiri dari 6 bab. Bab pertama berisi tentang latar belakang Saya menulis tugas akhir ini, serta beberapa hal khusus lain seperti permasalahan, tujuan, batas masalah, dan metode penelitian yang digunakan dalam tugas akhir ini. Bab yang kedua berisi tentang teori dasar yang diperlukan untuk membangun sebuah model Q-ball baik dalam 4 dimensi ataupun 5 dimensi. Bab yang ketiga berisi tentang fitur dasar tentang Q-ball seperti Lagrangiannya, persamaan medannya, dan tensor energi-momentumnya. Q-ball 4 dimensi juga dituliskan di dalam bab ini. Bab yang keempat berisi tujuan utama dari tugas akhir ini yaitu Q-ball dalam 5 dimensi. Pada bab ini juga berisi hasil numerik dari persamaan medan Q-ball. Bab yang kelima berisi tentang diskusi singkat tentang Q-ball baik itu dalam 4 dimensi ataupun 5 dimensi. Bab yang terakhir berisi kesimpulan dan saran untuk hasil yang lebih baik ke depannya.

”Halaman ini sengaja dikosongkan”

Bab 2

Tinjauan Pustaka

Q-ball dibangun dari medan skalar kompleks klasik. Dalam mekanika klasik, sistem partikel dideskripsikan oleh koordinat umum. Lagrangian sistem tersebut merupakan fungsi diferensial terhadap koordinat dan terhadap waktu. Salah satu medan yang paling sederhana ialah medan skalar ϕ yang merupakan fungsi koordinat dan waktu. Untuk membangun Q-ball, medan skalar harus terlebih dulu dipelajari dengan baik. Pada ini kita akan mempelajari tentang dasar-dasar yang digunakan untuk membangun Q-ball.

2.1 Medan Skalar

Rapat lagrangian medan skalar kompleks klasik diberikan

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \Phi^*, \partial_\mu \Phi, \partial_\mu \Phi^*) \quad (2.1)$$

dengan Φ^* merupakan kompleks konjugat dan

$$\partial_\mu \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \quad (2.2)$$

adalah turunan pertama medan skalar terhadap koordinat x^μ . Aksi medan skala ialah

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (2.3)$$

Variasi aksi pada persamaan (2.3) memberikan

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L}. \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) dapat diselesaikan dengan menyelesaikan suku $\delta \mathcal{L}$ terlebih dahulu yaitu

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} \delta \Phi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \partial_\mu \Phi \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \delta \partial_\mu \Phi^*. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Selanjutnya, suku $\delta \partial_\mu \Phi$ dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} \delta \partial_\mu \Phi &= \partial_\mu (\Phi + \delta \Phi) - \partial_\mu \Phi \\ &= \partial_\mu \delta \Phi. \end{aligned}$$

Hal yang sama juga diterapkan pada suku $\delta \partial_\mu \Phi^*$. Substitusikan kembali ke persamaan (2.5), menjadi

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} \delta \Phi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu \delta \Phi \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \partial_\mu \delta \Phi^*. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Bagi suku ketiga dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu \delta \Phi = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \delta \Phi$$

dan suku keempat menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \partial_\mu \delta \Phi^* = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \delta \Phi^* \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \right) \delta \Phi^*.$$

Substitusikan kedua bentuk tersebut kembali ke persamaan (2.6) dan dengan penataan ulang, diperoleh

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \delta \Phi + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \right) \delta \Phi^* \\ & + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \delta \Phi^* \right). \end{aligned}$$

Substitusikan kembali bentuk $\delta \mathcal{L}$ ke persamaan (2.4) memberikan

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} = & \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \delta \Phi \\ & + \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \right) \delta \Phi^* \\ & + \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right) \\ & + \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \delta \Phi^* \right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dua suku terakhir pada persamaan (2.7) merupakan teorema divergensi Gauss dalam 4 dimensi dan dapat diganti menjadi integral permukaan. Akan tetapi, karena $\delta \Phi$ bernilai nol pada permukaan, maka didapatkan dua suku terakhir bernilai nol.

Agar aksi \mathcal{S} stasioner, maka variasi aksi $\delta \mathcal{S}$ harus bernilai nol

$$\delta \mathcal{S} = 0.$$

Dari persamaan (2.7), supaya variasi aksi $\delta \mathcal{S}$ bernilai nol, maka suku yang di dalam kurung harus bernilai nol karena variasi

medan $\delta\Phi$ di dalam volume tidak bernilai nol. Dengan demikian dipenuhi oleh

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} = 0 \quad (2.8)$$

dan untuk kompleks konjugatnya

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)} = 0. \quad (2.9)$$

Kedua persamaan di atas ialah persamaan **Euler-Lagrange** untuk medan skalar.

2.2 Teorema Noether

Dalam teori medan, jika rapat Lagrangian suatu medan simetri terhadap transformasi global $U(1)$, akan terdapat sesuatu yang kekal dalam medan tersebut [10]. Hal ini pertama kali dikemukakan oleh matematikawan Jerman yaitu Emmy Noether. Pengetahuan akan suatu kuantitas yang kekal sangat penting terutama dalam kasus yang rapat Lagrangiannya tidak dapat ditentukan. Dalam kasus ini rapat Lagrangian ditentukan secara terbalik dari kuantitas yang kekal tersebut.

Untuk menurunkan teorema Noether, pertama-tama ditinjau terlebih dahulu transformasi dari sistem koordinat

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu.$$

Transformasi sistem koordinat tersebut mengakibatkan persamaan medan juga bertransformasi, yaitu

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x) + \delta\Phi(x).$$

Perubahan Aksi akibat transformasi tersebut ialah

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \mathcal{S}' - \mathcal{S} \\ &= \int_{\Omega'} d^D x' \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') - \int_{\Omega} d^D x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \end{aligned}$$

dengan Ω' merupakan transformasi dari Ω di bawah transformasi sistem koordinat.

Pada integral pertama, indeks x' merupakan sebuah indeks *dummy*, jadi dapat diganti dengan x dan persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int_{\Omega'} d^D x \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') - \int_{\Omega} d^D x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \\ &= \int_{\Omega} d^D x \left[\mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \right] \\ &\quad + \int_{\Omega' - \Omega} d^D x \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi').\end{aligned}\tag{2.10}$$

Suku terakhir merupakan integral melalui perubahan volume yang sangat kecil $\Omega' - \Omega$. Dengan menggunakan teorema Gauss dan mengganti suku Φ' dengan Φ , maka suku terakhir tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\int_{\Omega' - \Omega} d^D x \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') = \int_{\Omega} d^D \partial_\lambda \left(\delta x^\lambda \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \right).\tag{2.11}$$

Sampai di sini harus didefinisikan variasi untuk nilai x yang tetap dan hanya merubah fungsi itu sendiri. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ yang bertransformasi menjadi $f'(x)$. Hal yang diperhatikan ialah penggunaan tanda aksen ($'$) menyatakan fungsi setelah bertransformasi, bukan menyatakan sebuah turunan. Transformasi di atas dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}f(x) &= f'(x) - f(x) \\ &= [f'(x') - f(x)] - [f'(x') - f'(x)] \\ &= \delta f(x) - \partial_\mu f(x) \delta x^\mu\end{aligned}\tag{2.12}$$

dengan $\tilde{\delta}$ merupakan simbol variasi dengan menjaga x tetap.

Identitas pada persamaan (2.12) membuat integran pada persamaan (2.10) dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih

sederhana.

$$\mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \tilde{\delta}\mathcal{L}.$$

Sementara itu

$$\tilde{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\tilde{\delta}\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\tilde{\delta}(\partial_\mu\Phi).$$

Dengan menggunakan identitas pada persamaan Euler-Lagrange, maka persamaan ini dapat dituliskan menjadi

$$\tilde{\delta}\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \tilde{\delta}\Phi \right). \quad (2.13)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan kembali persamaan ini dan persamaan (2.11) ke persamaan (2.10), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_\Omega d^D x \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \tilde{\delta}\Phi \right) + \int_\Omega d^D \partial_\lambda \left(\delta x^\lambda \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi) \right) \\ &= \int_\Omega d^D \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \tilde{\delta}\Phi + \mathcal{L}\delta x^\mu \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Suku $\tilde{\delta}\Phi$ dijabarkan dengan persamaan (2.12), sehingga memberikan

$$\tilde{\delta}\Phi = \delta\Phi - \partial_\nu\Phi\delta x^\nu.$$

Selanjutnya substitusikan kembali ke persamaan (2.14), diperoleh

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_\Omega d^D \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} (\delta\Phi - \partial_\nu\Phi\delta x^\nu) + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] \\ &= \int_\Omega d^D \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \partial_\nu\Phi\delta x^\nu + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] \\ &= \int_\Omega d^D \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \partial^\nu\Phi\delta x_\nu + g^{\mu\nu} \mathcal{L}\delta x_\nu \right]. \end{aligned}$$

Nilai δx_ν pada dua suku terakhir di dalam tanda kurung siku dapat difaktorkan menjadi

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int_{\Omega} d^D \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \partial^\nu\Phi + g^{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \delta x_\nu \right] \\ &= \int_{\Omega} d^D \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi - T^{\mu\nu} \delta x_\nu \right]\end{aligned}$$

dengan $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \partial^\nu\Phi + g^{\mu\nu}\mathcal{L} \right)$$

adalah tensor energi-momentum dari medan. Sekarang dapat didefinisikan sebuah arus yaitu

$$\begin{aligned}j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi - T^{\mu\nu} \delta x_\nu \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi - K^\mu.\end{aligned}$$

Sehingga variasi aksi $\delta\mathcal{S}$ dapat dituliskan menjadi lebih sederhana yaitu

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^D \partial_\mu j^\mu. \quad (2.15)$$

Hasil ini memberikan bahwa bila suatu teori simetri terhadap transformasi ($\delta\mathcal{S} = 0$), maka akan ada suatu kuantitas yang kekal. Ruas kanan persamaan menjadi

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Sehingga rapat harus j^μ harus konstan (kekal) untuk memenuhi kasus di atas. Hasil ini yang disebut sebagai **teorema Noether** dan arus yang kekal dalam kasus ini disebut sebagai **arus Noether** [10].

Untuk medan skalar kompleks, rapat arus Noether dapat dihitung dengan memvariasi besar medannya, $\delta\Phi$ [11]. Sehingga rapat arusnya

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)}\delta\Phi^*. \quad (2.16)$$

Untuk mendapatkan total muatan, komponen waktu rapat arus diintegrasikan terhadap keseluruhan ruang

$$Q = \int j^0 dV. \quad (2.17)$$

2.3 Teorema Derrick

Dalam usaha membangun sebuah teori untuk partikel elementer yang membentang, Enz mengusulkan [12] sebuah persamaan non-linear

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{2}f'(\Phi) = 0$$

yang diturunkan dengan prinsip variasi dari

$$\delta \int \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 - (\nabla\Phi)^2 - f(\Phi) \right] d^D x = 0.$$

Pada kasus 1 dimensi, Enz membuktikan bahwa solusi dari persamaan tersebut bebas waktu dengan energi terlokalisasi pada sumbu x . Solusi tersebut juga stabil terhadap gangguan kecil. Kestabilan solusi pada 1 dimensi memberikan sebuah pertanyaan yaitu apakah solusi stabil pada dimensi yang lebih tinggi dengan energi terlokalisasi?

Derrick dalam papernya [13] menyatakan bahwa tidak ada solusi stabil yang bebas waktu pada kasus 3 dimensi atau lebih tinggi. Untuk membuktikan pernyataan ini, tinjau kasus

yang umum yaitu dalam ruang-waktu D dimensi. Maka energi sistem ialah

$$E = \int (\dot{\Phi}^2 + (\nabla\Phi)^2 + U(|\Phi|)) d^D x. \quad (2.18)$$

Untuk menyederhanakan, persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$E = V_1(\Phi) + V_2(\Phi) + V_3(\Phi) \quad (2.19)$$

dengan

$$\begin{aligned} V_1(\Phi) &= \int \dot{\Phi}^2 d^D x \\ V_2(\Phi) &= \int (\nabla\Phi)^2 d^D x \\ V_3(\Phi) &= \int U(|\Phi|^2) d^D x \end{aligned}$$

dan merupakan fungsi positif. Berdasarkan pernyataan Enz bahwa solusi bebas waktu, maka $V_1(\Phi)$ bernilai nol. Kemudian dengan melakukan *scaling* $x \rightarrow \lambda x$ dengan λ merupakan konstanta sembarang, maka bentuk energi pada persamaan (2.19) menjadi

$$E_\lambda = \lambda^{2-D} V_2(\Phi) + \lambda^{-D} V_3(\Phi). \quad (2.20)$$

Syarat agar kondisi stabil adalah turunan kedua bernilai positif,

$$\left. \frac{d^2 E}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} \geq 0.$$

Dari persamaan (2.20) didapatkan

$$\left. \frac{d^2 E}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} = (2-D)(1-D)V_2(\Phi) + D(D+1)V_3(\Phi). \quad (2.21)$$

Dari turunan pertama persamaan (2.20) juga dapat diperoleh hubungan antara $V_2(\Phi)$ dan $V_3(\Phi)$ yaitu

$$(2-D)V_2(\Phi) = DV_3(\Phi).$$

Sehingga turunan kedua dari persamaan (2.20) menjadi

$$\left. \frac{d^2 E}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} = (2 - D)(2V_2(\Phi)). \quad (2.22)$$

Dari sini dapat dilakukuan analisa yaitu untuk kasus 1 dimensi dan 2 dimensi, maka nilai turunan kedua dari persamaan (2.20) akan lebih besar sama dengan nol ($2V_2$ dan 0). Nilai turunan kedua persamaan (2.20) memenuhi syarat kestabilan. Jadi solusi bebas waktu stabil pada kasus 1 dimensi dan 2 dimensi. Untuk kasus dimensi yang lebih tinggi, nilai turunan kedua persamaan (2.20) akan negatif dan tidak memenuhi syarat kestabilan. Teori ini yang disebut sebagai **teorema Derrick** yang menyatakan bahwa tidak solusi bebas waktu yang stabil pada dimensi yang lebih besar dari 2 dimensi.

Bab 3

Q-Balls

3.1 Model Q-Balls

Nama Q-Balls pertama kali diperkenalkan oleh Coleman [2]. Q-Balls dibangun dari medan skalar yang memiliki rapat Lagrangian

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi \right) - U(|\Phi|) \right], \quad (3.1)$$

dengan $U(\Phi)$ merupakan potensial yang terdiri dari suku massa dan interaksi diri. Potensial ini memiliki minimum mutlak nol dengan $U(0) = 0$, sedangkan $U(\infty) = \infty$ (gambar 3.1). Potensial ini juga dapat memiliki minimum lokal pada nilai Φ tertentu.

