



TESIS - KS185411

**PEMODELAN *SPATIAL EXTREME VALUE* MENGGUNAKAN  
PENDEKATAN STUDENT'S  $t$  COPULA  
(STUDI KASUS: PEMODELAN CURAH HUJAN di KABUPATEN NGAWI)**

**MEIRINDA FAUZIYAH  
06211750012004**

Dosen Pembimbing  
Dr. Sutikno, M.Si  
Jerry Dwi T. Purnomo, M.Si, Ph.D

Departemen Statistika  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
2020



TESIS - KS185411

**PEMODELAN *SPATIAL EXTREME VALUE* MENGGUNAKAN  
PENDEKATAN STUDENT'S  $t$  COPULA  
(STUDI KASUS: PEMODELAN CURAH HUJAN di KABUPATEN NGAWI)**

**MEIRINDA FAUZIYAH  
06211750012004**

Dosen Pembimbing  
Dr. Sutikno, M.Si  
Jerry Dwi T. Purnomo, M.Si, Ph.D

Departemen Statistika  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
2020



THESIS - KS185411

**SPATIAL EXTREME VALUE MODELLING WITH  
STUDENT'S  $t$  COPULA APPROACH  
(CASE STUDY: MODELLING EXTREME RAINFALL IN NGAWI REGENCY)**

**MEIRINDA FAUZIYAH  
06211750012004**

Supervisor  
Dr. Sutikno, M.Si  
Jerry Dwi T. Purnomo, M.Si, Ph.D

Department of Statistics  
Faculty of Science and Data Analytics  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
2020

**LEMBAR PENGESAHAN TESIS**

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar

**Magister Statistika (M.Stat)**

di

**Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Oleh:

**MEIRINDA FAUZIYAH**

**NRP: 06211750012004**

Tanggal Ujian : 20 Januari 2020

Periode Wisuda: Maret 2020

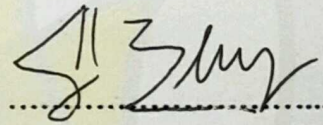
Disetujui oleh:

**Pembimbing:**

1. Dr. Sutikno, M.Si.  
NIP:19710313 199702 1 001

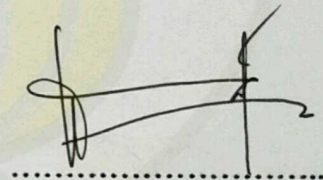


2. Jerry Dwi T. Purnomo, M.Si, Ph.D.  
NIP:19810223 200812 1 003

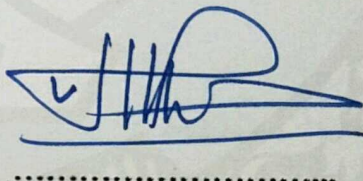


**Penguji :**

1. Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.  
NIP:19681124 199412 1 001



2. Dr. Suhartono, M.Sc.  
NIP:19710929 199512 1 001



**Kepala Departemen Statistika  
Fakultas Sains dan Analitika Data**

**Dr. Kartika Fithriasari, M.Si.**

**NIP:19691212 199303 2 002**



**Pemodelan *Spatial Extreme Value* dengan Pendekatan *Student's t Copula*  
(Studi Kasus: Pemodelan Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Ngawi)**

Nama Mahasiswa : Meirinda Fauziah  
NRP : 062117 5001 2004  
Pembimbing : Dr. Sutikno, M.Si  
Jerry D. T. Purnomo, M.Si, Ph.D

**ABSTRAK**

Cuaca ekstrem merupakan kejadian cuaca yang tidak normal, jarang terjadi, dan jarang dapat dihindari. Akibatnya, dampak kerugian yang ditimbulkan pun cukup signifikan bagi lingkungan dan masyarakat. Dampak tersebut dapat diminimalisir dengan mempelajari pola dan karakteristik dari kejadian ekstrem tersebut. Metode statistika yang dikembangkan untuk mengidentifikasi kejadian ekstrem yaitu *Extreme Value Theory* (EVT). Kejadian ekstrem terjadi tidak hanya pada satu lokasi (univariat), namun dapat terjadi di beberapa lokasi (multivariat), sehingga data curah hujan termasuk data multivariat yang diukur berdasarkan lokasi atau mengikuti kaidah data spasial. Oleh karena itu, diperoleh pengembangan ilmu mengenai *Spatial Extreme Value* (SEV). Beberapa pendekatan spasial yang digunakan adalah *Max-Stable Process* (MSP) dan Copula. Copula merupakan suatu fungsi dari dua hubungan distribusi yang masing-masing memiliki fungsi marjinal distribusi. Penelitian ini menggunakan pendekatan copula dengan jenis student's t copula, karena distribusi multivariat t bersifat ekor gemuk (*fat joint tail*) yang mengindikasikan bahwa metode ini tepat digunakan pada data yang bersifat *heavy tail*. Metode ini memodelkan dependensi ekstremal antar lokasi dengan mentransformasi distribusi marjinal nilai ekstrem ke distribusi Frechet, kemudian ke unit copula. Penelitian ini dilakukan untuk memodelkan curah hujan ekstrem di Kabupaten Ngawi dengan pendekatan student's t copula. Data yang digunakan untuk menyusun model dan estimasi parameter adalah data curah hujan tahun 1989-2010, sedangkan untuk validasi model menggunakan data tahun 2011-2015. Hasil penelitian menunjukkan bahwa estimasi SEV dengan PMLE diketahui penyelesaiannya tidak *close form*, sehingga dilanjutkan dengan metode iterasi numerik BFGS Quasi-Newton. Nilai *extremal coefficient* berada pada kisaran 1,4 hingga 1,7 hal ini berarti masih terdapat dependensi spasial antar pos hujan. Validasi model dilakukan dengan mengestimasi *return level* tahun 2011-2015 melalui pendekatan model *student's t copula*. Kinerja prediksi curah hujan ekstrem dengan SEV melalui pendekatan *student's t copula* diperoleh RMSE sebesar 34,917.

**Kata Kunci:** Curah hujan ekstrem, *Extreme Value Theory*, *Spatial Extreme Value*, *Student's t copula*

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## **Spatial Extreme Value Modelling with Student's t Copula approach**

### **(Case Study: Modelling Extreme Rainfall in Ngawi Regency)**

By : Meirinda Fauziyah  
Student Identity Number : 062117 5001 2004  
Supervisor : Dr. Sutikno, M.Si  
Jerry D. T. Purnomo, M.Si, Ph.D

### **ABSTRACT**

Extreme weather is an abnormal weather event, rare, and rarely can be avoided. As a result, the impact of the losses caused is quite significant for the environment and society. However, the impacts can be minimized by studying the patterns and characteristics of extreme events. The statistical method developed to identify extreme events is Extreme Value Theory (EVT). Extreme events can occur not only in one location (univariate), but can occur in several locations (multivariate) so that rainfall data including multivariate data measured by location or following the rules of spatial data. Therefore, the development of knowledge about Spatial Extreme Value is obtained. Some spatial approaches that can be used are Max-Stable Process (MSP) and Copula. Copula is a function of two distribution relationships, each of which has a marginal distribution function. This study uses a copula approach with type student's t copula, because the multivariate distribution is fat joint (fat joint tail) which indicates that method is appropriate for heavy tail data such as extreme rainfall. This method models the extremal dependencies between locations by transforming the marginal distribution of extreme values to the Frechet distribution, then to the copula unit. This study examines the spatial extreme value modeling in Ngawi Regency with the student's t copula approach. The data used to construct the model and parameter estimation is the rainfall data for 1989-2010, while for the validation of the model using the data for 2011-2015. The results showed that estimated SEV with PMLE revealed the solution was not closed form, so it was continued with the numeric iteration method is Quasi-Newton BFGS. The value of extremal coefficient is in the range of 1.4 to 1.7, that means there are still spatial dependencies between rain stations. Model validation is done by estimating the 2011-2015 return level through the student's t copula model approach. The predicted performance of extreme rainfall with SEV through the student's t copula approach obtained an RMSE of 34,917.

**Kata Kunci:** Extreme rainfall, Extreme Value Theory, Spatial Extreme Value, Student's t Copula

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*



## Kata Pengantar

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan Tesis yang berjudul “**Pemodelan *Spatial Extreme Value* Menggunakan Pendekatan Student’s *t* Copula (Studi Kasus: Pemodelan Curah Hujan di Kabupaten Ngawi)**”. Penyusunan Tesis ini merupakan kewajiban akademis sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program Magister Statistika pada Program Pasca Sarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya. Pada penyusunan Tesis ini, penulis menyadari bahwa Tesis ini tidak akan terselesaikan tanpa bantuan dan arahan berbagai pihak. Penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih sebesar-besarnya kepada Ayah **Sunarto** dan Ibu **Musrifah** sebagai orang tua tercinta atas dorongan moral dan materil yang sangat berarti mulai awal perkuliahan hingga akhir penyusunan Tesis. Selanjutnya, pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa terima kasih juga kepada:

1. Bapak **Dr. Sutikno, M.Si** sebagai dosen pembimbing I atas kesabaran beliau, selalu meluangkan waktu, ide, nasihat yang membangun dan sangat positif, bimbingan, serta arahan yang diberikan di sela-sela waktu kesibukan beliau sebagai Wakil Dekan FSAD ITS.
2. Bapak **Jerry Dwi Trijoyo Purnomo, M.Si, Ph.D** sebagai dosen pembimbing II atas waktu, pikiran, motivasi, nasihat, dan arahan yang telah diberikan.
3. Bapak Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si dan Bapak Dr. Suhartono, M.Sc selaku penguji atas saran dan kritik yang telah diberikan.
4. Ibu Dr. Kartika Fithriasari, M.Si sebagai Ketua Departmen Statistika FSAD ITS sekaligus sebagai dosen wali yang memberikan masukan dan support selama awal perkuliahan hingga akhir perkuliahan.
5. Bapak Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si sebagai Ketua Program Studi Pascasarjana Departemen Statistika ITS beserta jajarannya atas kemudahan dan fasilitas yang diberikan selama studi.
6. Seluruh Bapak/Ibu Dosen pengajar, staf administrasi, dan staf perpustakaan Jurusan Statistika ITS yang berkenan memberikan waktu dan bantuan.

7. Kakakku tersayang Fitria Nurul Hidayah, M.Pd dan Kurniawan, M.Pd serta keponakanku Naisyaturrahmah Syakira Kurniawan yang selalu memberikan dukungan, doa, dan keharmonisan keluarga yang tercipta sehingga menjadi dukungan moral sepenuhnya bagi penulis.
8. Mba Ikha Rizky Ramadani, M.Si dan Mas Arief Rahman Hakim, M.Si atas bimbingan, arahan, masukkan serta berbagi ilmu terkait materi tesis yang disusun penulis.
9. Sepupu tersayang Abdul Gafar Karim, serta teman dekat penulis Nazmi Soraya, Anjar Wicitra Wening, dan Mohammad Akbar Agang yang selalu memberikan dukungan dan hiburan ketika penulis sedang *down* dalam penyusunan Tesis. Selamat melanjutkan perjuangan di tempat kalian tuju.
10. Teman-teman seperjuangan mahasiswa Magister Statistika ITS Angkatan 2017 Genap atas dukungan, motivasi, dan kebersamaan selama menempuh pendidikan bersama.
11. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan Tesis ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan pada Tesis ini. Oleh karena itu, saran dan kritik dari semua pihak yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan penulisan selanjutnya.

Surabaya, Januari 2020

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>ABSTRAK</b> .....	v
<b>ABSTRACT</b> .....	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	ix
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xi
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xv
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xvii
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xix
<b>BAB 1 PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah .....	5
<b>BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	7
2.1 Konsep Dasar <i>Extreme Value Theory</i> .....	7
2.2 Identifikasi Nilai Ekstrim dengan Pendekatan <i>Block Maxima</i> .....	8
2.2.1 Estimasi Parameter Distribusi GEV Univariat.....	11
2.2.2 Uji Anderson Darling.....	14
2.3 <i>Spatial Extreme Modelling</i> .....	15
2.4 Pendekatan <i>Max-Stable Process</i> .....	17
2.5 Pendekatan Copula .....	18
2.5.1 Copula Gauss.....	18
2.5.2 Copula <i>Student's t</i> .....	19
2.6 Pseudo Maximum Likelihood Estimation (PMLE) .....	20
2.7 Madogram.....	21
2.8 Koefisien Ekstremal .....	23
2.9 Pemilihan Model Terbaik .....	23

2.10 <i>Return Level</i> .....	24
2.11 <i>Root Mean Square Error (RMSE)</i> .....	25
2.12 Curah hujan dan Curah Hujan Ekstrem .....	26
<b>BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN</b> .....	29
3.1 Sumber Data.....	29
3.2 Variabel Penelitian .....	29
3.3 Tahapan Penelitian .....	32
<b>BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	37
4.1 Estimasi Parameter .....	37
4.1.1 Estimasi Parameter Distribusi GEV Univariat .....	37
4.1.2 Estimasi Parameter Model Student's t Copula Menggunakan Pseudo Maximum Likelihood Estimation .....	42
4.2 Aplikasi Model Student's t Copula untuk Data Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Ngawi .....	45
4.2.1 Pemilihan Pos Curah Hujan .....	45
4.2.2 Deskripsi Curah Hujan.....	46
4.2.3 Penentuan Nilai Sampel Ekstrem dengan <i>Block Maxima (BM)</i> .....	50
4.2.4 Identifikasi Distribusi GEV .....	51
4.2.5 Estimasi Parameter GEV secara Univariat .....	52
4.2.6 Pengukuran Dependensi Spasial dengan Koefisien Ekstremal .....	53
4.2.7 Penentuan Kombinasi Model <i>Trend Surface</i> Terbaik.....	54
4.2.8 <i>Return Level</i> .....	56
<b>BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	63
5.1 Kesimpulan .....	63
5.2 Saran .....	63
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	65
<b>LAMPIRAN</b> .....	69
<b>BIOGRAFI PENULIS</b> .....	113

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Koordinat 12 Pos Hujan Kabupaten Ngawi.....	30
Tabel 3.2 Struktur Data Penelitian.....	30
Tabel 4.1 Deskripsi Data Curah Hujan 12 Pos Hujan di Kabupaten Ngawi (mm/hari) .....	46
Tabel 4.2 Deskriptif Curah Hujan Ekstrem di 12 Pos Hujan (mm/hari) .....	51
Tabel 4.3 Nilai Uji Anderson Darling 12 Pos Hujan .....	52
Tabel 4.4 Estimasi Parameter $\hat{\mu}(s)$ , $\hat{\sigma}(s)$ , dan $\hat{\xi}(s)$ GEV Univariat .....	53
Tabel 4.5 Nilai AIC Menurut Kombinasi Model <i>Trend Surface</i> .....	55
Tabel 4.6 Nilai Estimasi Parameter Student <i>t</i> Copula menurut Model <i>Trend Surface</i> Terbaik .....	56
Tabel 4.7 Nilai <i>Return Level</i> Dua Belas Pos Hujan 2010-2015 Model Student's <i>t</i> Copula .....	57
Tabel 4.8 Nilai Aktual dan Nilai Prediksi Curah Hujan .....	58
Tabel 4.9 <i>Return Level</i> Periode 30 Tahun ke depan Dua Belas Pos Hujan .....	61

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Ilustrasi <i>Block Maxima</i> .....	8
Gambar 2.2 Fungsi Densitas Peluang Distribusi GEV .....	10
Gambar 2.3 Ilustrasi Pengamatan Spasial Tak Beraturan .....	15
Gambar 2.4 Ilustrasi Semivariogram .....	22
Gambar 2.5 Ilustrasi <i>Return Level</i> .....	25
Gambar 2.6 Peta Zona Musim Provinsi Jawa Timur .....	28
Gambar 2.7 Peta Prakiraan Curah Hujan Musim Hujan 2018/2019 .....	28
Gambar 3.1 Peta Pos Hujan Kabupaten Ngawi .....	29
Gambar 3.2 Tahapan Penelitian <i>Spatial Extreme Value</i> Pendekatan Student's t Copula .....	36
Gambar 4.1 Pola Curah Hujan Harian 12 Pos hujan .....	49
Gambar 4.2 Koefisien Ekstremal 12 Pos Hujan di Kabupaten Ngawi .....	54
Gambar 4.3 Perbandingan <i>Return Level</i> Nilai Prediksi dan Nilai Aktual tiap Pos Hujan .....	60
Gambar 4.4 Nilai <i>Return Level</i> Periode 30 tahun ke depan .....	61

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Curah Hujan Harian (mm/hari) pada Dua Belas Pos Hujan di Kabupaten Ngawi Tahun 1989 sampai dengan 2015 .....	69
Lampiran 2. Data <i>Training</i> .....	71
Lampiran 3. Data <i>Testing</i> .....	76
Lampiran 4. Turunan Pertama Fungsi <i>ln likelihood</i> Parameter GEV Univariat .....	78
Lampiran 5. Turunan Pertama Fungsi <i>Ln Pseudo Maximum Likelihood</i> terhadap Parameter $\hat{\mu}$ , $\hat{\sigma}$ , dan $\hat{\xi}$ .....	83
Lampiran 6. Tabel Anderson Darling $A_{tabel}^2$ .....	87
Lampiran 7. Transformasi ke unit student's t copula .....	88
Lampiran 8. Output Estimasi Parameter GEV Univariat .....	93
Lampiran 9. Syntax Program R “extRemes” dan “SpatialExtremes” .....	98
Lampiran 10. Jarak <i>Euclid</i> dan Nilai Koefisien Ekstremal .....	111
Lampiran 11. Peta pos hujan Kabupaten Ngawi .....	112

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR SIMBOL

$\alpha$	= taraf signifikansi
$\mu$	= parameter lokasi ( <i>location</i> )
$\sigma$	= parameter skala ( <i>scale</i> )
$\xi$	= parameter bentuk ( <i>shape</i> )
$x$	= variabel pengamatan atau observasi
$z$	= variabel hasil transformasi ke unit margin Frechet
$s$	= lokasi
$\varrho^{(0)}$	= nilai awal iterasi dengan metode BFGS Quasi Newton
$H(\varrho^{(k)})^{-1}$	= invers dari matriks Hessian
$g(\varrho^{(k)})$	= matriks turunan pertama dengan fungsi $\ln$ <i>likelihood</i> terhadap masing-masing parameternya
$F(x)$	= fungsi distribusi kumulatif dari variabel $X$
$F(z_i, z_j)$	= fungsi distribusi kumulatif bivariat dari variabel $Z$ lokasi ke- $i$ dan variabel $Z$ lokasi ke- $j$
$u_j$	= longitude dari lokasi ke- $j$
$v_j$	= latitude dari lokasi ke- $j$
$x_i(s)$	= nilai observasi ke- $i$ dari variabel $X$ pada lokasi $s$
$\ s_j, s_k\ $	= jarak antara lokasi $j$ dan lokasi $k$
$\beta$	= parameter model <i>trend surface</i>
$h$	= jarak euclid dari sepasang lokasi
$a(h)$	= jarak mahalanobis antara sepasang lokasi
$\gamma(h)$	= fungsi semivariogram
$\theta(h)$	= fungsi koefisien ekstremal
$z_p$	= nilai <i>return level</i>
$z_p(s)$	= nilai <i>return level</i> pada lokasi $s$
$m$	= jumlah lokasi
$n$	= jumlah pengamatan atau observasi
$\Lambda$	= statistik uji <i>Likelihood Ratio</i>
$D$	= deviasi maksimum uji <i>Kolmogorov-Smirnov</i>
$a_n, b_n$	= konstanta limit
$S(x)$	= probabilitas kumulatif pengamatan

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

# **BAB 1**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Fenomena cuaca ekstrem erat hubungannya dengan musim pancaroba yang biasa terjadi seperti curah hujan ekstrem, intensitas badai, serta suhu udara ekstrem. Cuaca ekstrem merupakan kejadian cuaca yang tidak normal, jarang terjadi, dan jarang dapat dihindari. Selain itu, dampak yang ditimbulkan akibat cuaca ekstrem cukup signifikan bagi lingkungan dan masyarakat yang terkena dampaknya (Woo dan Jones, 2002). Fenomena ini menimbulkan permasalahan terkait kondisi infrastruktur, kondisi tempat tinggal, kondisi pangan, serta tersedianya akses air bersih dimana segala permasalahan tersebut sangat bergantung pada kondisi cuaca dan iklim suatu daerah. Untuk kasus kondisi infrastruktur, jika terjadi curah hujan ekstrem di suatu wilayah akan mempengaruhi perencanaan pembuatan bendungan, waduk, jembatan, dan sistem drainase. Perencanaan tersebut memerlukan data curah hujan sebagai dasar perhitungan maupun perencanaan teknis untuk pembangunan bendungan agar dapat menampung air hujan akibat curah hujan ekstrem yang terjadi.

Provinsi Jawa Timur merupakan salah satu daerah yang cukup besar dalam memberikan kontribusi produksi padi nasional. Pada tahun 2018 sebesar 10,54 juta ton Gabah Kering Giling (GKG) dengan luas panen padi sebesar 1.828.700 ha berasal dari Jawa Timur. Salah satu Kabupaten di Jawa Timur yang termasuk penghasil padi terbesar yaitu Kabupaten Ngawi dengan produksi padi sebesar 753.20 ton dan luas panen 124,202 ha (BPS, 2018). Selain termasuk wilayah penghasil padi terbesar, Kabupaten Ngawi merupakan daerah yang curah hujannya cukup tinggi saat memasuki musim hujan. Sehingga jika terjadi curah hujan ekstrem yang berkesinambungan akan mempengaruhi hasil panen atau produktivitas padi. Selain itu Kabupaten Ngawi termasuk daerah rawan bencana banjir (Hasan dan Utomo, 2009).

Curah hujan ekstrem adalah keadaan cuaca terjadi dengan intensitas hujan terbesar dalam 1 jam selama periode 24 jam dan intensitas dalam 1 hari selama

periode bulan yang melebihi rata-ratanya yang tercatat di pos curah hujan. Kejadian curah hujan ekstrem terjadi dengan kecepatan angin lebih dari 45 km/jam dan suhu udara berada lebih dari 35°C atau kurang dari 15°C dan curah hujan lebih dari 100 mm/hari (BMKG, 2018). Studi mengenai prediksi curah hujan ekstrem yang akan terjadi di suatu wilayah diperlukan untuk meminimalkan dampak buruk akibat perubahan iklim global yang terjadi, sehingga *stakeholder* memiliki pengetahuan yang baik tentang curah hujan ekstrem untuk mengantisipasi dini yang dapat dilakukan, sehingga produksi padi dapat dimaksimalkan dan kerugian dapat diminimalkan.

Salah satu metode statistika yang dikembangkan untuk mengidentifikasi kejadian ekstrem yaitu *Extreme Value Theory* (EVT). Beberapa penelitian yang telah dikembangkan di Indonesia untuk mengidentifikasi kejadian ekstrem menggunakan *Block Maxima* dan *Peaks Over Threshold*, diantaranya Rinaldi (2016) mengidentifikasi nilai curah hujan ekstrem menggunakan dua pendekatan di atas untuk wilayah DKI Jakarta pada lima stasiun, hasil penelitian menunjukkan bahwa stasiun Tanjung Priok memiliki probabilitas terbesar untuk mengalami banjir pada saat curah hujan ekstrem. Wahyudi (2012) mengidentifikasi nilai curah hujan ekstrem menggunakan dua pendekatan di atas serta melakukan prediksi *return level* untuk satu tahun mendatang. Sedangkan di negara lain, penelitian oleh Li, Cai, dan Campbell (2005) mengidentifikasi nilai curah hujan ekstrem di Australia dengan menggunakan *Generalized Pareto Distribution*. Yoon, Kumphon, dan Park (2015) mengidentifikasi nilai curah hujan ekstrem menggunakan *Block Maxima* di Timur Laut Thailand, data yang digunakan adalah data harian yang diamati dari 25 pos hujan tahun 1983 dan 2013.

*Extreme value theory* dikembangkan dari kasus univariat dengan kejadian ekstrem pada satu variabel dan sering diaplikasikan pada data *finance* maupun saham. Untuk data curah hujan, suhu, salju merupakan data spasial yang diamati pada beberapa lokasi sehingga dikatakan data multivariat yang disebut sebagai pengembangan metode *spatial extreme value*. Untuk kasus data multivariat, terdapat pendekatan yang sering digunakan yaitu *Max-Stable Process* (MSP) dan Copula.

Terdapat beberapa metode dalam menganalisis data ekstrem dengan melibatkan unsur spasial menggunakan pendekatan MSP yang dilakukan oleh Tawn, dkk (2018) yang meneliti tentang gelombang laut di Laut Utara dan kejadian banjir di Inggris, yang menyimpulkan bahwa kejadian banjir lebih sering terjadi di Inggris. Kemudian Davison, Padoan, dan Ribatet (2012) yang meneliti tentang curah hujan di Swiss menggunakan pendekatan MSP dan copula. Pendekatan MSP berfungsi untuk memodelkan dependensi spasial dengan mentransformasi distribusi marjinal nilai ekstrem ke dalam distribusi frechet yang merupakan tipe distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV).

Copula merupakan metode statistika yang menggambarkan hubungan antar variabel yang tidak terlalu ketat terhadap asumsi, karena menurut Nelsen (2005) copula merupakan suatu fungsi dari dua hubungan distribusi yang masing-masing memiliki fungsi marjinal distribusi. Beberapa keluarga copula diantaranya copula archimedean, copula eliptik, copula *bivariate extreme value*, dan copula Marshall-Olkin. Namun dua keluarga yang cukup populer yaitu copula Eliptik (copula gauss dan student's t copula) serta keluarga archimedes (copula clayton, copula frank, dan copula gumbel). Untuk kasus *spatial extreme value* dalam pendekatan copula yang sering digunakan adalah copula eliptik.

Beberapa penelitian terkait pendekatan copula yang telah dilakukan, antara lain penelitian Reis, Lopes, dan Mendonca (2016) mengenai curah hujan di *Madeira Island* yang merupakan pulau vulkanik menyatakan bahwa efek topografi suatu wilayah mempengaruhi pola curah hujan, kemudian Gudendorf dan Segers (2010) mengenai *extreme value copula*, penelitiannya menunjukkan pendekatan copula lebih sesuai untuk mendeteksi adanya dependensi spasial yang diaplikasikan pada data curah hujan di Swiss. Nikoloulopoulos, Jo, dan Li (2008) membahas sifat dari t-copula dan batasan dari nilai ekstrem copula yang dapat didiferensiasikan secara eksplisit menggunakan fungsi *tail dependence*, dan hasilnya copula memiliki struktur ketergantungan dari distribusi normal dan *t multivariate*. Aas (2004) membahas sifat dan karakter copula eliptik dan copula archimedean. Selanjutnya penelitian oleh Cooley, Douglas, dan Philippe (2007) membahas curah hujan ekstrem secara spasial di Colorado dengan pendekatan *hierarchical bayesian*.

Estimasi parameter copula dapat dilakukan dengan berbagai metode, di antaranya *maximum pairwise likelihood estimation* (MPLE), *pseudo maximum likelihood estimation* (PMLE), pendekatan Rho Spearman, dan pendekatan Tau Kendall. Pada penelitian ini, estimasi parameter copula menggunakan PMLE karena pada penelitian ini terdapat nilai varians yang tidak konstan.

Berdasarkan uraian di atas, pada penelitian ini dilakukan kajian mengenai prosedur pemodelan *spatial extreme value* menggunakan pendekatan student's t copula dengan studi kasus curah hujan ekstrem di Kabupaten Ngawi. Untuk penelitian ini, curah hujan ekstrem dikaitkan dengan kondisi banjir di wilayah tersebut.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini merumuskan masalah bagaimana model curah hujan ekstrem di Kabupaten Ngawi berdasarkan pemodelan *spatial extreme value* dengan pendekatan student's t copula. Selain itu, mengetahui bagaimana *return level* dengan metode *spatial extreme value* pendekatan student's t copula.

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Mendapatkan model curah hujan ekstrem di Kabupaten Ngawi berdasarkan pemodelan *spatial extreme value* dengan pendekatan student's t copula.
2. Mendapatkan *return level* dengan metode *spatial extreme value* dengan pendekatan student's t copula.

## **1.4 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini adalah menerapkan pengembangan metode statistika pada bidang klimatologi untuk dapat dijadikan pengetahuan dalam identifikasi kejadian ekstrem suatu daerah. Selain itu, diharapkan hasil dari penelitian ini dapat dimanfaatkan oleh lembaga atau instansi pemerintahan seperti Badan Klimatologi dan Geofisika (BMKG) untuk pengembangan dan penerapan dalam memprediksi dan identifikasi curah hujan



ekstrem serta antisipasi dini terjadinya bencana alam yang diakibatkan curah hujan ekstrem.

### **1.5 Batasan Masalah**

Agar tidak terjadi penyimpangan pada tujuan penelitian, maka penulis memberi batasan masalah sebagai berikut:

1. Data yang digunakan yaitu data curah hujan harian Kabupaten Ngawi tahun 1989-2015.
2. Metode yang digunakan untuk mengidentifikasi nilai ekstrem adalah *block maxima*.
3. Penelitian ini menggunakan dua belas pos hujan di Kabupaten Ngawi.

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## BAB 2

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Konsep Dasar *Extreme Value Theory*

*Extreme Value Theory* (EVT) merupakan salah satu metode statistika dalam ilmu terapan yang banyak digunakan pada ilmu lainnya. Untuk mengaplikasikan EVT sudah dimulai dari 50 tahun yang lalu (Coles, 2001) dalam bidang hidrologi, klimatologi, dan teori reliabilitas. Metode ini biasanya digunakan untuk mempelajari perilaku ekor (*tail*) suatu distribusi untuk menentukan peluang nilai-nilai ekstremnya. Selain itu metode ini dapat digunakan untuk menganalisis suatu kejadian bersifat ekstrem yang menimbulkan dampak destruktif pada kehidupan manusia.

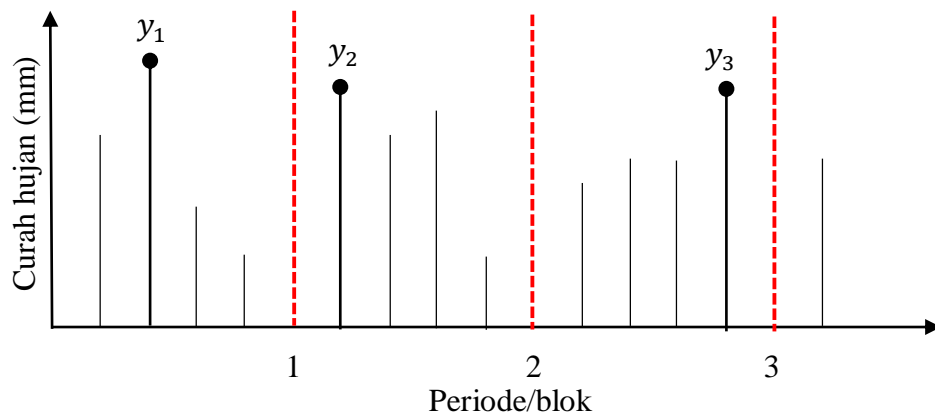
Konsep dasar dari EVT adalah mengkaji perilaku stokastik dari variabel random baik maksimum maupun minimum (Kotz dan Nadarajah, 2000). Adapun tujuan dari metode ini yaitu menentukan estimasi peluang kejadian ekstrem dengan memperhatikan ekor (*tail*) dari fungsi distribusi berdasarkan nilai-nilai ekstrem yang diperoleh, dimana nilai ekstrem berasal dari suatu peristiwa yang sangat jarang terjadi dan sering dinyatakan sebagai *outlier* dan diabaikan keberadaannya namun memiliki dampak yang sangat besar. Sebagian besar data yang digunakan pada metode ini seperti iklim memiliki ekor distribusi yang *heavy tail*, yaitu ekor distribusi turun secara lambat bila dibandingkan dengan distribusi normal. Maka dari itu dampaknya adalah peluang terjadinya nilai ekstrem akan lebih besar daripada distribusi normal. Metode EVT dapat meramalkan akan terjadinya kejadian ekstrem pada data *heavy tail* yang tidak dapat dilakukan dengan pendekatan tradisional lainnya. Langkah pertama dalam pemodelan EVT adalah menentukan nilai ekstrem.

McNeil (1999) serta Gilli dan Kellezi (2003) menyebutkan bahwa terdapat dua metode untuk mengidentifikasi nilai ekstrem terdapat dua pendekatan. Pendekatan pertama adalah metode *Block Maxima* (BM) yaitu mengambil nilai maksimum satu periode yang disebut blok. Pendekatan

kedua adalah *Peaks Over Threshold* (POT) yaitu mengambil nilai yang melewati suatu nilai *threshold*.

## 2.2 Identifikasi Nilai Ekstrem dengan Pendekatan *Block Maxima* (BM)

Mengidentifikasi nilai ekstrem dengan cara data pengamatan dibagi dalam blok-blok pada periode tertentu, misal bulanan, triwulan, semesteran, dan tahunan, kemudian setiap blok ditentukan nilai yang paling tinggi yang disebut nilai ekstrem pada setiap blok. Nilai inilah yang dimasukkan ke dalam sampel pada metode BM sebagai nilai ekstrem yang diperoleh pada periode tertentu. Pendekatan BM merupakan metode yang mengidentifikasi nilai ekstrem berdasarkan nilai tertinggi data observasi yang dikelompokkan berdasarkan periode tertentu yang diilustrasikan dalam Gambar berikut:



**Gambar 2.1** Ilustrasi *Block Maxima* (Gilli dan Kellezi, 2006)

Gambar 2.1 menunjukkan ilustrasi contoh data curah hujan dari bulan (periode) pertama hingga ketiga. Pada periode pertama, nilai maksimum yang akan digunakan sebagai sampel ekstrem yaitu  $y_1$ , nilai  $y_1$  dijadikan sampel ekstrem untuk blok pertama sebagai simbolnya yaitu  $x_1$  sehingga  $y_1 = x_1$ . Selanjutnya pada periode kedua, nilai maksimum yang akan digunakan sebagai sampel ekstrem yaitu  $y_2$ , nilai  $y_2$  dijadikan sampel ekstrem untuk blok kedua sebagai simbolnya yaitu  $x_{22}$  sehingga  $y_2 = x_2$ . Untuk periode

ketiga, nilai maksimum yang akan digunakan sebagai sampel ekstrem yaitu  $y_3$ , nilai  $y_3$  dijadikan sampel ekstrem untuk blok ketiga sebagai simbolnya yaitu  $x_3$  sehingga  $y_3 = x_3$  hingga bulan berikutnya langkah pengambilan sampel dilakukan dengan cara yang sama.

Menurut Prang (2006) menyatakan metode BM mengaplikasikan Teorema Fisher-Tippet Gnedenko (1928) bahwa data sampel nilai ekstrem yang diambil dari metode BM akan mengikuti distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) yang memiliki *cumulative distribution function* (cdf) sebagai berikut:

$$F(y; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, & -\infty < y < \infty, \quad \xi \neq 0, \quad 1 + \xi \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) > 0, \\ \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\}, & -\infty < y < \infty, \quad \xi = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan

$y$  = nilai ekstrem yang diperoleh dari metode BM

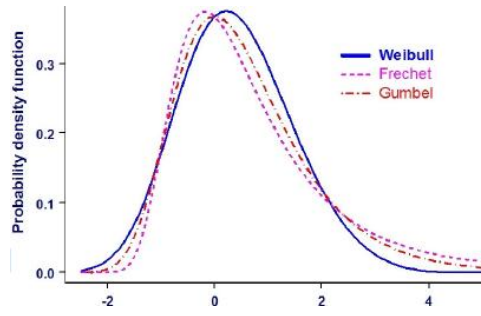
$\mu$  = parameter lokasi (*location*) dengan  $-\infty < y < \infty$

$\sigma$  = parameter skala (*scale*) dengan  $\sigma > 0$

$\xi$  = parameter bentuk (*shape*)

Sedangkan untuk *Probability Distribution Function* (PDF) untuk distribusi GEV sebagai pada persamaan (2.2):

$$f(y; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + \xi \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-\frac{1}{\xi} - 1} \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left( - \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$



**Gambar 2.2** Fungsi Densitas Peluang Distribusi GEV

(Sumber: Shukla, Trivedi, dan Kumar, 2010)

Gambar 2.2 menunjukkan bentuk fungsi densitas peluang distribusi Weibull pada  $\xi < 0$  yang ditunjukkan garis berwarna biru. Sementara bentuk fungsi densitas peluang distribusi Gumbel pada  $\xi = 0$  ditunjukkan garis berwarna merah dan bentuk fungsi densitas peluang distribusi Frechet pada  $\xi > 0$  ditunjukkan garis berwarna ungu. Bentuk CDF dari ke tiga distribusi tersebut disajikan pada persamaan (2.3), (2.4), dan (2.5):

- a. Distribusi Gumbel (distribusi *extreme value* tipe I) untuk  $\xi = 0$ .

$$F(y; \mu, \sigma, \xi) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right\}, -\infty < y < \infty \quad (2.3)$$

- b. Distribusi Frechet (distribusi *extreme value* tipe II) untuk  $\xi > 0$ .

$$F(y; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} 0, & y \leq \mu \\ \exp\left\{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, & y > \mu \end{cases} \quad (2.4)$$

- c. Distribusi Weibull (distribusi *extreme value* tipe III) untuk  $\xi < 0$ .

$$F(y; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, & y < \mu \\ 1, & y \geq \mu \end{cases} \quad (2.5)$$

Semakin besar nilai  $\xi$ , maka distribusinya memiliki ekor yang semakin berat (*heavy tail*) yang dapat menunjukkan besar peluang terjadinya nilai ekstrem yang semakin besar. Pada kasus dengan  $\xi = 0$  dikatakan kasus tersebut memiliki *medium tailed*, kemudian jika  $\xi < 0$  dikatakan bahwa kasus memiliki *short tailed*, dan jika  $\xi > 0$  dikatakan bahwa kasus memiliki *long tailed*. Berdasarkan uraian tersebut, di antara distribusi Gumbel, Frechet, dan Weibull yang memiliki bentuk *heavy tail* adalah distribusi Frechet (Finkenstadt dan Rootzen, 2004).

### 2.2.1 Estimasi Parameter Distribusi GEV Univariat

Hal utama dalam mengestimasi parameter dengan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yaitu memaksimumkan fungsi likelihood PDF suatu distribusi. Estimasi parameter  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$ , dan  $\hat{\xi}$  dari distribusi GEV menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dimana fungsi *likelihood* merupakan fungsi peluang bersama  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Distribusi GEV memiliki PDF seperti pada persamaan (2.2), berdasarkan metode MLE, maka fungsi *likelihood* GEV untuk  $\xi \neq 0$  adalah:

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma, \xi) &= \prod_{i=1}^n f(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right]^{\frac{1}{\xi} - 1} \exp \left( - \left[ 1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right]^{\frac{1}{\xi}} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\sigma} \right)^n \prod_{i=1}^n \left\{ \left[ 1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right]^{\frac{1}{\xi} - 1} \right\} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right]^{\frac{1}{\xi}} \right) \end{aligned}$$

Kemudian memaksimumkan fungsi *likelihood* tersebut ke fungsi *ln likelihood* seperti pada persamaan (2.6):

$$\begin{aligned} \ell(\mu, \sigma, \xi) &= \ln L(\mu, \sigma, \xi) \\ \ell(\mu, \sigma, \xi) &= -n \ln \sigma - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) \sum_{i=1}^n \ln \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \ln \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Selanjutnya fungsi *ln likelihood* diturunkan terhadap parameter  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$ , dan  $\hat{\xi}$  sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} = \left( \frac{1+\xi}{\sigma} \right) \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \ln \left[ 1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right]^{\frac{1}{\xi}-1} = 0 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + (1+\xi) \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right) \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right) \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} &= \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1} \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \left[ \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \frac{\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.7), (2.8), dan (2.9) diketahui bahwa hasil turunan pertama fungsi *ln likelihood* terhadap masing-masing parameter yaitu berbentuk tidak *close form*, sehingga harus diselesaikan menggunakan pendekatan numerik. Penelitian ini menggunakan analisis numerik untuk menyelesaikan pendekatan tersebut dengan metode Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Quasi Newton dengan pertimbangan iterasi pada metode ini lebih cepat mencapai konvergensi dibandingkan metode iterasi lain. Rumus umum dari metode Newton adalah

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - H(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \quad (2.10)$$

di mana:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^{(k)} &= \text{Nilai awal} \\ -H(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^{-1} &= \text{Invers matriks Hessian} \end{aligned}$$



$g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$  = Vektor yang elemen-elemennya berisi turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap masing-masing parameter

Selanjutnya berdasarkan persamaan (2.10) dapat dibentuk modifikasi metode Newton pada persamaan (2.11):

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \alpha^{(k)} H(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \quad (2.11)$$

Untuk metode BFGS Quasi Newton, Matriks Hessian  $H(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$  diganti dengan aproksimasi yang merupakan definit positif dan memiliki sifat seperti matriks Hessian  $H(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ . Adapun rumus iterasi metode BFGS pada persamaan (2.12) :

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)} \quad (2.12)$$

dengan  $\alpha^{(k)}$  adalah fungsi untuk meminimumkan *error* yang akan terjadi dimana  $\alpha^{(k)} = \arg \min \left[ f(\boldsymbol{\theta}^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)}) \right]$  dan  $S^{(k)} = -\left( H(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \right)^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ .

Setelah itu hitung perubahan  $\Delta(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \alpha^{(k)} S^{(k)}$  dan

$\Delta g(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = g(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}) - g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$  sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$H(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}) = H(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) + \left( 1 + \frac{\Delta g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^t H(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \Delta g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})}{\Delta g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^t \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)}} \right) \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)t}}{\Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)t} \Delta g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})} - \frac{H(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \Delta g(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)t} + \left( H(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \Delta g(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)t} \right)^t}{\Delta g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^t \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)}} \quad (2.13)$$

$H(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$  merupakan matriks simetris nonsingular. Awal matriks  $H(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$  yaitu  $H(\boldsymbol{\theta}^{(0)})$  dipilih matriks identitas yang diperbarui dengan persamaan (2.13) pada iterasi berikutnya. Iterasi dilakukan hingga memenuhi kondisi  $\|\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}\| \leq e$ , dimana  $e$  merupakan nilai yang sangat kecil yang diperoleh dari proses iterasi. Berikut adalah langkah-langkah pengerjaan menggunakan metode BFGS:

- a. Membuat turunan kedua fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap masing-masing parameter.
- b. Menurunkan fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap kombinasi masing-masing parameter.
- c. Membuat matriks Hessian  $g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$  yang berisi turunan pertama fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap masing-masing parameter, serta matriks Hessian  $H(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$  yang berisi turunan kedua fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap masing-masing parameter sebagai diagonal utamanya.
- d. Melakukan iterasi dengan persamaan (2.12) hingga diperoleh nilai estimasi untuk masing-masing parameter distribusi GEV  $(\mu, \sigma, \xi)$ .

### 2.2.2 Uji Anderson Darling

Uji Anderson Darling merupakan suatu uji yang digunakan untuk mengetahui suatu data mengikuti distribusi tertentu (yang dihipotesiskan) atau tidak. Pengujian ini dilakukan untuk dapat melihat kecocokan distribusi GEV terhadap data ekstrem, dengan prosedur sebagai berikut:

#### 1. Uji hipotesis

$H_0 : F(x) = F^*(x)$  (Data mengikuti distribusi teoritik  $F^*(x)$ )

$H_1 : F(x) \neq F^*(x)$  (Data tidak mengikuti distribusi teoritik  $F^*(x)$ )

## 2. Statistik uji

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \left( \ln(F^*(x_i)) \right) + \ln \left( 1 - (F^*(x_{n+1-i})) \right) \quad (2.14)$$

dimana,

$F(x)$  : fungsi distribusi kumulatif dari data sampel

$F^*(x)$  : fungsi distribusi kumulatif teoritis

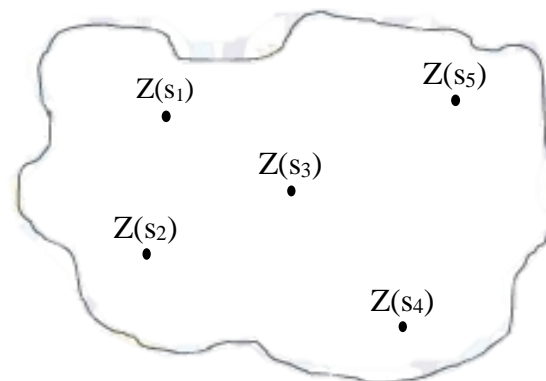
$n$  : ukuran sampel

## 3. Kriteria uji

Menolak  $H_0$  jika nilai  $AD >$  nilai kritis yang ditentukan (berdasarkan tabel Anderson Darling) atau  $p\text{-value} < \alpha$  (taraf signifikansi yang ditentukan).

### 2.3 *Spatial Extreme Modelling*

Pada pembahasan EVT univariat atau pemodelan pada satu lokasi saja tidaklah cukup. Khususnya pada data *environment*, dimana kejadian alam seperti suhu, kecepatan angin, dan curah hujan dapat terjadi di lokasi berbeda yang berdekatan karena proses alamiah serta dipengaruhi oleh kondisi suatu tempat (spasial). Oleh karena itu, EVT dikembangkan dengan memasukkan unsur lokasi yang dinamakan *Spatial Extreme Value*. Hal utama yang diperhatikan pada data spasial adalah terdapat dependensi antar lokasi, dimana jika terjadi suatu kejadian pada suatu lokasi yang berdekatan/bertetangga maka cenderung memiliki kejadian yang mirip, daripada kejadian yang lokasinya lebih jauh. Ilustrasi sebagai berikut:



**Gambar 2.3** Ilustrasi Pengamatan Spasial Tak Beraturan

Gambar 2.3 menjelaskan ilustrasi data spasial pada suatu lokasi  $Z(s_i)$  misalkan terdapat satu karakteristik atau variabel yang diukur pada titik yang berbeda dalam suatu lokasi, maka waktu pengamatan diabaikan. Sebanyak  $n$  observasi disimbolkan sebagai berikut :

$$Z(s_i) \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, n \text{ dengan } s \in D$$

Pengukuran obyek pada region  $D$  merupakan bagian dari kumpulan obyek yang lebih besar. Apabila obyek yang diamati berupa sebuah titik, maka observasi dalam suatu wilayah tersebut sangat banyak. Pada gambar tersebut ilustrasi data spasial yang diamati terdapat 5 titik lokasi. Terlihat bahwa titik yang berdekatan misalnya  $Z(s_1)$  dan  $Z(s_3)$  atau  $Z(s_2)$  dan  $Z(s_3)$  sehingga dapat diduga memiliki dependensi yang lebih besar dibandingkan pengamatan pada titik yang berjauhan.

*Spatial extremes modelling* berawal dari pemodelan nilai ekstrem dengan distribusi *multivariate extreme value*. Umumnya data ekstrem pada beberapa titik lokasi pengamatan dipandang sebagai variabel multivariat. Analisis menjadi sulit dilakukan ketika jumlah lokasi yang diteliti berjumlah banyak karena *multivariate extreme value* berbasis distribusi dengan dimensi rendah atau terbatas (*finite dimensional*). Oleh karena itu diperlukan suatu pendekatan untuk data multivariat yaitu pendekatan *max-stable process* dan pendekatan copula.

Perbedaan dari kedua metode pendekatan ini yaitu saat memodelkan dan proses transformasinya. Pada saat proses transformasi, kedua pendekatan ini menggunakan proses yang sama yaitu *max-stable* karena pada proses ini membawa data ke distribusi frechet, namun pada proses transformasi copula menggunakan transformasi sifat ke 1, sedangkan proses *max-stable* menggunakan transformasi sifat ke 2. Adapun sifat transformasi sebagai berikut:

1. Distribusi marginal satu dimensionalnya mengikuti distribusi GEV

$X \sim GEV(\mu, \sigma, \xi)$  menggunakan fungsi distribusi sebagai berikut:

$$F(\mu, \sigma, \xi) = \exp \left[ - \left\{ 1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma} \right\}^{\frac{1}{\xi}} \right], \quad -\infty < \mu, \quad \xi < \infty, \quad \sigma > 0$$

dimana,  $\mu$  = parameter lokasi,  $\sigma$  = parameter skala (*scale*),  $\xi$  = parameter bentuk (*shape*).

2. Distribusi marginal k-dimensional mengikuti distribusi *multivariate extreme value*.

$\{Z(j)\}$  adalah proses max-stable yang memiliki margin frechet unit dengan fungsi distribusi  $F(z) = \exp(-1/z), z > 0$  sehingga proses ini dapat diperoleh dengan mentransformasi seperti persamaan berikut:

$$\{Z(j)\} = \left[ \left\{ 1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma} \right\}^{\frac{1}{\xi}} \right]$$

Menurut Padoan, Ribatet, dan Sisson (2010),  $\mu(x), \sigma(x), \xi(x)$  merupakan suatu fungsi yang kontinyu, sehingga proses ini disebut *max-stable process*.

#### 2.4 Pendekatan *Max-stable Process* (MSP)

Perluasan dari distribusi *multivariate extreme value* ke dimensi tak hingga (*infinite dimension*) disebut MSP. Dikatakan *max-stable* jika dan hanya jika suatu fungsi distribusi G berdistribusi GEV. Diketahui X suatu himpunan indeks dan  $\{X_i(s), s \in S\} i = 1, 2, \dots, n$  dimana n merupakan replikasi independen suatu proses stokastik kontinu. Jika terdapat suatu rangkaian fungsi kontinu dimana  $a_n(s) > 0$  dan  $b_n(s) \in R$  seperti persamaan:

$$Z(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i=1}^n X_i(s) - b_n(s)}{a_n(s)}, n \rightarrow \infty, s \in S \quad (2.15)$$

Jika nilai limit ada (*exist*), maka proses limit  $Z(s)$  merupakan *Max-stable Process*. Pada persamaan (2.15) jika  $a_n(s) = 0$  dan  $b_n(s) = 0$ , maka  $Z(s)$  adalah *simple max-stable process* yang memiliki margin Frechet unit dengan

fungsi distribusi  $F(z) = \exp\left(-\frac{1}{z}\right)$ ,  $z > 0$ . Proses ini dapat dijelaskan melalui persamaan (2.16) :

$$Z(s) = \max_{i=1}^{\infty} \zeta_i W_i(s) \quad (2.16)$$

dimana  $\zeta_i$  dan  $W_i$  adalah proses Poisson  $[0, \infty)$  dengan intensitas pengukuran  $\zeta^{-2} d\zeta \times \nu(dw)$ . Terdapat beberapa model yang terbentuk dalam MSP yaitu model *Smith*, *Extremal Gauss (Schalter)*, *Brown-Resnick*, *Gaussian Geometric*, dan *Extremal t* (Hatanti, 2016).

Perubahan yang terjadi pada masing-masing parameter  $\mu, \sigma, \xi$  menjadi  $\mu(s), \sigma(s), \xi(s)$  untuk setiap  $s \in S$  dengan menambahkan aspek *spatial varying surfaces*. Model *surfaces* yang terbentuk bergantung pada variabel independen seperti ketinggian atau jarak, cuaca/iklim, serta lokasi (lintang dan bujur).

## 2.5 Pendekatan Copula

Pada tahun 1959, pendekatan copula pertama kali diperkenalkan oleh Abe Sklar melalui teorema Sklar. Menurut Genest dan Segers (2010) copula merupakan suatu metode yang dapat mengeksplorasi dan mengkarakterisasi struktur dependensi atau ketergantungan antar variabel acak melalui fungsi distribusi marginal. Teorema Sklar adalah fungsi yang menghubungkan fungsi distribusi multivariat dengan distribusi marginalnya. Copula memiliki peranan yang penting yaitu ketika satu atau kedua variabel mempunyai distribusi marginal yang tidak normal atau mempunyai *tail dependence*.

Beberapa keluarga copula diantaranya copula Archimedes, copula Eliptik, copula *Bivariate Extreme Value*, dan copula Marshal-Olkin. Namun dua keluarga yang cukup populer yaitu copula Eliptik (copula Gauss dan copula *Student-t*) serta keluarga archimedes (copula Clayton, copula Frank, dan copula Gumbel) (Davison, Padoan, dan Ribatet, 2012). Untuk kasus *Spatial Extreme Value* copula yang sering digunakan adalah copula eliptik.

### 2.5.1 Copula Gaussian

Copula gaussian merupakan jenis copula yang sederhana dan sesuai untuk digunakan pada kasus spasial ekstrem. Copula gauss dalam kasus *spatial extreme* metransformasi data variabel acak menggunakan distribusi marginal GEV melalui persamaan transformasi yang dinyatakan sebagai berikut:

$$U_{ij} = F_j(X_{ij}) \quad (2.17)$$

dimana,

$F_j$  = CDF distribusi GEV

$X_{ij}$  = data observasi ke-i stasiun ke-j

$u_j$  dapat dikatakan copula unik, jika fungsi distribusi marginal dari  $u_j$  kontinu (Davison, Padoan, dan Ribatet, 2012).

### 2.5.2 Student's t-copula

*Student's t-copula* merupakan salah satu copula yang sesuai dalam pemodelan *spatial extreme*. Metode ini didefinisikan seperti Gaussian copula namun dengan menggunakan ekstensi multivariat distribusi-t. Menurut Schölzel dan Friederichs (2008) t-copula menunjukkan fleksibilitas dalam struktur kovarian dan *tail* dependensi. *Tail* dependensi dapat dianggap sebagai peluang kondisional pada pengamatan ekstrem dalam satu komponen pada keadaan ekstrem. T-copula mempunyai potensi untuk membangkitkan nilai ekstrem karena t adalah distribusi yang skew. Bentuk cdf *student's t* copula dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$C(u_1, \dots, u_m) = F_{t(v, \Sigma)}(F_{t(v)}^{-1}(u_1), \dots, F_{t(v)}^{-1}(u_m)) \quad (2.18)$$

dimana,  $F_t$  mendefinisikan cdf dari distribusi multivariat t, kemudian  $F_{t(v)}^{-1}$  merupakan invers cdf distribusi multivariat t dengan derajat bebas  $v$ . Untuk memperoleh bentuk pdf student's t copula, maka dilakukan turunan fungsi cdf student's t copula berdasarkan persamaan (2.18), sehingga bentuk pdf sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
c(u_1, \dots, u_m) &= \frac{\partial}{u_1}, \dots, \frac{\partial}{u_m} \cdot C(u_1, \dots, u_m) \\
&= \frac{\partial}{u_1}, \dots, \frac{\partial}{u_m} \cdot F_{t(v, \Sigma)}(F_{t(v)}^{-1}(u_1), \dots, F_{t(v)}^{-1}(u_m))
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Menurut Carreau dan Bouvier (2016), bentuk fungsi distribusi student's t copula sebagai berikut:

$$c(\mathbf{u}) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) |\rho(h)|^{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{u}^T P^{-1} \mathbf{u}}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}} \tag{2.20}$$

dengan  $P$  merupakan fungsi korelasi  $\rho$  sehingga ditulis menjadi  $\rho(h)$ ,  $h$  merupakan jarak antar lokasi pos,  $\mathbf{u}$  merupakan transformasi copula. Berdasarkan persamaan (2.19), diperoleh pdf student's t copula pada persamaan (2.21) sebagai berikut:

$$c(u_1, \dots, u_m) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{V}^T \rho(h)^{-1} \mathbf{V}}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}} \cdot |\rho(h)|^{-\frac{1}{2}} \tag{2.21}$$

dimana  $\mathbf{V} = (F_{t(v)}^{-1}(u_1), \dots, F_{t(v)}^{-1}(u_m))$ . Menurut teorema Sklar, setiap peluang bersama copula dapat dituliskan dengan perkalian antara pdf distribusi marginal dengan fungsi cdf copula, sehingga dapat dituliskan:

$$f(x_1, \dots, x_m) = f_{x_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_m) \cdot c(u_1, \dots, u_m) \tag{2.22}$$

(Schölzel dan Friederichs, 2008).

## 2.6 Pseudo Maximum Likelihood Estimation (PMLE)

Menurut Carreau dan Bouvier (2016), estimasi parameter *student's t*-copula pada spasial ekstrem menggunakan *pseudo maximum likelihood estimation* (PMLE) atau Quasi-Maximum Likelihood. PMLE adalah metode estimasi parameter yang dapat digunakan apabila nilai variansnya tidak konstan dan karena dalam penelitian ini menggunakan student's t copula



dimana fungsi marginalnya berdistribusi multivariat  $t$ . Distribusi multivariat  $t$  berasal dari distribusi normal standar, dimana distribusi normal merupakan salah satu anggota keluarga eksponensial (McCullagh, 1983). Sama seperti MLE, estimasi ini menggunakan metode ini dilakukan dengan menurunkan satu kali fungsi  $\ln$  likelihood terhadap parameternya masing-masing, kemudian menyamadengkan nol. Fungsi metode PMLE didefinisikan pada persamaan (2.23) sebagai berikut:

$$\ell(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \ln(f(u_{ji}; \hat{\boldsymbol{\beta}})) \quad (2.23)$$

dengan  $f(u_{ji}; \hat{\boldsymbol{\beta}})$  adalah distribusi empiris marjinal berdasarkan banyaknya tingkat pengamatan dalam parameter  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ .

## 2.7 Madogram

Semivariogram dapat digunakan untuk mengukur dependensi spasial. Ukuran dependensi spasial antar titik contoh ditunjukkan dengan besarnya semivarians yang besarnya bergantung pada jarak antar titik. Jarak titik contoh yang kecil, akan menghasilkan semivarians yang kecil. Sedangkan jika semakin besar jarak antar titik contoh akan menghasilkan semivarians yang semakin besar. Konsep jarak yang digunakan yaitu konsep jarak *euclid*. Metode ini berfungsi untuk mendeskripsikan keragaman antar lokasi pada data spasial. Semivariogram dapat didefinisikan pada persamaan berikut:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[Z(s+h) - Z(s)]^2 = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^n [Z(s_i+h) - Z(s_i)]^2 \quad (2.24)$$

dengan,

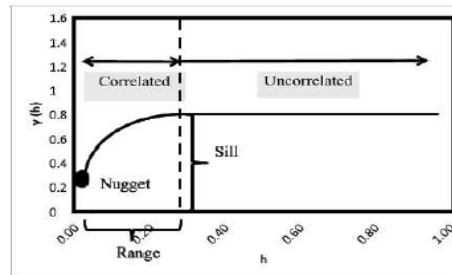
$\gamma(h)$  = nilai semivariogram dengan jarak  $h$

$Z(s_i)$  = nilai pengamatan di titik  $s_i$

$Z(s_i+h)$  = nilai pengamatan di titik  $(s_i+h)$

$N(h)$  = banyaknya pasangan titik yang berjarak  $h$

Untuk menentukan model semivariogram perlu dilakukan pendugaan parameter. Plot semivariogram ditunjukkan pada Gambar 2.4 parameter yang diperlukan untuk mendeksripsikan plot semivariogram:



**Gambar 2.4** Ilustrasi semovariogram

1. *Nugget Effect* ( $C_0$ )

*Nugget Effect* merupakan pendekatan nilai semivariogram pada jarak di sekitar nol.

2. *Range* ( $a$ )

*Range* adalah jarak maksimal yang masih memiliki korelasi antar data.

3. *Sill* ( $C$ )

*Sill* merupakan nilai maksimum semivariogram yang diperoleh setelah mencapai *range*. Nilai sill umumnya mendekati keragaman data dan tidak berubah untuk  $h$  yang tidak terbatas.

Semivariogram hanya dapat digunakan untuk pola distribusi data yang memiliki ekor pendek (*light tail*) sehingga tidak bisa digunakan untuk data ekstrem. Menurut Cooley, Douglas, dan Philippe (2007), untuk mengatasi hal tersebut maka menggunakan semivariogram orde pertama yang disebut madogram. Madogram ini yang dapat digunakan untuk data ekstrem. Madogram didefinisikan sebagai berikut:

$$v(h) = \frac{1}{2} E[Z(s+h) - Z(s)] \quad (2.25)$$

Madogram mengharuskan momen pertama terhingga yang tidak selalu terjadi pada kasus ekstrem. Oleh karena itu, Cooley, Douglas, dan Philippe (2007) memperkenalkan F-Madogram yang mentransformasi variabel

random dengan menggunakan distribusi GEV, sehingga F-madogramnya sebagai berikut:

$$v(h) = \frac{1}{2} E \left[ F(Z(s+h)) - F(Z(s)) \right] \quad (2.26)$$

Untuk mengatasi kesulitan dalam melihat polanya, maka hal tersebut dapat diatasi dengan mengelompokkan madogram berdasarkan kesamaan jarak, sehingga perhitungan F-madogram dapat dituliskan seperti persamaan berikut:

$$\hat{v}_F(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{i=1}^n \left[ F(Z(s_i+h)) - F(Z(s_i)) \right] \quad (2.27)$$

dengan  $\hat{v}_F(h)$  merupakan F-madogram pada lag  $h$ ,  $s_i$  adalah lokasi titik pengamatan,  $Z(s_i)$  merupakan nilai pengamatan pada lokasi ke  $s_i$ ,  $h$  merupakan jarak antara dua lokasi,  $(s_i, s_i + h)$  merupakan pasangan data yang berjarak  $h$ , serta  $N(h)$  merupakan banyaknya pasangan lokasi yang berjarak  $h$ . Hubungan yang sangat kuat antara F-madogram dan koefisien ekstremal ( $\theta$ ) yang merupakan ukuran dependensi ekstrem dapat dituliskan pada persamaan berikut:

$$\theta(h) = \frac{1 + 2v_F(h)}{1 - 2v_F(h)} \quad (2.28)$$

## 2.8 Koefisien Ekstremal

Mengukur dependensi antar data secara spasial merupakan hal utama dalam pemodelan spasial. Salah satunya menggunakan koefisien ekstremal. Koefisien ekstremal dapat mengukur tingkat dependensi data antara wilayah satu dengan wilayah yang lainnya.

Dependensi ekstremal merepresentasikan keterkaitan antar nilai ekstrem setiap lokasi. Fungsi koefisien ekstremal pada persamaan (2.29) :

$$\begin{aligned} \theta(s_1 - s_2) &= -z \log P\{Z(s_1) \leq z, Z(s_2) \leq z\} \\ &= E[\max\{W(s_1), W(s_2)\}] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pada koefisien ekstremal memiliki nilai yang berkisar  $1 \leq \theta(h) \leq 2$ . Ketika sebuah nilainya mendekati 1 maka dikatakan *complete dependence*, *independence* ketika mendekati 2, dimana  $h$  merupakan jarak Euclid antara dua lokasi.

## 2.9 Pemilihan Model Terbaik

Kriteria pemilihan model memiliki peran penting dalam menentukan model yang terbaik. *Akaike Information Criteriation* (AIC) digunakan untuk memilih model *trend surface* terbaik, dengan contoh model yang disajikan pada persamaan (2.30):

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(s) &= \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1} \text{longitude}(s) + \hat{\beta}_{\mu,2} \text{latitude}(s) \\ \hat{\sigma}(s) &= \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1} \text{longitude}(s) + \hat{\beta}_{\sigma,2} \text{latitude}(s) \\ \hat{\xi}(s) &= \hat{\beta}_{\xi,0}\end{aligned}\tag{2.30}$$

Model *trend surface* merupakan model linier yang mengkombinasikan variabel koordinat suatu lokasi berupa variabel *longitude* dan *latitude*, dengan parameter  $\beta$ . Kombinasi model *trend surface* terbaik dari sembilan kombinasi model digunakan untuk mengestimasi nilai ekstrem pada periode yang akan datang atau yang disebut *return level*. Beberapa konteks tertentu, memilih model yang sederhana lebih baik daripada model yang kompleks. Kompleksitas model tidak menjamin model tersebut baik. Kombinasi model dengan nilai AIC terkecil dipilih sebagai kombinasi model *trend surface* terbaik. Rumus AIC disajikan pada persamaan (2.31):

$$AIC = -2\ell_p(\hat{\beta}) + 2q\tag{2.31}$$

dimana,  $\ell_p(\hat{\beta})$  merupakan fungsi *ln pseudo likelihood* yang didefinisikan pada persamaan (2.32):

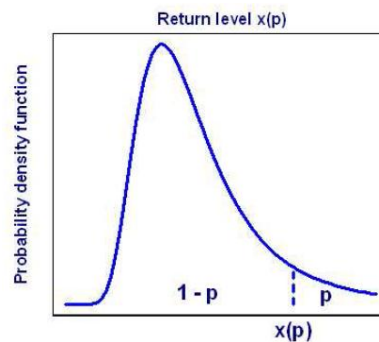
$$\ell_p(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \ln(f(u_{ji}, u_{ki}; \hat{\beta}))\tag{2.32}$$

dimana,  $i=1,2,\dots,n$  ,  $j=1,2,\dots,m-1$  ,  $k=2,3,\dots,m$  dan  $q$  yaitu banyaknya parameter yang ditaksir.

### 2.10 Return Level

Menurut Gilli dan Kellezi (2003), *return level* adalah suatu ambang batas maksimum yang dicapai dalam periode mendatang atau periode ulang ( $T$ ) tertentu. Terdapat dua interpretasi umum mengenai *return level* dengan periode ulang  $T$  tahun, yaitu:

- $T$  tahun merupakan rata-rata waktu tunggu sampai terjadinya kejadian berikutnya (waktu tunggu).
- Untuk rata-rata jumlah peristiwa yang terjadi dalam jangka waktu  $T$ -tahun adalah satu (jumlah peristiwa).



**Gambar 2.5** Ilustrasi *Return Level*  
(Sumber: Mallor, Nualart dan Omey, 2009)

Gambar 2.5 menunjukkan ilustrasi *return level* pada titik  $x(p)$ . *Return level* periode ulang  $T=1/p$  tahun merupakan ambang batas tinggi  $x(p)$  dengan peluang terlampaui yaitu  $p$ . Dua interpretasi umum untuk *return level* dengan periode ulang  $T$  tahun adalah:

- Waktu tunggu, rata-rata waktu tunggu sampai terjadinya kejadian berikutnya adalah  $T$  tahun.
- Jumlah peristiwa, rata-rata jumlah peristiwa yang terjadi dalam jangka panjang waktu  $T$ -tahun adalah satu.

*Return level* dapat diestimasi melalui persamaan (2.33) :

$$z_p(s) = \hat{\mu}(s) - \frac{\hat{\sigma}(s)}{\hat{\xi}(s)} \left( 1 - \left[ -\ln \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\hat{\xi}(s)} \right) \quad (2.33)$$

### 2.11 Root Mean Square Error (RMSE)

Pada tahap ini nilai RMSE yang diperoleh digunakan untuk mengukur kinerja dari model yang telah dimodelkan serta untuk memvalidasi model. Rumus RMSE seperti pada persamaan (2.34) :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{S} \sum_{i=1}^S (z_i - \hat{z}_i)^2} \quad (2.34)$$

dimana,

$S$  = banyaknya lokasi

$z_i$  = nilai pengamatan/observasi aktual dari data testing

$\hat{z}_i$  = nilai prediksi pada periode ulang ( $T$ )

### 2.12 Curah hujan dan Curah Hujan Ekstrem

Curah hujan merupakan ketinggian air hujan yang terkumpul dalam tempat datar, tidak menguap, tidak meresap, dan tidak mengalir. Ketika curah hujan satu milimeter artinya dalam luasan satu meter persegi pada tempat yang datar tertampung air setinggi satu milimeter atau tertampung air sebanyak satu liter. Sifat hujan dibagi menjadi tiga kategori yaitu:

1. Atas Normal (AN) terjadi jika nilai curah hujan lebih dari 115% terhadap rata-ratanya
2. Normal (N) terjadi jika nilai curah hujan antara 85% sampai 115% terhadap rata-ratanya.
3. Bawah normal (BN) jika curah hujan kurang dari 85%.

Jika ditinjau dari besar intensitasnya, curah hujan dibedakan menjadi tiga jenis yang meliputi:

1. Curah hujan rendah (150-200 mm/bulan)
2. Curah hujan sedang (200-250 mm/bulan)
3. Curah hujan tinggi (250-300 mm/bulan)

Menurut BMKG dalam Kadarsah (2007), berdasarkan distribusi data rata-rata curah hujan bulanan, curah hujan di Indonesia dibedakan menjadi 3 tipe, yaitu:

1. Tipe Ekuatorial

Pola ini dicirikan oleh tipe curah hujan dengan bentuk bimodal (dua puncak hujan) yang biasanya terjadi sekitar bulan Maret dan Oktober atau pada saat terjadi ekuinoks, yaitu waktu atau peristiwa matahari berada dalam bidang khatulistiwa bumi. Peristiwa ini terjadi dua kali dalam setahun di sebagian besar wilayah Sumatera dan Kalimantan yang sering terjadi curah hujan yang mengikuti pola ini.

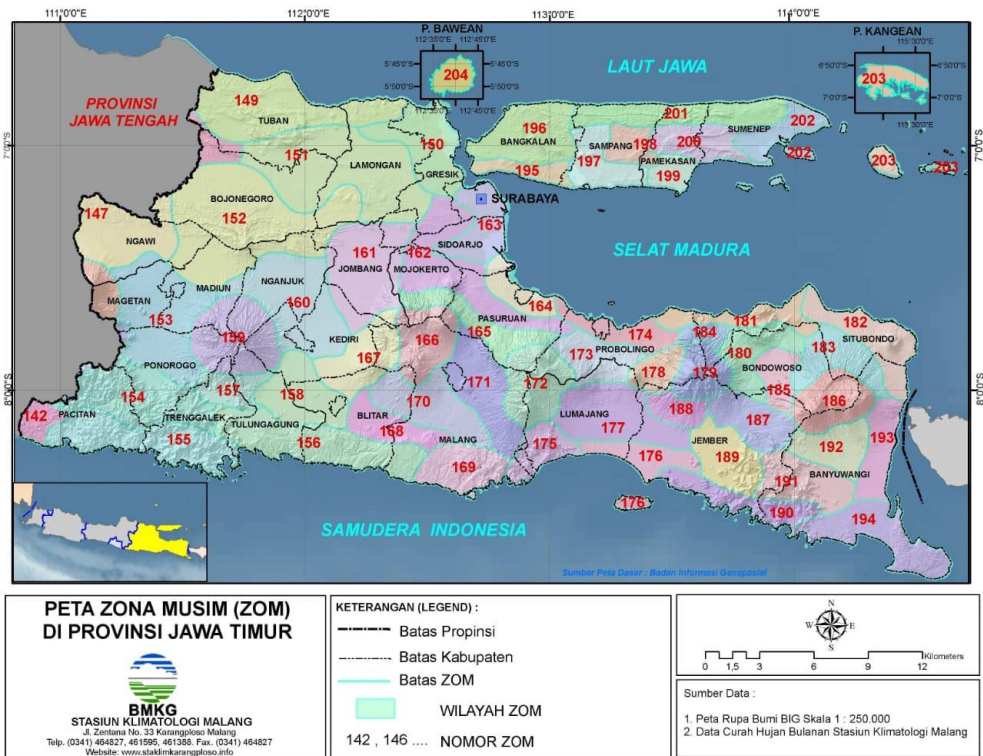
2. Tipe Monsoon

Tipe ini dipengaruhi oleh tiupan angin monsoon dan bersifat unimodal (satu puncak musim hujan, DJF (Desember-Januari-Februari) musim hujan, JJA (Juni-Juli-Agustus) musim kemarau yang biasanya terjadi di wilayah Indonesia bagian selatan, seperti di ujung Pulau Sumatera bagian selatan, Jawa, Bali, Nusa Tenggara, dan Maluku Selatan.

3. Tipe Lokal

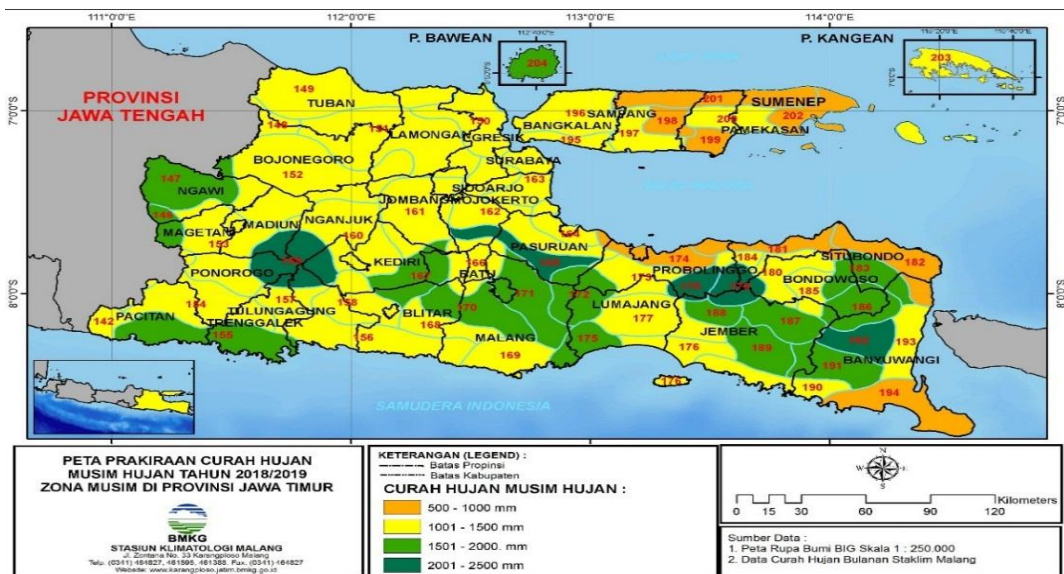
Curah hujan yang dipengaruhi oleh kondisi lingkungan setempat, yakni adanya bentang perairan sebagai sumber penguapan dan pegunungan sebagai daerah tangkapan hujan. Pola hujan lokal memiliki distribusi hujan bukanlah kebalikan dengan pola monsoon, yang dicirikan oleh bentuk pola hujan unimodal (satu puncak hujan), namun bentuknya berlawanan dengan tipe hujan monsoon. Menurut Tukidi (2010), tipe curah hujan ini banyak terjadi di Maluku, Papua, dan sebagian Sulawesi.

Curah hujan dengan intensitas lebih dari 50 milimeter per hari menjadi parameter terjadinya hujan dengan intensitas lebat, sedangkan curah hujan ekstrem memiliki curah hujan lebih dari 100 milimeter per hari. Adapun daerah di Indonesia yang memiliki curah hujan paing tinggi adalah Baturaden, Jawa Tengah dengan intensitas curah hujan mencapai 7,069 mm/tahun.



Sumber: BMKG 2019

**Gambar 2.6** Peta Zona Musim Provinsi Jawa Timur



Sumber: BMKG 2018

**Gambar 2.7** Peta Prakiraan Curah Hujan Musim Hujan 2018/2019



## BAB 3

### METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan tahapan penelitian berdasarkan kajian *Spatial Extreme Value*. Menjelaskan sumber data yang digunakan, variabel penelitian, struktur data, metode *Spatial Extreme Value* dengan pendekatan student's t copula.

#### 3.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang diperoleh dari Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BMKG) oleh Bapak Dr. Sutikno, M.Si. Data yang digunakan berupa data curah hujan harian pada Dua Belas Pos Hujan dari tahun 1989 sampai dengan 2015 yang berlokasi di Kabupaten Ngawi.

#### 3.2 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah curah hujan yang dicatat di dua belas pos hujan, seperti yang disajikan pada Gambar 3.1 berikut:



Sumber: BMKG Karangploso Malang

**Gambar 3.1** Persebaran Pos Hujan di Kabupaten Ngawi

Selanjutnya, Tabel 3.1 menyajikan titik koordinat *longitude* dan *latitude* masing-masing dari dua belas pos hujan yang digunakan dalam penelitian ini:

**Tabel 3.1** Koordinat 12 Pos hujan Kabupaten Ngawi

No.	Pos Hujan	<i>Longitude</i> (u)	<i>Latitude</i> (v)
1.	Kedungprahu	111,221	-7,445
2.	Ngrambe	111,198	-7,513
3.	Padas	111,504	-7,420
4.	Tretes	111,172	-7,453
5.	Bekoh	111,301	-7,500
6.	Widodaren/Walikukun	111,223	-7,385
7.	Gemarang	111,366	-7,396
8.	Karangjati	111,613	-7,461
9.	Kendal	111,288	-7,560
10.	Kricak	111,344	-7,394
11.	Mantingan	111,149	-7,385
12.	Paron	111,395	-7,437

Penggunaan data pada penelitian ini dibagi menjadi dua yaitu data *training* dan data *testing*. Data *training* untuk analisis data, sehingga data *training*nya adalah data curah hujan harian dari tahun 1989 sampai dengan 2010. Sedangkan data *testing* untuk validasi model, yaitu data tahun 2011 sampai dengan 2015. Detail data terdapat pada Lampiran 1 dan untuk struktur data penelitian disajikan pada Tabel 3.2:

**Tabel 3.2** Struktur Data Penelitian

i	Hari	Bulan	Tahun	Kedungprahu	Ngrambe	...	Paron
1	1	12	1989	0	16	...	0
2	2	12	1989	0	3	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
31	31	12	1989	0	1	...	0
32	1	1	1990	0	6	...	20
33	2	1	1990	48	21	...	48
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
62	31	1	1990	0	42	...	0
63	1	2	1990	50	103	...	35
64	2	2	1990	10	0	...	32
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
90	28	2	1990	33	1	...	6
91	1	3	1990	67	8	...	6
92	2	3	1990	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
121	31	3	1990	0	0	...	0
122	1	4	1990	0	0	...	0
123	2	4	1990	0	60	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

**Tabel 3.2** Suruktur Data Penelitian (lanjutan)

i	Hari	Bulan	Tahun	Kedungprahu	Ngrambe	...	Paron
151	30	4	1990	0	0	...	0
152	1	5	1990	0	0	...	0
153	2	5	1990	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
182	31	5	1990	5	0	...	0
183	1	6	1990	0	0	...	0
184	2	6	1990	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
212	30	6	1990	0	0	...	0
213	1	7	1990	0	0	...	0
214	2	7	1990	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
243	31	7	1990	0	0	...	0
244	1	8	1990	0	0	...	0
245	2	8	1990	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
274	31	8	1990	0	0	...	0
275	1	9	1990	0	0	...	0
276	2	9	1990	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
304	30	9	1990	0	0	...	0
305	1	10	1990	3	0	...	30
306	2	10	1990	0	59	...	90
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
335	31	10	1990	72	1	...	27
336	1	11	1990	0	0	...	0
337	2	11	1990	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
365	30	11	1990	18	10	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9496	30	11	2015	0	0	...	3

### 3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan penelitian *spatial extreme value* dengan pendekatan student's t copula sebagai berikut:

- A. Mengkaji estimasi parameter pemodelan *spatial extreme value* dengan pendekatan student's t copula menggunakan metode PMLE, langkah-langkahnya sebagai berikut:
1. Menyusun PDF copula *student's t* dari CDF copula *student's t*.

$$C(u_1, \dots, u_m) = F_{t(v, \Sigma)}(F_{t(v)}^{-1}(u_1), \dots, F_{t(v)}^{-1}(u_m))$$

Untuk memperoleh hasil PDF *student's t* copula, dilakukan turunan CDF student's t copula.

$$c(u_1, \dots, u_m) = \frac{\partial}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial}{\partial u_m} \cdot C(u_1, \dots, u_m)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial}{\partial u_m} F_{t(v,\Sigma)} \left( F_{t(v)}^{-1}[u_1], \dots, F_{t(v)}^{-1}[u_m] \right)$$

2. Menyusun fungsi *pseudo likelihood* dari PDF *student's t* copula. Fungsi distribusi bersama *student's t* copula diperoleh dari perkalian antara PDF distribusi marginal dengan fungsi PDF copula yang didefinisikan:

$$f(x_1, \dots, x_m) = f_{x_1}(x_1) \cdots f_{x_m}(x_m) \cdot c(u_1, \dots, u_m)$$

dari fungsi tersebut dapat dibentuk fungsi *pseudo maximum likelihood*:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}) &= \prod_{i=0}^n \prod_{j=1}^{m-1} f(u_{ji}; \boldsymbol{\beta}) \\ &= \prod_{i=0}^n \prod_{j=1}^{m-1} (f_{x_j}(x_{ji})) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{F_t^{-1}(u_{ji}) \rho(h)^{-1} F_t^{-1}(u_{ji})}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}} \end{aligned}$$

dimana  $\boldsymbol{\beta} = \begin{Bmatrix} \mu \\ \sigma \\ \xi \end{Bmatrix}$

3. Fungsi  $\ln$  *pseudo likelihood*

Berdasarkan fungsi *pseudo likelihood*, dibentuk fungsi  $\ln$  *pseudo likelihood*

$$\ell(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{m-1} \ln(f_{x_j}(x_{ji})) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{F_t^{-1}(u_{ji}) \rho(h)^{-1} F_t^{-1}(u_{ji})}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}}$$

4. Menentukan turunan pertama parameter  $\boldsymbol{\beta}_\mu, \boldsymbol{\beta}_\sigma$ , dan  $\boldsymbol{\beta}_\xi$  terhadap fungsi  $\ln$  *pseudo likelihood* kemudian menyamadengankan dengan vektor nol.

$$\frac{\partial \ell(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_\mu} = \frac{\partial \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{m-1} \ln(f_{x_j}(x_{ji})) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{F_t^{-1}(u_{ji}) \rho(h)^{-1} F_t^{-1}(u_{ji})}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}} \right)}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_\mu}$$

$$\frac{\partial \ell(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\sigma}} = \frac{\partial \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \ln(f_{x_j}(x_{ji})) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{F_t^{-1}(u_{ji}) \rho(h)^{-1} F_t^{-1}(u_{ji})}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}} \right)}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\sigma}}$$

$$\frac{\partial \ell(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\xi}} = \frac{\partial \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \ln(f_{x_j}(x_{ji})) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{F_t^{-1}(u_{ji}) \rho(h)^{-1} F_t^{-1}(u_{ji})}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}} \right)}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\xi}}$$

5. Detail proses estimasi parameter pemodelan *spatial extreme value* dengan pendekatan student's t copula menggunakan metode PMLE disajikan pada Lampiran 5. Jika hasil estimasi parameter tidak *close form*, maka dapat diselesaikan dengan analisis numerik yaitu BFGS Quasi Newton. Langkah-langkah pengerjaan metode BFGS Quasi Newton disajikan pada subab 2.2.1.

B. Penerapan student's t copula terhadap data curah hujan ekstrem di Kabupaten Ngawi.

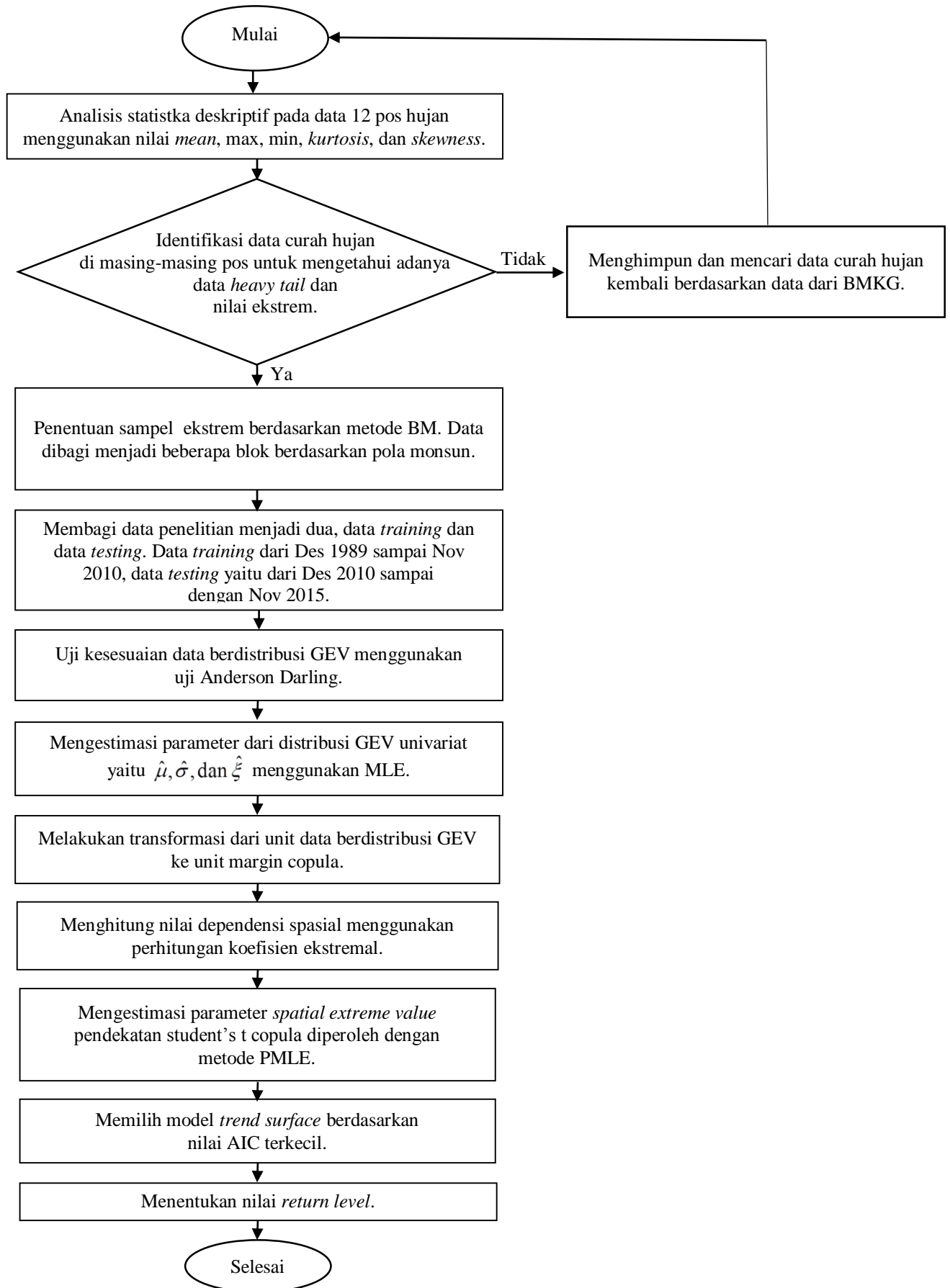
1. Menghimpun data dari 12 pos hujan di Kabupaten Ngawi.
2. Melakukan statistika deskriptif pada data 12 pos hujan dari tahun 1989 sampai dengan 2015 sebagai informasi awal mengetahui karakteristik atau gambaran umum dari pola curah hujan yang digunakan, dengan menggunakan nilai *mean*, *max*, *min*, *kurtosis*, dan *skewness*.
3. Mengidentifikasi data curah hujan di masing-masing pos hujan untuk mengetahui adanya data *heavy tail* dan nilai ekstrem menggunakan histogram. Adanya nilai ekstrem dan datanya *heavy tail* mengindikasikan bahwa data curah hujan harian tidak berdistribusi normal sehingga menyebabkan penelitian ini menggunakan *extreme value theory*.
4. Penentuan nilai sampel ekstrem menggunakan metode *Block Maxima* (BM). Metode BM membagi data menjadi suatu blok dengan periode tiga bulanan berdasarkan pola monsun. Pembagian blok tersebut didasarkan pada acuan BMKG, dimana sebagian besar wilayah Pulau Jawa dikategorikan memiliki

pola hujan monsun. Pola hujan monsun yaitu memiliki waktu satu puncak hujan atau unimodal pada bulan Desember-Januari-Februari. Blok yang terbentuk yaitu Desember-Januari-Februari (DJF), Maret-April-Mei (MAM), Juni-Juli-Agustus (JJA), dan September-Oktober-November (SON). Pada penelitian ini dimulai dari periode 1989 sampai dengan 2015 terbentuk sebanyak 104 blok yang disajikan pada Lampiran 2 dan Lampiran 3.