Tranformasi global $U(1)$ mengisyaratkan bahwa medan skalar harus bertranformasi seperti

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi \exp(i\alpha) \\ \Phi^* &= \Phi^* \exp(-i\alpha), \end{aligned}$$

dengan demikian rapat Lagrangian medan skalar juga ikut

bertransformasi yaitu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu (\Phi e^{i\alpha}) \partial_\nu (\Phi^* e^{-i\alpha}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \partial_\mu (\Phi^* e^{-i\alpha}) \partial_\nu (\Phi e^{i\alpha}) \right) - U(\Phi e^{i\alpha} \Phi^* e^{-i\alpha}) \right] \\
&= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(e^{i\alpha} e^{-i\alpha} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + e^{i\alpha} e^{-i\alpha} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi \right) \right. \\
&\quad \left. - U(\Phi \Phi^*) \right] \\
&= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi \right) - U(|\Phi|) \right] = \mathcal{L},
\end{aligned}$$

yang artinya rapat Lagrangian tidak berubah (invariant) terhadap transformasi global $U(1)$. Simetri rapat Lagrangian \mathcal{L} terhadap transformasi global $U(1)$ memberikan

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (3.2)$$

yang menyatakan bahwa rapat arus medan skalar kekal. Rapat muatan j^0 diberikan oleh

$$j^0 = -i(\dot{\Phi}\Phi^* - \Phi\dot{\Phi}^*). \quad (3.3)$$

Muatan total Q-ball didapatkan dengan mengintegrasikan rapat muatan pada seluruh ruang, $D - 1$,

$$\begin{aligned}
Q &= \int j^0 d^{D-1}x \\
&= -i \int (\dot{\Phi}\Phi^* - \Phi\dot{\Phi}^*) d^{D-1}x.
\end{aligned} \quad (3.4)$$

Jika rapat Lagrangian \mathcal{L} disubstitusikan ke persamaan Euler-Lagrange (persamaan (2.8)) maka diperoleh persamaan medan sebagai berikut

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) + \frac{\partial U}{\partial |\Phi|^2} \Phi = 0. \quad (3.5)$$

Penurunan lengkap persamaan (3.5) dapat dilihat pada lampiran (A.1).

Sementara itu, tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$ didefinisikan sebagai [14]

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.6)$$

Dengan mensubstitusikan rapat Lagrangian ke persamaan (3.6) dapat diperoleh tensor energi-momentum Q-ball, yaitu

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi) - U(|\Phi|) \right]. \quad (3.7)$$

Penurunan lengkap tentang tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$ Q-ball dapat dilihat pada lampiran (A.3).

Energi dan momentum Q-ball dapat diperoleh dari komponen tensor energi-momentum. Total energi Q-ball adalah

$$E = \int T_{tt} d^{D-1}x, \quad (3.8)$$

dan momentum sudutnya

$$J = \int T_{t\varphi} d^{D-1}x, \quad (3.9)$$

dengan D merupakan dimensi ruang-waktu yang digunakan untuk membangun Q-ball.

3.2 Ansatz

Q-ball yang dimodelkan dalam penelitian ini adalah Q-ball bersimetri bola [2] dan Q-ball bersimetri axial [15]. Ansatz yang digunakan untuk Q-ball bersimetri bola adalah

$$\Phi(t, r,) = \phi(r) \exp(i\omega t). \quad (3.10)$$

Walaupun Q-ball tidak berotasi dan tampak statik, akan tetapi berdasarkan teorema Derrick [13] tidak ada solusi stabil yang bebas terhadap waktu pada 3 dimensi atau lebih tinggi. Untuk itu, dalam membangun Q-ball tidak berotasi digunakan ansatz yang bergantung waktu. Dengan $\phi(r)$ merupakan fungsi riil dan hanya bergantung pada r .

Untuk Q-ball bersimetri axial digunakan ansatz

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = \phi(r, \theta) \exp(i\omega t + iN\varphi), \quad (3.11)$$

dengan $\phi(r, \theta)$ merupakan fungsi real yang hanya bergantung pada r dan θ . Pada ansatz tersebut, medan skalar harus memiliki nilai tunggal. Hal ini menyebabkan medan skalar harus memenuhi sifat periodik, yaitu

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = \Phi(t, r, \theta, \varphi + 2\pi). \quad (3.12)$$

Dari sifat periodik ini, maka N harus merupakan suatu integer dengan nilai $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Pada pemodelan di sini akan digunakan N dan ω positif.

3.3 Q-ball 4 Dimensi

3.3.1 Metrik

Metrik ruang-waktu yang digunakan dalam pembahasan di sini adalah metrik dengan konfigurasi simetrik sferik. Untuk empat dimensi, digunakan koordinat $\{t, r, \theta, \varphi\}$ dan elemen garisnya dituliskan sebagai

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.13)$$

Selanjutnya untuk mempermudah penulisan digunakan koordinat umum dari $\{t, r, \theta, \varphi\}$ menjadi $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, sehingga

elemen garis ruang-waktu pada persamaan (3.13) dapat disederhanakan menjadi

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.14)$$

dengan

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

3.3.2 Q-ball Bersimetri Bola

Pemodelan Q-ball bersimetri bola pada ruang-waktu empat dimensi menggunakan ansatz (3.10). Dengan mensubstitusi ansatz tersebut ke persamaan medan, maka persamaan medan dapat direduksi menjadi

$$\omega^2 \phi(r) + \frac{2}{r} \partial_r \phi(r) + \partial_{rr} \phi(r) - \frac{1}{2} \frac{dU(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (3.16)$$

Penurunan lengkap persamaan (3.16) dapat dilihat di lampiran (A.4). Komponen tensor energi-momentum Q-ball statik yang tidak nol, yaitu

$$\begin{aligned} T_{00} &= \omega^2 \phi^2(r) + (\partial_r \phi)^2 + U(\phi) \\ T_{11} &= \omega^2 \phi^2(r) + (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \\ T_{22} &= r^2 (\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi)) \\ T_{33} &= r^2 \sin^2 \theta (\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Semua nilai komponen tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$ Q-ball statik juga dapat dilihat pada lampiran (A.4).

Dari tensor energi-momentum tersebut energi Q-ball adalah

$$\begin{aligned} E &= \int T_{00} d^3x \\ &= 4\pi \int_0^\infty (\omega^2 \phi^2(r) + \phi'^2(r) + U(\phi)) r^2 dr. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Muatannya dapat diperoleh dengan mengintegrasikan rapat muatannya terhadap seluruh ruang, yaitu

$$\begin{aligned} Q &= -i \int (i\omega \phi(r) e^{i\omega t} \phi(r) e^{-i\omega t} - \phi(r) e^{i\omega t} [-i\omega] \phi(r) e^{-i\omega t}) d^3x \\ &= 8\pi\omega \int_0^\infty \phi^2(r) r^2 dr. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sementara itu, momentum sudutnya diberikan oleh

$$J = \int T_{03} d^3x = 0, \quad (3.20)$$

yang bersesuaian dengan Q-ball yang sedang ditinjau di sini yaitu Q-ball tidak berotasi, sehingga besar momentum sudutnya nol.

Selanjutnya akan ditinjau tentang nilai ω yang diijinkan supaya Q-ball dapat stabil. Langkah pertama ialah dengan mengintegrasikan persamaan medan yang telah direduksi,

$$\int \omega^2 \phi(r) d\phi + \int \frac{2}{r} \phi'(r) d\phi + \int \phi'' d\phi - \frac{1}{2} \int \frac{dU}{d\phi} d\phi = 0.$$

Setelah dilakukan integrasi dan penyusunan ulang, maka diperoleh

$$\frac{1}{2} \omega^2 \phi^2(r) + \frac{1}{2} \phi'^2(r) - \frac{U(\phi)}{2} = \epsilon - 2 \int_0^r \frac{dr}{r} \phi'^2(r). \quad (3.21)$$

Dari persamaan ini dapat didefinisikan sebuah potensial efektif V , yaitu

$$V = \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 - \frac{U(\phi)}{2}. \quad (3.22)$$

Diferensiasi persamaan ini terhadap ϕ didapatkan

$$dV = \omega^2\phi - \frac{1}{2} \frac{dU(\phi)}{d\phi}.$$

Kemudian substitusikan ke persamaan (3.16), maka didapatkan

$$\phi''(r) + \frac{2}{r}\phi'(r) + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.23)$$

Secara kualitatif bentuk potensial memiliki bentuk berbeda-beda bergantung pada nilai ω dan potensial $U(\phi)$ yang digunakan (gambar 3.1 s.d. 3.4). Agar Q-ball dapat terbentuk, potensial efektif setidaknya berbentuk seperti gambar 3.3.

Analisis ini dapat diselesaikan dengan menganalogi persamaan di atas seperti mekanika Newton untuk partikel yang bergerak dalam potensial V dengan ϕ sebagai posisi partikel dan r sebagai waktu. Partikel dapat memulai pergerakannya dari sembarang titik pada potensial tersebut. Jika potensial efektif kurang dari nol (negatif) seperti yang ditunjukkan gambar 3.2, maka partikel tidak akan pernah mencapai $\phi = 0$. Kasus ini dinamakan sebagai *undershooting*. Untuk mencegah *undershooting*, maka potensial efektif harus lebih besar sama dengan nol,

$$\frac{1}{2}\omega^2\phi^2 - \frac{U(\phi)}{2} \geq 0.$$

Untuk nilai ϕ yang tidak nol, akan ada nilai ω minimal yang akan memenuhi persamaan di atas. Nilai minimal ω dapat dituliskan sebagai

$$\omega_{min}^2 = \min\left(\frac{U(\phi)}{\phi^2}\right). \quad (3.24)$$

Sehingga untuk memperoleh solusi nilai ω harus lebih besar dari nilai minimalnya ($\omega^2 > \omega_{min}^2$).

Di sisi lain ω tidak boleh terlalu besar atau puncak pada titik $\phi = 0$ akan hilang (gambar 3.4). Jika hal ini terjadi, maka partikel akan sampai di titik $\phi = 0$ dengan kecepatan yang tidak nol dan akan menyinggalkan titik tersebut. Keadaan ini disebut sebagai *overshooting*. Untuk mengatasi keadaan ini, maka titik $\phi = 0$ harus cekung ke bawah seperti gambar 3.3. Kondisi ini akan dipenuhi jika turunan kedua dari potensial efektif kurang dari nol,

$$\begin{aligned} V''(0) &< 0 \\ \omega^2 - \frac{U''(0)}{2} &< 0. \end{aligned}$$

Pada persamaan ini, bila ω terlalu tinggi maka turunan kedua potensial efektif akan positif dan keadaan *overshooting* tidak dapat diatasi. Dari sini dapat diperoleh nilai ω maksimal yaitu

$$\omega_{maks}^2 \equiv \frac{U''(0)}{2}. \quad (3.25)$$

Sehingga secara umum Q-balls dapat terbentuk bila ω berada pada rentang nilai tertentu. Dari persamaan (3.24) dan persamaan (3.25), rentang nilai ω agar Q-ball dapat terbentuk dapat dituliskan sebagai

$$\omega_{min}^2 < \omega^2 < \omega_{maks}^2. \quad (3.26)$$

Nilai ω yang tidak boleh sembarang nilai mengakibatkan tidak semua bentuk potensial $U(\phi)$ dapat digunakan untuk membangun Q-ball. Potensial $U(\phi)$ yang digunakan harus memenuhi persamaan (3.24) dan persamaan (3.25) dan kondisi pada persamaan (3.26). Untuk mencari potensial mana yang memenuhi persamaan tersebut, pertama akan dilakukan analisa pada potensial *renormalizable* dalam teori medan

yang memiliki bentuk pangkat empat, yaitu

$$U(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4,$$

dengan μ dan λ merupakan konstanta positif. Dari bentuk potensial ini dapat dihitung nilai dari ω_{min} dan ω_{maks} . Nilai frekuensi minimum yang diberikan dari potensial ini adalah

$$\begin{aligned}\omega_{min}^2 &= \min\left(\frac{U(\phi)}{\phi^2}\right) \\ &= \min\left(\frac{1}{2}\mu^2 + 2\lambda\phi^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\mu^2.\end{aligned}$$

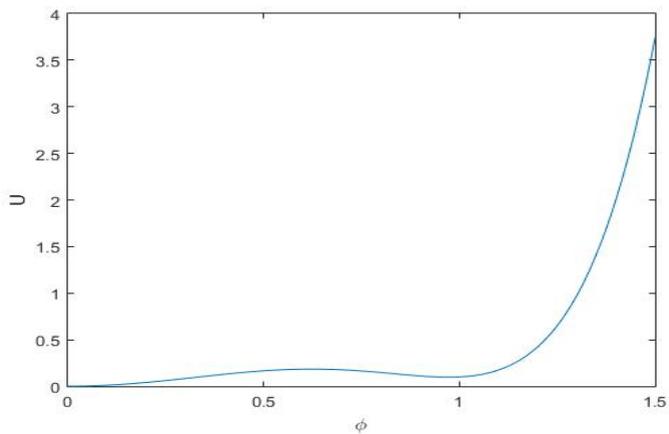
Sedangkan nilai frekuensi maksimum yang diberikan dari potensial ini adalah

$$\begin{aligned}\omega_{maks}^2 &= \frac{1}{2} \frac{d^2U(0)}{d\phi^2} \\ &= \frac{1}{2}(\mu^2 + 12\lambda\phi^2|_{\phi=0}) \\ &= \frac{1}{2}\mu^2.\end{aligned}$$

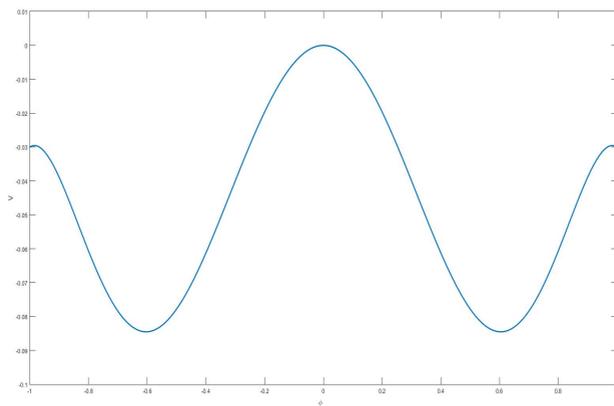
Karena $\omega_{min}^2 = \omega_{maks}^2$, potensial *renormalizable* tidak memenuhi syarat pada persamaan (3.26), sehingga potensial *renormalizable* tidak dapat digunakan untuk membangun Q-ball.

Hasil dari potensial *renormalizable* yang tidak dapat digunakan untuk membangun Q-ball mengharuskan untuk mempertimbangkan menggunakan potensial *non renormalizable* yang memiliki orde pangkat 6. Secara eksplisit potensial *non renormalizable* dapat dituliskan

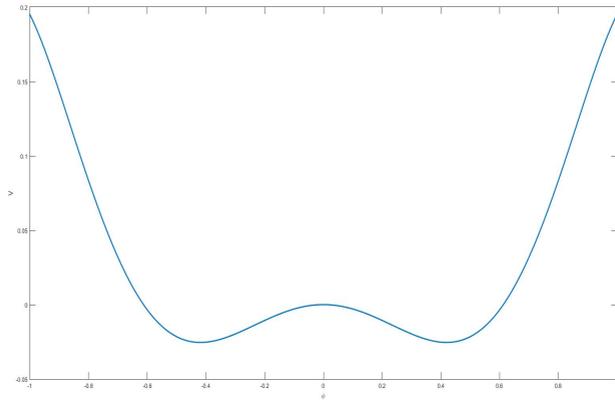
$$U(\phi) = \lambda(\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2).$$



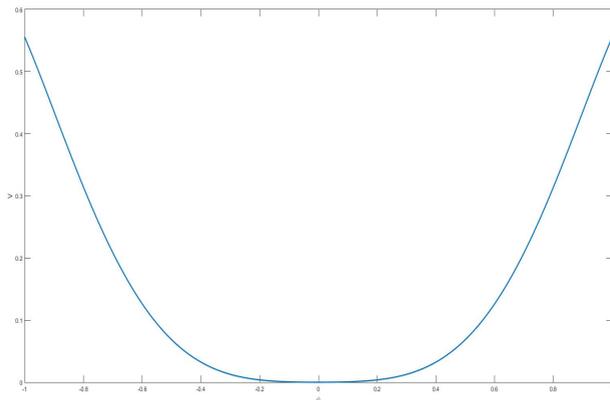
Gambar 3.1: Potensial non-renormalisasi.