5. Membagi data menjadi data *training* dan data *testing*. Data *training* adalah data yang akan digunakan untuk dianalisis dalam membentuk model, sedangkan data *testing* digunakan untuk validasi model yang diperoleh. Data *training* dari bulan Desember tahun 1989 sampai November 2010, dan data *testing* dari Desember 2011 sampai November 2015.
6. Setelah membagi data, data yang digunakan untuk analisis adalah data *training*. Kemudian pada data dilakukan pengujian kesesuaian distribusi GEV menggunakan uji Anderson Darling melalui persamaan (2.14).
7. Jika data berdistribusi GEV, selanjutnya menaksir parameter GEV univariat yaitu  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$ , dan  $\hat{\xi}$ . Parameter ini dihasilkan dari proses estimasi menggunakan MLE seperti pada persamaan (2.7), persamaan (2.8), dan persamaan (2.9). Jika hasilnya tidak *close form* maka dilanjutkan menggunakan metode numerik BFGS Quasi Newton melalui persamaan (2.10). Pada tahapan ini menggunakan bantuan *software* R versi 2.15.3.
8. Selanjutnya berdasarkan hasil estimasi parameter GEV, dilihat nilai parameter  $\hat{\xi}$  apakah berdistribusi Gumbel seperti persamaan (2.3), distribusi Frechet seperti persamaan (2.4), dan distribusi Weibull seperti persamaan (2.5).
9. Menghitung dependensi spasial data curah hujan menggunakan koefisien ekstremal. Hal utama yang perlu diketahui pada tahap ini adalah proses transformasi melalui dua tahap yaitu proses transformasi ke frechet, kemudian proses transformasi ke margin copula untuk membentuk model student's t copula menggunakan sifat transformasi pada subbab 2.3.

10. Perhitungan koefisien ekstremal menggunakan persamaan (2.29), dalam hal ini diperlukan informasi mengenai jarak antar pos hujan yang dihitung menggunakan konsep jarak. Adanya dependensi spasial jika titik-titik nilai menyebar diantara  $1 \leq \theta(h) \leq 2$ .
11. Membuat kombinasi model *trend surface* menggunakan sembilan kombinasi. Kemudian memilih kombinasi model *trend surface* terbaik dari semua kombinasi berdasarkan nilai AIC terkecil menggunakan persamaan (2.31).
12. Melakukan estimasi parameter *spatial extreme value* dengan pendekatan student's t copula menurut model *trend surfaces* terbaik.
13. Memperoleh nilai *return level* dari hasil analisis curah hujan di Kabupaten Ngawi menggunakan persamaan (2.32). Dalam *return level* diperlukan nilai pengembalian transformasi.

Tahapan penelitian dalam penerapan student's t copula terhadap data curah hujan ekstrem di Kabupaten Ngawi yang disajikan pada Gambar 3.2:



**Gambar 3.2** Tahapan penelitian *spatial extreme value* pendekatan *student's t* copula



## BAB 4

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai estimasi parameter yang berdistribusi GEV dalam pemodelan *spatial extreme value* menggunakan pendekatan student's t copula. Metode estimasi parameter yang digunakan untuk copula adalah *pseudo maximum likelihood estimation* (PMLE). Kemudian copula yang digunakan adalah student's t copula. Selanjutnya, untuk menerapkan pada pemodelan *spatial extreme* digunakan data curah hujan yang telah dipilih lokasinya yaitu Kabupaten Ngawi dengan dua belas pos hujan. Hal pertama yang dilakukan dalam analisis yaitu deskripsi data untuk mengetahui karakteristik data curah hujan di Kabupaten Ngawi pada tahun 1989-2015. Setelah itu, dilakukan pembagian data yaitu data *training* dan data *testing*. Kemudian tahap pengambilan sampel nilai ekstrim dengan metode *Block Maxima* (BM) yang dilanjutkan dengan pengujian kesesuaian distribusi menggunakan uji Anderson Darling. Tahap berikutnya, membahas penentuan koefisien ekstremal dan model *trend surface* yang terbaik, kemudian estimasi parameter dan *Return level* yang dihasilkan pada masing-masing pos hujan.

#### 4.1 Estimasi Parameter

##### 4.1.1 Estimasi Parameter Distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) Univariat

Proses estimasi parameter secara univariat  $\mu, \sigma, \xi$  dilakukan menggunakan metode estimasi *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Tahapan untuk mengestimasi parameter  $\mu, \sigma, \xi$  sebagai berikut:

1. Menyusun fungsi *likelihood* dari pdf distribusi GEV.

Bentuk pdf dari GEV dituliskan pada persamaan berikut:

$$f(x_i; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \xi \frac{(x-\mu)}{\sigma} \right]^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp \left( - \left[ 1 + \xi \frac{(x-\mu)}{\sigma} \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right), & -\infty < x < \infty, \quad \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left( - \frac{(x-\mu)}{\sigma} \right) \exp \left( - \exp \left[ - \frac{(x-\mu)}{\sigma} \right] \right), & -\infty < x < \infty, \quad \xi = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Pada tahapan estimasi menggunakan persamaan (4.1) yang berlaku untuk  $\xi \neq 0$ , dengan bentuk persamaan sebagai berikut:

$$f(x_i; \mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right]^{\frac{1}{\xi} - 1} \exp \left( - \left[ 1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right]^{\frac{1}{\xi}} \right)$$

Selanjutnya, fungsi *likelihood* yang diperoleh berdasarkan persamaan (4.1) dapat dituliskan menggunakan persamaan (4.2):

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma, \xi) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma, \xi) \\ &= \left( \frac{1}{\sigma} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\left( \frac{1}{\xi} - 1 \right)} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

## 2. Menyusun fungsi *ln likelihood*

$$\begin{aligned} \ell(\mu, \sigma, \xi) &= \ln [L(\mu, \sigma, \xi)] \\ &= \ln \left\{ \left( \frac{1}{\sigma} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\left( \frac{1}{\xi} - 1 \right)} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \right) \right\} \\ \ell(\mu, \sigma, \xi) &= \ln \left\{ \sigma^{-n} \prod_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\left( \frac{1}{\xi} - 1 \right)} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \right) \right\} \\ &= -n \ln \sigma - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

## 3. Turunan fungsi *ln likelihood* terhadap parameter $\mu, \sigma, \xi$

### a. Turunan terhadap parameter $\mu$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} &= \frac{-n \ln \sigma - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}}}{\partial \mu} \\ &= - \left( \frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \right) \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\left( \frac{1}{\xi} - 1 \right)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Turunan pertama terhadap parameter  $\mu$  disama dengankan nol,

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} = 0$$

sehingga dapat ditulis pada persamaan (4.5) sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = \frac{n - n \frac{\xi x_i}{\sigma} \frac{\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}}{\left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{\frac{1}{\xi} + 1}} \sigma}{-n\xi} \quad (4.5)$$

b. Turunan terhadap parameter  $\sigma$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} &= \frac{-n \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}}}{\partial \sigma} \\ &= -n \left(\frac{1}{\sigma}\right) - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \left( \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right)}{1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}} \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right)}{\xi \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Turunan pertama terhadap parameter  $\sigma$  disama dengankan nol,

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} = 0$$

sehingga dapat ditulis pada persamaan (4.7) sebagai berikut:

$$\hat{\sigma} = \frac{n}{-\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \left( \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right)}{1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}} \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right)}{\xi \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right) \right)} \quad (4.7)$$

c. Turunan terhadap parameter  $\xi$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} &= \frac{-n \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}}}{\partial \xi} \\
&= \left(\frac{1}{\xi^2}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right] - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right] - \\
&\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\xi}} \left( -\frac{\ln \left(1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}{\xi^2} + \frac{x_i - \mu}{\sigma \xi \left(1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)} \right) \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Turunan pertama terhadap parameter  $\xi$  disama dengankan nol,

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} = 0$$

sehingga dapat ditulis pada persamaan (4.9) sebagai berikut:

$$\hat{\xi} = \frac{1}{\frac{\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right] - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}} \left( -\frac{\ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)}{\xi^2} + \frac{x_i - \mu}{\sigma \xi \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right)}{\left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right]} \quad (4.9)$$

Detail proses mendapatkan hasil turunan persamaan (4.5), (4.7), dan (4.9) menggunakan estimasi MLE, disajikan pada Lampiran 4. Hasil estimasi parameter memberikan bentuk persamaan tidak *close form*, karena hasil persamaan tersebut tidak dapat dirubah ke dalam bentuk yang dapat mengestimasi parameter. Oleh karena itu, estimasi parameter secara univariat perlu dilanjutkan menggunakan iterasi numerik. Pada penelitian ini, iterasi numerik yang digunakan adalah BFGS *Quasi Newton*. Algoritma iterasi BFGS *Quasi Newton* untuk estimasi distribusi GEV yaitu:

1. Menentukan nilai awal  $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$  yang isinya merupakan vektor berukuran  $p \times 1$  dengan seluruh anggotanya adalah nol. Sedangkan  $p$  adalah banyaknya parameter yang diestimasi.
2. Menentukan  $\alpha^{(k)} = \operatorname{argmin} \left[ f \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} + S^{(k)} \alpha^{(k)} \right) \right]$
3. Menentukan matriks  $H \left( \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} \right)$

$$H \left( \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} \right) = H \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) + \left( 1 + \frac{\Delta g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)^t H \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) \Delta g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)}{\Delta g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)^t \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)}} \right) \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)t}}{\Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)t} \Delta g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)} - \frac{H \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) \Delta g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)t} + \left( H \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) \Delta g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)t} \right)^t}{\Delta g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)^t \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)}}$$

dengan  $H^{(0)} = I$  yaitu matriks identitas ukuran  $p \times p$ .

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) = g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} \right) - g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)$$

4. Menentukan  $g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)$  yang merupakan matriks dengan elemen-elemen dari turunan pertama berdasarkan fungsi *ln likelihood* terhadap masing-masing parameternya.

$$g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell \left( \mu, \sigma, \xi \right)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \ell \left( \mu, \sigma, \xi \right)}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \ell \left( \mu, \sigma, \xi \right)}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

5. Menentukan  $S^{(k)} = - \left( H^{(k)} \right)^{-1} g \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)$
6. Melakukan iterasi numerik menggunakan persamaan  $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)}$
7. Menghitung  $\Delta \left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) = \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}$

8. Kemudian kembali ke langkah nomor 2 sampai dengan langkah 7.
9. Iterasi dimulai dari  $k = 1$ , proses berhenti jika  $\|\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}\| \leq e$  dengan  $e$  adalah bilangan yang sangat kecil.

Proses iterasi numerik BFGS Quasi-Newton menggunakan *software* R versi 2.15.3 dengan *package* *ismev*, *Lmoments*, dan *extRemes* yang dilengkapi pada Lampiran 9.

#### 4.1.2 Estimasi Parameter Distribusi GEV Spasial Model Student's t Copula Menggunakan *Pseudo Maximum Likelihood Estimation* (PMLE)

Metode estimasi parameter yang digunakan untuk distribusi GEV Spasial Model Student's t yaitu *Pseudo Maximum Likelihood Estimation* (PMLE). Metode ini digunakan karena penggunaan data dalam penelitian ini tergolong *high dimensional*, sehingga metode estimasi parameter ini dapat digunakan untuk menentukan estimasi spasial GEV.

Pendekatan spasial yang digunakan pada penelitian ini adalah copula dengan jenis student's t copula. Umumnya copula lebih baik digunakan apabila data yang digunakan bersifat *heavy tail*. Pada distribusi GEV terdapat tiga macam distribusi yaitu *weibull*, *gumbel*, dan *frechet*. Namun tipe distribusi yang bersifat *heavy tail* adalah distribusi *frechet*. Proses transformasi parameter dari GEV univariat ke unit marginal *frechet* perlu dilakukan jika hasil dari estimasi parameter GEV tidak berdistribusi *frechet*. Dikatakan berdistribusi *frechet* jika parameter  $\xi$  untuk distribusi *frechet* yaitu  $\xi > 0$ . Ketika parameter GEV telah berdistribusi *frechet*, selanjutnya transformasi ke copula menggunakan persamaan (4.9):

$$u_j = F_j(x_{ij}) \tag{4.9}$$

dengan,  $u$  merupakan hasil transformasi copula dan  $F_j$  merupakan CDF dari distribusi GEV yang merupakan suatu proses *max-stable* memiliki unit margin *frechet* seperti pada persamaan berikut:

$$F_j = \exp\left(-\frac{1}{z}\right) \tag{4.10}$$

dengan  $z$  adalah proses transformasi data ke unit margin frechet, selanjutnya persamaan  $z$  seperti persamaan (4.11) berikut:

$$z = \left( 1 + \frac{\hat{\xi}(x_{ij} - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}} \right) \quad (4.11)$$

dimana:

$x_{ij}$  = nilai ekstrem observasi ke- $i$  dan pos hujan ke- $j$

$\hat{\mu}$  = estimasi parameter lokasi atau *location*

$\hat{\sigma}$  = estimasi parameter skala atau *scale*

$\hat{\xi}$  = estimasi parameter bentuk atau *shape*

Pada parameter  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$ , dan  $\hat{\xi}$  merupakan parameter yang diperoleh dari hasil estimasi parameter GEV secara univariat. Kemudian tahapan selanjutnya melakukan proses transformasi ke copula yang dilakukan dengan mengestimasi parameter copula GEV spasial.

Copula yang digunakan pada penelitian ini adalah student's t copula, karena copula ini memiliki sifat yang hampir sama dengan gaussian copula yaitu berdistribusi *multivariat extreme value* ke dimensi tak hingga (*infinite dimensional*). Pada Bab 2 sudah dijelaskan bentuk *cumulative distribution function* (CDF) student's t copula sebagai berikut:

$$c(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{u_1}, \dots, \frac{\partial}{u_m} \cdot F_{t(v, \Sigma)} \left( F_{t(v)}^{-1}(u_1), \dots, F_{t(v)}^{-1}(u_m) \right)$$

Untuk mengestimasi parameter student's t copula menggunakan metode Pseudo Maximum Likelihood Estimation (PMLE), maka perlu menyusun pdf student's t copula dari CDF student's t copula. Fungsi pdf student's t copula diperoleh dari turunan fungsi CDF student's t copula yang didefinisikan pada persamaan (4.12) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c(u_1, \dots, u_m) &= \frac{\partial}{u_1}, \dots, \frac{\partial}{u_m} \cdot C(u_1, \dots, u_m) \\ &= \frac{\partial}{u_1}, \dots, \frac{\partial}{u_m} \cdot F_{t(v, \Sigma)} \left( F_{t(v)}^{-1}(u_1), \dots, F_{t(v)}^{-1}(u_m) \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$F$  diibaratkan fungsi distribusi kumulatif multivariat yang berkorelasi  $\rho$ , sedangkan  $F_{t(v)}^{-1}$  invers CDF distribusi student's t. Dengan demikian, fungsi distribusi copula seperti persamaan (4.13) berikut:

$$c(\mathbf{u}) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{V}^T \rho(h)^{-1} \mathbf{V}}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}} \cdot |\rho(h)|^{-\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

Dimana  $h$  merupakan jarak lokasi 1 dengan lokasi 2,  $\mathbf{u}$  adalah transformasi copula, dan  $\rho(h)$  adalah fungsi korelasi. Jenis korelasi yang digunakan penelitian ini adalah korelasi *Whittle Mattern*. Berdasarkan persamaan (4.12) diperoleh pdf student's t copula sebagai berikut:

$$c(u_1, \dots, u_m) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{V}^T \rho(h)^{-1} \mathbf{V}}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}} \cdot |\rho(h)|^{-\frac{1}{2}}$$

dengan  $\mathbf{v} = (F_{t(v)}^{-1}(u_1), \dots, F_{t(v)}^{-1}(u_m))$ . Setelah mendapatkan fungsi pdf student's t copula, untuk langkah selanjutnya yaitu menyusun fungsi peluang bersama yang dituliskan dalam bentuk copula. Fungsi peluang bersama copula disajikan pada persamaan (4.15):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f_{x_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{x_m}(x_m) \cdot c(u_1, \dots, u_m) \\ &= f_{x_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{x_m}(x_m) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{V}^T \rho(h)^{-1} \mathbf{V}}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}} \cdot |\rho(h)|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

dimana  $f$  adalah pdf distribusi GEV, karena fungsi marginal copula *spatial extreme* menggunakan fungsi marginal GEV, dan pdf dari distribusi GEV mengikuti persamaan (2.2). Dari bentuk pdf tersebut, fungsi peluang bersama  $f$  dituliskan dalam bentuk bivariat pada persamaan (4.16):

$$f(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2) \left( \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \sqrt{(v\pi)^d |P|}} \left\{ 1 + \frac{(T_v^{-1}[u_1] T_v^{-1}[u_2])^t \rho(h)^{-1} (T_v^{-1}[u_1] T_v^{-1}[u_2])}{v} \right\}^{-\frac{v+d}{2}} \right) \quad (4.16)$$



Berdasarkan fungsi peluang bersama bentuk bivariat, dilakukan penyusunan fungsi *pseudo maximum likelihood* student's t copula. Hasil estimasi parameter disajikan persamaan (4.17), (4.18), dan (4.19) berikut.

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_j} \right\} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}}} \right) \left\{ \frac{1}{\sigma_j} (-\xi_j) \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j} - 1} \right\} \cdot \frac{\xi_j}{\sigma_j} + \left( \left\{ \frac{1}{\xi_j} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \right\} \cdot \frac{\xi_j}{\sigma_j} \right) \right] + \left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_k} \right\} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}}} \right) \left\{ \frac{1}{\sigma_k} (-\xi_k) \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k} - 1} \right\} \cdot \frac{\xi_k}{\sigma_k} + \left( \left\{ \frac{1}{\xi_k} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \right\} \cdot \frac{\xi_k}{\sigma_k} \right) \right] \quad (4.17)$$

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_j} \right\} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}}} \right) \left\{ -\xi_j \left[ \frac{1}{\sigma_j} + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{(\sigma_j)^2} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j} - 1} \right\} \cdot \left( \frac{1}{(\sigma_j)^2} + \frac{2(\sigma_j) \cdot \xi_j \cdot \xi_j (x_{ji} - \mu_j)}{(\sigma_j)^4} \right) + \left( \left\{ \frac{1}{\xi_j} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \right\} \cdot \left\{ -\xi_j \left[ \frac{1}{\sigma_j} + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{(\sigma_j)^2} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j} - 1} \right\} \right) \right] + \left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_k} \right\} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}}} \right) \left\{ -\xi_k \left[ \frac{1}{\sigma_k} + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{(\sigma_k)^2} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k} - 1} \right\} \cdot \left( \frac{1}{(\sigma_k)^2} + \frac{2(\sigma_k) \cdot \xi_k \cdot \xi_k (x_{ki} - \mu_k)}{(\sigma_k)^4} \right) + \left( \left\{ \frac{1}{\xi_k} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \right\} \cdot \left\{ -\xi_k \left[ \frac{1}{\sigma_k} + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{(\sigma_k)^2} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k} - 1} \right\} \right) \right] \quad (4.18)$$

$$\hat{\xi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_j} \right\} \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}}} \right) \left\{ \frac{1}{\sigma_j} + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{(\sigma_j)^2} \right) \right\} \left[ \ln \left( \frac{1}{\sigma_j} + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{(\sigma_j)^2} \right) \right) \right] \cdot \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{(\sigma_j)^2} \right) + \left( \left\{ - \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \right\} \cdot \left[ \ln \left( - \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right] \right) \right] \cdot \left( - \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right) \right) \right] + \left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_k} \right\} \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}}} \right) \left\{ \frac{1}{\sigma_k} + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{(\sigma_k)^2} \right) \right\} \left[ \ln \left( \frac{1}{\sigma_k} + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{(\sigma_k)^2} \right) \right) \right] \cdot \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{(\sigma_k)^2} \right) + \left( \left\{ - \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \right\} \cdot \left[ \ln \left( - \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right] \right) \right] \cdot \left( - \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right) \right) \right] \quad (4.19)$$

Proses detailnya disajikan pada Lampiran 5, dari hasil estimasi parameter memberikan hasil yang tidak *close form*, sehingga estimasi parameter harus dilanjutkan menggunakan iterasi numerik. Iterasi numerik yang digunakan pada penelitian ini adalah BFGS Quasi-Newton. Metode ini dikenal akan ketahanannya (*robustness*) dan dapat mencapai konvergensi dengan baik.

## **4.2 Aplikasi Model Student's Copula untuk Data Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Ngawi**

Tahap ini melakukan aplikasi model student's t copula yang telah dibahas pada Bab 2 dan estimasi parameter yang telah dijabarkan pada sub Bab 4.1. Penelitian ini menggunakan curah hujan harian dengan dua belas pos hujan di Kabupaten Ngawi.

### **4.2.1 Pemilihan Pos Curah Hujan**

Kabupaten Ngawi memiliki dua puluh lima pos hujan yang tersebar di seluruh wilayahnya. Namun pada penelitian ini menggunakan dua belas pos hujan yang dapat dilihat pada Lampiran 1. Beberapa pos hujan lainnya yang tidak diikuti dalam penelitian ini karena terlalu banyak data yang irasional pada pos hujan tersebut. Data irasional merupakan data yang bernilai nol pada lebih dari satu tahun, sehingga mengakibatkan data tersebut tidak dapat didekati dengan nilai pada tahun sebelumnya. Berdasarkan pernyataan tersebut, aplikasi pada data curah hujan Kabupaten Ngawi menggunakan dua belas pos hujan yaitu Kedungprahu, Ngrambe, Padas, Tretes, Bekoh, Widodaren, Gemarang, Karangjati, Kendal, Kricak, Mantingan, dan Paron.

### **4.2.2 Deskripsi Curah Hujan**

Perlunya melakukan analisis deskriptif dari sebuah data sebagai informasi awal untuk mengetahui gambaran umum mengenai pola curah hujan yang digunakan. Deskripsi dari data curah hujan harian Kabupaten Ngawi dimulai dari bulan Desember 1989 sampai dengan bulan November 2015 yang disajikan pada Tabel 4.1:

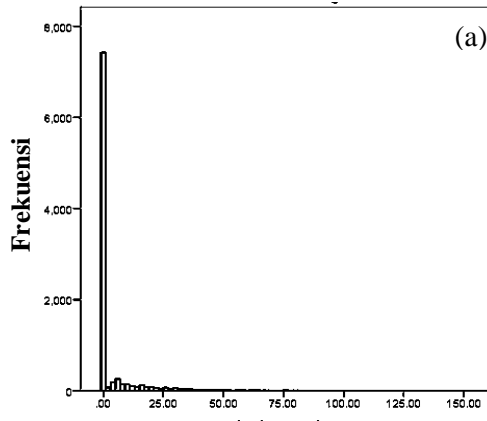
**Tabel 4.1** Deskripsi Curah Hujan Harian pada 12 Pos Hujan di Kabupaten Ngawi (mm/hari)

No	Pos hujan	Mean	Std. deviasi	Min	Max	Skewness	Kurtosis
1	Kedungprahu	4,625	12,793	0	151	3,957	19,167
2	Ngrambe	4,860	12,057	0	137	4,048	22,207
3	Padas	3,663	10,646	0	129	4,601	28,089
4	Tretes	4,730	13,014	0	185	4,544	28,392
5	Bekoh	5,158	14,460	0	195	4,297	24,980
6	Widodaren	5,885	15,828	0	282	4,028	23,628
7	Gemarang	4,940	13,980	0	160	4,301	22,855
8	Karangjati	6,193	15,981	0	201	3,540	15,455
9	Kendal	5,954	15,025	0	167	3,971	20,502
10	Kricak	4,966	12,994	0	156	4,079	21,903
11	Mantingan	5,394	14,568	0	240	4,357	27,455
12	Paron	5,121	14,468	0	190	4,336	24,161

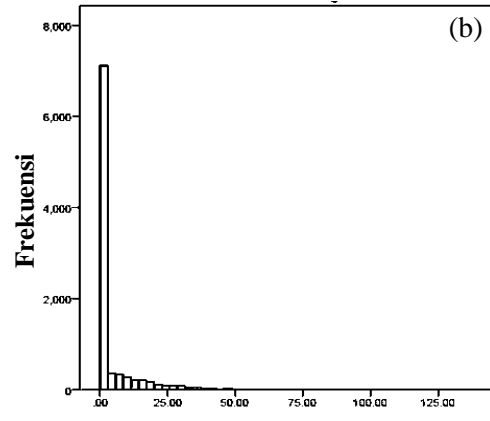
Tabel 4.1 menunjukkan bahwa pos hujan yang memiliki intensitas curah hujan terendah adalah pos hujan Padas dengan rata-rata curah hujan 3,663 mm/hari. Pos hujan yang memiliki intensitas curah hujan tertinggi adalah pos hujan Karangjati dengan rata-rata curah hujan sebesar 6,193 mm/hari dan standar deviasi tertinggi dibandingkan pos hujan lain. Hal ini berarti, jika curah hujan turun pada wilayah ini cenderung tidak stabil intensitasnya, karena memiliki nilai keragaman yang paling besar. Curah hujan minimum di Kabupaten Ngawi adalah nol di seluruh pos hujan, yang artinya tidak terdapat curah hujan sama sekali dalam satu hari. Curah hujan maksimum sebesar 282 mm/hari telah terjadi pada pos hujan Widodaren, yang berarti hujan dengan curah terekstrem terjadi di wilayah ini. Nilai maksimum curah hujan yang terkecil sebesar 129 mm/hari terjadi pada pos hujan Padas mengindikasikan bahwa pada dua belas pos hujan di atas telah terjadi hujan yang tergolong ekstrem berdasarkan definisi dari BMKG, yang menjelaskan bahwa curah hujan dengan kategori ekstrem terjadi jika mencapai lebih dari 100 mm/hari. Pernyataan tersebut diperkuat dengan nilai skewness yang cukup besar pada dua belas pos hujan. *Skewness* menyatakan distribusi data cenderung miring ke salah satu sisi kanan/kiri. Sedangkan nilai kurtosis memberikan gambaran seberapa runcing kurva distribusi data. Semakin besai nilai kurtosis, semakin runcing kurva yang berarti keragaman data cenderung kecil.

Identifikasi perilaku *heavy tail* bertujuan mengetahui ada atau tidak pola *heavy tail* yang menunjukkan bahwa data curah hujan mengandung nilai-nilai

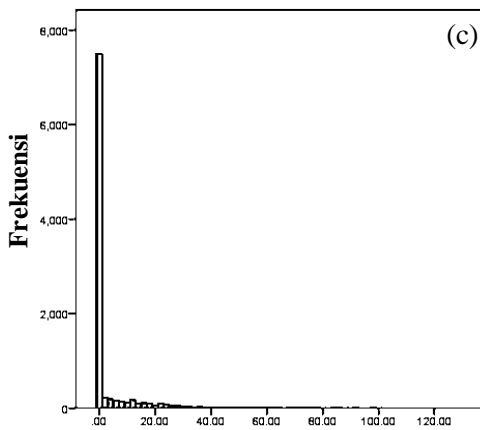
ekstrem. Proses tersebut dilakukan menggunakan histogram data curah hujan tiap lokasi dari tahun yang telah ditetapkan sebelumnya.