Gambar 3.2: Potensial efektif dengan $\omega = 0, 2$.



Gambar 3.3: Potensial efektif dengan $\omega = 0,75$.



Gambar 3.4: Potensial efektif dengan $\omega = 1,1$.

Nilai frekuensi minimum yang diberikan dari potensial *non-renormalizable* adalah

$$\begin{aligned}\omega_{min}^2 &= \min\left(\frac{U(\phi)}{\phi^2}\right) \\ &= \min[\lambda(\phi^4 - a\phi^2 + b)] \\ &= \lambda\left(b - \frac{a^2}{4}\right).\end{aligned}$$

Sedangkan nilai frekuensi maksimum yang diberikan dari potensial *non-renormalizable* adalah

$$\begin{aligned}\omega_{maks}^2 &= \frac{1}{2} \frac{d^2U(0)}{d\phi^2} \\ &= \frac{1}{2} \lambda(30\phi^4 - 12a\phi^2 + 2b)|_{\phi=0} \\ &= \lambda b.\end{aligned}$$

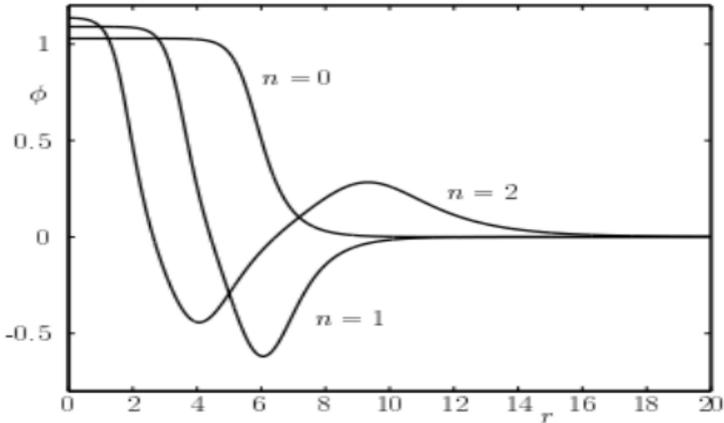
Sehingga keadaan pada persamaan (3.26) akan dipenuhi untuk sembarang nilai positif λ , a , b , dan $U(\phi)$ akan memiliki global minimum pada $\phi = 0$ bila $b > a^2/4$. Pada pemodelan ini akan digunakan konstanta-konstanta positif seperti yang telah digunakan pada perhitungan terdahulu [15], yaitu dengan $\lambda = 1$, $a = 2$, dan $b = 1, 1$. Dengan konstanta ini, rentang nilai ω yang diizinkan adalah

$$0, 1 \leq \omega^2 \leq 1, 1.$$

Dari proses di atas dapat dilihat bahwa batas nilai ω hanya bergantung pada bentuk potensialnya, jadi bila bentuk potensial yang digunakan sama maka batas bawah dan atas dari ω akan sama walaupun dalam dimensi yang berbeda.

3.3.3 Eksitasi Q-Ball

Walaupun secara umum nilai ϕ_0 dapat diatur pada titik tertentu agar kecepatan partikel nol pada titik $\phi = 0$, akan



Gambar 3.5: Ilustrasi dari $\phi(r)$ untuk Q-ball keadaan dasar dan keadaan eksitasi pertama dan kedua.

tetapi, nilai dari ϕ_0 dapat diatur lebih tinggi dari seharusnya. Pada kasus ini partikel akan melewati titik $\phi = 0$ dan bergerak menuju sisi seberang. Potensial yang diseberang akan menghalangi partikel pergerakan partikel dan membuat partikel kembali. Kasus ini dapat membuat partikel melewati titik $\phi = 0$ sebanyak n kali sebelum akhirnya berhenti di titik $\phi = 0$. Untuk kasus $n = 0$ disebut sebagai Q-ball keadaan dasar, sedangkan untuk $n > 0$ disebut eksitasi radial Q-ball. Bentuk ϕ untuk kasus Q-ball tereksitasi ditunjukkan oleh gambar 3.5.

Tingkat eksitasi Q-ball merupakan suatu parameter baru dari Q-ball dengan konfigurasi simetrik sferik selain frekuensinya ω . Dengan mempertimbangkan parameter ini, maka Sebuah Q-ball dituliskan dengan 2 parameter yaitu Q dan n . Muatan Q-ball memiliki nilai $Q > 0$ dan bilangan eksitasinya memiliki nilai $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

3.3.4 Q-Balls Bersimetri Axial

Q-ball bersimetri axial dibangun dengan ansatz (3.11). Q-ball berotasi dengan simetri sferik juga dapat dibangun dengan cara yang sama seperti Q-ball tak berotasi. Penurunan lengkap dapat dilihat pada lampiran (A.5). Rapat lagrangian Q-ball berotasi adalah

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi) - U(\Phi) \right], \quad (3.27)$$

dengan $U(\Phi)$ merupakan potensial interaksi non-renormalisasi. Bentuk eksplisit rapat lagrangian dapat diperoleh dengan mensubstitusikan anzatsnya, yaitu

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi - U(\phi) \right]. \quad (3.28)$$

Persamaan medan dapat direduksi menjadi

$$\left(\partial_{rr} + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \omega^2 \right) \phi = \frac{1}{2} \frac{dU(\phi)}{d\phi}. \quad (3.29)$$

Semua penurunan lengkap termasuk komponen tensor energi-momentum juga dapat dilihat di lampiran (A.5).

Komponen tensor energi-momentum yang tidak nol dari

Q-ball adalah

$$T_{00} = \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi + U(\phi)$$

$$T_{03} = 2\omega N \phi^2$$

$$T_{11} = \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi - U(\phi)$$

$$T_{12} = 2\partial_r \phi \partial_\theta \phi$$

$$T_{21} = 2\partial_r \phi \partial_\theta \phi$$

$$T_{22} = \omega^2 r^2 \phi^2 - r^2 (\partial_r \phi)^2 + (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{\sin^2 \theta} \phi - r^2 U(\phi)$$

$$T_{30} = 2\omega N \phi^2$$

$$T_{33} = 2N^2 \phi^2 + \omega^2 r^2 \phi^2 \sin^2 \theta - (\partial_r \phi)^2 r^2 \sin^2 \theta \\ + (\partial_\theta \phi)^2 \sin^2 \theta - N^2 \phi - U(\phi) r^2 \sin^2 \theta.$$

Dari bentuk ansatz dan tensor energi-momentumnya, maka dapat diperoleh muatan, energi, dan momentum sudut Q-ball. Muatannya Q-ball diberikan oleh persamaan (3.4) yaitu

$$Q = -i \int d^3(\dot{\Phi} \Phi^* - \Phi^* \dot{\Phi}). \quad (3.30)$$

Dengan mensubstitusikan anstaz, maka muatan Q-ball berotasi ialah

$$Q = -i \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} \right. \\ \left. + i\omega \phi e^{-i\omega t} \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \right) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ = -i \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2i\omega r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ = 4\pi\omega \int_0^\infty \int_0^\pi \phi^2 r^2 \sin \theta d\theta dr.$$

Energi Q-ball diberikan oleh persamaan (3.8), yaitu

$$E = \int T_{00} d^3x.$$

Dengan mensubstitusikan untuk komponen T_{00} tensor energi-momentum, diperoleh

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi \right. \\ &\quad \left. + U(\phi) \right) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \left(\omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi \right. \\ &\quad \left. + U(\phi) \right) r^2 \sin \theta d\theta dr. \end{aligned}$$

Sementara itu, momentum sudutnya diberikan oleh persamaan (3.9), yaitu

$$J = \int T_{03} d^3x.$$

Dengan mensubstitusikan untuk komponen T_{00} tensor energi-momentum, diperoleh

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2\omega N \phi^2 r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= 4\pi\omega N \int_0^\infty \int_0^\pi \phi^2 r^2 \sin \theta d\theta dr. \end{aligned}$$

Supaya ketiga parameter tersebut berhingga, maka medan skalar harus bernilai nol pada r takhingga,

$$\phi|_{r=\infty} = 0.$$

Syarat batas ini juga akan digunakan dalam pendekatan numerik.

Bab 4

Q-Balls dalam 5 Dimensi

Pada bagian sebelumnya telah dimodelkan fitur-fitur Q-ball pada ruang-waktu empat dimensi. Pada bagian Saya akan menuju ke tujuan utama yaitu model Q-ball dalam ruang-waktu lima dimensi. Penurunan Q-ball dalam ruang-waktu lima dimensi pada dasarnya sama dengan penurunan Q-ball dalam ruang-waktu empat dimensi. Setelah persamaan Q-ball dalam ruang-waktu lima dimensi diturunkan, selanjutnya dilakukan pendekatan numerik untuk memperoleh solusinya. Solusi analitik tidak dapat diperoleh untuk Q-ball berotasi (setidaknya sampai saat ini), sehingga dalam tugas akhir ini solusi hanya murni dari pendekatan numerik.

4.1 Ansatz

Ansatz medan skalar yang digunakan pada ruang-waktu lima dimensi adalah

$$\Phi(t, r, \theta, \psi, \varphi) = \phi(r, \theta)e^{i\omega t + iN\varphi}, \quad (4.1)$$

dan kompleks konjugatnya

$$\Phi^*(t, r, \theta, \psi, \varphi) = \phi(r, \theta)e^{-i\omega t - iN\varphi}. \quad (4.2)$$

Dalam Q-ball lima dimensi terdapat sumbu rotasi yaitu rotasi terhadap θ dan ψ , akan tetapi, pada pemodelan ini diatur sedemikian sehingga Q-ball tidak berotasi terhadap ψ . Sehingga ansatz yang digunakan (4.1 dan 4.2) telah memenuhi pemodelan ini. Rapat Lagrangian Q-ball dalam ruang-waktu lima dimensi adalah

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi \right) - U(|\Phi|) \right], \quad (4.3)$$

dan aksi dari Lagrangian

$$\mathcal{S} = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi \right) - U(|\Phi|) \right]. \quad (4.4)$$

Seperti pada Q-ball dalam ruang-waktu empat dimensi, simetri rapat Lagrangian terhadap tranformasi global U(1) memberikan kekekalan arus, yaitu

$$\partial_0 j^0 = 0, \quad (4.5)$$

dengan j^0 adalah

$$j^0 = -i(\Phi\Phi^* - \Phi^*\Phi). \quad (4.6)$$

Muatan, energi, dan momentum sudut Q-ball dalam ruang-waktu lima dimensi diberikan oleh persamaan yang sama (3.4, 3.8, dan 3.9) dengan ruang-waktu empat dimensi.

4.2 Metrik

Pada ruang-waktu lima dimensi, akan diperkenalkan satu koordinat baru yaitu ψ , sehingga sistem koordinat terdiri dari

$\{t, r, \theta, \psi, \varphi\}$. Bila dituliskan dalam koordinat umum menjadi $\{x^0, x^1, x^2, x^3, x^4\}$. Elemen garis dari ruang-waktu lima dimensi ini ialah

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \cos^2 \theta d\psi^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.7)$$

Dari elemen garis (4.7), maka dapat diperoleh tensor metrik ruang-waktunya, yaitu

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Selanjutnya didefinisikan g adalah determinan dari tensor metrik $g_{\mu\nu}$, yaitu

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (4.9)$$

Variasi dari $\sqrt{-g}$ adalah

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{d\sqrt{-g}}{dg} \delta g \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Untuk mencari variasi dari $\sqrt{-g}$ maka variasi dari determinan tensor metrik δg harus diketahui. Untuk menghitung $\sqrt{-g}$, langkah pertama ialah dengan menggunakan identitas dari logaritma sebuah matrik, yaitu

$$\ln(\det(A)) = \text{tr}(\ln(A)) \quad (4.11)$$

dengan A merupakan matrik persegi dan tidak berupa matrik *singular*. Jika diambil turunan pada persamaan (4.11), maka diperoleh

$$\frac{\delta(\det(A))}{\det(A)} = \text{tr}(A^{-1} \times \delta A). \quad (4.12)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.12), nilai dari $\sqrt{-g}$ dapat dihitung dengan mengganti matrik A dengan tensor metrik $g_{\mu\nu}$. Jika tensor metrik $g_{\mu\nu}$ disubstitusikan, maka diperoleh

$$\frac{\delta g}{g} = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (4.13)$$

atau

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (4.14)$$

dengan $g^{\mu\nu}$ merupakan invers dari $g_{\mu\nu}$. Substitusikan persamaan (4.14) ke persamaan (4.10) didapatkan

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Bila tensor metrik dikalikan dengan inversnya, maka

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = I \quad (4.16)$$

dengan I merupakan sebuah matrik identitas. Jika diambil variasinya

$$\delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta I = 0. \quad (4.17)$$

Ruas kiri dapat diuraikan menjadi

$$\delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Substitusikan kembali hasil (4.2) ke persamaan (4.17) diperoleh

$$\delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 0 \quad (4.18)$$

atau

$$\delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.19)$$

Dari persamaan (4.19) dan persamaan (4.14) didapatkan

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

Substitusikan persamaan (4.20) ke persamaan (4.10) diperoleh

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.21)$$

Persamaan (4.21) merupakan bentuk lain disamping bentuk pada persamaan (4.15). Baik persamaan (4.15) maupun persamaan (4.21) merupakan alat yang sangat penting dalam mempelajari geometri ruang-waktu terutama pada teori relativitas umum.

4.3 Persamaan Medan

Persamaan medan materi Q-ball yang diturunkan dari variasi aksi (4.4) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) - \frac{\partial U}{\partial |\Phi|^2} \Phi = 0. \quad (4.22)$$

Selanjutnya ansatz medan skalar (4.1 dan 4.2) disubstitusikan ke persamaan medan (3.5), diperoleh persamaan medan tereduksi dalam koordinat bola, yaitu

$$\begin{aligned} \omega^2 \phi + \partial_{rr} \phi + \frac{3}{r} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} \phi + \frac{1}{r^2 \sin \theta \cos \theta} \partial_\theta \phi \\ - \frac{2 \tan \theta}{r^2} \partial_\theta \phi - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\phi} = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Potensial *non-renormalizable* Q-ball dituliskan sebagai

$$U(\phi) = \lambda(\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2). \quad (4.24)$$

Dengan bentuk potensial tersebut, persamaan (4.23) dapat dituliskan secara eksplisit sebagai

$$\begin{aligned} & \omega^2 \phi + \partial_{rr} \phi + \frac{3}{r} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} \phi + \frac{1}{r^2 \sin \theta \cos \theta} \partial_{\theta} \phi \\ & - \frac{2 \tan \theta}{r^2} \partial_{\theta} \phi - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi - \frac{1}{2} \left(\lambda(6\phi^5 - 4a\phi^3 \right. \\ & \left. + 2b\phi) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

atau

$$\begin{aligned} & \omega^2 \phi + \partial_{rr} \phi + \frac{3}{r} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} \phi + \frac{1}{r^2 \sin \theta \cos \theta} \partial_{\theta} \phi \\ & - \frac{2 \tan \theta}{r^2} \partial_{\theta} \phi - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi - \lambda(3\phi^5 - 2a\phi^3 + b\phi) = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Persamaan (4.26) adalah persamaan medan non-linier ini yang akan diselesaikan dengan pendekatan numerik untuk memperoleh bentuk medan skalarnya.

4.4 Tensor Energi-Momentum

Secara umum tensor energi momentum Q-ball diberikan oleh persamaan (3.7). Dalam ruang-waktu lima dimensi akan terdapat 25 komponen tensor energi-momentum, Tetapi sebagian besar dari komponennya bernilai nol. Komponen tensor

energi-momentum yang tidak nol sebagai berikut

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta \phi \right)^2 + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 \\
&\quad + \lambda(6\phi^5 - 4a\phi^3 + 2b\phi) \\
T_{04} &= 2N\omega\phi^2 \\
T_{11} &= \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta \phi \right)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 \\
&\quad - \lambda(6\phi^5 - 4a\phi^3 + 2b\phi) \\
T_{12} &= 2\partial_r \phi \partial_\theta \phi \\
T_{21} &= 2\partial_r \phi \partial_\theta \phi \\
T_{22} &= \omega^2 r^2 \phi^2 - r^2 (\partial_r \phi)^2 + (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{\sin^2 \theta} \phi^2 \\
&\quad - r^2 \lambda(6\phi^5 - 4a\phi^3 + 2b\phi) \\
T_{33} &= \left(\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \lambda(6\phi^5 - 4a\phi^3 + 2b\phi) \right) r^2 \cos^2 \theta \\
&\quad - (\partial_\theta \phi)^2 \cos^2 \theta - N^2 \cot^2 \theta \phi^2 \\
T_{04} &= 2N\omega\phi^2 \\
T_{44} &= N^2 \phi^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \lambda(6\phi^5 - 4a\phi^3 + 2b\phi) \right).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Semua penurunan lengkap untuk Q-ball lima dimensi dapat dilihat pada lampiran (B).

Sebagaimana definisi energi E dan momentum sudut Q-ball J pada persamaan (3.8) dan 3.9), Energi E dan momentum sudut J Q-ball dapat dihitung dari tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$. Energi E Q-ball adalah

$$\begin{aligned}
E &= \int T_{00} d^4x \\
&= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta \phi \right)^2 \\
&\quad + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 + \lambda(6\phi^5 - 4a\phi^3 + 2b\phi)r^3 \sin^2 \theta \\
&\quad \sin \psi d\varphi d\psi d\theta dr \\
&= 4\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta \phi \right)^2 \\
&\quad + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 + \lambda(6\phi^5 - 4a\phi^3 + 2b\phi) \\
&\quad r^3 \sin^2 \theta d\theta dr.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Dan momentum sudutnya J adalah

$$\begin{aligned}
J &= \int T_{04} d^4x \\
&= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2N\omega\phi^2 r^3 \sin^2 \theta \sin \psi d\varphi d\psi d\theta dr \\
&= 8\pi N\omega \int_0^\infty \int_0^\pi \phi^2 r^3 \sin^2 \theta d\theta dr.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

4.5 Solusi Numerik

Persamaan (4.26) merupakan persamaan differensial non-linier yang solusi analitiknya tidak dapat ditemukan. Solusi persamaan (4.26) hanya dapat diperoleh dengan metode numerik. Solusi yang diperoleh harus berupa solusi soliton yaitu solusi terlokalisasi pada daerah tertentu di ruang.

Syarat batas yang digunakan dalam metode numerik di sini ialah syarat batas untuk simetri axial[6]. Titik-titik yang digunakan untuk batas ialah pada titik awal $r = 0$, pada titik takhingga $r = \infty$, pada $\theta = 0, \pi$, dan pada $\theta = \pi/2$. Pada titiak awal dan tak hingga, medan skalar harus nol,

$$\phi|_{r=0} = 0, \quad \phi|_{r=\infty} = 0.$$

Sedangkan untuk kondisi $\theta = 0, \pi$

$$\phi|_{\theta=0} = 0, \quad \phi|_{\theta=\pi} = 0.$$

Semua solusi pada tugas akhir ini adalah *invariant* terhadap perubahan *parity* $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Oleh karena itu solusi dapat dibuat simetri dengan menjalankan θ yaitu $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Solusi simetri untuk $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Dalam hal ini diperlukan syarat batas pada $\theta = \pi/2$, yaitu

$$\partial_{\theta}\phi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Solusi ini bermanfaat untuk metode numerik karena waktu yang diperlukan untuk proses komputasi akan lebih cepat dan hasil seluruhnya cukup dicerminkan terhadap bidang *azimuthal*.

Solusi yang dikerjakan dalam tugas akhir ini berkaitan dengan $N = 1, 2, 3$. Persamaan (4.26) untuk $N = 1$ dapat dituliskan secara eksplisi menjadi

$$\begin{aligned} \omega^2\phi + \partial_{rr}\phi + \frac{3}{r}\partial_r\phi + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}\phi + \frac{1}{r^2\sin\theta\cos\theta}\partial_{\theta}\phi - \frac{2\tan\theta}{r^2}\partial_{\theta}\phi \\ - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\phi - \lambda(3\phi^5 - 2a\phi^3 + b\phi) = 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Solusi dari persamaan ini dapat dilihat pada gambar 4.1 s.d. gambar 4.3.

Sebagaimana yang telah dibahas di atas bahwa solusi Q-ball harus memenuhi solusi soliton. Berdasarkan grafik 4.10, solusi untuk $\omega = 0,50$, $\omega = 0,90$, dan $\omega = 1,048$ memenuhi syarat tersebut dan Q-ball dapat terbentuk pada kondisi ini. Hal ini dapat dilihat dari plot medan pada gambar 4.1 s.d. gambar 4.3 bahwa medan hanya terlokalisasi pada titik tertentu di dalam ruang.

Untuk $N = 2$, persamaan (4.26) dituliskan menjadi

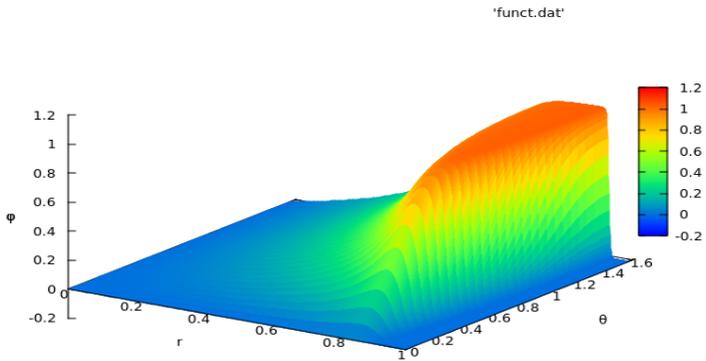
$$\begin{aligned} \omega^2 \phi + \partial_{rr} \phi + \frac{3}{r} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} \phi + \frac{1}{r^2 \sin \theta \cos \theta} \partial_{\theta} \phi - \frac{2 \tan \theta}{r^2} \partial_{\theta} \phi \\ - \frac{4}{r^2 \sin^2 \theta} \phi - \lambda(3\phi^5 - 2a\phi^3 + b\phi) = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Bentuk solusi dapat dilihat pada gambar 4.4 s.d. gambar 4.6. Solusi ini juga merupakan sebuah solusi soliton dengan medan terlokalisasi pada satu titik tertentu dalam ruang.

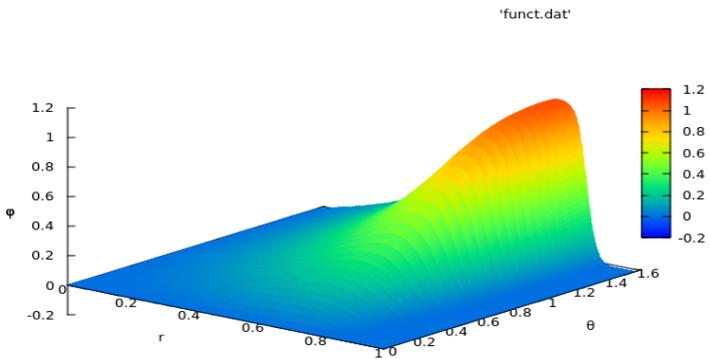
Dan untuk $N = 3$ persamaan (4.26) dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} \omega^2 \phi + \partial_{rr} \phi + \frac{3}{r} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} \phi + \frac{1}{r^2 \sin \theta \cos \theta} \partial_{\theta} \phi - \frac{2 \tan \theta}{r^2} \partial_{\theta} \phi \\ - \frac{9}{r^2 \sin^2 \theta} \phi - \lambda(3\phi^5 - 2a\phi^3 + b\phi) = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

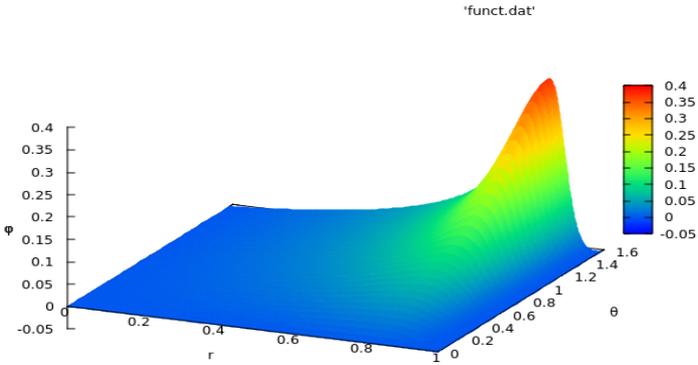
Solusi yang diperoleh untuk $N = 3$ ditunjukkan oleh gambar 4.7 s.d. gambar 4.9. Untuk $N = 3$ dan dengan nilai *omega* yang diizinkan, solusi masih berbentuk soliton. Akan tetapi, medan terlokalisasi pada ruang yang lebih kecil untuk $N = 3$.



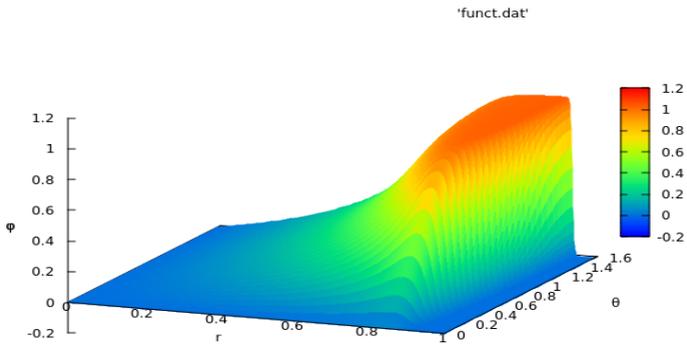
Gambar 4.1: Solusi untuk $N = 1$ dan $\omega = 0,50$.



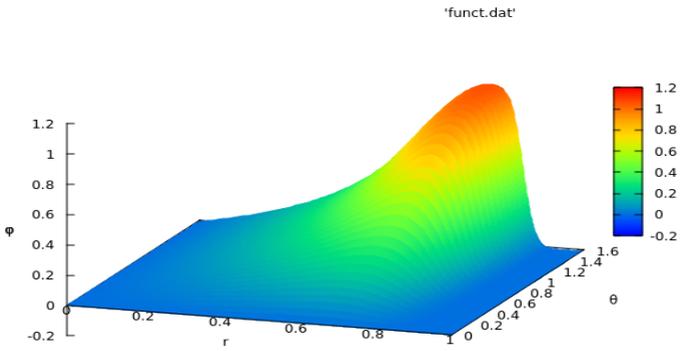
Gambar 4.2: Solusi untuk $N = 1$ dan $\omega = 0,90$.



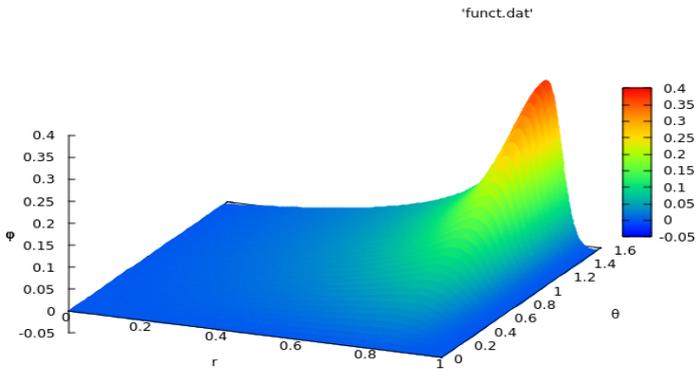
Gambar 4.3: Solusi untuk $N = 1$ dan $\omega = 1,048$.



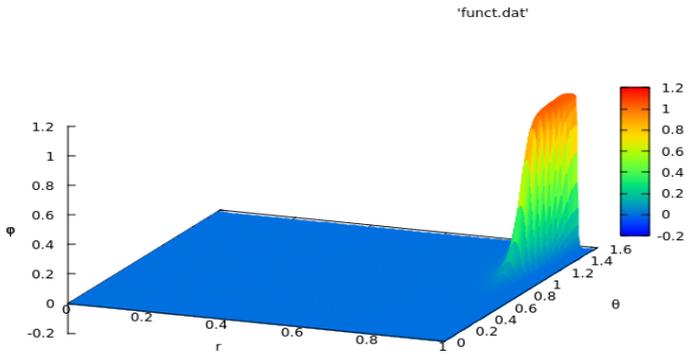
Gambar 4.4: Solusi untuk $N = 2$ dan $\omega = 0,50$.



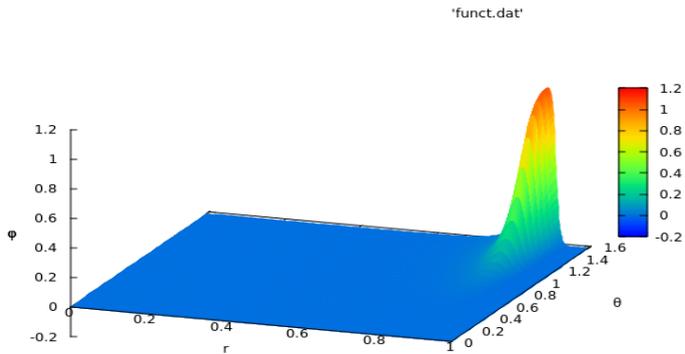
Gambar 4.5: Solusi untuk $N = 2$ dan $\omega = 0,90$.