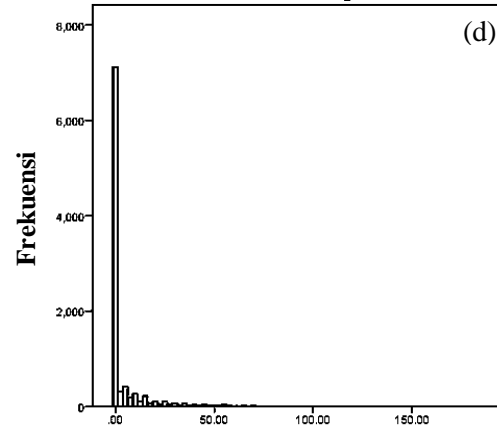
Curah Hujan Kedungprahu (mm/hari)



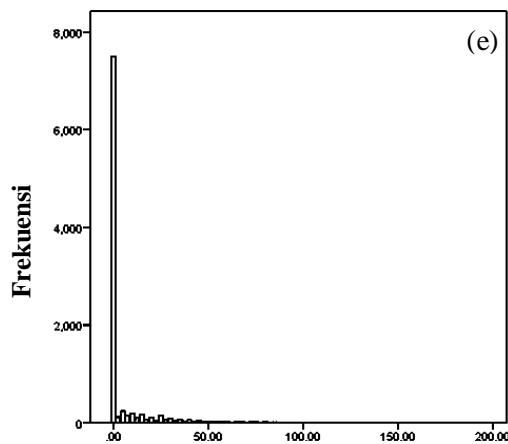
Curah Hujan Ngrambe (mm/hari)



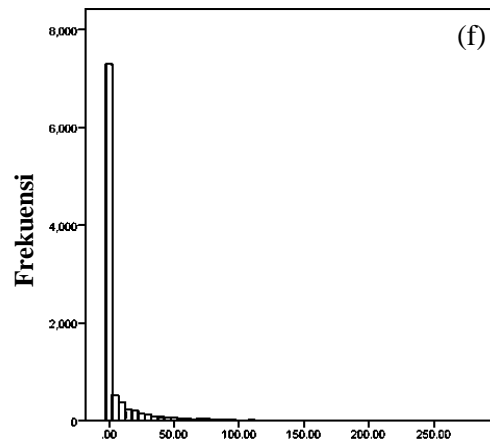
Curah Hujan Padas (mm/hari)



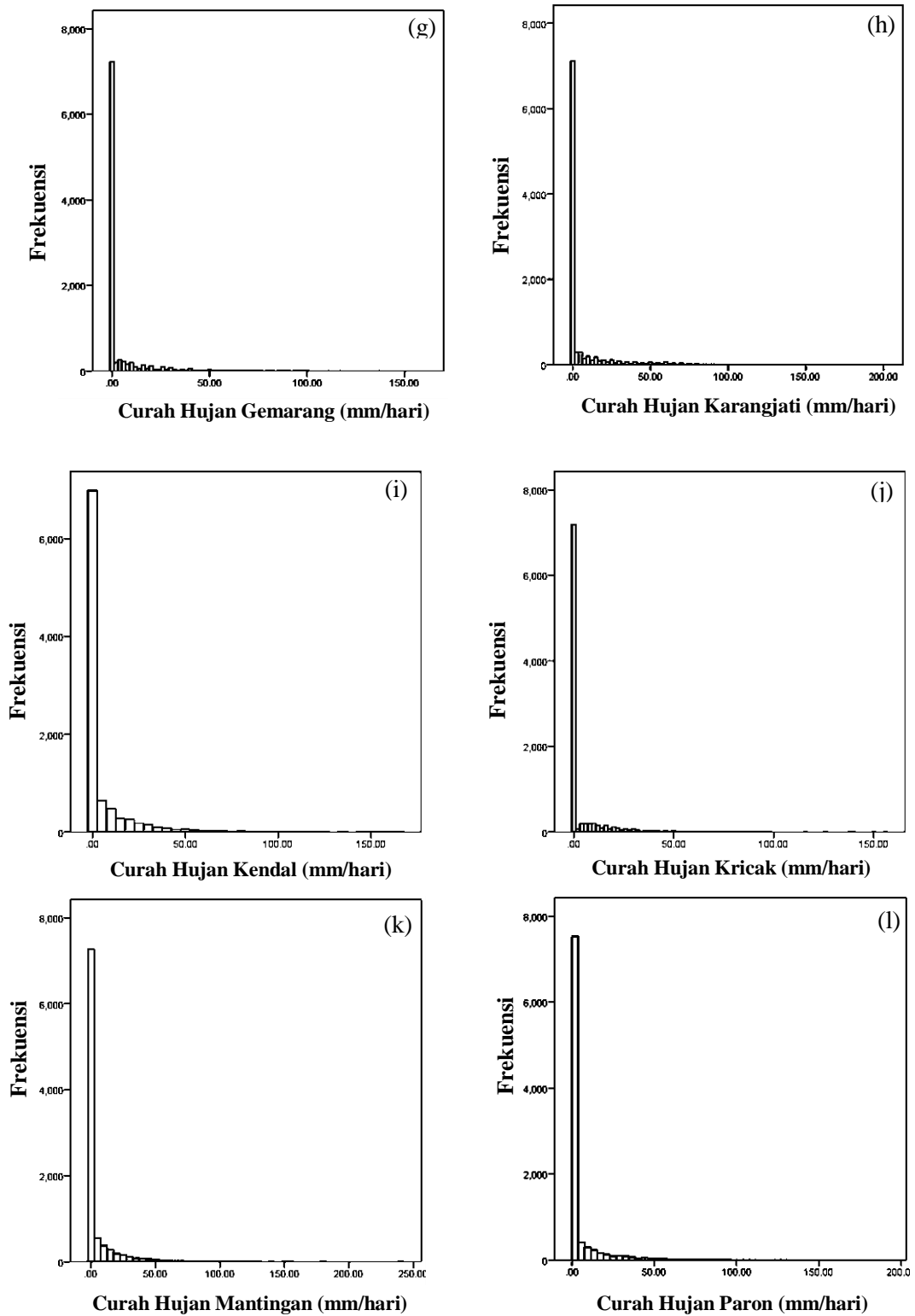
Curah Hujan Tretes (mm/hari)



Curah Hujan Bekoh (mm/hari)



Curah Hujan Widodaren (mm/hari)



**Gambar 4.1** Pola Curah Hujan Harian 12 Pos Hujan

Histogram pada Gambar 4.1 untuk curah hujan Kedungprahu mengindikasikan bahwa curah hujan di pos hujan tersebut memiliki pola data *heavy tail* dimana ekor distribusinya turun secara melambat, yang artinya terdapat nilai ekstrem. Selain itu diperkuat dengan nilai *skewness* sebesar 3,957 dan nilai *kurtosis* sebesar 19,167. Pada Gambar 4.1 disajikan pula histogram sebelas pos hujan lainnya di Kabupaten Ngawi.

Gambar 4.1 merupakan histogram sebelas pos hujan di Kabupaten Ngawi yang menunjukkan adanya data ekstrem dan pola *heavy tail* di dua belas pos hujan lainnya dimana kurva distribusi miring ke kanan, memperlihatkan tingginya frekuensi data di sekitar nilai nol. Sedangkan masih terdapat kejadian curah hujan yang jauh lebih besar dari nol dengan frekuensi yang kecil, hal ini mengindikasikan adanya pola data *heavy tail*. Oleh karena itu, indikasi data ekstrem dan pola *heavy tail* menunjukkan data curah hujan harian tidak berdistribusi normal, sehingga penelitian ini menggunakan metode *extreme value theory*.

#### **4.2.3 Penentuan Nilai Sampel Ekstrem dengan *Block Maxima* (BM)**

Untuk menentukan nilai sampel ekstrem curah hujan ekstrem digunakan metode BM. Berdasarkan acuan BMKG yang mengklasifikasi pola hujan monsoon pada sebagian besar wilayah di Pulau Jawa. Metode BM membagi data ke dalam blok periode tiga bulanan berupa empat periode musim per tahunnya, yaitu musim hujan pada bulan Desember-Januari-Februari (DJF), musim peralihan pada bulan Maret-April-Mei (MAM), musim kemarau pada bulan Juni-Juli-Agustus (JJA), dan peralihan menuju musim hujan pada bulan September-Oktober-November (SON). Identifikasi sampel ekstrem dimulai dari bulan Desember 1989 sampai dengan November 2015 sehingga selama periode sampel (1989-2015) terbentuk 104 blok yang disajikan pada Lampiran 2 dan Lampiran 3. Tiap satu blok terambil satu nilai ekstrem, nilai ekstrem inilah yang merupakan nilai maksimum dari masing-masing blok. Berdasarkan pernyataan tersebut terambil 104 data yang merupakan nilai maksimum dari tiap blok tiga bulanan dari sebanyak 9.496 data curah hujan masing-masing pos hujan. Data sampel ekstrem untuk data *training* disajikan pada Lampiran 2 terdiri dari 83 blok dimulai dari periode Desember 1989 sampai dengan Agustus 2010. Sedangkan data sampel testing disajikan pada Lampiran 3 yang

terdiri dari 21 blok yang dimulai dari periode September 2010 sampai dengan November 2015. Selanjutnya, menunjukkan deskriptif untuk data curah hujan yang datanya diperoleh dengan *block maxima* per tiga bulan yang disajikan pada Tabel 4.2:

**Tabel 4.2** Deskriptif Curah Hujan Ekstrem di 12 Pos Hujan (mm/hari)

<b>Pos Hujan</b>	<b>Mean</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>
Kedungprahu	59,31	0	151
Ngrambe	53,61	0	137
Padas	43,23	0	129
Tretes	65,55	0	185
Bekoh	73,34	0	195
Widodaren	78,43	0	282
Gemarang	69,36	0	160
Karangjati	71,78	0	201
Kendal	75,84	0	167
Kricak	64,76	0	156
Mantingan	75,34	0	240
Paron	69,92	0	161

Tabel 4.2 menunjukkan pos hujan yang memiliki intensitas curah hujan terendah adalah pos hujan Padas dengan rata-rata curah hujan 43,23 mm/hari. Pos hujan yang memiliki intensitas curah hujan tertinggi adalah pos hujan Widodaren dengan rata-rata curah hujan 78,43 mm/hari. Terdapat juga curah hujan minimum di dua belas pos hujan sebesar nol yang berarti tidak terdapat curah hujan sama sekali dalam satu hari. Nilai maksimum curah hujan terkecil sebesar 129 mm/hari pada pos hujan Padas. Nilai maksimum curah hujan tertinggi terjadi di pos hujan Widodaren sebesar 282 mm/hari mengindikasikan pada dua belas pos hujan di Kabupaten Ngawi telah terjadi hujan ekstrem menurut definisi BMKG yang menjelaskan bahwa curah hujan dengan kategori ekstrem terjadi jika mencapai lebih dari 100 mm/hari.

#### **4.2.4 Identifikasi distribusi GEV**

Setelah memperoleh sampel nilai ekstrem menggunakan metode BM, selanjutnya mengidentifikasi apakah sampel ekstrem tersebut mengikuti distribusi GEV. Terdapat dua cara untuk mengidentifikasi distribusi GEV yaitu uji Anderson-

Darling dan *Probability plot*. Pengujian hipotesis Anderson Darling sebagai berikut:

$$H_0 : F(x) = F^*(x) \text{ (data mengikuti distribusi GEV)}$$

$$H_1 : F(x) \neq F^*(x) \text{ (data tidak mengikuti distribusi GEV)}$$

Statistik uji yang digunakan menggunakan persamaan (2.14) dengan tingkat signifikansi  $\alpha = 5\%$ , daerah kritis tolak  $H_0$  jika  $p\text{-value} < \alpha$ .

**Tabel 4.3** Nilai Uji Anderson Darling 12 Pos Hujan

No	Pos hujan	AD value	pvalue	Keputusan
1	Kedungprahu	0,743	0,976	Gagal tolak $H_0$
2	Ngrambe	0,250	0,348	Gagal tolak $H_0$
3	Padas	2,750	1,000	Gagal tolak $H_0$
4	Tretes	0,666	0,963	Gagal tolak $H_0$
5	Bekoh	0,634	0,947	Gagal tolak $H_0$
6	Widodaren	1,789	0,999	Gagal tolak $H_0$
7	Gemarang	0,644	0,940	Gagal tolak $H_0$
8	Karangjati	0,911	0,993	Gagal tolak $H_0$
9	Kendal	0,649	0,942	Gagal tolak $H_0$
10	Kricak	0,616	0,933	Gagal tolak $H_0$
11	Mantingan	0,656	0,964	Gagal tolak $H_0$
12	Paron	0,193	0,140	Gagal tolak $H_0$

Tabel 4.3 diperoleh hasil pengujian kesesuaian distribusi sampel ekstrem dengan metode BM secara periode blok tiga bulanan, memperoleh hasil bahwa data mengikuti distribusi GEV. Hal tersebut ditunjukkan dengan keputusan yaitu gagal tolak  $H_0$ , sehingga dapat disimpulkan bahwa data sudah mengikuti distribusi GEV.

#### 4.2.5 Estimasi Parameter GEV secara Univariat

Selanjutnya, dilakukan estimasi parameter distribusi GEV terhadap data curah hujan ekstrem masing-masing pos hujan. Parameter tersebut adalah  $\mu(s)$  yaitu *location* atau letak titik pemusatan data,  $\sigma(s)$  yaitu *scale* atau keragaman



data, dan  $\xi(s)$  yaitu *shape* atau bentuk ekor. Parameter ini digunakan untuk mentransformasi data yang telah memenuhi uji kesesuaian distribusi GEV, ke unit margin Frechet. Tabel 4.4 merupakan nilai estimasi dari ketiga parameter secara univariat.

**Tabel 4.4** Estimasi Parameter  $\hat{\mu}(s)$ ,  $\hat{\sigma}(s)$ ,  $\hat{\xi}(s)$   
GEV Univariat

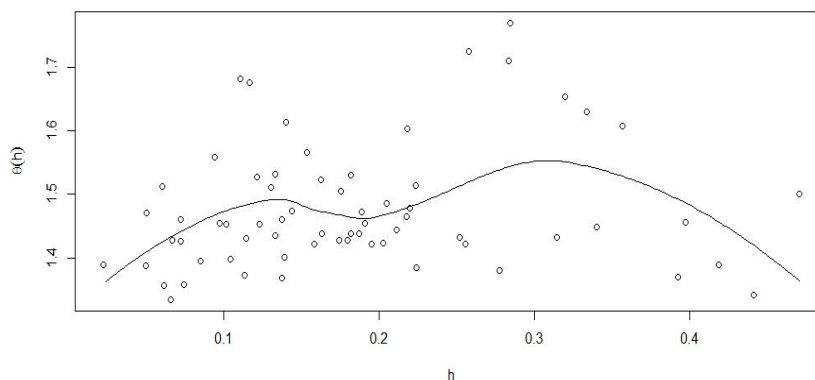
No	Pos hujan	$\hat{\mu}(s)$	$\hat{\sigma}(s)$	$\hat{\xi}(s)$
1	Kedungprahu	45,873	31,837	-0,182
2	Ngrambe	40,318	30,079	-0,162
3	Padas	26,032	30,946	-0,036
4	Tretes	48,201	36,849	-0,109
5	Bekoh	57,122	40,015	-0,193
6	Widodaren	59,391	37,389	-0,042
7	Gemarang	56,054	39,444	-0,309
8	Karangjati	55,572	39,269	-0,189
9	Kendal	62,364	40,002	-0,307
10	Kricak	51,331	37,129	-0,270
11	Mantingan	55,480	37,741	-0,044
12	Paron	56,445	37,243	-0,275

Tabel 4.4 menunjukkan bahwa distribusi data curah hujan ekstrem pada dua belas pos hujan di Kabupaten Ngawi berdistribusi Weibull karena nilai dari parameter  $\hat{\xi}(s)$  bernilai negatif ( $\xi < 0$ ), sehingga perlu dilakukan transformasi ke distribusi Frechet dikarenakan distribusi tersebut memiliki ekor yang paling *heavy tail* jika dibandingkan dengan distribusi GEV yang lain. Proses transformasi data ke distribusi Frechet dinamakan *max-stable process*. Kemudian dari distribusi frechet ditransformasi lagi ke margin copula, karena pada penelitian ini copula lebih tepat digunakan jika data memiliki ekor yang *heavy tail*.

#### 4.2.6 Pengukuran Dependensi Spasial dengan Koefisien Ekstremal

Pada tahap ini, hal pertama yang perlu diketahui adalah mentransformasi data ekstrem ke unit marjin frechet, kemudian ditransformasi lagi ke margin copula, dan menghitung koefisien ekstremal. Koefisien ekstremal merupakan Gambaran untuk mengukur dependensi spasial ekstrem secara parsial atau bivariat (dua pasangan). Untuk menghitung koefisien ekstremal, diperlukan informasi mengenai jarak antar pos hujan yang dihitung menggunakan konsep jarak *euclid* antarlokasi berdasarkan

koordinat *longitude* dan *latitude*. Gambar 4.2 merupakan hasil perhitungan koefisien ekstremal.



**Gambar 4.2** Koefisien Ekstremal 12 Pos Hujan di Kabupaten Ngawi

Gambar 4.2 merupakan hasil perhitungan koefisien ekstremal 66 pasang lokasi, dengan  $h$  merupakan jarak, dan  $\theta(h)$  adalah koefisien ekstremal. Grafik juga menunjukkan bahwa titik-titik menyebar di sekitar 1,4 sampai dengan 1,7 yang berarti terdapat dependensi spasial antar lokasi. Koefisien ekstremal bernilai 1 (satu) berarti terdapat adanya dependensi spasial penuh, sedangkan koefisien ekstremal bernilai 2 (dua) berarti tidak menunjukkan adanya indikasi dependensi spasial. Berdasarkan pernyataan tersebut, plot koefisien ekstremal menunjukkan adanya dependensi spasial pada data curah hujan untuk dua belas pos hujan di Kabupaten Ngawi.

#### 4.2.7 Penentuan Kombinasi Model *Trend Surface* Terbaik

Pada tahap ini, kompleksitas suatu kombinasi model yang terbentuk tidak menjamin bahwa model tersebut semakin baik. Model *trend surface* merupakan model linier yang mengkombinasikan variabel koordinat suatu lokasi berupa variabel *longitude* dan *latitude*. Penelitian ini menggunakan enam belas kombinasi model *trend surface* terbaik. Kombinasi model *trend surface* terbaik menghasilkan estimasi terbaik atas curah hujan ekstrem. Dikatakan kombinasi model *trend surface* terbaik apabila kombinasi model tersebut memiliki nilai AIC terkecil. Hasil perhitungan nilai AIC dari enam belas kombinasi model *trend surface* disajikan pada Tabel 4.5:

**Tabel 4.5** Nilai AIC menurut kombinasi model *trend surface*

Kombinasi ke-	Kombinasi model	Nilai AIC
1	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lon) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lat)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lon) + \hat{\beta}_{\sigma,2}(lat)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	899,867
2	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lon) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lat)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lat) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lon)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	899,867
3	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lon) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lat)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lat)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	780,915
4	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lon) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lat)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lon)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	898,901
5	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lat) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lon)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lon) + \hat{\beta}_{\sigma,2}(lat)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	899,867
6	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lat) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lon)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lat) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lon)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	899,867
7	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lat) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lon)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lat)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	780,915
8	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lat) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lon)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lon)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	898,901
9	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lon)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lon) + \hat{\beta}_{\sigma,2}(lat)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	893,047
10	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lon)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lat) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lon)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	893,047

**Tabel 4.5** Nilai AIC menurut kombinasi model *trend surface* (lanjutan)

Kombinasi ke-	Kombinasi model	Nilai AIC
11	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lon)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lat)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	775,501
12	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lon)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lon)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	891,028
13	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lat)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lon) + \hat{\beta}_{\sigma,2}(lat)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	866,214
14	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lat)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lat) + \hat{\beta}_{\mu,2}(lon)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	866,214
15	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lat)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lat)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	763,612
16	$\hat{\mu} = \hat{\beta}_{\mu,0} + \hat{\beta}_{\mu,1}(lat)$ $\hat{\sigma} = \hat{\beta}_{\sigma,0} + \hat{\beta}_{\sigma,1}(lon)$ $\hat{\xi} = \hat{\beta}_{\xi,0}$	865,173

Pada Tabel 4.5 diperoleh hasil model *trend surface* terbaik dengan nilai AIC terkecil sebesar 763,612 yang terdapat pada kombinasi model ke lima belas. Bentuk model *trend surface* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(s) &= 0,78306 + 0,04739(lat) \\ \hat{\sigma}(s) &= 0,285729 - 0,003206(lat) \\ \hat{\xi}(s) &= -0,4838 \\ v &= 9\end{aligned}$$

Estimasi parameter  $\hat{\mu}(s)$ ,  $\hat{\sigma}(s)$ ,  $\hat{\xi}(s)$  untuk masing-masing lokasi ditentukan menggunakan persamaan model *trend surface* terbaik dan memasukkan nilai variabel *longitude* dan *latitude* pada masing-masing pos hujan. Nilai estimasi parameter student's copula untuk masing-masing pos hujan disajikan pada Tabel 4.6 sebagai berikut:

**Tabel 4.6** Nilai Estimasi Parameter Student  $t$  Copula menurut Model *Trend Surface* Terbaik

No	Pos hujan	Longitude	Latitude	$\hat{\mu}(s)$	$\hat{\sigma}(s)$	$\hat{\xi}(s)$
1	Kedungprahu	111,221	-7,445	0,4302	0,30959	-0,4838
2	Ngrambe	111,198	-7,513	0,4270	0,30981	-0,4838
3	Padas	111,504	-7,42	0,4314	0,30951	-0,4838
4	Tretes	111,172	-7,453	0,4298	0,30962	-0,4838
5	Bekoh	111,301	-7,5	0,4276	0,30977	-0,4838
6	Widodaren	111,223	-7,385	0,4331	0,30940	-0,4838
7	Gemarang	111,366	-7,396	0,4325	0,30943	-0,4838
8	Karangjati	111,613	-7,461	0,4295	0,30964	-0,4838
9	Kendal	111,288	-7,56	0,4248	0,30996	-0,4838
10	Kricak	111,344	-7,394	0,4326	0,30943	-0,4838
11	Mantingan	111,149	-7,385	0,4331	0,30940	-0,4838
12	Paron	111,395	-7,437	0,4306	0,30957	-0,4838

Berdasarkan Tabel 4.6 menunjukkan nilai estimasi parameter GEV spasial model ke-9, dimana nilai estimasi parameter  $\hat{\xi}(s)$  *shape* dibuat bernilai konstan di semua lokasi. Hal ini terjadi karena adanya asumsi isotropik yang berarti curah hujan pada tiap lokasi bersifat homogen tanpa memperhitungkan unsur lain, misalnya kecepatan angin atau ketinggian.

#### 4.2.8 Return level

*Return level* merupakan nilai estimasi curah hujan ekstrem untuk periode waktu tertentu, sehingga nilai hasil *return level* biasanya masih dalam bentuk pemodelan data curah hujan student's  $t$  copula. Selanjutnya nilai *return level* harus dilakukan ke nilai pengembalian transformasi dari pemodelan student's  $t$  copula ke GEV. Tabel 4.7 merupakan prediksi nilai *return level* untuk curah hujan GEV selama 5 tahun ke depan di dua belas pos hujan Kabupaten Ngawi.

**Tabel 4.7** Nilai *Return level* Model Copula Student-t pada periode ulang 5 tahun (mm/hari)

<b>Pos hujan</b>	2010-2011	2010-2012	2010-2013	2010-2014	2010-2015
Kedungprahu	77,934	91,716	99,289	104,672	108,966
Ngrambe	70,616	83,889	91,203	96,404	100,550
Padas	59,927	76,413	86,086	93,319	99,243
Tretes	86,767	104,402	114,387	121,674	127,526
Bekoh	96,855	113,816	123,021	129,556	134,687
Widodaren	100,426	120,248	131,890	140,569	147,756
Gemarang	93,441	107,828	115,304	120,450	124,427
Karangjati	94,887	111,718	120,900	127,418	132,605
Kendal	99,454	113,883	121,292	126,364	130,254
Kricak	87,270	101,572	109,120	114,407	118,517
Mantingan	96,863	116,823	128,537	137,265	144,490
Paron	92,183	106,367	113,830	119,005	123,048

Tabel 4.7 menunjukkan nilai *return level* periode ulang 5 tahun dari model student's t copula yang diperkirakan pada batas maksimum curah hujan terjadi pada pos hujan Widodaren berturut-turut sebesar 100,426 mm/hari, 120,248 mm/hari, 131,890 mm/hari, 140,569 mm/hari, dan 147,756 mm/hari. Sedangkan prediksi nilai *return level* pada batas minimumnya terjadi pada pos hujan Padas dengan nilai curah hujan berturut-turut sebesar 59,927 mm/hari, 76,413 mm/hari, 86,086 mm/hari, 93,319 mm/hari, dan 99,243 mm/hari.

Nilai prediksi *return level* menunjukkan bahwa volume curah hujan meningkat dari tahun ke tahun berdasarkan periode tahunnya. Tahap selanjutnya, membandingkan hasil nilai prediksi dengan nilai aktualnya yang berasal dari data *testing* seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.8 sebagai berikut:

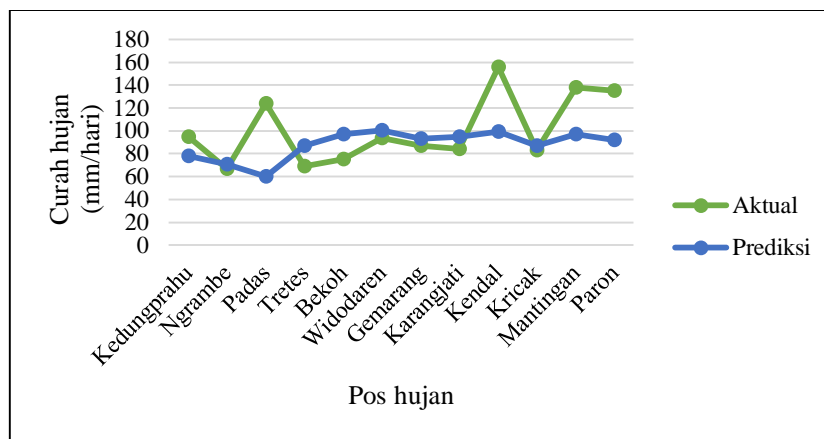
**Tabel 4.8** Nilai Aktual dan Nilai Prediksi Curah Hujan (mm/hari)

Pos Hujan	2011		2012		2013	
	Aktual	Prediksi	Aktual	Prediksi	Aktual	Prediksi
Kedungprahu	95	77,934	95	91,716	95	99,289
Ngrambe	67	70,616	76	83,889	106	91,203
Padas	124	59,927	124	76,413	124	86,086
Tretes	69	86,767	76	104,402	101	114,387
Bekoh	75	96,855	79	113,816	100	123,021
Widodaren	94	100,426	94	120,248	94	131,890
Gemarang	87	93,441	87	107,828	95	115,304
Karangjati	84	94,887	84	111,718	84	120,900
Kendal	156	99,454	156	113,883	156	121,292
Kricak	83	87,270	83	101,572	83	109,120
Mantingan	138	96,863	138	116,823	138	128,537
Paron	135	92,183	135	106,367	135	113,830

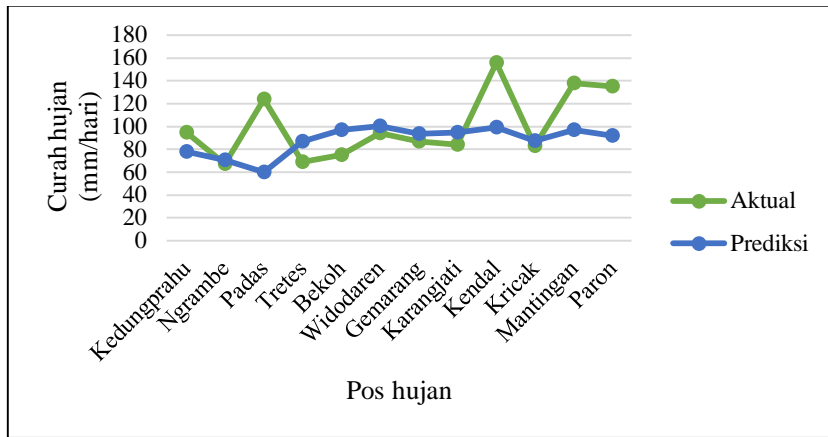
**Tabel 4.8** Nilai Aktual dan Nilai Prediksi Curah Hujan (lanjutan)

Pos Hujan	2014		2015	
	Aktual	Prediksi	Aktual	Prediksi
Kedungprahu	96	104,672	96	108,966
Ngrambe	120	96,404	120	100,550
Padas	124	93,319	124	99,243
Tretes	103	121,674	103	127,526
Bekoh	100	129,556	100	134,687
Widodaren	94	140,569	98	147,756
Gemarang	95	120,450	95	124,427
Karangjati	84	127,418	85	132,605
Kendal	156	126,364	156	130,254
Kricak	83	114,407	89	118,517
Mantingan	138	137,265	138	144,490
Paron	135	119,005	190	123,048