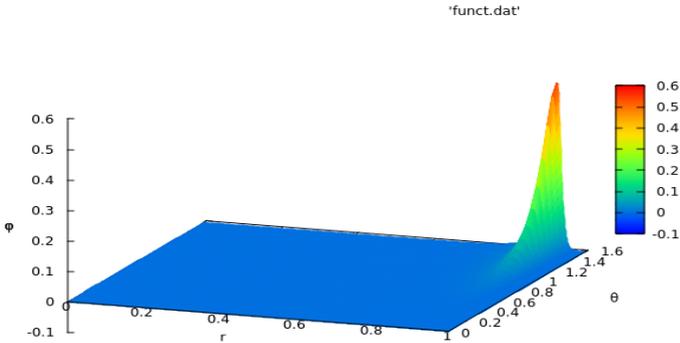
Gambar 4.6: Solusi untuk $N = 2$ dan $\omega = 1,046$



Gambar 4.7: Solusi untuk $N = 3$ dan $\omega = 0,50$.



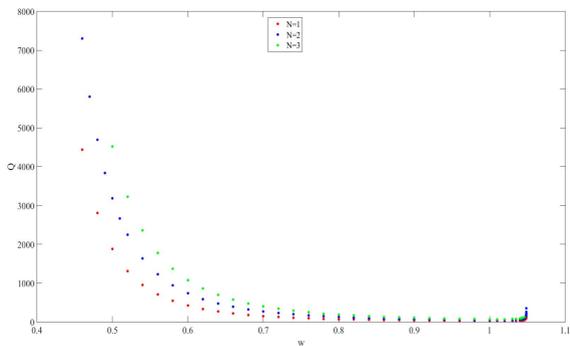
Gambar 4.8: Solusi untuk $N = 3$ dan $\omega = 0,90$.



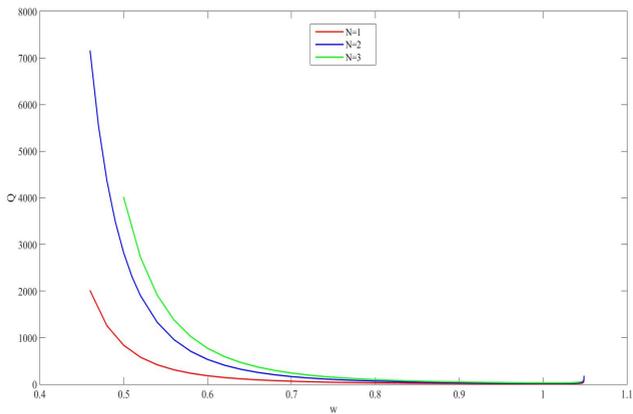
Gambar 4.9: Solusi untuk $N = 3$ dan $\omega = 1046$.

Semua solusi yang diperoleh di atas adalah solusi untuk Q-ball pada keadaan dasar ($n = 0$). Solusi pada keadaan eksitasi akan berbeda terutama pada energinya yang mana untuk keadaan tereksitasi medan skalar akan terlokalisasi di beberapa titik. Pada hasil ini perbedaan energi dipengaruhi oleh *winding number* N Q-ball. Sebagaimana yang dapat dilihat pada gambar 4.10, energi Q-ball akan bertambah untuk *winding number* N yang lebih tinggi.

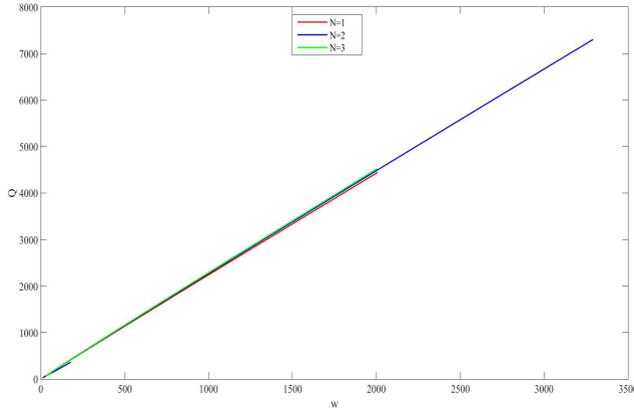
Gambar 4.10 merupakan plot grafik antara total energi Q-ball terhadap ω dengan $N = 1, 2, 3$. Energi Q-ball akan lebih besar untuk N yang lebih besar. Pada nilai ω maksimal ($\approx 1,048$), energi Q-ball memiliki bentuk divergen. Energi yang divergen ini juga secara teori berlaku untuk ω minimal. Akan tetapi, dalam tugas akhir ini didapatkan bahwa energi sudah divergen untuk ω mendekati nilai 0,45 seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.10.



Gambar 4.10: Energi Q-ball E terhadap ω .



Gambar 4.11: Muatan Q-ball Q sebagai fungsi ω .



Gambar 4.12: Energi sebagai fungsi muatan Q-ball.

Gambar 4.11 adalah grafik antara total muatan Q-ball terhadap ω . Grafik ini dapat membantu untuk menganalisa Q-ball kestabilan Q-ball secara klasik. Q-ball akan stabil secara klasik [17] bila memenuhi

$$\frac{\omega}{Q} \frac{\delta Q}{\delta \omega} \leq 0. \quad (4.33)$$

Pada gambar 4.11 dapat dilihat bahwa total muatan Q-ball menurun seiring bertambahnya frekuensi ω . Penurunan ini terjadi sepanjang nilai frekuensi ω yang diizinkan. Akan tetapi, total muatan Q-ball mengalami kenaikan yang sangat tajam (Divergen) ketika nilai frekuensi ω mendekati batas maksimalnya. Dari penjelasan ini dapat dikatakan bahwa Q-ball stabil secara klasik untuk semua rentang frekuensi ω yang diizinkan kecuali pada nilai ω yang dekat dengan batas atasnya.

Gambar 4.12 adalah grafik antara total energi Q-ball dan total muatan Q-ball. Grafik ini diperlukan untuk menganalisa

kestabilan Q-ball secara kuantum. Syarat Q-ball harus stabil secara kuantum [17] yaitu

$$\frac{E}{Q} < \omega_{maks}^2 = \mu. \quad (4.34)$$

Sekarang kita definisikan massa boson bebas M_f sebagai

$$M_f = \mu Q. \quad (4.35)$$

Berdasarkan persamaan (4.35), Q-ball akan stabil secara kuantum bila massanya lebih kecil daripada massa boson bebas.

Untuk menganalisa kestabilan Q-ball secara kuantum, Grafik pada gambar 4.12 dibagi menjadi dua daerah yaitu cabang bawah dan cabang atas. Daerah bawah dimulai dari nilai ω minimal sampai titik yang total muatan dan total energinya minimal. Sedangkan daerah atas dimulai pada titik tersebut sampai nilai ω maksimal. Pada daerah bawah, Q-ball stabil secara klasik atupun secara kuantum. Ketikan massa Q-ball melebihi massa boson bebas, Q-ball kestabilan kuantum Q-ball akan hilang, jadi daerah atas tidak stabil secara kuantum. Kestabilan klasik akan hilang saat nilai ω mendekati maksimal.

Bab 5

Penutup

5.1 Kesimpulan

Pada TA ini telah ditelaah kembali fitur-fitur Q-ball secara lengkap yang meliputi metoda analitik dan numerik untuk mencari solusi Q-ball. Dari hasil ini dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu

1. Q-ball lima dimensi hanya dapat terbentuk untuk potensial $U(|\Phi|)$ tertentu, salah satunya adalah potensial *non-renormalizable*.
2. Q-ball dalam ruang-waktu lima dimensi memiliki kuantitas yang sama dengan Q-ball empat dimensi.
3. Q-ball lima dimensi stabil secara klasik untuk rentang ω yang diizinkan, tetapi stabil secara kuantum hanya di nilai ω rendah.
4. Total muatan Q dan total energi E Q-ball lima dimensi berhingga dan memiliki bentuk yang divergen untuk batas maksimal dan minimal.

5.2 Saran

Pada TA ini hanya dibahas medan skalar yang membentuk Q-ball beserta fitur-fitur Q-ball itu sendiri. Pada kenyataannya, terdapat beberapa aspek yang dapat ditambahkan dalam membangun Q-ball. Beberapa aspek yang dapat ditambahkan ke dalam konstruksi Q-ball antara lain:

1. Medan gravitasi yang digabungkan dengan Q-ball akan membentuk objek baru yang disebut sebagai *boson stars*. Sebuah objek hipotesis, tetapi, bila terbukti ada dapat membuka banyak jawaban dalam bidang astrofisika khususnya *dark matter*.
2. Q-ball juga dapat dibangun dengan ruang-waktu yang lain, contohnya ruang-waktu Anti-de Sitter.
3. Penelitian ini juga dapat dibawa ke dimensi yang lebih tinggi.

Ke depannya diharapkan akan ada pengkajian tentang Q-ball seperti apa yang telah disebutkan di atas.

Daftar Pustaka

- [1] R. Friedberg et all, Physical Review D Vol. 13, Number 10
- [2] S. Coleman, Nuclear Physics B262 (1985) 263-283
- [3] J. Masden, PHYSICS LETTERS B 246
- [4] A. Kusenko and Paul J. S., arXiv:astro-ph/0106008
- [5] R. Sharma et all, arXiv:0812.3470 [gr-qc]
- [6] D. Astefanesei, E. Radu, arXiv:gr-qc/0309131
- [7] John Archibald Wheeler, Phys. Rev. 97, 511 (1955)
- [8] David J. Kaup, Phys.Rev. 187 (1968) 1331.
- [9] R. Ruffini and S. Bonazzola, Phys. Rev. 5, 187 (1969)
- [10] L. Amithaba, B. Pal Palash, A First Book of Quantum Field Theory, Narosa, India, 2004
- [11] N. Manton, Paul S., *Topological Solitons*, Cambrigde University Press, UK.
- [12] U. Enz, Phys. Rev. 131, 1392 (1963)

- [13] G. H. Derrick, *Journal of Mathematical Physics* 5, 1252 (1964)
- [14] A. Purwanto, *Pengantar Kosmologi*, ITS Press, Surabaya, 2011.
- [15] M. Volkov and E. Wonnert, arXiv:hep-th/0205157v3 2 Sep 2002
- [16] E. Radu and Bintoro Subagyo, arXiv:1207.3715v1 [gr-qc]
- [17] Kasyfil A., *Model Q-ball dalam Ruang-Waktu (1+1) Dimensi*, TUGAS AKHIR, FISIKA ITS, 2018
- [18] S. Yoshida and Y. Eriguchi, *Phys. Rev. D*, 56 (1997) 762.

Lampiran A

Q-Ball dalam Empat Dimensi

A.1 Persamaan Medan

Persamaan medan Q-ball dapat diperoleh dengan mensubstitusikan rapat Lagrangian ke persamaan Euler-Lagrange. Persamaan Euler-Lagrange yang dimaksud ialah persamaan (2.8) dan persamaan (2.9). Tuliskan ulang persamaan Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Substitusikan rapat lagrangian Q-ball dan dengan menyelesaikan kedua suku secara terpisah maka dapat diperoleh persamaan medan materi. Dari suku pertama diperoleh

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial [\sqrt{-g} (\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi] - U(|\Phi|))] }{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \right). \quad (\text{A.2})$$

Karena suku potensial interaksi hanya bergantung pada Φ , maka turunannya terhadap $\partial_\mu \Phi$ adalah nol, sehingga dapat

dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \right) &= \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^*}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} + \frac{g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \right] \right) \\
&= \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \delta_\beta^\mu + g^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\mu \partial_\beta \Phi \right] \right) \\
&= \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[g^{\alpha\mu} \partial_\alpha \Phi + g^{\mu\beta} \partial_\beta \Phi \right] \right) \\
&= \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[\partial^\mu \Phi + \partial^\mu \Phi \right] \right) \\
&= \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \Phi),
\end{aligned} \tag{A.3}$$

atau dapat dituliskan dengan metrik $g^{\mu\nu}$ sebagai

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \right) = \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi). \tag{A.4}$$

Suku kedua dituliskan sebagai

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} = \frac{\partial(\sqrt{-g}(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi] - U(|\Phi|)))}{\partial \Phi^*}. \tag{A.5}$$

Hanya suku potensial yang bergantung pada Φ , sehingga persamaan (A.5) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} = -\sqrt{-g} \frac{\partial U}{\partial |\Phi|^2} \frac{\partial |\Phi|^2}{\partial \Phi^*}. \tag{A.6}$$

Substitusikan persamaan (A.4 dan A.6) ke persamaan Euler-Lagrange (A.1) diperoleh

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) + \sqrt{-g} \frac{\partial U}{\partial |\Phi|^2} \Phi = 0, \tag{A.7}$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) + \frac{\partial U}{\partial |\Phi|^2} \Phi = 0. \tag{A.8}$$

Persamaan inilah bentuk persamaan medan materi Q-ball pada persamaan (3.5).

A.2 Elemen Volume Bola-4

Dalam bola-3 (bola tiga dimensi), elemen volume dV dapat dituliskan sebagai

$$dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr. \quad (\text{A.9})$$

Bentuk ini dapat diturunkan secara geometri atau aljabar dengan transformasi Jacobi. Tetapi, dalam bola-4 (bola dalam empat dimensi), elemen volume hanya dapat diturunkan dengan cara aljabar.

Transformasi dari bola-4 ke koordinat kartesian 4 dimensi diberikan oleh

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1 \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_3 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ x_4 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Di sini digunakan bentuk $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ untuk $\{x, y, z, w\}$ pada koordinat kartesian 4 dimensi dan $\{r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ untuk $\{r, \theta, \psi, \varphi\}$ pada koordinat bola 4 dimensi. Nilai φ_1 dan φ_2 adalah $[0, \pi]$ dan nilai φ_3 adalah $[0, 2\pi]$.

Elemen volume dV bola-4 dapat dinyatakan sebagai

$$dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |J| d\varphi_3 d\varphi_1 d\varphi_2 dr \quad (\text{A.11})$$

dengan J merupakan Jacobian x_1, x_2, x_3, x_4 , terhadap $r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Jacobian J didefinisikan sebagai

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial x_4}{\partial r} & \frac{\partial x_4}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial x_4}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x_4}{\partial \varphi_3} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Untuk transformasi kedua koordinat tersebut (A.10), didapatkan

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -r \sin \varphi_1 & & & & \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & & & & \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & \cdots & & & \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & & & & \\ & 0 & & 0 & & \\ & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & & 0 & & \\ \cdots & r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ & r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & & r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & & \end{vmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Determinan dari matrik 4×4 dapat diekspansi menjadi determinan matrik 3×3 yaitu dengan minor matrik tersebut.