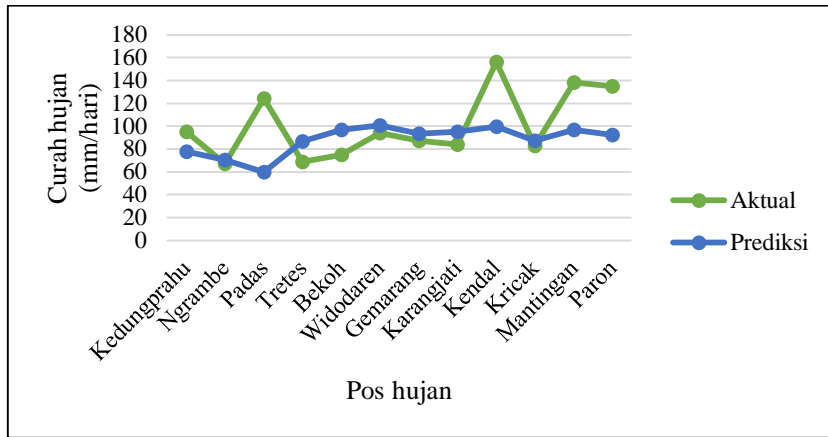
Selanjutnya, menghitung nilai RMSE dengan cara menghitung selisih antara nilai aktual dengan nilai dugaannya menggunakan persamaan (2.33). Berdasarkan persamaan tersebut, diperoleh hasil nilai RMSE sebesar 34,917. Untuk memudahkan melihat perbandingan nilai aktual dan nilai prediksi maka digunakan grafik, yang disajikan pada Gambar 4.3 berikut:



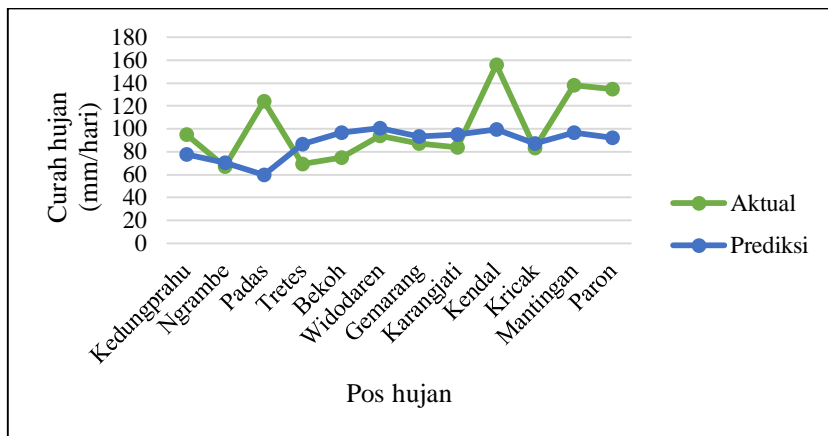
(a)



(b)

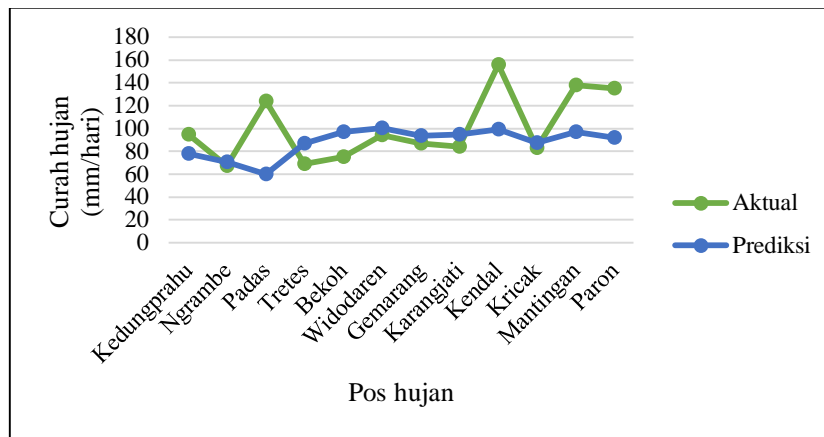


(c)



(d)





(e)

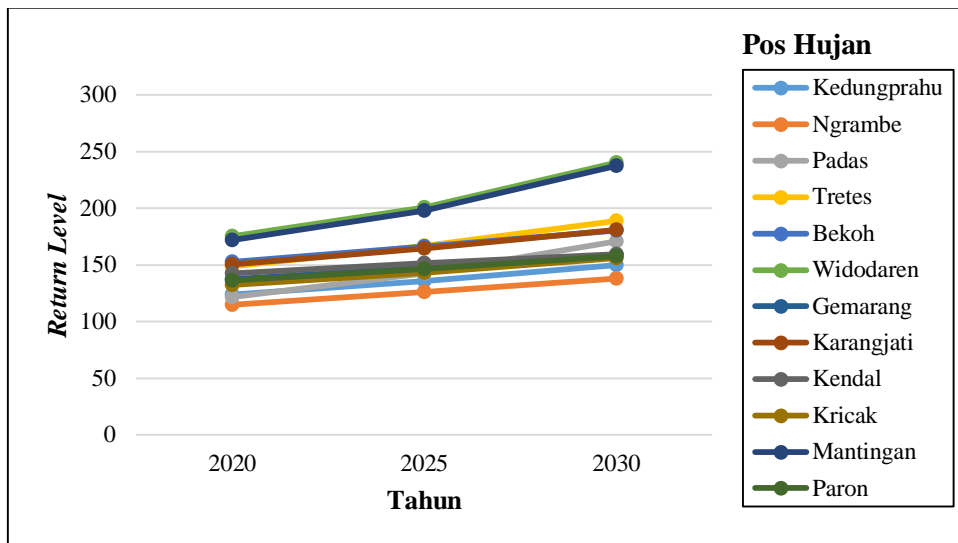
**Gambar 4.3** Perbandingan *Return level* Nilai Prediksi dan Nilai Aktual tiap Pos Hujan di Kabupaten Ngawi Tahun 2011 (a), 2012 (b), 2013 (c), 2014 (d), dan 2015 (e)

Langkah terakhir melakukan estimasi *return level* untuk periode ulang 10 tahun ke depan. Prediksi *return level* curah hujan ekstrem di Kabupaten Ngawi periode ulang 10 tahun, 15 tahun, dan 20 tahun menggunakan model student's t copula. Prediksi *return level* curah hujan ekstrem terjadi pada tahun 2020, 2025, dan 2030 di dua belas pos pengamatan curah hujan Kabupaten Ngawi yang disajikan dalam Tabel 4.9 sebagai berikut:

**Tabel 4.9** *Return Level* Periode 30 Tahun ke Depan di Dua Belas Pos Hujan

Pos Hujan	Tahun		
	2020	2025	2030
Kedungprahu	123,981	135,952	149,922
Ngrambe	114,948	126,166	138,135
Padas	121,791	142,450	170,975
Tretes	148,795	166,724	188,605
Bekoh	152,441	165,973	180,369
Widodaren	175,175	200,791	240,287
Gemarang	137,696	147,650	158,846
Karangjati	150,609	164,734	180,669
Kendal	142,809	151,379	159,288
Kricak	132,508	143,282	156,106
Mantingan	172,030	197,723	237,267
Paron	136,577	146,668	157,675

Nilai *return level* yang diperoleh mengalami peningkatan dari tahun ke tahun di seluruh pos hujan, berdasarkan nilai pada Tabel 4.9 maka digambarkan melalui grafik yang disajikan pada Gambar 4.4 sebagai berikut:



**Gambar 4.4** Nilai *Return Level* Periode 30 Tahun ke Depan

Gambar 4.4 diperoleh informasi terkait sifat dan karakteristik ketika akan terjadi curah hujan ekstrem untuk mengantisipasi terjadinya bencana banjir. Selain itu dalam jangka panjang, informasi *return level* sangat bermanfaat untuk mengukur ketahanan suatu bangunan seperti bendungan, jembatan, atau gedung jika terjadi bencana curah hujan ekstrem.

Pada penelitian sebelumnya telah dilakukan pemodelan *spatial extreme value* dengan proses copula menggunakan gaussian copula dengan tahun data *training* dan *testing* yang sama pada beberapa pos hujan diperoleh nilai RMSE sebesar 38,155. Penelitian lainnya melakukan pemodelan *spatial extreme value* dengan proses *max-stable* menggunakan model Smith diperoleh nilai RMSE sebesar 32,078. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa data curah hujan ekstrem Kabupaten Ngawi lebih baik menggunakan pemodelan proses *max-stable* daripada copula.

## BAB 5

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan terdapat beberapa kesimpulan diantaranya:

1. Model curah hujan ekstrem pada Kabupaten Ngawi menggunakan estimasi parameter *Spatial Extreme Value* pendekatan copula menghasilkan model *trend surface* yaitu:

$$\hat{\mu}(s) = 0,78306 + 0,04739(lat)$$

$$\hat{\sigma}(s) = 0,285729 - 0,003206(lat)$$

$$\hat{\xi}(s) = -0,4838$$

$$v = 9$$

dengan nilai AIC terkecil sebesar 763,612 dan nilai RMSE sebesar 34,917.

2. Nilai *return level* estimasi parameter memberikan hasil prediksi bahwa volume curah hujan yang maksimal akan terjadi pada lima pos hujan antara lain Widodaren, Mantingan, Bekoh, Karangjati, dan Kendal.

#### 5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya adalah:

1. Perlu dilakukan penelitian *Spatial Extreme Value* dengan pendekatan copula menggunakan gaussian copula untuk meningkatkan akurasi nilai *return level*.
2. Perlu dilakukan eksplorasi data pada variabel yang akan digunakan untuk menentukan model spasial GEV yang sesuai dengan data.

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR PUSTAKA

- Aas, K. (2004). Modelling the dependence structure of financial assets: A survey of four copulas. *Norwegian Computing Centers*. Norway.
- BPS. (2018). *Berita Resmi Statistik: Luas Panen dan Produksi Padi di Jawa Timur 2018*. Badan Pusat Statistik Jawa Timur.
- BMKG. (2018). *Prakiraan Musim Hujan Tahun 2018/2019 di Provinsi Jawa Timur*. Tahun XXV No. 217. Badan Meteorologi dan Geofisika Stasiun Klimatologi. Malang.
- Carreau, J., dan Bouvier, C. (2016). Multivariate density model comparison for multi-site flood-risk rainfall in the French Mediterranean area. *Stoch Environ Res Risk Assess*, 30: 1591-1612.
- Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modelling of Extreme*. 1<sup>st</sup> edition. Springer-Verlag. London.
- Cooley, D., Douglas N., dan Philippe N. (2007). Bayesian Spatial Modeling of Extremen Precipitation Return Levels. *Journal of the American Statistical Association*, 102(479): 824-840.
- Davison, A.C., Padoan S., dan Ribatet M. (2012). Statistical Modeling of Spatial Extremes. *Statistical Science*, 27: 161-186.
- Finkenstadt, B., dan Rootzen, H. (2004). *Extreme Value in Finance, Telecommunication, and the Environment*. Chapman & Hall/CRC, New York.
- Genest C., dan Segers J. (2010). On the covariance of the asymptotic empirical copula process. *Journal of Multivariate Analysis*, 101: 1837-1845.
- Gilli, M., dan Kellezi, E. (2006). An application of extreme value theory for measuring financial risk. *Computational Economics*, 27(2-3): 207-228.
- Gudendorf, G., dan Segers, J. (2010). *Extreme-value copulas, Copula theory and its applications*. pp: 127-145.

- Hasan, M. F., dan Utomo, D. T. W. (2009). *Perencanaan Teknik embung Dawung Kabupaten Ngawi*. Proyek Akhir. Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- Hatanti, Y. D. (2016). *Perbandingan Model Smith, Schlather, Brown-Resnick dan Geometric Gaussian pada Pemodelan Curah Hujan (Studi Kasus : Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Lamongan)*. Thesis. Program Magister. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- Internet Sindonews.com. (2019). *Sungai Madiun Meluap, 2 Kecamatan di Kabupaten Ngawi Terendam Banjir*. Entry from: <https://daerah.sindonews.com/read/1384416/174/sungai-madiun-meluap-2-kecamatan-di-kabupaten-ngawi-terendam-banjir-1551855287>, ditulis oleh: Asfi Manar. Berkunjung pada tanggal 8 Maret 2019.
- Kadarsah. (2007). *Tiga Pola Curah Hujan Indonesia*. <http://kadarsah.wordpress.com/2019/01/30/tiga-daerah-iklim-indonesia/#comment-2613>, ditulis oleh: Kadarsah. Berkunjung pada tanggal 1 Maret 2019.
- Kotz, S., dan Nadarajah, S. (2000). *Extreme Value Distribution: Theory and Applications*. Imperial College Press. London.
- Li, Y., Cai W., dan Campbell, E. P. (2005). Statistical modelling of extreme rainfall in southwest Australia, *Journal of Climate*, 18: 852-863.
- Mallor, F., Nualart, E., dan Omey, E. (2009). *An introduction to statistical modelling of extreme value application to calculate extreme wind speeds*. Pamplona, Hogeschool Universitei Brussel.
- McCullagh, P. (1983). Quasi-Likelihood Functions. *The Annals of Statistics*, 11(1): 59-67.
- McNeil, A.J. (1999). *Extreme Value Theory for Risk Manager*. Department Mathematic ETH Zentrum, Zurich.
- Nadarajah, S., dan D. Choi. (2007). Maximum daily rainfall in South Korea. *Journal of Earth System Science*, 116(4): 311-320.

- Nelsen, R. B., dan Flores, M. Ú. (2005). The lattice-theoretic structure of sets of bivariate copulas and quasi-copulas. *Comptes Rendus Mathematique*, 341(9): 583-586.
- Nikoloulopoulos, A.K., Joe H., dan Li, H. (2008). Extreme value properties of multivariate t copulas, *NSERC Discovery Grant: Extremes*, 12: 129-148.
- Padoan, S. A., Ribatet, M., dan Sisson, S. A. (2010). Likelihood-based inference for max-stable processes. *Journal of the American Statistical Association*, 105(489): 263-277.
- Prang, J.D. (2006). *Sebaran Nilai Ekstrem Terampat dalam Fenomena Curah Hujan*. Theses. Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor. Bogor.
- Reis D.G., Lopes, L. G., dan Mendonca, S. (2016). A dependence modelling study of extreme rainfall in Madeira Island. *Physics and Chemistry of the Earth*, 94: 85-93.
- Rinaldi, Achi. (2016). Sebaran Generalized Extreme Value (GEV) dan Generalized Pareto (GP) untuk Curah Hujan Ekstrem di Wilayah DKI Jakarta. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(1): 75-84.
- Schölzel, C., dan Friederichs P. (2008). Multivariate non-normally distributed random variables in climate research-introduction copula approach. *Nonlinier Processes Geophys*, 15: 761-722.
- Shukla, RK, Trivedi, M, dan Kumar, M. (2010). On the proficient use of GEV distribution: case study of subtropical monsoon region in India. *Anales. Computer Science Series*. VIII: 81-92.
- Tawn, J., Shooter, R., Towe, R., dan Lamb, R. (2018). Modelling spatial extreme events with environmental applications. *Spatial Statistics*, 28: 39-58.
- Tukidi. (2010). Karakter Curah Hujan di Indonesia. *Jurnal Geografi*, 7(2): 136-145.
- Wahyudi. (2012). Identifikasi Curah Hujan Ekstrem Di Kabupaten Ngawi Menggunakan Generalized Extreme Value Dan Generalized Pareto Distribution. *Skripsi*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Woo, M.-K., dan Jones, J.A.A. (2002). *Coping with hydrological extremes*. *Mitig. Adapt. Strategies Glob. Change* 7, 201e202.

Yoon, S., Kumphon B., dan Park, J.S. (2015). Spatial Modelling Extremes Rainfall in Northeast Thailand. *Procedia Environmental Sciences*. pp: 45-48.



**Lampiran 1.** Data Curah Hujan Harian (mm/hari) pada Dua Belas Pos Hujan di Kabupaten Ngawi Tahun 1989 sampai dengan 2015

<b>Tahun</b>	<b>Bulan</b>	<b>Hari</b>	<b>Kedungprahu</b>	<b>Ngrambe</b>	<b>Padas</b>	<b>Tretes</b>	<b>Bekoh</b>	<b>Widodaren</b>
1989	12	1	0	16	0	2	0	37
1989	12	2	0	3	30	27	0	4
1989	12	3	0	0	0	0	0	0
1989	12	4	0	2	10	1	0	5
1989	12	5	0	0	0	2	0	0
1989	12	6	0	0	0	0	0	0
1989	12	7	0	5	0	0	0	0
1989	12	8	0	12	4	0	0	0
1989	12	9	0	58	16	30	0	38
1989	12	10	0	17	0	4	0	0
1989	12	11	0	1	7	92	0	2
1989	12	12	0	1	0	0	0	4
1989	12	13	0	0	0	1	0	0
1989	12	14	0	8	0	1	0	3
1989	12	15	0	47	0	1	0	0
1989	12	16	0	12	0	0	0	0
1989	12	17	0	0	0	0	0	0
1989	12	18	0	3	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
2015	11	19	0	0	16	0	0	0
2015	11	20	0	0	14	0	0	0
2015	11	21	0	0	0	0	0	0
2015	11	22	0	0	0	0	0	0
2015	11	23	0	0	0	0	42	0
2015	11	24	0	0	0	0	0	0
2015	11	25	0	0	0	0	0	0
2015	11	26	0	0	0	0	25	0
2015	11	27	0	0	0	0	0	0
2015	11	28	0	0	0	0	0	0
2015	11	29	0	0	0	0	0	0
2015	11	30	0	0	0	0	26	0

**Lampiran 1.** Data Curah Hujan Harian (mm/hari) Kabupaten Ngawi Tahun 1989 sampai dengan 2015 (Lanjutan)

<b>Tahun</b>	<b>Bulan</b>	<b>Hari</b>	<b>Gemarang</b>	<b>Karangjati</b>	<b>Kendal</b>	<b>Kricak</b>	<b>Mantingan</b>	<b>Paron</b>
1989	12	1	9	5	4	0	4	0
1989	12	2	16	25	0	0	10	0
1989	12	3	0	0	0	0	0	0
1989	12	4	7	0	8	0	9	0
1989	12	5	0	5	0	0	0	0
1989	12	6	0	0	0	0	0	0
1989	12	7	0	0	0	0	0	0
1989	12	8	31	6	10	0	0	0
1989	12	9	8	48	26	0	81	0
1989	12	10	0	0	0	0	5	0
1989	12	11	0	1	55	0	6	0
1989	12	12	0	3	0	0	0	0
1989	12	13	0	0	13	0	2	0
1989	12	14	0	0	0	0	0	0
1989	12	15	0	0	0	0	24	0
1989	12	16	0	0	7	0	3	0
1989	12	17	0	0	0	0	0	0
1989	12	18	0	0	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
2015	11	19	6	25	40	0	0	5
2015	11	20	0	0	0	0	0	0
2015	11	21	0	0	0	0	0	0
2015	11	22	0	0	0	0	0	0
2015	11	23	0	0	0	0	0	0
2015	11	24	0	0	0	0	0	0
2015	11	25	0	0	0	0	0	0
2015	11	26	0	0	0	0	0	39
2015	11	27	0	0	0	0	0	13
2015	11	28	0	0	0	0	0	0
2015	11	29	0	0	0	0	0	0
2015	11	30	0	0	0	0	0	3

## Lampiran 2. Data training

Tahun	Periode	Blok	Kedungprahu	Ngrambe	Padas	Tretes	Bekoh	Widodaren
1989-1990	DJF	1	65	103	85	106	195	118
1990	MAM	2	108	93	129	101	120	63
1990	JJA	3	38	69	27	42	0	23
1990	SON	4	72	59	72	55	130	50
1990-1991	DJF	5	61	75	69	133	125	138
1991	MAM	6	73	64	71	69	75	69
1991	JJA	7	0	3	0	0	0	2
1991	SON	8	44	47	73	44	95	110
1991-1992	DJF	9	90	100	118	124	125	75
1992	MAM	10	63	68	64	57	65	87
1992	JJA	11	55	19	66	58	90	61
1992	SON	12	40	39	0	54	62	81
1992-1993	DJF	13	86	137	14	138	120	103
1993	MAM	14	112	99	17	55	90	39
1993	JJA	15	83	101	38	23	73	56
1993	SON	16	18	10	28	3	17	34
1993-1994	DJF	17	114	86	129	44	64	85
1994	MAM	18	115	67	36	76	110	62
1994	JJA	19	19	22	0	9	0	12
1994	SON	20	9	38	43	53	65	39
1994-1995	DJF	21	67	60	64	95	94	83
1995	MAM	22	69	79	62	95	97	71
1995	JJA	23	12	62	38	56	86	20
1995	SON	24	17	66	42	90	110	85
1995-1996	DJF	25	85	40	54	56	84	55
1996	MAM	26	151	57	98	182	169	282
1996	JJA	27	17	31	18	40	44	35
1996	SON	28	46	37	82	91	74	113
1996-1997	DJF	29	67	46	67	182	55	282
1997	MAM	30	69	18	68	48	47	62
1997	JJA	31	12	16	18	21	37	15
1997	SON	32	17	31	16	60	40	58
1997-1998	DJF	33	76	50	63	95	72	88
1998	MAM	34	151	57	36	71	79	63
1998	JJA	35	40	22	74	32	63	96
1998	SON	36	123	22	98	55	75	94
1998-1999	DJF	37	80	27	78	110	169	96
1999	MAM	38	92	22	72	110	87	112

<b>Tahun</b>	<b>Periode</b>	<b>Blok</b>	<b>Kedungprahu</b>	<b>Ngrambe</b>	<b>Padas</b>	<b>Tretes</b>	<b>Bekoh</b>	<b>Widodaren</b>
1999	JJA	39	47	26	32	68	36	108
1999	SON	40	80	62	54	69	60	110
1999-2000	DJF	41	71	109	40	58	110	108
2000	MAM	42	54	72	105	64	70	80
2000	JJA	43	45	72	105	25	35	74
2000	SON	44	79	71	53	101	163	109
2000-2001	DJF	45	55	81	91	70	79	115
2001	MAM	46	59	89	99	90	90	112
2001	JJA	47	19	7	98	16	0	0
2001	SON	48	43	61	87	85	81	85
2001-2002	DJF	49	55	70	89	83	81	117
2002	MAM	50	59	52	71	63	90	112
2002	JJA	51	19	0	0	0	0	0
2002	SON	52	50	54	47	68	81	76
2002-2003	DJF	53	60	124	89	83	135	117
2003	MAM	54	30	104	35	55	112	75
2003	JJA	55	6	0	7	0	0	8
2003	SON	56	73	42	15	20	97	64
2003-2004	DJF	57	62	136	78	39	100	70
2004	MAM	58	56	50	0	51	100	77
2004	JJA	59	0	0	0	0	19	65
2004	SON	60	0	2	0	3	0	43
2004-2005	DJF	61	62	104	32	71	87	95
2005	MAM	62	79	58	0	69	50	84
2005	JJA	63	22	35	0	15	18	58
2005	SON	64	80	77	0	95	41	57
2005-2006	DJF	65	62	97	0	101	45	57
2006	MAM	66	80	53	0	75	57	70
2006	JJA	67	9	0	0	0	12	0
2006	SON	68	29	15	0	3	45	56
2006-2007	DJF	69	48	40	0	75	72	91
2007	MAM	70	81	70	49	110	144	112
2007	JJA	71	38	30	0	11	60	47
2007	SON	72	45	45	50	70	54	65
2007-2008	DJF	73	116	87	0	185	96	85
2008	MAM	74	92	43	0	109	77	90
2008	JJA	75	0	20	0	16	7	110
2008	SON	76	78	35	0	32	89	92
2008-2009	DJF	77	75	47	25	83	88	90
2009	MAM	78	75	41	34	148	125	140

Tahun	Periode	Blok	Kedungprahu	Ngrambe	Padas	Tretes	Bekoh	Widodaren
2009	JJA	79	45	0	0	36	33	50
2009	SON	80	75	34	0	56	64	80
2009-2010	DJF	81	75	94	62	95	79	96
2010	MAM	82	125	64	0	86	66	97
2010	JJA	83	54	35	14	56	36	46

Tahun	Periode	Blok	Gemarang	Karangjati	Kendal	Kricak	Mantingan	Paron
1989-1990	DJF	1	68	65	167	98	130	126
1990	MAM	2	89	108	89	156	51	106
1990	JJA	3	15	37	63	23	23	4
1990	SON	4	58	75	50	55	111	90
1990-1991	DJF	5	82	70	71	67	115	58
1991	MAM	6	54	112	78	59	87	95
1991	JJA	7	0	0	0	0	5	0
1991	SON	8	86	57	51	45	69	97
1991-1992	DJF	9	76	87	155	96	92	118
1992	MAM	10	56	96	96	69	105	67
1992	JJA	11	36	51	124	34	45	55
1992	SON	12	95	70	80	98	69	81
1992-1993	DJF	13	131	126	116	87	121	122
1993	MAM	14	24	60	95	70	71	59
1993	JJA	15	75	54	88	50	55	48
1993	SON	16	23	6	7	27	26	11
1993-1994	DJF	17	61	153	71	63	67	81
1994	MAM	18	82	90	114	54	59	72
1994	JJA	19	5	0	0	0	22	0
1994	SON	20	55	42	52	55	32	80
1994-1995	DJF	21	109	108	109	98	121	81
1995	MAM	22	135	126	104	96	53	47
1995	JJA	23	135	54	25	81	21	37
1995	SON	24	90	97	89	138	115	40
1995-1996	DJF	25	115	95	66	95	82	59
1996	MAM	26	137	145	143	125	153	150
1996	JJA	27	23	46	83	12	69	31
1996	SON	28	99	62	86	61	42	85
1996-1997	DJF	29	120	76	143	85	153	127
1997	MAM	30	100	37	64	78	71	86
1997	JJA	31	98	12	93	41	31	56

<b>Tahun</b>	<b>Periode</b>	<b>Blok</b>	<b>Kedungprahu</b>	<b>Ngrambe</b>	<b>Padas</b>	<b>Tretes</b>	<b>Bekoh</b>	<b>Widodaren</b>
1997	SON	32	55	42	20	45	67	41
1997-1998	DJF	33	132	118	82	116	97	96
1998	MAM	34	58	145	89	82	65	49
1998	JJA	35	70	23	36	50	53	72
1998	SON	36	86	70	47	97	80	115
1998-1999	DJF	37	94	67	82	90	150	92
1999	MAM	38	68	92	76	80	150	60
1999	JJA	39	30	35	26	6	180	45
1999	SON	40	98	201	60	84	65	65
1999-2000	DJF	41	118	81	97	115	108	111
2000	MAM	42	92	107	92	98	240	93
2000	JJA	43	80	67	92	98	240	36
2000	SON	44	80	131	100	90	77	110
2000-2001	DJF	45	120	141	80	62	65	41
2001	MAM	46	95	87	90	80	125	72
2001	JJA	47	54	61	0	97	109	44
2001	SON	48	149	136	38	37	65	29
2001-2002	DJF	49	90	143	60	125	90	62
2002	MAM	50	80	85	95	49	47	45
2002	JJA	51	17	0	14	0	0	0
2002	SON	52	90	73	85	98	82	78
2002-2003	DJF	53	90	89	97	125	90	133
2003	MAM	54	80	39	115	68	79	105
2003	JJA	55	0	16	13	27	15	3
2003	SON	56	0	60	70	97	58	97
2003-2004	DJF	57	57	60	113	90	100	87
2004	MAM	58	94	56	97	20	80	161
2004	JJA	59	0	0	38	40	25	8
2004	SON	60	19	0	18	0	25	20
2004-2005	DJF	61	100	76	105	92	98	126
2005	MAM	62	60	135	82	95	53	74
2005	JJA	63	95	65	54	49	40	34
2005	SON	64	54	65	28	62	20	101
2005-2006	DJF	65	95	100	50	70	80	129
2006	MAM	66	25	80	69	0	70	58
2006	JJA	67	0	0	7	0	0	14
2006	SON	68	60	0	32	0	50	18
2006-2007	DJF	69	75	80	66	50	80	79
2007	MAM	70	96	63	123	60	110	65
2007	JJA	71	0	40	24	0	0	32

<b>Tahun</b>	<b>Periode</b>	<b>Blok</b>	<b>Gemarang</b>	<b>Karangjati</b>	<b>Kendal</b>	<b>Kricak</b>	<b>Mantingan</b>	<b>Paron</b>
2007	SON	72	36	50	133	76	70	88
2007-2008	DJF	73	160	70	87	150	75	115
2008	MAM	74	45	65	103	32	80	67
2008	JJA	75	0	0	0	25	80	48
2008	SON	76	45	80	84	28	55	105
2008-2009	DJF	77	40	80	97	73	81	71
2009	MAM	78	85	85	145	98	75	81
2009	JJA	79	20	85	80	21	0	12
2009	SON	80	40	70	100	42	58	61
2009-2010	DJF	81	78	85	158	70	61	96
2010	MAM	82	80	86	117	70	90	130
2010	JJA	83	40	56	57	30	34	60