Maka Jacobian dari matrix di atas dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
 J = \cos \varphi_1 & \begin{vmatrix} r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & & \\ r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & \cdots & \\ r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ 0 & & & \\ \cdots & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ & r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & & \end{vmatrix} \\
 - (-r \sin \varphi_1) & \begin{vmatrix} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & & \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & \cdots & \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ 0 & & & \\ \cdots & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ & r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & & \end{vmatrix} \\
 + 0 & \begin{vmatrix} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & & \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & \cdots & \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ 0 & & & \\ \cdots & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ & r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & & \end{vmatrix} \\
 + 0 & \begin{vmatrix} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & & \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & \cdots & \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ 0 & & & \\ \cdots & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ & r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & & \end{vmatrix} \\
 \cdots & \begin{vmatrix} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & & \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & \cdots & \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ 0 & & & \\ \cdots & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & & \\ & r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & & \end{vmatrix} .
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Dua suku terakhir tidak usah diperhitungkan lagi karena berapapun hasilnya akan dikalikan dengan 'nol'. Determinan matrik 3×3 pada dua suku pertama dapat diekspansikan menjadi matrik 2×2 dengan cara yang sama seperti sebelumnya. Un-

tuk mempermudah, misalkan matrik 3×3 pada suku pertama diberi simbol A dan matrik 3×3 pada suku kedua diberi simbol B , maka persamaan (A.14) dituliskan sebagai

$$J = \cos \varphi_1 \det(A) + r \sin \varphi_1 \det(B). \quad (\text{A.15})$$

Sekarang determinan dari kedua matrik dapat dihitung satu persatu.

Determinan A

$$\begin{aligned} \det(A) &= r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \begin{vmatrix} r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \\ r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \end{vmatrix} \\ &+ r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \begin{vmatrix} r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \\ r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \end{vmatrix} \\ &+ 0 \begin{vmatrix} r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Suku terakhir tidak perlu diperhitungkan (sama seperti langkah sebelumnya pada matrik 4×4), sehingga

$$\begin{aligned} \det(A) &= r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (r^2 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 \\ &+ r^2 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_3) \\ &+ r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 (r^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 \\ &+ r^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_3). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Penyusunan ulang suku-suku persamaan tersebut memberikan

$$\begin{aligned} \det(A) &= r^3 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) \\ &+ r^3 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin^2 \varphi_3 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) \\ &= r^3 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 (\cos^2 \varphi_3 + \sin^2 \varphi_3), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

yang memberikan bahwa

$$\det(A) = r^3 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2. \quad (\text{A.19})$$

Nilai dari determinan matrik B juga bisa didapatkan dengan cara yang serupa, yaitu

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \begin{vmatrix} r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \\ r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \end{vmatrix} \\ &\quad + r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \begin{vmatrix} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0 \begin{vmatrix} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Dari dua suku pertama didapatkan

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 (r^2 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 \\ &\quad + r^2 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_3) \\ &\quad + r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 (r \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ &\quad + r \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_3). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Penyusunan ulang menghasilkan

$$\begin{aligned} \det(B) &= r^2 \sin^3 \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) \\ &\quad + r^2 \sin^3 \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin^2 \varphi_3 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) \\ &= r^2 \sin^3 \varphi_1 \sin \varphi_2 (\cos^2 \varphi_3 + \sin^2 \varphi_3), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

yang memberikan

$$\det(B) = r^2 \sin^3 \varphi_1 \sin \varphi_2. \quad (\text{A.23})$$

Substitusikan persamaan (A.19) dan (A.23) ke persamaan (A.15), maka

$$\begin{aligned} J &= r^3 \sin^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 + r^3 \sin^4 \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ &= r^3 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) \\ &= r^3 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Dari nilai jacobian J ini, maka elemen volume dV bola-4 adalah

$$dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_1 d\varphi_2 dr. \quad (\text{A.25})$$

A.3 Tensor Energi-Momentum Q-ball

Tensor energi-momentum didefinisikan sebagai

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (\text{A.26})$$

Aksi dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi) - U(|\Phi|) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Variasi aksi terhadap metrik $g^{\mu\nu}$ memberikan

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int d^4x \delta \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi) - U(|\Phi|) \right] \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Suku potensial $U(|\Phi|)$ tidak bergantung pada metrik $g^{\mu\nu}$, sehingga variasinya terhadap metrik bernilai nol. Selanjutnya diketahui dari persamaan (4.21) bahwa

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.29})$$

Substitusikan persamaan (A.29) pada suku pertama variasi aksi (A.28) dan dengan mengganti *dummy index*, diperoleh

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \left(-\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi) - U(|\Phi|) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi) \right]. \quad (\text{A.30})$$

Persamaan (A.30) dapat disederhanakan menjadi

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} \delta g^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi) - U(|\Phi|) \right) \right]. \quad (\text{A.31})$$

Substitusikan kembali $\delta\mathcal{S}$ (A.31) ke tensor energi-momentum (A.26), diperoleh

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} \delta g^{\rho\sigma}}{\delta g^{\rho\sigma}} \left[\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi) - U(|\Phi|) \right) \right] \\ T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi) - U(|\Phi|) \right]. \quad (\text{A.32})$$

Persamaan ini merupakan tensor energi-momentum dari Q-ball seperti yang ditunjukkan oleh persamaan (3.7).

A.4 Q-ball Bersimetri Bola

Bentuk Ansatz Q-ball bersimetri bola adalah

$$\Phi(t, r) = \phi(r) e^{i\omega t}, \quad (\text{A.33})$$

dan kompleks konjugatnya

$$\Phi^*(t, r) = \phi(r)e^{-i\omega t}. \quad (\text{A.34})$$

Dengan ansatz (A.33 dan A.34) dapat dituliskan secara eksplisit rapat Lagrangian Q-ball bersimetri bola, yaitu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sqrt{-g} & \left[\frac{1}{2}g^{00}(\partial_0\Phi\partial_0\Phi^* + \partial_0\Phi^*\partial_0\Phi) \right. \\ & + \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1\Phi\partial_1\Phi^* + \partial_1\Phi^*\partial_1\Phi) \\ & + \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2\Phi\partial_2\Phi^* + \partial_2\Phi^*\partial_2\Phi) \\ & \left. + \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3\Phi\partial_3\Phi^* + \partial_3\Phi^*\partial_3\Phi) - U(|\Phi|) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Karena tensor metrik merupakan matrik diagonal, maka komponen selain komponen g^{00} , g^{11} , g^{22} , dan g^{33} bernilai nol, sehingga rapat Lagrangian dapat dituliskan seperti persamaan (A.35). Subtitusikan ansatz (A.33 dan A.34) ke persamaan

(A.35), diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi(r) e^{i\omega t} \partial_0 \phi(r) e^{-i\omega t} + \partial_0 \phi(r) e^{-i\omega t} \partial_0 \phi(r) e^{i\omega t}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} (\partial_1 \phi(r) e^{i\omega t} \partial_1 \phi(r) e^{-i\omega t} + \partial_1 \phi(r) e^{-i\omega t} \partial_1 \phi(r) e^{i\omega t}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (\partial_2 \phi(r) e^{i\omega t} \partial_2 \phi(r) e^{-i\omega t} + \partial_2 \phi(r) e^{-i\omega t} \partial_2 \phi(r) e^{i\omega t}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\partial_3 \phi(r) e^{i\omega t} \partial_3 \phi(r) e^{-i\omega t} + \partial_3 \phi(r) e^{-i\omega t} \partial_3 \phi(r) e^{i\omega t}) \\
&\quad \left. - U(\phi) \right] \\
&= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} 2(i\omega \phi e^{i\omega t} (-i\omega) \phi e^{-i\omega t}) - \frac{1}{2} 2(\partial_r \phi e^{i\omega t} \partial_r \phi e^{-i\omega t}) - U(\phi) \right] \\
&= \sqrt{-g} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right].
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Persamaan (A.36) merupakan bentuk eksplisit rapat Lagrangian dari Q-ball bersimetri bola.

Selanjutnya persamaan medan (3.5) dapat direduksi menjadi

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) + \frac{\partial U}{\partial \Phi^*} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \Phi \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(\sqrt{-g} g^{11} \partial_1 \Phi \right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_2 \left(\sqrt{-g} g^{22} \partial_2 \Phi \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_3 \left(\sqrt{-g} g^{33} \partial_3 \Phi \right) \\
&\quad + \frac{\partial U}{\partial |\Phi|^2} \Phi,
\end{aligned} \tag{A.37}$$

dengan g merupakan determinan dari tensor metrik. Pada

metrik simetri bola, nilai determinannya adalah

$$g = -r^4 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.38})$$

Substitusi ansatz (A.33 dan A.34) ke persamaan (A.37), diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \phi e^{i\omega t} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(\sqrt{-g} g^{11} \partial_1 \phi e^{i\omega t} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_2 \left(\sqrt{-g} g^{22} \partial_2 \phi e^{i\omega t} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_3 \left(\sqrt{-g} g^{33} \partial_3 \phi e^{i\omega t} \right) \\ &\quad + \frac{dU}{d\phi^2} \Phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} i\omega \phi e^{i\omega t} \right) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(\sqrt{-g} e^{i\omega t} \partial_r \phi \right) \\ &\quad + \frac{dU}{d\phi} \frac{d\phi}{d\phi^2} \Phi \\ &= \frac{\sqrt{-g} i\omega}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\phi e^{i\omega t} \right) - \frac{e^{i\omega t} \partial_r \phi}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(\sqrt{-g} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(e^{i\omega t} \partial_r \phi \right) + \frac{dU}{d\phi} \frac{1}{2\phi} \phi e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Dari persamaan (A.38) didapatkan

$$\begin{aligned} \partial_1 \sqrt{-g} &= \frac{\partial \sqrt{-g}}{d(-g)} \frac{\partial(-g)}{\partial r} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} 4r^3 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Substitusikan persamaan (A.40) ke persamaan (A.39), diperoleh

$$0 = -\omega^2 \phi e^{i\omega t} - \frac{1}{2} \frac{e^{i\omega t} \partial_r \phi}{\sqrt{-g}} \frac{4r^3 \sin^2 \theta}{\sqrt{-g}} - e^{i\omega t} \partial_{rr} \phi + \frac{1}{2} \frac{dU}{d\phi} e^{i\omega t}.$$

Suku kedua pada persamaan (A.4) dapat disederhanakan, sehingga bentuk persamaan (A.4) menjadi

$$-\omega^2 \phi e^{i\omega t} - \frac{2}{r} e^{i\omega t} \partial_r \phi - e^{i\omega t} \partial_{rr} \phi + \frac{1}{2} \frac{dU}{d\phi} e^{i\omega t} = 0. \quad (\text{A.41})$$

Dan persamaan (A.41) dapat disederhanakan lagi menjadi

$$\omega^2 \phi + \frac{2}{r} \partial_r \phi + \partial_{rr} \phi - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\phi} = 0. \quad (\text{A.42})$$

Persamaan (A.42) adalah persamaan medan tereduksi untuk Q-ball bersimetri bola dalam ruang-waktu empat dimensi.

Tensor energi-momentum Q-ball

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi) - U(\phi) \right].$$

Di sini potensial $U(|\Phi|)$ dituliskan sebagai $U(\phi)$ karena potensial interaksi hanya bergantung pada ϕ . Suku yang berada di dalam kurung siku sudah dihitung sebelumnya pada rapat Lagrangian dan bentuknya

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi) - U(\phi) = \omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi).$$

Selanjutnya, masing-masing komponen dari tensor energi—momentumnya dapat dihitung. Untuk komponen T_{00} adalah

$$\begin{aligned} T_{00} &= \partial_0 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{00} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\ &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t}) \partial_0 (\phi e^{-i\omega t}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t}) \partial_0 (\phi e^{i\omega t}) \\ &\quad - \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\ &= \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 + U(\phi). \end{aligned}$$

Untuk komponen T_{01}

$$\begin{aligned}
 T_{01} &= \partial_0 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_1 \Phi - g_{01} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t}) \\
 &= i\omega \phi \partial_r \phi - i\omega \phi \partial_r \phi = 0.
 \end{aligned}$$

Komponen T_{02}

$$\begin{aligned}
 T_{02} &= \partial_0 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_2 \Phi - g_{02} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t}) \partial_2 (\phi e^{-i\omega t}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t}) \partial_2 (\phi e^{i\omega t}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponen T_{03}

$$\begin{aligned}
 T_{03} &= \partial_0 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_3 \Phi - g_{03} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponen T_{10}

$$\begin{aligned}
 T_{10} &= \partial_1 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{10} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_1 (\phi e^{i\omega t}) \partial_0 (\phi e^{-i\omega t}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t}) \partial_0 (\phi e^{i\omega t}) \\
 &= -i\omega (\partial_r \phi) \phi + i\omega (\partial_r \phi) \phi = 0.
 \end{aligned}$$

Komponen T_{11}

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \partial_1 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_1 \Phi - g_{11} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_1 (\phi e^{i\omega t}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t}) \\
 &\quad + \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 - U(\phi).
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{12}

$$\begin{aligned}
 T_{12} &= \partial_1 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_2 \Phi - g_{12} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_1(\phi e^{i\omega t}) \partial_2(\phi e^{-i\omega t}) + \partial_1(\phi e^{-i\omega t}) \partial_2(\phi e^{i\omega t}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{13}

$$\begin{aligned}
 T_{13} &= \partial_1 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_3 \Phi - g_{13} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_1(\phi e^{i\omega t}) \partial_3(\phi e^{-i\omega t}) + \partial_1(\phi e^{-i\omega t}) \partial_3(\phi e^{i\omega t}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{20}

$$\begin{aligned}
 T_{20} &= \partial_2 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{20} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_2(\phi e^{i\omega t}) \partial_0(\phi e^{-i\omega t}) + \partial_2(\phi e^{-i\omega t}) \partial_0(\phi e^{i\omega t}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{21}

$$\begin{aligned}
 T_{21} &= \partial_2 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_1 \Phi - g_{21} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_2(\phi e^{i\omega t}) \partial_1(\phi e^{-i\omega t}) + \partial_2(\phi e^{-i\omega t}) \partial_1(\phi e^{i\omega t}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{22}

$$\begin{aligned}
 T_{22} &= \partial_2 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_2 \Phi - g_{22} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_2(\phi e^{i\omega t}) \partial_2(\phi e^{-i\omega t}) + \partial_2(\phi e^{-i\omega t}) \partial_2(\phi e^{i\omega t}) \\
 &\quad + r^2 \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= r^2 \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right].
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{23}

$$\begin{aligned}
 T_{23} &= \partial_2 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_3 \Phi - g_{23} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_2(\phi e^{i\omega t}) \partial_3(\phi e^{-i\omega t}) + \partial_2(\phi e^{-i\omega t}) \partial_3(\phi e^{i\omega t}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{30}

$$\begin{aligned}
 T_{30} &= \partial_3 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{30} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_3(\phi e^{i\omega t}) \partial_0(\phi e^{-i\omega t}) + \partial_3(\phi e^{-i\omega t}) \partial_0(\phi e^{i\omega t}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{31}

$$\begin{aligned}
 T_{31} &= \partial_3 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_1 \Phi - g_{30} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_3(\phi e^{i\omega t}) \partial_1(\phi e^{-i\omega t}) + \partial_3(\phi e^{-i\omega t}) \partial_1(\phi e^{i\omega t}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{32}

$$\begin{aligned}
 T_{32} &= \partial_3 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_2 \Phi - g_{30} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_3(\phi e^{i\omega t}) \partial_2(\phi e^{-i\omega t}) + \partial_3(\phi e^{-i\omega t}) \partial_2(\phi e^{i\omega t}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{33}

$$\begin{aligned}
 T_{33} &= \partial_3 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_3 \Phi - g_{33} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_3(\phi e^{i\omega t}) \partial_3(\phi e^{-i\omega t}) + \partial_3(\phi e^{-i\omega t}) \partial_3(\phi e^{i\omega t}) \\
 &\quad + r^2 \sin^2 \theta \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right] \\
 &= r^2 \sin^2 \theta \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - U(\phi) \right].
 \end{aligned}$$

A.5 Q-Ball bersimetri Axial dalam Empat Dimensi

Rapat lagrangian

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi) - U(|\Phi|) \right]. \quad (\text{A.43})$$

Ansatz Q-ball bersimetri axial adalah

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = \phi(r, \theta) e^{i\omega t + iN\varphi}, \quad (\text{A.44})$$

dan kompleks konjugatnya

$$\Phi^*(t, r, \theta, \varphi) = \phi(r, \theta) e^{-i\omega t - iN\varphi}, \quad (\text{A.45})$$

dengan $\phi(r, \theta)$ merupakan fungsi riil. Dari tensor metrik (3.15), bentuk rapat Lagrangian (A.43) dapat dituliskan secara eksplisit menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sqrt{-g} & \left[\frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi) \right. \\ & + \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_1 \Phi) \\ & + \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_2 \Phi) \\ & \left. + \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_3 \Phi) - U(|\Phi|) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Karena tensor metrik merupakan matrik diagonal, maka semua komponen matrik selain komponen g^{00} , g^{11} , g^{22} , dan g^{33} bernilai nol, sehingga persamaan (A.43) dapat dituliskan seperti persamaan (A.46). Substitusi ansatz (A.44 dan A.45),

didapatkan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{00} \left(\partial_0 \phi(r, \theta) e^{i\omega t + iN\varphi} \partial_0 \phi(r, \theta) e^{-i\omega t - iN\varphi} \right. \right. \\
& + \left. \partial_0 \phi(r, \theta) e^{-i\omega t - iN\varphi} \partial_0 \phi(r, \theta) e^{i\omega t + iN\varphi} \right) \\
& + \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial_1 \phi(r, \theta) e^{i\omega t + iN\varphi} \partial_1 \phi(r, \theta) e^{-i\omega t - iN\varphi} \right. \\
& + \left. \partial_1 \phi(r, \theta) e^{-i\omega t - iN\varphi} \partial_1 \phi(r, \theta) e^{i\omega t + iN\varphi} \right) \\
& + \frac{1}{2} g^{22} \left(\partial_2 \phi(r, \theta) e^{i\omega t + iN\varphi} \partial_2 \phi(r, \theta) e^{-i\omega t - iN\varphi} \right. \\
& + \left. \partial_2 \phi(r, \theta) e^{-i\omega t - iN\varphi} \partial_2 \phi(r, \theta) e^{i\omega t + iN\varphi} \right) \\
& + \frac{1}{2} g^{33} \left(\partial_3 \phi(r, \theta) e^{i\omega t + iN\varphi} \partial_3 \phi(r, \theta) e^{-i\omega t - iN\varphi} \right. \\
& + \left. \partial_3 \phi(r, \theta) e^{-i\omega t - iN\varphi} \partial_3 \phi(r, \theta) e^{i\omega t + iN\varphi} \right) - U(|\Phi|) \Big].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \sqrt{-g} & \left[\frac{1}{2} \left(i\omega\phi(r, \theta)e^{i\omega t+iN\varphi} (-i\omega)\phi(r, \theta)e^{-i\omega t-iN\varphi} \right. \right. \\
& \left. \left. - i\omega\phi(r, \theta)e^{-i\omega t-iN\varphi} i\omega\phi(r, \theta)e^{i\omega t+iN\varphi} \right) \right. \\
& - \frac{1}{2} \left((\partial_r\phi)e^{i\omega t+iN\varphi} (\partial_r\phi)e^{-i\omega t-iN\varphi} \right. \\
& \left. + (\partial_r\phi)e^{-i\omega t-iN\varphi} (\partial_r\phi)e^{i\omega t+iN\varphi} \right) \\
& - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left((\partial_\theta\phi)e^{i\omega t+iN\varphi} (\partial_\theta\phi)e^{-i\omega t-iN\varphi} \right. \\
& \left. + (\partial_\theta\phi)e^{-i\omega t-iN\varphi} (\partial_\theta\phi)e^{i\omega t+iN\varphi} \right) \\
& - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(iN\phi(r, \theta)e^{i\omega t+iN\varphi} (-iN)\phi(r, \theta)e^{-i\omega t-iN\varphi} \right. \\
& \left. - iN\phi(r, \theta)e^{-i\omega t-iN\varphi} iN\phi(r, \theta)e^{i\omega t+iN\varphi} \right) - U(|\Phi|) \Big].
\end{aligned}$$

Sehingga rapat lagrangian dapat dituliskan sebagai

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(|\Phi|) \right]. \quad (\text{A.47})$$

Persamaan medan skalar

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) + \frac{dU}{d|\Phi|^2} \Phi = 0 \quad (\text{A.48})$$

secara eksplisit dalam empat dimensi dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \Phi \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(\sqrt{-g} g^{11} \partial_1 \Phi \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_2 \left(\sqrt{-g} g^{22} \partial_2 \Phi \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_3 \left(\sqrt{-g} g^{33} \partial_3 \Phi \right) \\
& + \frac{dU}{d|\Phi|^2} \Phi = 0.
\end{aligned}$$

Substitusikan ansatz (A.44 dan A.45) ke persamaan medan, diperoleh

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(\sqrt{-g} g^{11} \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_2 \left(\sqrt{-g} g^{22} \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_3 \left(\sqrt{-g} g^{33} \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \right) \\
& + \frac{dU}{d|\Phi|^2} \Phi = 0 \\
& \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \right) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(\sqrt{-g} (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_2 \left(\sqrt{-g} \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \right) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_3 \left(\sqrt{-g} \frac{1}{r^4 \sin^2 \theta} iN \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \right) \\
& + \frac{dU}{d\phi} \frac{d\phi}{d\phi^2} \phi e^{i\omega t + iN\varphi} = 0.
\end{aligned}$$

Sifat diferensiasi memberikan

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{-g} i\omega}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\phi e^{i\omega t + iN\varphi} \right) - \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left((\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \right) \\
& - \frac{(\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi}}{\sqrt{-g}} \partial_1 \sqrt{-g} - \frac{\sqrt{-g}}{r^2 \sqrt{-g}} \partial_2 \left((\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \right) \\
& - \frac{(\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi}}{\sqrt{-g}} \partial_2 \left(\frac{\sqrt{-g}}{r^2} \right) - \frac{\sqrt{-g} iN}{r^2 \sin^2 \theta \sqrt{-g}} \partial_3 \left(\phi e^{i\omega t + iN\varphi} \right) \\
& + \frac{1}{2\phi} \frac{dU}{d\phi} \phi e^{i\omega t + iN\varphi} = 0.
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Dari (A.38) didapatkan

$$\partial_2 \left(\frac{\sqrt{-g}}{r^2} \right) = r^2 \frac{\partial_\theta \sqrt{-g}}{r^4}, \tag{A.50}$$

dan

$$\begin{aligned}
 \partial_\theta \sqrt{-g} &= \frac{d\sqrt{-g}}{d(-g)} \frac{\partial(-g)}{\partial\theta} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(r^4 \sin^2 \theta)}{\partial\theta} \\
 &= \frac{2}{2} \frac{r^4}{\sqrt{-g}} \sin \theta \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{A.51}$$

Subtitusikan persamaan (A.50) dan A.51) dan $\partial_1 \sqrt{-g}$ dari persamaan (A.40) ke persamaan (A.49), diperoleh

$$\begin{aligned}
 i\omega i\omega\phi e^{i\omega t+iN\varphi} - (\partial_{rr}\phi)e^{i\omega t+iN\varphi} - \frac{(\partial_r\phi)e^{i\omega t+iN\varphi}}{\sqrt{-g}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} 4r^3 \sin^2 \theta \\
 - \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta})e^{i\omega t+iN\varphi} - \frac{(\partial_\theta\phi)e^{i\omega t+iN\varphi}}{\sqrt{-g}} \frac{r^2}{\sqrt{-g}} \sin \theta \cos \theta \\
 - \frac{iN}{r^2 \sin^2 \theta} iN\phi e^{i\omega t+iN\varphi} + \frac{1}{2} \frac{dU}{d\phi} e^{i\omega t+iN\varphi} = 0.
 \end{aligned} \tag{A.52}$$

Operasi aljabar biasa memberikan

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \phi e^{i\omega t+iN\varphi} - (\partial_{rr}\phi)e^{i\omega t+iN\varphi} - \frac{2}{r} (\partial_r\phi)e^{i\omega t+iN\varphi} \\
 - \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta})e^{i\omega t+iN\varphi} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} (\partial_\theta\phi)e^{i\omega t+iN\varphi} + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi e^{i\omega t+iN\varphi} \\
 + \frac{1}{2} \frac{dU}{d\phi} e^{i\omega t+iN\varphi} = 0.
 \end{aligned} \tag{A.53}$$

Akhirnya diperoleh

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \phi + \partial_{rr}\phi + \frac{2}{r} (\partial_r\phi) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}\phi \\
 + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta\phi - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\phi} = 0.
 \end{aligned} \tag{A.54}$$

Persamaan (A.54) adalah persamaan medan tereduksi untuk

Q-ball bersimetri axial dalam ruang-waktu empat dimensi seperti yang ditunjukkan persamaan (3.29).

Selanjutnya dihitung komponen tensor energi-momentumnya. Tensor energi-momentum Q-ball diberikan oleh persamaan (3.7), yaitu

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi^* + \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi^* + \partial_\alpha\Phi^*\partial_\beta\Phi) - U(\phi) \right]. \quad (\text{A.55})$$

Di sini potensial $U(|\Phi|)$ dituliskan sebagai $U(\phi)$ karena potensial interaksi hanya bergantung pada ϕ . Suku yang berada di dalam kurung siku sudah dihitung sebelumnya pada rapat lagrangian dan bentuknya

$$\omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 - \frac{N^2}{r^2\sin^2\theta}\phi^2 - U(\phi). \quad (\text{A.56})$$

Dengan menggunakan ansatz Q-ball bersimetri axial (A.44 dan A.45), maka dapat dihitung semua komponen tensor energi-momentumnya. Untuk komponen T_{00}

$$\begin{aligned} T_{00} &= \partial_0\Phi\partial_0\Phi^* + \partial_0\Phi^*\partial_0\Phi \\ &\quad - g_{00} \left[\omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 - \frac{N^2}{r^2\sin^2\theta}\phi^2 - U(\phi) \right] \\ &= \partial_0(\phi e^{i\omega t + iN\varphi})\partial_0(\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_0(\phi e^{-i\omega t - iN\varphi})\partial_0(\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\ &\quad - \left[\omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 - \frac{N^2}{r^2\sin^2\theta}\phi^2 - U(\phi) \right] \\ &= i\omega t\phi e^{i\omega t + iN\varphi}(-i\omega t)\phi e^{-i\omega t - iN\varphi} - i\omega t\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}i\omega t\phi e^{i\omega t + iN\varphi} \\ &\quad - \omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{N^2}{r^2\sin^2\theta}\phi^2 + U(\phi) \\ &= \omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{N^2}{r^2\sin^2\theta}\phi^2 + U(\phi). \end{aligned}$$

Komponenten T_{01}

$$\begin{aligned}
 T_{01} &= \partial_0 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_1 \Phi \\
 &\quad - g_{01} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} (\partial_r \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} - i\omega \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{02}

$$\begin{aligned}
 T_{02} &= \partial_0 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_2 \Phi \\
 &\quad - g_{02} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} (\partial_\theta \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} - i\omega \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{03}

$$\begin{aligned}
 T_{03} &= \partial_0 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_3 \Phi \\
 &\quad - g_{03} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} (-iN) \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} - i\omega \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} iN \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \\
 &= 2\omega N \phi^2.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{10}

$$\begin{aligned}
T_{10} &= \partial_1 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_0 \Phi \\
&\quad - g_{10} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&= (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} (-i\omega) \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} + (\partial_r \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Komponenten T_{11}

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \partial_1 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_1 \Phi \\
&\quad - g_{11} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&\quad + \omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \\
&= (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} (\partial_r \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} + (\partial_r \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
&\quad + \omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \\
&= \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi).
\end{aligned}$$

Komponenten T_{12}

$$\begin{aligned}
T_{12} &= \partial_1 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_2 \Phi \\
&\quad - g_{12} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&= (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} (\partial_\theta \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} + (\partial_r \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
&= 2(\partial_r \phi)(\partial_\theta \phi).
\end{aligned}$$

Komponenten T_{13}

$$\begin{aligned}
 T_{13} &= \partial_1 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_3 \Phi \\
 &\quad - g_{13} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} (-iN) \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} + (\partial_r \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} iN \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{20}

$$\begin{aligned}
 T_{20} &= \partial_2 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_0 \Phi \\
 &\quad - g_{20} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} (-i\omega) \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} + (\partial_\theta \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{21}

$$\begin{aligned}
 T_{21} &= \partial_2 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_1 \Phi \\
 &\quad - g_{21} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} (\partial_r \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} + (\partial_\theta \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
 &= 2(\partial_r \phi)(\partial_\theta \phi).
 \end{aligned}$$

Komponen T_{22}

$$\begin{aligned}
T_{22} &= \partial_2 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_2 \Phi \\
&\quad - g_{22} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&\quad + r^2 \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} (\partial_\theta \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} + (\partial_\theta \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
&\quad + r^2 \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= (\partial_\theta \phi)^2 + r^2 \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right].
\end{aligned}$$

Komponen T_{23}

$$\begin{aligned}
T_{23} &= \partial_2 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_3 \Phi \\
&\quad - g_{23} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&= (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} (-iN) \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} + (\partial_\theta \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} iN \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Komponen T_{30}

$$\begin{aligned}
T_{30} &= \partial_3 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_0 \Phi \\
&\quad - g_{30} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&= iN \phi e^{i\omega t + iN\varphi} (-i\omega) \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} - iN \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \\
&= 2\omega N \phi^2.
\end{aligned}$$

Komponenten T_{31}

$$\begin{aligned}
T_{31} &= \partial_3 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_1 \Phi \\
&\quad - g_{31} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&= iN \phi e^{i\omega t + iN\varphi} (\partial_r \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} - iN \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Komponenten T_{32}

$$\begin{aligned}
T_{32} &= \partial_3 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_2 \Phi \\
&\quad - g_{32} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&= iN \phi e^{i\omega t + iN\varphi} (\partial_\theta \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} - iN \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Komponenten T_{33}

$$\begin{aligned}
T_{33} &= \partial_3 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_3 \Phi \\
&\quad - g_{33} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&\quad + r^2 \sin^2 \theta \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= iN \phi e^{i\omega t + iN\varphi} (-iN) \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} - iN \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} iN \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \\
&\quad + r^2 \sin^2 \theta \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= N^2 \phi^2 + r^2 \sin^2 \theta \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - U(\phi) \right].
\end{aligned}$$