### Lampiran 3. Data testing

Tahun	Periode	Blok	Kedungprahu	Ngrambe	Padas	Tretes	Bekoh	Widodaren
2010	SON	1	78	51	38	63	39	80
2010-2011	DJF	2	50	67	113	56	75	90
2011	MAM	3	70	47	124	69	59	50
2011	JJA	4	31	0	0	52	46	56
2011	SON	5	95	6	87	49	46	94
2011-2012	DJF	6	58	45	63	76	53	90
2012	MAM	7	42	76	53	47	79	45
2012	JJA	8	20	26	0	24	76	53
2012	SON	9	63	51	44	53	68	65
2012-2013	DJF	10	73	106	39	87	81	88
2013	MAM	11	85	79	63	101	82	90
2013	JJA	12	45	31	43	30	100	35
2013	SON	13	61	43	49	79	84	85
2013-2014	DJF	14	88	62	53	62	59	68
2014	MAM	15	96	120	86	79	68	58
2014	JJA	16	29	0	45	71	61	82
2014	SON	17	81	41	36	103	77	78
2014-2015	DJF	18	89	72	89	59	100	98
2015	MAM	19	57	41	38	22	60	85
2015	JJA	20	0	0	0	0	0	80
2015	SON	21	12	0	36	0	50	60

Tahun	Periode	Blok	Gemarang	Karangjati	Kendal	Kricak	Mantingan	Paron
2010	SON	1	87	82	98	68	138	65
2010-2011	DJF	2	75	84	156	35	87	96
2011	MAM	3	70	74	90	79	64	135
2011	JJA	4	82	0	63	30	65	43
2011	SON	5	80	64	94	83	68	88
2011-2012	DJF	6	70	72	119	58	126	82
2012	MAM	7	73	51	66	48	41	105
2012	JJA	8	25	4	30	22	42	30
2012	SON	9	40	23	67	46	55	39
2012-2013	DJF	10	80	69	93	58	90	125
2013	MAM	11	95	62	102	82	96	98
2013	JJA	12	45	60	78	48	23	27
2013	SON	13	41	51	66	58	56	48
2013-2014	DJF	14	75	76	34	61	93	49
2014	MAM	15	57	66	45	67	44	72



<b>Tahun</b>	<b>Periode</b>	<b>Blok</b>	<b>Gemarang</b>	<b>Karangjati</b>	<b>Kendal</b>	<b>Kricak</b>	<b>Mantingan</b>	<b>Paron</b>
2014	JJA	16	29	20	86	28	47	28
2014	SON	17	27	50	35	56	72	97
2014-2015	DJF	18	60	78	70	68	60	85
2015	MAM	19	59	85	63	89	83	190
2015	JJA	20	13	23	64	8	0	0
2015	SON	21	36	25	60	49	22	47

**Lampiran 4.** Turunan Pertama Fungsi *ln likelihood* Parameter GEV Univariat

1. Menyusun fungsi *likelihood* dari pdf distribusi GEV.

Fungsi *likelihood* yang dibentuk berdasarkan pdf GEV adalah

$$\begin{aligned}
 L(\mu, \sigma, \xi) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma, \xi) \\
 &= \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi} - 1} \exp \left( - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \right) \right\} \\
 &= \left( \frac{1}{\sigma} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi} - 1} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{\sigma} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left( \frac{1}{\xi} + 1 \right)} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \right)
 \end{aligned}$$

2. Menyusun fungsi *ln likelihood*

$$\ell(\mu, \sigma, \xi) = \ln [L(\mu, \sigma, \xi)]$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln \left\{ \left( \frac{1}{\sigma} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left( \frac{1}{\xi} + 1 \right)} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \right) \right\} \\
 \ell(\mu, \sigma, \xi) &= \ln \left\{ \sigma^{-n} \prod_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left( \frac{1}{\xi} + 1 \right)} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \right) \right\} \\
 &= -n \ln \sigma + \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\left( \frac{1}{\xi} + 1 \right)} - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \\
 &= -n \ln \sigma - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}}
 \end{aligned}$$

3. Turunan fungsi *ln likelihood* terhadap parameter  $\mu, \sigma, \xi$

Turunan terhadap parameter  $\mu$

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} = \frac{-n \ln \sigma - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}}}{\partial \mu}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \ln \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1} \frac{\xi}{\sigma} - \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}-1} \frac{\xi}{\sigma} \\
&= -\left(\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\right) \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)}
\end{aligned}$$

Turunan pertama terhadap parameter disamadengankan nol,

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} = 0$$

sehingga bentuk persamaannya sebagai berikut:

$$-\left(\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\right) \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)} = 0$$

$$\left(\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)} = \frac{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)}}{\left(\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\right)}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) = \frac{\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}}{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)}}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\xi x_i}{\sigma} - \frac{\xi \mu}{\sigma}\right) = \frac{\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}}{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)}}$$

$$n + n \frac{\xi x_i}{\sigma} - n \frac{\xi \mu}{\sigma} = \frac{\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}}{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)}}$$

$$-n \frac{\xi \mu}{\sigma} = n - n \frac{\xi x_i}{\sigma} \frac{\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}}{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)}}$$

$$-n \xi \mu = n - n \frac{\xi x_i}{\sigma} \frac{\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}}{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)}} \sigma$$

$$\hat{\mu} = \frac{n - n \frac{\xi x_i}{\sigma} \frac{\frac{\xi}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\left( \frac{1}{\xi} + 1 \right)} \sigma}{-n\xi}$$

Turunan terhadap parameter  $\sigma$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} &= \frac{-n \ln \sigma - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}}}{\partial \sigma} \\ &= -n \left( \frac{1}{\sigma} \right) - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) \left( \sum_{i=1}^n \left( - \frac{\xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) \right) - \left( \sum_{i=1}^n \left( - \frac{\left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right)}{\xi \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)} \right) \right) \end{aligned}$$

Turunan pertama terhadap parameter disamadengankan nol,

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} = 0$$

sehingga bentuk persamaannya sebagai berikut:

$$-n \left( \frac{1}{\sigma} \right) - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) \left( \sum_{i=1}^n \left( - \frac{\xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) \right) - \left( \sum_{i=1}^n \left( - \frac{\left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right)}{\xi \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)} \right) \right) = 0$$

$$\frac{n}{\sigma} = - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) \left( \sum_{i=1}^n \left( - \frac{\xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) \right) - \left( \sum_{i=1}^n \left( - \frac{\left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right)}{\xi \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)} \right) \right)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{n}{- \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) \left( \sum_{i=1}^n \left( - \frac{\xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) \right) - \left( \sum_{i=1}^n \left( - \frac{\left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right)}{\xi \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)} \right) \right)}$$

Turunan terhadap parameter  $\xi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} &= \frac{-n \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}}}{\partial \xi} \\ &= \left(\frac{1}{\xi^2}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right] - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right) - \\ &\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}} \left( -\frac{\ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)}{\xi^2} + \frac{x_i - \mu}{\sigma \xi \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right) \end{aligned}$$

Turunan pertama terhadap parameter disamadengankan nol,

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} = 0$$

sehingga bentuk persamaannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\xi^2}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right] - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right) - \\ \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}} \left( -\frac{\ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)}{\xi^2} + \frac{x_i - \mu}{\sigma \xi \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right) &= 0 \\ \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right) &= \left(\frac{1}{\xi^2}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right] - \\ \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}} \left( -\frac{\ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)}{\xi^2} + \frac{x_i - \mu}{\sigma \xi \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) &= \frac{\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right] - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}} \left( -\frac{\ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)}{\xi^2} + \frac{x_i - \mu}{\sigma \xi \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right)}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right)} \\
\frac{1}{\xi} &= \frac{\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right] - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}} \left( -\frac{\ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)}{\xi^2} + \frac{x_i - \mu}{\sigma \xi \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right)}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right)} \\
\hat{\xi} &= \frac{1}{\frac{\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right] - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}} \left( -\frac{\ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)}{\xi^2} + \frac{x_i - \mu}{\sigma \xi \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right)}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \right)}
\end{aligned}$$

**Lampiran 5.** Turunan Pertama Fungsi Ln *Pseudo Maximum Likelihood* Terhadap Parameter  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$ , dan  $\hat{\xi}$

Turunan fungsi ln likelihood terhadap parameternya

- Turunan fungsi ln likelihood terhadap parameter  $\mu$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial(\mu)} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left\{ -\ln(\sigma_j) - \frac{1}{\xi_j} \ln \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right] \right\} - \left\{ \frac{1}{\xi_j} \ln \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right] \right\} + \left\{ -\ln(\sigma_k) - \frac{1}{\xi_k} \ln \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right] \right\} - \left\{ \frac{1}{\xi_k} \ln \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right] \right\}. \\ &\ln \Gamma \left( \frac{v+d}{2} \right) - \ln \Gamma \left( \frac{v}{2} \right) \sqrt{v\pi} - \frac{v+d}{2} \ln \left[ v + \left( T_v^{-1} \left( \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \right\} \right) \right) \right] \left( T_v^{-1} \left( \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \right\} \right) \right)^t + \ln \rho(h)^{-1} + \\ &\ln T_v^{-1} \left( \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \right\} \right) \left( \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \right\} \right) + \frac{v+d}{2} \ln(v) \cdot -0.5 \ln |\rho(h)| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_j} \right\} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \right)} \left\{ \frac{1}{\sigma_j} (-\xi_j) \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j} - 1} \right\} \cdot \frac{\xi_j}{\sigma_j} + \left( \left\{ \frac{1}{\xi_j} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j} - 1} \right\} \cdot \frac{\xi_j}{\sigma_j} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_k} \right\} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}}} \left\{ \frac{1}{\sigma_k} (-\xi_k) \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k} - 1} \right\} \cdot \frac{\xi_k}{\sigma_k} + \left( \left\{ \frac{1}{\xi_k} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k} - 1} \right\} \cdot \frac{\xi_k}{\sigma_k} \right) \right) \right]$$

- Turunan fungsi ln likelihood terhadap parameter  $\sigma$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial(\sigma)} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left\{ -\ln(\sigma_j) - \frac{1}{\xi_j} \ln \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right] \right\} - \left\{ \frac{1}{\xi_j} \ln \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right] \right\} + \left\{ -\ln(\sigma_k) - \frac{1}{\xi_k} \ln \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right] \right\} - \left\{ \frac{1}{\xi_k} \ln \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right] \right\}. \\ &\ln \Gamma \left( \frac{\nu + d}{2} \right) - \ln \Gamma \left( \frac{\nu}{2} \right) \sqrt{\nu \pi} - \frac{\nu + d}{2} \ln \left[ \nu + \left( T_\nu^{-1} \left( \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \right\} \right) \right) \right] \left( T_\nu^{-1} \left( \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \right\} \right) \right)^t + \ln \rho(h)^{-1} + \\ &\ln T_\nu^{-1} \left( \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \right\} \right) \left( T_\nu^{-1} \left( \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \right\} \right) \right) + \frac{\nu + d}{2} \ln(\nu) \cdot -0.5 \ln |\rho(h)| \end{aligned}$$



$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_j} \right\} \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}}} \right)^{-\frac{1}{\xi_j}} \left\{ -\xi_j \left[ \frac{1}{\sigma_j} + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{(\sigma_j)^2} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j} - 1} \right\} \cdot \left( \frac{1}{(\sigma_j)^2} + \frac{2(\sigma_j) \cdot \xi_j \cdot \xi_j (x_{ji} - \mu_j)}{(\sigma_j)^4} \right) + \left( \left\{ \frac{1}{\xi_j} \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j} - 1} \right\} \cdot \left( -\xi_j \left[ \frac{1}{\sigma_j} + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{(\sigma_j)^2} \right) \right] \right) \right) \right]$$

$$\left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_k} \right\} \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}}} \right)^{-\frac{1}{\xi_k}} \left\{ -\xi_k \left[ \frac{1}{\sigma_k} + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{(\sigma_k)^2} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k} - 1} \right\} \cdot \left( \frac{1}{(\sigma_k)^2} + \frac{2(\sigma_k) \cdot \xi_k \cdot \xi_k (x_{ki} - \mu_k)}{(\sigma_k)^4} \right) + \left( \left\{ \frac{1}{\xi_k} \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k} - 1} \right\} \cdot \left( -\xi_k \left[ \frac{1}{\sigma_k} + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{(\sigma_k)^2} \right) \right] \right) \right) \right]$$

- Turunan fungsi ln likelihood terhadap parameter  $\xi$

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial(\xi)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left\{ -\ln(\sigma_j) - \frac{1}{\xi_j} \ln \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right] \right\} - \left\{ \frac{1}{\xi_j} \ln \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right] \right\} + \left\{ -\ln(\sigma_k) - \frac{1}{\xi_k} \ln \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right] \right\} - \left\{ \frac{1}{\xi_k} \ln \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right] \right\} \cdot$$

$$\ln \Gamma \left( \frac{\nu + d}{2} \right) - \ln \Gamma \left( \frac{\nu}{2} \right) \sqrt{\nu\pi} - \frac{\nu + d}{2} \ln \left[ \nu + \left( T_\nu^{-1} \left( \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \right\} \right) \right) T_\nu^{-1} \left( \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \right\} \right) \right]^t + \ln \rho(h)^{-1} +$$

$$\ln T_v^{-1} \left\{ \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \right\} \right\} T_v^{-1} \left\{ \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{jk} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \right\} \right\} + \frac{v+d}{2} \ln(v) \cdot -0.5 \ln |\rho(h)|$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left[ \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_j} \right\} \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}}} \left\{ \left[ \frac{1}{\sigma_j} + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{(\sigma_j)^2} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \cdot \left( \ln \left[ \frac{1}{\sigma_j} + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{(\sigma_j)^2} \right) \right] \right) \cdot \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{(\sigma_j)^2} \right) \right\} + \left\{ \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_j}} \cdot \left( \ln \left[ 1 + \xi_j \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right] \right) \cdot \left( - \left( \frac{x_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right) \right\} \right]$$

$$\left[ \left( \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sigma_k} \right\} \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}}} \left\{ \left[ \frac{1}{\sigma_k} + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{(\sigma_k)^2} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \cdot \left( \ln \left[ \frac{1}{\sigma_k} + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{(\sigma_k)^2} \right) \right] \right) \cdot \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{(\sigma_k)^2} \right) \right\} + \left\{ \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right]^{\frac{1}{\xi_k}} \cdot \left( \ln \left[ 1 + \xi_k \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right] \right) \cdot \left( - \left( \frac{x_{ki} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right) \right\} \right)$$

**Lampiran 6.** Tabel Anderson Darling  $A_{tabel}^2$ 

n	$\alpha$							
	0,25	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
10	1,249	1,6277	1,9518	2,5121	3,099	3,9083	4,5175	5,9897
20	1,25	1,629	1,9385	2,502	3,0731	3,8995	4,5117	5,9852
30	1,2457	1,621	1,9313	2,513	3,1111	3,9673	4,5309	5,8924
40	1,245	1,6173	1,9362	2,5042	3,1047	3,9397	4,5889	6,1275
50	1,2425	1,6163	1,9277	2,4941	3,0933	3,92	4,5211	5,9437
60	1,2464	1,6225	1,9367	2,5044	3,0776	3,9234	4,4858	6,0808
70	1,2515	1,6245	1,9304	2,4959	3,0889	3,8673	4,5326	5,9428
80	1,2384	1,6148	1,9235	2,4951	3,0778	3,8458	4,4808	5,9249
90	1,2461	1,6177	1,9326	2,5064	3,102	3,9239	4,5856	6,0412
100	1,2399	1,6235	1,9325	2,4901	3,0655	3,8319	4,4068	5,8987
<i>Mean</i>	1,2453	1,6211	1,9355	2,4986	3,0916	3,9033	4,5416	6,0266

**Lampiran 7.** Transformasi ke unit student's t copula

<b>Blok</b>	<b>Kedungprahu</b>	<b>Ngrambe</b>	<b>Padas</b>	<b>Tretes</b>	<b>Bekoh</b>	<b>Widodaren</b>
1	0.5891	0.9246	0.8703	0.8362	0.9966	0.8209
2	0.9143	0.8805	0.9715	0.8102	0.8576	0.4034
3	0.2798	0.7013	0.3794	0.3068	0.0294	0.0747
4	0.6629	0.5948	0.8047	0.4361	0.8995	0.2770
5	0.5442	0.7566	0.7861	0.9319	0.8799	0.8955
6	0.6729	0.6501	0.7987	0.5721	0.5344	0.4620
7	0.0275	0.0452	0.1012	0.0335	0.0294	0.0120
8	0.3464	0.4504	0.8106	0.3263	0.7036	0.7804
9	0.8168	0.9130	0.9578	0.9073	0.8799	0.5188
10	0.5668	0.6914	0.7519	0.4561	0.4413	0.6236
11	0.4748	0.1415	0.7661	0.4660	0.6645	0.3837
12	0.3015	0.3518	0.1012	0.4260	0.4132	0.5729
13	0.7876	0.9895	0.2296	0.9429	0.8576	0.7392
14	0.9292	0.9088	0.2627	0.4361	0.6645	0.1801
15	0.7638	0.9170	0.5079	0.1446	0.5159	0.3346
16	0.1051	0.0786	0.3913	0.0424	0.0821	0.1418
17	0.9358	0.8397	0.9715	0.3263	0.4319	0.6072
18	0.9390	0.6814	0.4852	0.6344	0.8046	0.3936
19	0.1116	0.1674	0.1012	0.0649	0.0294	0.0322
20	0.0573	0.3397	0.5628	0.4160	0.4413	0.1801
21	0.6108	0.6061	0.7519	0.7751	0.6960	0.5902
22	0.6321	0.7896	0.7371	0.7751	0.7186	0.4812
23	0.0711	0.6284	0.5079	0.4461	0.6315	0.0607
24	0.0988	0.6711	0.5521	0.7424	0.8046	0.6072
25	0.7798	0.3640	0.6710	0.4461	0.6145	0.3249
26	0.9937	0.5717	0.9156	0.9903	0.9823	0.9990
27	0.0988	0.2585	0.2739	0.2877	0.2530	0.1491
28	0.3693	0.3277	0.8572	0.7492	0.5252	0.7964
29	0.6108	0.4380	0.7729	0.9903	0.3485	0.9990
30	0.6321	0.1334	0.7796	0.3659	0.2780	0.3936
31	0.0711	0.1180	0.2739	0.1308	0.1987	0.0414
32	0.0988	0.2585	0.2515	0.4858	0.2212	0.3542
33	0.7020	0.4875	0.7446	0.7751	0.5067	0.6317
34	0.9937	0.5717	0.4852	0.5904	0.5706	0.4034
35	0.3015	0.1674	0.8163	0.2152	0.4225	0.6923
36	0.9600	0.1674	0.9156	0.4361	0.5344	0.6778
37	0.7383	0.2158	0.8379	0.8549	0.9823	0.6923
38	0.8304	0.1674	0.8047	0.8549	0.6399	0.7912
39	0.3809	0.2056	0.4386	0.5628	0.1915	0.7692

<b>Blok</b>	<b>Kedungprahu</b>	<b>Ngrambe</b>	<b>Padas</b>	<b>Tretes</b>	<b>Bekoh</b>	<b>Widodaren</b>
40	0.7383	0.6284	0.6710	0.5721	0.3945	0.7804
41	0.6528	0.9441	0.5302	0.4660	0.8046	0.7692
42	0.4630	0.7298	0.9335	0.5249	0.4881	0.5641
43	0.3578	0.7298	0.9335	0.1591	0.1844	0.5095
44	0.7295	0.7205	0.6620	0.8102	0.9758	0.7748
45	0.4748	0.8049	0.8934	0.5813	0.5706	0.8065
46	0.5213	0.8583	0.9184	0.7424	0.6645	0.7912
47	0.1116	0.0627	0.9156	0.0999	0.0294	0.0096
48	0.3350	0.6174	0.8785	0.7066	0.5884	0.6072
49	0.4748	0.7110	0.8862	0.6914	0.5884	0.8162
50	0.5213	0.5119	0.7987	0.5152	0.6645	0.7912
51	0.1116	0.0347	0.1012	0.0335	0.0294	0.0096
52	0.4160	0.5361	0.6043	0.5628	0.5884	0.5280
53	0.5328	0.9757	0.8862	0.6914	0.9167	0.8162
54	0.1996	0.9281	0.4736	0.4361	0.8161	0.5188
55	0.0455	0.0347	0.1592	0.0335	0.0294	0.0223
56	0.6729	0.3885	0.2405	0.1243	0.7186	0.4132
57	0.5556	0.9887	0.8379	0.2782	0.7401	0.4716
58	0.4865	0.4875	0.1012	0.3959	0.7401	0.5372
59	0.0275	0.0347	0.1012	0.0335	0.0910	0.4230
60	0.0275	0.0415	0.1012	0.0424	0.0294	0.2135
61	0.5556	0.9281	0.4386	0.5904	0.6399	0.6851
62	0.7295	0.5833	0.1012	0.5721	0.3038	0.5988
63	0.1327	0.3041	0.1012	0.0943	0.0864	0.3542
64	0.7383	0.7735	0.1012	0.7751	0.2290	0.3444
65	0.5556	0.9000	0.1012	0.8102	0.2612	0.3444
66	0.7383	0.5241	0.1012	0.6258	0.3668	0.4716
67	0.0573	0.0347	0.1012	0.0335	0.0625	0.0096
68	0.1904	0.1107	0.1012	0.0424	0.2612	0.3346
69	0.3926	0.3640	0.1012	0.6258	0.5067	0.6553
70	0.7470	0.7110	0.6242	0.8549	0.9419	0.7912
71	0.2798	0.2475	0.1012	0.0739	0.3945	0.2492
72	0.3578	0.4256	0.6339	0.5813	0.3394	0.4230
73	0.9420	0.8461	0.1012	0.9915	0.7112	0.6072
74	0.8304	0.4009	0.1012	0.8504	0.5526	0.6475
75	0.0275	0.1499	0.1012	0.0999	0.0464	0.7804
76	0.7205	0.3041	0.1012	0.2152	0.6564	0.6629
77	0.6925	0.4504	0.3556	0.6914	0.6482	0.6475
78	0.6925	0.3762	0.4620	0.9605	0.8799	0.9011
79	0.3578	0.0347	0.1012	0.2505	0.1706	0.2770
80	0.6925	0.2925	0.1012	0.4461	0.4319	0.5641
81	0.6925	0.8857	0.7371	0.7751	0.5706	0.6923

<b>Blok</b>	<b>Kedungprahu</b>	<b>Ngrambe</b>	<b>Padas</b>	<b>Tretes</b>	<b>Bekoh</b>	<b>Widodaren</b>
82	0.9642	0.6501	0.1012	0.7140	0.4506	0.6993
83	0.4630	0.3041	0.2296	0.4461	0.1915	0.2401

<b>Blok</b>	<b>Gemarang</b>	<b>Karangjati</b>	<b>Kendal</b>	<b>Kricak</b>	<b>Mantingan</b>	<b>Paron</b>
1	0.4831	0.4574	0.9950	0.8064	0.8811	0.9300
2	0.6836	0.8068	0.6220	0.9951	0.3244	0.8265
3	0.0850	0.2074	0.3737	0.1352	0.0976	0.0374
4	0.3862	0.5516	0.2609	0.4047	0.8038	0.7012
5	0.6193	0.5049	0.4494	0.5279	0.8229	0.3833
6	0.3489	0.8294	0.5172	0.4455	0.6525	0.7441
7	0.0389	0.0301	0.0280	0.0393	0.0256	0.0288
8	0.6565	0.3813	0.2690	0.3068	0.4981	0.7604
9	0.5616	0.6571	0.9827	0.7920	0.6894	0.8957
10	0.3674	0.7274	0.6852	0.5484	0.7721	0.4750
11	0.2012	0.3256	0.8834	0.2118	0.2677	0.3537
12	0.7351	0.5049	0.5365	0.8064	0.4981	0.6169
13	0.9447	0.8941	0.8373	0.7199	0.8486	0.9140
14	0.1269	0.4097	0.6764	0.5585	0.5167	0.3933
15	0.5518	0.3532	0.6127	0.3547	0.3632	0.2876
16	0.1217	0.0449	0.0421	0.1607	0.1159	0.0571
17	0.4148	0.9655	0.4494	0.4867	0.4793	0.6169
18	0.6193	0.6815	0.8244	0.3946	0.4022	0.5264
19	0.0513	0.0301	0.0280	0.0393	0.0919	0.0288
20	0.3581	0.2472	0.2772	0.4047	0.1577	0.6071
21	0.8383	0.8068	0.7897	0.8064	0.8486	0.6169
22	0.9570	0.8941	0.7518	0.7920	0.3438	0.2786
23	0.9570	0.3532	0.1030	0.6661	0.0864	0.1962
24	0.6924	0.7347	0.6220	0.9754	0.8229	0.2194
25	0.8742	0.7200	0.4017	0.7845	0.6128	0.3933
26	0.9623	0.9504	0.9578	0.9436	0.9378	0.9862
27	0.1217	0.2811	0.5654	0.0790	0.4981	0.1541
28	0.7672	0.4288	0.5939	0.4661	0.2404	0.6553
29	0.9001	0.5608	0.9578	0.7024	0.9378	0.9337
30	0.7749	0.2074	0.3830	0.6377	0.5167	0.6647
31	0.7594	0.0647	0.6586	0.2704	0.1503	0.3635
32	0.3581	0.2472	0.0820	0.3068	0.4793	0.2274
33	0.9480	0.8599	0.5558	0.9096	0.7235	0.7523
34	0.3862	0.9504	0.6220	0.6753	0.4603	0.2968
35	0.5027	0.1152	0.1616	0.3547	0.3438	0.5264
36	0.6565	0.5049	0.2375	0.7993	0.5962	0.8804
37	0.7268	0.4765	0.5558	0.7451	0.9322	0.7187

<b>Blok</b>	<b>Gemarang</b>	<b>Karangjati</b>	<b>Kendal</b>	<b>Kricak</b>	<b>Mantingan</b>	<b>Paron</b>
38	0.4831	0.6972	0.4978	0.6567	0.9322	0.4034
39	0.1614	0.1924	0.1076	0.0566	0.9722	0.2610
40	0.7594	0.9983	0.3463	0.6935	0.4603	0.4544
41	0.8902	0.6058	0.6939	0.9051	0.7884	0.8580
42	0.7098	0.8008	0.6496	0.8064	0.9960	0.7273
43	0.6002	0.4765	0.6496	0.8064	0.9960	0.1888
44	0.6002	0.9121	0.7194	0.7451	0.5705	0.8520
45	0.9001	0.9411	0.5365	0.4764	0.4603	0.2274
46	0.7351	0.6571	0.6313	0.6567	0.8639	0.5264
47	0.3489	0.4192	0.0280	0.7993	0.7937	0.2524
48	0.9855	0.9277	0.1742	0.2361	0.4603	0.1414
49	0.6924	0.9459	0.3463	0.9436	0.6750	0.4237
50	0.6002	0.6404	0.6764	0.3450	0.2863	0.2610
51	0.0933	0.0301	0.0611	0.0393	0.0157	0.0288
52	0.6924	0.5331	0.5845	0.8064	0.6128	0.5872
53	0.6924	0.6735	0.6939	0.9436	0.6750	0.9530
54	0.6002	0.2229	0.8309	0.5381	0.5877	0.8197
55	0.0389	0.0808	0.0580	0.1607	0.0578	0.0351
56	0.0389	0.4097	0.4398	0.7993	0.3925	0.7604
57	0.3767	0.4097	0.8177	0.7451	0.7426	0.6740
58	0.7268	0.3719	0.6939	0.1179	0.5962	0.9955
59	0.0389	0.0301	0.1742	0.2616	0.1096	0.0479
60	0.1022	0.0301	0.0745	0.0393	0.1096	0.0927
61	0.7749	0.5608	0.7596	0.7613	0.7300	0.9300
62	0.4052	0.9248	0.5558	0.7845	0.3438	0.5469
63	0.7351	0.4574	0.2939	0.3450	0.2228	0.1744
64	0.3489	0.4574	0.1173	0.4764	0.0811	0.7912
65	0.7351	0.7558	0.2609	0.5585	0.5962	0.9406
66	0.1323	0.5969	0.4302	0.0393	0.5074	0.3833
67	0.0389	0.0301	0.0421	0.0393	0.0157	0.0676
68	0.4052	0.0301	0.1383	0.0393	0.3148	0.0837
69	0.5518	0.5969	0.4017	0.3547	0.5962	0.5972
70	0.7433	0.4383	0.8781	0.4558	0.7988	0.4544
71	0.0389	0.2309	0.0985	0.0393	0.0157	0.1607
72	0.2012	0.3165	0.9246	0.6183	0.5074	0.6832
73	0.9958	0.5049	0.6034	0.9909	0.5529	0.8804
74	0.2703	0.4574	0.7439	0.1964	0.5962	0.4750
75	0.0389	0.0301	0.0280	0.1476	0.5962	0.2876
76	0.2703	0.5969	0.5749	0.1675	0.3632	0.8197
77	0.2306	0.5969	0.6939	0.5887	0.6045	0.5162
78	0.6473	0.6404	0.9630	0.8064	0.5529	0.6169
79	0.1069	0.6404	0.5365	0.1235	0.0157	0.0605