Lampiran B

Q-ball dalam Lima Dimensi

Ansatz Q-Ball dalam ruang-waktu lima dimensi

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = \phi(t, r)e^{i\omega t + iN\varphi}, \quad (\text{B.1})$$

dan kompleks konjugatnya

$$\Phi^*(t, r, \theta, \varphi) = \phi(t, r)e^{-i\omega t - iN\varphi}. \quad (\text{B.2})$$

Rapat Lagrangiannya adalah

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi) - U(|\Phi|) \right].$$

Untuk mendapatkan bentuk Lagrangian secara eksplisitnya, maka rapat Lagrangian di atas dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sqrt{-g} & \left[\frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi) + \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_1 \Phi) \right. \\ & + \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_2 \Phi) + \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_3 \Phi) \\ & \left. + \frac{1}{2} g^{44} (\partial_4 \Phi \partial_4 \Phi^* + \partial_4 \Phi^* \partial_4 \Phi) - U(\phi) \right]. \end{aligned}$$

Potensial yang digunakan ialah potensial *non-renormalizable*, yaitu

$$U(\phi) = \lambda(\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2).$$

Substitusikan ansatz (B.1 dan B.2) dan bentuk potensial di atas, maka rapat Lagrangian menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{00} (\partial_0(\phi(t, r)e^{i\omega t+iN\varphi})\partial_0\Phi^* + \partial_0\Phi^*\partial_0(\phi(t, r)e^{i\omega t+iN\varphi})) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1(\phi(t, r)e^{i\omega t+iN\varphi})\partial_1\Phi^* + \partial_1\Phi^*\partial_1(\phi(t, r)e^{i\omega t+iN\varphi})) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2(\phi(t, r)e^{i\omega t+iN\varphi})\partial_2\Phi^* + \partial_2\Phi^*\partial_2(\phi(t, r)e^{i\omega t+iN\varphi})) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3(\phi(t, r)e^{i\omega t+iN\varphi})\partial_3\Phi^* + \partial_3\Phi^*\partial_3(\phi(t, r)e^{i\omega t+iN\varphi})) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{44} (\partial_4(\phi(t, r)e^{i\omega t+iN\varphi})\partial_4\Phi^* + \partial_4\Phi^*\partial_4(\phi(t, r)e^{i\omega t+iN\varphi})) \\ &\quad \left. - \lambda(\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2) \right] \\ &= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (i\omega\phi(-i\omega)\phi - i\omega\phi i\omega\phi) - \frac{1}{2} (\partial_r\phi\partial_r\phi + \partial_r\phi\partial_r\phi) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (\partial_\theta\phi\partial_\theta\phi + \partial_\theta\phi\partial_\theta\phi) - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} (iN\phi(-iN)\phi - iN\phi iN\phi) \\ &\quad \left. - \lambda(\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2) \right] \\ &= \sqrt{-g} \left[\omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta\phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2\theta} \phi^2 - \lambda(\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2) \right]. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Persamaan (B.3) adalah bentuk eksplisit dari rapat Lagrangian. Persamaan medan materi

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) + \frac{\partial U}{\partial |\Phi|^2} \Phi = 0$$

dapat dituliskan lebih eksplisit sebagai

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \Phi \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(\sqrt{-g} g^{11} \partial_1 \Phi \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_2 \left(\sqrt{-g} g^{22} \partial_2 \Phi \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_3 \left(\sqrt{-g} g^{33} \partial_3 \Phi \right) \quad (\text{B.4}) \\
& + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_4 \left(\sqrt{-g} g^{44} \partial_4 \Phi \right) + \frac{\partial U}{\partial |\Phi|^2} \Phi = 0.
\end{aligned}$$

Substitusi ansatz (B.1 dan B.2) Q-ball pada persamaan (B.4) diperoleh

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(\sqrt{-g} g^{11} \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_2 \left(\sqrt{-g} g^{22} \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_3 \left(\sqrt{-g} g^{33} \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_4 \left(\sqrt{-g} g^{44} \partial_4 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \right) + \frac{dU}{d\phi^2} \phi e^{i\omega t + iN\varphi} = 0 \\
& \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \right) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 \left(\sqrt{-g} (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_2 \left(\sqrt{-g} \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \right) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_3 \left(\sqrt{-g} \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} 0 \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_4 \left(\sqrt{-g} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} iN \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \right) + \frac{dU}{d\phi} \frac{d\phi}{d\phi^2} \phi e^{i\omega t + iN\varphi} = 0.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Operasikan operator diferensial satu kali lagi pada persamaan (B.5) diperoleh

$$\begin{aligned}
& i\omega\partial_0(\phi e^{i\omega t+iN\varphi}) - \frac{\partial_r\phi}{\sqrt{-g}}e^{i\omega t+iN\varphi}\partial_r\sqrt{-g} - \partial_r((\partial_r\phi)e^{i\omega t+iN\varphi}) \\
& - \frac{\partial_\theta\phi}{r^2\sqrt{-g}}e^{i\omega t+iN\varphi}\partial_\theta\sqrt{-g} - \frac{1}{r^2}\partial_\theta((\partial_\theta\phi)e^{i\omega t+iN\varphi}) \\
& - \frac{iN}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi(\phi e^{i\omega t+iN\varphi}) + \frac{1}{2}\frac{dU}{d\phi}e^{i\omega t+iN\varphi} = 0.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Sampai di sini harus dihitung terlebih dahulu nilai dari $\partial_r\sqrt{-g}$ dan $\partial_\theta\sqrt{-g}$, dengan $-g$ merupakan determinan dari tensor metrik ruang-waktu. Dari tensor metrik yang digunakan, maka nilai determinannya ialah

$$g = r^6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

Dari aturan rantai, $\partial_r\sqrt{-g}$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
\partial_r\sqrt{-g} &= \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial r} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(r^6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}{\partial r} \\
&= 3 \frac{r^5 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sqrt{g}} \\
&= \frac{3}{r} \frac{g}{\sqrt{g}},
\end{aligned} \tag{B.7}$$

sedangkan $\partial_\theta \sqrt{-g}$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
 \partial_\theta \sqrt{-g} &= \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(r^6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}{\partial \theta} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} r^6 \left(\frac{d \sin^2 \theta}{d \theta} - \frac{d \sin^4 \theta}{d \theta} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} r^6 \left(2 \sin \theta \cos \theta - 4 \sin^3 \theta \cos \theta \right).
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Substitusikan kedua hasil ini (B.7 dan B.8) ke persamaan (B.6), diperoleh

$$\begin{aligned}
 i\omega \partial_0(\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) - \frac{\partial_r \phi}{\sqrt{g}} e^{i\omega t + iN\varphi} \frac{3}{r} \frac{g}{\sqrt{g}} - \partial_r((\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 - \frac{\partial_\theta \phi}{r^2 \sqrt{g}} e^{i\omega t + iN\varphi} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} r^6 \left[2 \sin \theta \cos \theta - 4 \sin^3 \theta \cos \theta \right] \\
 - \frac{1}{r^2} \partial_\theta((\partial_\theta) e^{i\omega t + iN\varphi}) - \frac{iN}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi(\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) + \frac{1}{2} \frac{dU}{d\phi} e^{i\omega t + iN\varphi} = 0.
 \end{aligned}$$

Operasi aljabar linier biasa memberikan

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \phi e^{i\omega t + iN\varphi} - (\partial_{rr} \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} - \frac{3}{r} (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
 - \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} - \frac{1}{r^2 \sin \theta \cos \theta} (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
 + \frac{2 \sin \theta}{r^2 \cos \theta} (\partial_\theta \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi e^{i\omega t + iN\varphi} + \frac{dU}{d\phi} e^{i\omega t + iN\varphi} = 0,
 \end{aligned}$$

atau dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \phi - \partial_{rr} \phi - \frac{3}{r} \partial_r \phi - \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} \phi - \frac{1}{r^2 \sin \theta \cos \theta} \partial_\theta \phi \\
 + \frac{2 \sin \theta}{r^2 \cos \theta} \partial_\theta \phi + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi + \frac{dU}{d\phi} = 0.
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Persamaan (B.9) merupakan persamaan medan untuk Q-ball berotasi dalam ruang-waktu lima dimensi.

Selanjutnya dihitung masing-masing komponen tensor energi-momentumnya. Bentuk umum tensor energi Q-ball diberikan oleh persamaan (3.7), yaitu

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi) - U(\phi) \right].$$

Suku yang berada dalam tanda [] mempunyai nilai

$$\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi).$$

Selanjutnya, masing-masing komponen tensor energi-momentum dapat dihitung. Untuk komponen T_{00} adalah

$$\begin{aligned} T_{00} &= \partial_0 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{00} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\ &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\ &\quad - \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\ &= i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} (-i\omega) \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} - i\omega \phi e^{-i\omega t - iN\varphi} i\omega \phi e^{i\omega t + iN\varphi} \\ &\quad - \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 + U(\phi) \\ &= \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 + \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 + U(\phi). \end{aligned}$$

Komponenten T_{01}

$$\begin{aligned}
 T_{01} &= \partial_0 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_1 \Phi - g_{01} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{02}

$$\begin{aligned}
 T_{02} &= \partial_0 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_2 \Phi - g_{02} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{03}

$$\begin{aligned}
 T_{03} &= \partial_0 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_3 \Phi - g_{03} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{04}

$$\begin{aligned}
 T_{04} &= \partial_0 \Phi \partial_4 \Phi^* + \partial_0 \Phi^* \partial_4 \Phi - g_{04} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_4 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_4 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 2N\omega \phi^2.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{10}

$$\begin{aligned}
 T_{10} &= \partial_1 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{10} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{11}

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \partial_1 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_1 \Phi - g_{11} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &\quad + \omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \\
 &= (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} (\partial_r \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} + (\partial_r \phi) e^{-i\omega t - iN\varphi} (\partial_r \phi) e^{i\omega t + iN\varphi} \\
 &\quad + \omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \\
 &= \omega^2 \phi^2 + (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi).
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{12}

$$\begin{aligned}
 T_{12} &= \partial_1 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_2 \Phi - g_{12} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 2\partial_r \phi \partial_\theta \phi.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{13}

$$\begin{aligned}
 T_{13} &= \partial_1 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_3 \Phi - g_{13} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{14}

$$\begin{aligned}
 T_{14} &= \partial_1 \Phi \partial_4 \Phi^* + \partial_1 \Phi^* \partial_4 \Phi - g_{14} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_4 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_4 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{20}

$$\begin{aligned}
 T_{20} &= \partial_2 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{20} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{21}

$$\begin{aligned}
 T_{21} &= \partial_2 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_1 \Phi - g_{21} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 2\partial_r \phi \partial_\theta \phi.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{22}

$$\begin{aligned}
T_{22} &= \partial_2 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_2 \Phi - g_{22} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&\quad + r^2 \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \omega^2 r^2 \phi^2 - r^2 (\partial_r \phi)^2 + (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{\sin^2 \theta} \phi^2 - r^2 U(\phi).
\end{aligned}$$

Komponenten T_{23}

$$\begin{aligned}
T_{23} &= \partial_2 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_3 \Phi - g_{23} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Komponenten T_{24}

$$\begin{aligned}
T_{24} &= \partial_2 \Phi \partial_4 \Phi^* + \partial_2 \Phi^* \partial_4 \Phi - g_{24} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_4 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_4 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Komponenten T_{30}

$$\begin{aligned}
 T_{30} &= \partial_3 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{30} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{31}

$$\begin{aligned}
 T_{31} &= \partial_3 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_1 \Phi - g_{31} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{32}

$$\begin{aligned}
 T_{32} &= \partial_3 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_2 \Phi - g_{32} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponen T_{33}

$$\begin{aligned}
T_{33} &= \partial_3 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_3 \Phi - g_{33} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&\quad + r^2 \cos^2 \theta \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= r^2 \cos^2 \theta \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right].
\end{aligned}$$

Komponen T_{34}

$$\begin{aligned}
T_{34} &= \partial_3 \Phi \partial_4 \Phi^* + \partial_3 \Phi^* \partial_4 \Phi - g_{34} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_4 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_4 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Komponen T_{40}

$$\begin{aligned}
T_{40} &= \partial_4 \Phi \partial_0 \Phi^* + \partial_4 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{40} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_4 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_4 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_0 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&= 2N\omega \phi^2.
\end{aligned}$$

Komponenten T_{41}

$$\begin{aligned}
 T_{41} &= \partial_4 \Phi \partial_1 \Phi^* + \partial_4 \Phi^* \partial_1 \Phi - g_{41} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_4 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_4 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_1 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{42}

$$\begin{aligned}
 T_{42} &= \partial_4 \Phi \partial_2 \Phi^* + \partial_4 \Phi^* \partial_2 \Phi - g_{42} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_4 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_4 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_2 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponenten T_{43}

$$\begin{aligned}
 T_{43} &= \partial_4 \Phi \partial_3 \Phi^* + \partial_4 \Phi^* \partial_3 \Phi - g_{43} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
 &= \partial_4 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_4 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Komponen T_{44}

$$\begin{aligned}
T_{44} &= \partial_4 \Phi \partial_4 \Phi^* + \partial_4 \Phi^* \partial_4 \Phi - g_{44} \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= \partial_4 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) + \partial_4 (\phi e^{-i\omega t - iN\varphi}) \partial_3 (\phi e^{i\omega t + iN\varphi}) \\
&\quad + r^2 \sin^2 \theta \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \phi^2 - U(\phi) \right] \\
&= N^2 \phi^2 + r^2 \sin^2 \theta \left[\omega^2 \phi^2 - (\partial_r \phi)^2 - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - U(\phi) \right].
\end{aligned}$$

Semua bentuk tensor energi-momentum di atas masih dinyatakan dalam potensial $U(\phi)$. Bila disubstitusikan potensial *non-renormalizable* yang digunakan, yaitu

$$U(\phi) = \lambda(\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2),$$

maka akan diperoleh bentuk tensor energi-momentum seperti yang diungkapkan pada BAB IV.

BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Doni Lutfi Anggara dan biasa dipanggil Doni (Dolli oleh kolega satu angkatan). Penulis lahir di Banyuwangi tepatnya tanggal 22 Januari 1996. Penulis pernah menempuh pendidikan formal diantaranya TK. 1 khodijah Segobang, MI Nahdathul Thu'llab Segobang, SMPN 1 Licin, dan SMAN 1 Giri Banyuwangi. Pada tahun 2014, penulis diterima di departemen fisika ITS dengan nomor 1114100102. Penulis masuk ke perguruan tinggi lewat

jalur SBMPTN.

Selama berada di perguruan tinggi, penulis hanya mengikuti satu organisasi yaitu IAC (*ITS Astronomy Club*). Pengalaman penulis saat mengikuti organisasi tersebut ialah menjadi *staff* obseversi. Penulis mengikuti organisasi tersebut dikarenakan kesukaan penulis tersebut terhadap Astronomi. Selain organisasi, penulis juga pernah menjadi assitem laboratorium dan assiten dosen fisika dasar selama 2 tahun. Setelah 3 tahun mengikuti perkuliahan, penulis memutuskan untuk menekuni bidang fisika teori dan bergabung keanggotaan laboratorium fisika teori dan filsafat alam (LAFTIFA ITS). Pengerjaan tugas akhir ini tidak lepas dari canda tawa dan semangat dari anggota LAFTIFA ITS yang diberikan kepada penulis.