<b>Blok</b>	<b>Gemarang</b>	<b>Karangjati</b>	<b>Kendal</b>	<b>Kricak</b>	<b>Mantingan</b>	<b>Paron</b>
80	0.2306	0.5049	0.7194	0.2794	0.3925	0.4135
81	0.5810	0.6404	0.9868	0.5585	0.4217	0.7523
82	0.6002	0.6488	0.8435	0.5585	0.6750	0.9439
83	0.2306	0.3719	0.3197	0.1816	0.1730	0.4034



## Lampiran 8. Output Estimasi Parameter GEV Univariat

```
GEV fit
-----
Response variable: Kedungprahu

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization
routine):
Location (mu): 46.63592
Scale (sigma): 32.92
Shape (xi): -0.2342513

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept Gumbel hypothesis.
likelihood ratio statistic is 4.670051 > 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.03069302

Convergence successful![1] "Convergence successful!"
[1] "Maximum Likelihood Estimates:"
      MLE      Stand. Err.
MU: (identity) 45.87321 3.87516
SIGMA: (identity) 31.83715 2.71732
Xi: (identity) -0.18253 0.07020
```

```
GEV fit
-----
Response variable: Ngrambe

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization
routine):
Location (mu): 40.08583
Scale (sigma): 31.03555
Shape (xi): -0.1637215

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not reject Gumbel hypothesis.
likelihood ratio statistic is 2.826504 < 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.09271999

Convergence successful![1] "Convergence successful!"
[1] "Maximum Likelihood Estimates:"
      MLE      Stand. Err.
MU: (identity) 40.31868 3.74198
SIGMA: (identity) 30.07970 2.69522
Xi: (identity) -0.16285 0.08591
```

GEV fit

-----  
Response variable: Padas

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization routine):

Location (mu): 26.61355

Scale (sigma): 32.79106

Shape (xi): -0.07621279

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not reject Gumbel hypothesis. likelihood ratio statistic is 0.03729008 < 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.8468756

Convergence successful![1] "Convergence successful!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

	MLE	Stand. Err.
MU: (identity)	26.03293	4.64004
SIGMA: (identity)	30.94695	3.80201
Xi: (identity)	-0.03604	0.17624

GEV fit

-----  
Response variable: Tretes

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization routine):

Location (mu): 48.4371

Scale (sigma): 37.86738

Shape (xi): -0.1427407

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not reject Gumbel hypothesis. likelihood ratio statistic is 1.670722 < 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.1961618

Convergence successful![1] "Convergence successful!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

	MLE	Stand. Err.
MU: (identity)	48.20154	4.52502
SIGMA: (identity)	36.84957	3.18291
Xi: (identity)	-0.10944	0.07439

GEV fit  
-----

Response variable: Bekoh

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization routine):  
 Location (mu): 57.65458  
 Scale (sigma): 40.9484  
 Shape (xi): -0.2373251

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept Gumbel hypothesis.  
 likelihood ratio statistic is 5.860831 > 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.01548149

Convergence successful![1] "Convergence successful!"  
 [1] "Maximum Likelihood Estimates:"

	MLE	Stand. Err.
MU: (identity)	57.12203	4.84041
SIGMA: (identity)	40.01547	3.32936
Xi: (identity)	-0.19352	0.06475

GEV fit  
-----

Response variable: Widodaren

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization routine):  
 Location (mu): 61.85809  
 Scale (sigma): 37.05124  
 Shape (xi): -0.1487353

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not reject Gumbel hypothesis.  
 likelihood ratio statistic is 0.6633144 < 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.4153923

Convergence successful![1] "Convergence successful!"  
 [1] "Maximum Likelihood Estimates:"

	MLE	Stand. Err.
MU: (identity)	59.39116	4.45493
SIGMA: (identity)	37.38978	3.02000
Xi: (identity)	-0.04298	0.04833

GEV fit

Response variable: Gemarang

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization routine):

Location (mu): 56.64712

Scale (sigma): 40.81175

Shape (xi): -0.3490982

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept Gumbel hypothesis. likelihood ratio statistic is 11.39661 > 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.0007357818

Convergence successful![1] "Convergence successful!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

	MLE	Stand. Err.
MU: (identity)	56.05482	4.76342
SIGMA: (identity)	39.44495	3.40812
Xi: (identity)	-0.30982	0.06920

GEV fit

Response variable: Karangjati

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization routine):

Location (mu): 56.35457

Scale (sigma): 39.48728

Shape (xi): -0.2260999

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept Gumbel hypothesis. likelihood ratio statistic is 6.315776 > 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.01196684

Convergence successful![1] "Convergence successful!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

	MLE	Stand. Err.
MU: (identity)	55.57297	4.71014
SIGMA: (identity)	39.26958	3.24422
Xi: (identity)	-0.18901	0.05856

GEV fit

-----  
Response variable: Kendal

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization routine):

Location (mu): 63.36711  
Scale (sigma): 41.22143  
Shape (xi): -0.3640253

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept Gumbel hypothesis.  
likelihood ratio statistic is 12.55949 > 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.0003941988

Convergence successful![1] "Convergence successful!"  
[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

	MLE	Stand. Err.
MU: (identity)	62.36427	4.82163
SIGMA: (identity)	40.00261	3.40676
Xi: (identity)	-0.30736	0.06729

GEV fit

-----  
Response variable: Kricak

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization routine):

Location (mu): 52.07011  
Scale (sigma): 38.67004  
Shape (xi): -0.3218045

Likelihood ratio test (5% level) for xi=0 does not accept Gumbel hypothesis.  
likelihood ratio statistic is 9.112824 > 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.002538237

Convergence successful![1] "Convergence successful!"  
[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

	MLE	Stand. Err.
MU: (identity)	51.33189	4.49563
SIGMA: (identity)	37.12957	3.18630
Xi: (identity)	-0.27089	0.06911

GEV fit

-----  
Response variable: Mantingan

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization routine):

Location (mu): 55.69777

Scale (sigma): 37.41362

Shape (xi): -0.05553131

Likelihood ratio test (5% level) for  $\xi=0$  does not reject Gumbel hypothesis. likelihood ratio statistic is 0.4047194 < 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.524662

Convergence successful![1] "Convergence successful!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

	MLE	Stand. Err.
MU: (identity)	55.48075	4.57520
SIGMA: (identity)	37.74159	3.21381
Xi: (identity)	-0.04469	0.06581

GEV fit

-----  
Response variable: Paron

L-moments (stationary case) estimates (used to initialize MLE optimization routine):

Location (mu): 56.31366

Scale (sigma): 38.25501

Shape (xi): -0.278483

Likelihood ratio test (5% level) for  $\xi=0$  does not accept Gumbel hypothesis. likelihood ratio statistic is 8.99691 > 3.841459 1 df chi-square critical value.

p-value for likelihood-ratio test is 0.002704364

Convergence successful![1] "Convergence successful!"

[1] "Maximum Likelihood Estimates:"

	MLE	Stand. Err.
MU: (identity)	56.44559	4.52393
SIGMA: (identity)	37.24350	3.23583
Xi: (identity)	-0.27562	0.07254

## Lampiran 9. Syntax Program R “extRemes” dan “SpatialExtremes”

- Untuk memperoleh nilai Estimasi Parameter Univariat menggunakan *software* R versi 2.15.3. Sebelumnya install *package* untuk mendukung proses analisis dengan beberapa versinya:
  - library(ismev) versi 1.36
  - library(Lmoments) versi 1.1-4
  - library(extRemes) versi 1.63
- Setelah mengetik *package* tersebut, maka akan muncul kotak dialog bernama *Extremes Toolkit*.
- Kemudian klik menu *File, Read Data*, panggil data yang telah di *save* pada *notepad* (Baris paling atas diberi nama stasiun)
- Setelah itu muncul kotak dialog kembali, *file type = common*, klik *Header, save as* (beri nama file yang diinginkan), klik OK.
- Lalu klik *analyze*, pilih *Generalized Extreme Value (GEV) Distribution*, pada *data object* (pilih dan klik *file* yang telah dinamakan sebelumnya), klik *optim.method* (disesuaikan dengan pilihan), klik *plot diagnostic* dan *use L-moments with MLE, Respons: data* yang dipanggil dari *notepad*. (Pastikan semua pilihan tersebut dalam posisi di blok), klik OK.
- Lakukan dengan langkah yang sama menggunakan pos hujan yang berbeda untuk mendapatkan masing-masing nilai estimasi parameter univariat pos hujan.

```
#Proses Spatial Extreme Value dengan Student t Copula
#package
library(extRemes)
library(nsRFA)
library(SpatialExtremes)
library(copula)
library(in2extRemes)

setwd("E:/curah_hujan/")
data<-read.table("tik_kordinat4.csv",header=TRUE,sep=";")
data<-as.matrix(data)
loc=data
colnames(loc)<-c("longitude","latitude")
print(loc)
#histogram1<-plot(data)

#input data hasil BM pos hujan Des1989 - Nov2015
setwd("E:/curah_hujan/pos_hujan/Data1989-2015/data_training1989")
p1<-as.matrix(read.table("1.Kedungprahu.txt",header=T))
p2<-as.matrix(read.table("2.Ngrambe.txt",header=T))
p3<-as.matrix(read.table("3.Padas.txt",header=T))
p4<-as.matrix(read.table("4.Tretes.txt",header=T))
p5<-as.matrix(read.table("5.Bekoh.txt",header=T))
p6<-as.matrix(read.table("6.Widodaren.txt",header=T))
p7<-as.matrix(read.table("7.Gemarang.txt",header=T))
p8<-as.matrix(read.table("8.Karangjati.txt",header=T))
p9<-as.matrix(read.table("9.Kendal.txt",header=T))
p10<-as.matrix(read.table("10.Kricak.txt",header=T))
p11<-as.matrix(read.table("11.Mantingan.txt",header=T))
p12<-as.matrix(read.table("12.Paron.txt",header=T))
```

```

BM<-matrix(c(p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9,p10,p11,p12),ncol=12)
colnames(BM)<-
c("KEDUNGPRAHU","NGRAMBE","PADAS","TRETES","BEKOH","WIDODARE
N","GEMARANG","KARANGJATI","KENDAL","KRICAK","MANTINGAN","PA
RON")
print(BM)
#View(BM)

#Uji Anderson Darling = Uji kesesuaian distribusi GEV
F1<-F.GEV(p1,45.87321,31.83715,-0.18253)
A1<-A2(sort(F.GEV(p1,45.87321,31.83715,-0.18253)))
AD1<-A2_GOFlaio(p1,dist="GEV")
print(AD1)

F2<-F.GEV(p2,40.31868,30.07970,-0.16285)
A2<-A2(sort(F.GEV(p2,40.31868,30.07970,-0.16285)))
AD2<-A2_GOFlaio(p2,dist="GEV")
print(AD2)

F3<-F.GEV(p3,26.03293,30.94695,-0.03604)
A3<-A2(sort(F.GEV(p3,26.03293,30.94695,-0.03604)))
AD3<-A2_GOFlaio(p3,dist="GEV")
print(AD3)
F4<-F.GEV(p4,48.20154,36.84957,-0.10944)
A4<-A2(sort(F.GEV(p4, 48.20154,36.84957,-0.10944)))
AD4<-A2_GOFlaio(p4,dist="GEV")
print(AD4)

F5<-F.GEV(p5,57.12203,40.01547,-0.19352)
A5<-A2(sort(F.GEV(p5,57.12203,40.01547,-0.19352)))
AD5<-A2_GOFlaio(p5,dist="GEV")
print(AD5)

F6<-F.GEV(p6,59.39116,37.38978,-0.04298)
A6<-A2(sort(F.GEV(p6, 59.39116,37.38978,-0.04298)))
AD6<-A2_GOFlaio(p6,dist="GEV")
print(AD6)

F7<-F.GEV(p7, 56.05482,39.44495,-0.30982)
A7<-A2(sort(F.GEV(p7, 56.05482,39.44495,-0.30982)))
AD7<-A2_GOFlaio(p7,dist="GEV")
print(AD7)

F8<-F.GEV(p8, 55.57297,39.26958,-0.18901)
A8<-A2(sort(F.GEV(p8, 55.57297,39.26958,-0.18901)))
AD8<-A2_GOFlaio(p8,dist="GEV")
print(AD8)

F9<-F.GEV(p9, 62.36427,40.00261,-0.30736)
A9<-A2(sort(F.GEV(p9, 62.36427,40.00261,-0.30736)))
AD9<-A2_GOFlaio(p9,dist="GEV")
print(AD9)

F10<-F.GEV(p10, 51.33189,37.12957,-0.27089)
A10<-A2(sort(F.GEV(p10, 51.33189,37.12957,-0.27089)))
AD10<-A2_GOFlaio(p10,dist="GEV")

```



```

print(AD10)
F11<-F.GEV(p11, 55.48075,37.74159,-0.04469)
A11<-A2(sort(F.GEV(p11, 55.48075,37.74159,-0.04469)))
AD11<-A2_GOFlaio(p11,dist="GEV")
print(AD11)

F12<-F.GEV(p12, 56.44559,37.24350,-0.27562)
A12<-A2(sort(F.GEV(p12, 56.44559,37.24350,-0.27562)))
AD12<-A2_GOFlaio(p12,dist="GEV")
print(AD12)

#Transformasi data GEV ke unit frechet masing2 pos
ph1<-gev2frech(p1, 45.87321,31.83715,-0.18253)
ph2<-gev2frech(p2, 40.31868,30.07970,-0.16285)
ph3<-gev2frech(p3, 26.03293,30.94695,-0.03604)
ph4<-gev2frech(p4, 48.20154,36.84957,-0.10944)
ph5<-gev2frech(p5, 57.12203,40.01547,-0.19352)
ph6<-gev2frech(p6, 59.39116,37.38978,-0.04298)
ph7<-gev2frech(p7, 56.05482,39.44495,-0.30982)
ph8<-gev2frech(p8, 55.57297,39.26958,-0.18901)
ph9<-gev2frech(p9, 62.36427,40.00261,-0.30736)
ph10<-gev2frech(p10, 51.33189,37.12957,-0.27089)
ph11<-gev2frech(p11, 55.48075,37.74159,-0.04469)
ph12<-gev2frech(p12, 56.44559,37.24350,-0.27562)
Z=matrix(c(ph1,ph2,ph3,ph4,ph5,ph6,ph7,ph8,ph9,ph10,ph11,ph12),ncol=12)
colnames(Z)=c("KEDUNGPRAHU","NGRAMBE","PADAS","TRETES","BEKOH",
"WIDODAREN","GEMARANG","KARANGJATI","KENDAL","KRICAK","MANT
INGAN","PARON")
print(Z)
#Transformasi ke unit margin copula
u1<- exp(-1/ph1)
u2<- exp(-1/ph2)
u3<- exp(-1/ph3)
u4<- exp(-1/ph4)
u5<- exp(-1/ph5)
u6<- exp(-1/ph6)
u7<- exp(-1/ph7)
u8<- exp(-1/ph8)
u9<- exp(-1/ph9)
u10<- exp(-1/ph10)
u11<- exp(-1/ph11)
u12<- exp(-1/ph12)
U=matrix(c(u1,u2,u3,u4,u5,u6,u7,u8,u9,u10,u11,u12),ncol=12)
colnames(U)=c("KEDUNGPRAHU","NGRAMBE","PADAS","TRETES","BEKOH",
"WIDODAREN","GEMARANG","KARANGJATI","KENDAL","KRICAK","MANT
INGAN","PARON")
print(U)

#perhitungan koefisien ekstremal
fitextcoeff(U, loc, estim = "Smith") #model smith
fitextcoeff(U, loc, estim = "ST") #model schlather
#win.graph()

#grafik madogram dan fmadogram
par(mfrow=c(2,2))

```

```

madogram(U,loc,which="ext",col="black")
madogram(U,loc,which="mado",col="grey")
fmadogram(U,loc,which="ext",col="black")
fmadogram(U,loc,which="mado",col="grey")

#model copula student t
setwd("E:/curah_hujan/pos_hujan/Data1989-2015/data MSP")
q1<-as.matrix(read.table("1.Kedungprahu.txt",header=T))
q2<-as.matrix(read.table("2.Ngrambe.txt",header=T))
q3<-as.matrix(read.table("3.Padas.txt",header=T))
q4<-as.matrix(read.table("4.Tretes.txt",header=T))
q5<-as.matrix(read.table("5.Bekoh.txt",header=T))
q6<-as.matrix(read.table("6.Widodaren.txt",header=T))
q7<-as.matrix(read.table("7.Gemarang.txt",header=T))
q8<-as.matrix(read.table("8.Karangjati.txt",header=T))
q9<-as.matrix(read.table("9.Kendal.txt",header=T))
q10<-as.matrix(read.table("10.Kricak.txt",header=T))
q11<-as.matrix(read.table("11.Mantingan.txt",header=T))
q12<-as.matrix(read.table("12.Paron.txt",header=T))
Q<-matrix(c(q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,q10,q11,q12),ncol=12)
colnames(Q)=c("KEDUNGPRAHU","NGRAMBE","PADAS","TRETES","BEKOH",
"WIDODAREN","GEMARANG","KARANGJATI","KENDAL","KRICAK","MANT
INGAN","PARON")
#View(Q)

#Pemilihan model trend surface terbaik
#ss<-
fitcopula(Q,method=c("mpl"),start=NULL,lower=NULL,upper=NULL,optim.method
="BFGS",optim.control=list(maxit=1000),estimate.variance=TRUE,hideWarnings=
TRUE)
#Korelasi bisa menggunakan "whitmat"(AIC KECIL) "bessel"(AIC BESAR)

oc.form<-q~longitude+latitude
scale.form<-q~longitude+latitude
shape.form<-q~1
C1<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C1)

loc.form<-q~longitude+latitude
scale.form<-q~latitude+longitude
shape.form<-q~1
C2<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C2)

loc.form<-q~longitude+latitude
scale.form<-q~latitude
shape.form<-q~1
C3<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C3)

loc.form<-q~longitude+latitude
scale.form<-q~longitude
shape.form<-q~1

```

```

C4<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C4)

loc.form<-q~latitude+longitude
scale.form<-q~longitude+latitude
shape.form<-q~1
C5<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C5)

loc.form<-q~latitude+longitude
scale.form<-q~latitude+longitude
shape.form<-q~1
C6<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C6)

loc.form<-q~latitude+longitude
scale.form<-q~latitude
shape.form<-q~1
C7<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C7)

loc.form<-q~latitude+longitude
scale.form<-q~longitude
shape.form<-q~1
C8<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C8)

loc.form<-q~longitude
scale.form<-q~longitude+latitude
shape.form<-q~1
C9<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C9)

loc.form<-q~longitude
scale.form<-q~latitude+longitude
shape.form<-q~1
C10<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C10)

loc.form<-q~longitude
scale.form<-q~latitude
shape.form<-q~1
C11<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C11)

loc.form<-q~longitude
scale.form<-q~longitude
shape.form<-q~1

```

```

C12<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C12)

loc.form<-q~latitude
scale.form<-q~longitude+latitude
shape.form<-q~1
C13<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C13)

loc.form<-q~latitude
scale.form<-q~latitude+longitude
shape.form<-q~1
C14<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C14)

loc.form<-q~latitude
scale.form<-q~latitude
shape.form<-q~1
C15<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C15)

loc.form<-q~latitude
scale.form<-q~longitude
shape.form<-q~1
C16<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")
#print(C16)

AIC(C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9,C10,C11,C12,C13,C14,C15,C16)

#Model Terbaik
loc.form<-q~latitude
scale.form<-q~latitude
shape.form<-q~1
C15<-
fitcopula(Q,loc,"student","whitmat",loc.form,scale.form,shape.form,method="BFGS")

#Setelah memperoleh kombinasi model terbaik, selanjutnya estimasi parameter
secara multivariat.
#ret.per=20 (memprediksi 5 tahun kedepan, 1 tahun = ret.per=4)
s1<-predict(C15,loc,ret.per=4)
print(s1)
s2<-predict(C15,loc,ret.per=8)
print(s2)
s3<-predict(C15,loc,ret.per=12)
print(s3)
s4<-predict(C15,loc,ret.per=16)
print(s4)
s5<-predict(C15,loc,ret.per=20)
print(s5)
#Hasil output dari syntax ini, diperoleh nilai estimasi parameter multivariat
dengan memasukkan nilai latitude atau longitudenya.

```

```
#Perhitungan return level diperoleh dengan menggunakan perhitungan manual.
```

```
#transformasi data copula ke frechet
```

```
#Periode 1 Tahun
```

```
k1<-log(0.7199)  
k2<-log(0.7169)  
k3<-log(0.7210)  
k4<-log(0.7196)  
k5<-log(0.7175)  
k6<-log(0.7226)  
k7<-log(0.7221)  
k8<-log(0.7192)  
k9<-log(0.7148)  
k10<-log(0.7222)  
k11<-log(0.7226)  
k12<-log(0.7203)
```

```
#Periode 2 Tahun
```

```
k1<-log(0.8285)  
k2<-log(0.8256)  
k3<-log(0.8296)  
k4<-log(0.8282)  
k5<-log(0.8262)  
k6<-log(0.8311)  
k7<-log(0.8307)  
k8<-log(0.8279)  
k9<-log(0.8236)  
k10<-log(0.8308)  
k11<-log(0.8311)  
k12<-log(0.8289)
```

```
#Periode 3 Tahun
```

```
k1<-log(0.8738)  
k2<-log(0.8709)  
k3<-log(0.8748)  
k4<-log(0.8734)  
k5<-log(0.8714)  
k6<-log(0.8763)  
k7<-log(0.8759)  
k8<-log(0.8731)  
k9<-log(0.8688)  
k10<-log(0.8759)  
k11<-log(0.8763)  
k12<-log(0.8741)
```

```
#Periode 4 Tahun
```

```
k1<-log(0.9002)  
k2<-log(0.8973)  
k3<-log(0.9013)  
k4<-log(0.8999)  
k5<-log(0.8979)  
k6<-log(0.9027)  
k7<-log(0.9023)  
k8<-log(0.8995)  
k9<-log(0.8953)  
k10<-log(0.9024)
```

```

k11<-log(0.9027)
k12<-log(0.9005)

#Periode 5 Tahun
k1<-log(0.9181)
k2<-log(0.9152)
k3<-log(0.9191)
k4<-log(0.9177)
k5<-log(0.9157)
k6<-log(0.9206)
k7<-log(0.9201)
k8<-log(0.9174)
k9<-log(0.9132)
k10<-log(0.9202)
k11<-log(0.9206)
k12<-log(0.9184)

f1<-(-1/k1)
f2<-(-1/k2)
f3<-(-1/k3)
f4<-(-1/k4)
f5<-(-1/k5)
f6<-(-1/k6)
f7<-(-1/k7)
f8<-(-1/k8)
f9<-(-1/k9)
f10<-(-1/k10)
f11<-(-1/k11)
f12<-(-1/k12)
FF<-matrix(c(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,f11,f12),ncol=12)

#transformasi dari frechet ke gev
t1<-frech2gev(f1, 45.87321,31.83715,-0.18253)
t2<-frech2gev(f2, 40.31868,30.07970,-0.16285)
t3<-frech2gev(f3, 26.03293,30.94695,-0.03604)
t4<-frech2gev(f4, 48.20154,36.84957,-0.10944)
t5<-frech2gev(f5, 57.12203,40.01547,-0.19352)
t6<-frech2gev(f6, 59.39116,37.38978,-0.04298)
t7<-frech2gev(f7, 56.05482,39.44495,-0.30982)
t8<-frech2gev(f8, 55.57297,39.26958,-0.18901)
t9<-frech2gev(f9, 62.36427,40.00261,-0.30736)
t10<-frech2gev(f10, 51.33189,37.12957,-0.27089)
t11<-frech2gev(f11, 55.48075,37.74159,-0.04469)
t12<-frech2gev(f12, 56.44559,37.24350,-0.27562)
TT<-matrix(c(t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9,t10,t11,t12),ncol=12)
print(TT)

#predict hingga 50 tahun
L20<-predict(C15,loc,ret.per=20)
print(L20)
L32<-predict(C15,loc,ret.per=32)
print(L32)
L40<-predict(C15,loc,ret.per=40)
print(L40)
L60<-predict(C15,loc,ret.per=60)
print(L60)

```

```

L80<-predict(C15,loc,ret.per=80)
print(L80)

#Periode 2018 ret.per=32
k1<-log(0.9496)
k2<-log(0.9467)
k3<-log(0.9506)
k4<-log(0.9492)
k5<-log(0.9473)
k6<-log(0.9521)
k7<-log(0.9516)
k8<-log(0.9489)
k9<-log(0.9447)
k10<-log(0.9517)
k11<-log(0.9521)
k12<-log(0.9499)

f1<-(-1/k1)
f2<-(-1/k2)
f3<-(-1/k3)
f4<-(-1/k4)
f5<-(-1/k5)
f6<-(-1/k6)
f7<-(-1/k7)
f8<-(-1/k8)
f9<-(-1/k9)
f10<-(-1/k10)
f11<-(-1/k11)
f12<-(-1/k12)
FF<-matrix(c(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,f11,f12),ncol=12)

t1<-frech2gev(f1, 45.87321,31.83715,-0.18253)
t2<-frech2gev(f2, 40.31868,30.07970,-0.16285)
t3<-frech2gev(f3, 26.03293,30.94695,-0.03604)
t4<-frech2gev(f4, 48.20154,36.84957,-0.10944)
t5<-frech2gev(f5, 57.12203,40.01547,-0.19352)
t6<-frech2gev(f6, 59.39116,37.38978,-0.04298)
t7<-frech2gev(f7, 56.05482,39.44495,-0.30982)
t8<-frech2gev(f8, 55.57297,39.26958,-0.18901)
t9<-frech2gev(f9, 62.36427,40.00261,-0.30736)
t10<-frech2gev(f10, 51.33189,37.12957,-0.27089)
t11<-frech2gev(f11, 55.48075,37.74159,-0.04469)
t12<-frech2gev(f12, 56.44559,37.24350,-0.27562)
TT2018<-matrix(c(t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9,t10,t11,t12),ncol=12)
print(TT2018)

#Periode 2020 ret.per=40
k1<-log(0.9621)
k2<-log(0.9592)
k3<-log(0.9631)
k4<-log(0.9617)
k5<-log(0.9598)
k6<-log(0.9646)
k7<-log(0.9641)
k8<-log(0.9614)

```

```

k9<-log(0.9573)
k10<-log(0.9642)
k11<-log(0.9646)
k12<-log(0.9624)

f1<-(-1/k1)
f2<-(-1/k2)
f3<-(-1/k3)
f4<-(-1/k4)
f5<-(-1/k5)
f6<-(-1/k6)
f7<-(-1/k7)
f8<-(-1/k8)
f9<-(-1/k9)
f10<-(-1/k10)
f11<-(-1/k11)
f12<-(-1/k12)
FF<-matrix(c(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,f11,f12),ncol=12)
t1<-frech2gev(f1, 45.87321,31.83715,-0.18253)
t2<-frech2gev(f2, 40.31868,30.07970,-0.16285)
t3<-frech2gev(f3, 26.03293,30.94695,-0.03604)
t4<-frech2gev(f4, 48.20154,36.84957,-0.10944)
t5<-frech2gev(f5, 57.12203,40.01547,-0.19352)
t6<-frech2gev(f6, 59.39116,37.38978,-0.04298)
t7<-frech2gev(f7, 56.05482,39.44495,-0.30982)
t8<-frech2gev(f8, 55.57297,39.26958,-0.18901)
t9<-frech2gev(f9, 62.36427,40.00261,-0.30736)
t10<-frech2gev(f10, 51.33189,37.12957,-0.27089)
t11<-frech2gev(f11, 55.48075,37.74159,-0.04469)
t12<-frech2gev(f12, 56.44559,37.24350,-0.27562)
TT2020<-matrix(c(t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9,t10,t11,t12),ncol=12)
print(TT2020)

#Periode 2025 ret.per=60
k1<-log(0.9815)
k2<-log(0.9787)
k3<-log(0.9826)
k4<-log(0.9812)
k5<-log(0.9792)
k6<-log(0.9840)
k7<-log(0.9836)
k8<-log(0.9808)
k9<-log(0.9767)
k10<-log(0.9836)
k11<-log(0.9840)
k12<-log(0.9818)
f1<-(-1/k1)
f2<-(-1/k2)
f3<-(-1/k3)
f4<-(-1/k4)
f5<-(-1/k5)
f6<-(-1/k6)
f7<-(-1/k7)
f8<-(-1/k8)
f9<-(-1/k9)

```



```

f10<-(-1/k10)
f11<-(-1/k11)
f12<-(-1/k12)
FF<-matrix(c(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,f11,f12),ncol=12)

t1<-frech2gev(f1, 45.87321,31.83715,-0.18253)
t2<-frech2gev(f2, 40.31868,30.07970,-0.16285)
t3<-frech2gev(f3, 26.03293,30.94695,-0.03604)
t4<-frech2gev(f4, 48.20154,36.84957,-0.10944)
t5<-frech2gev(f5, 57.12203,40.01547,-0.19352)
t6<-frech2gev(f6, 59.39116,37.38978,-0.04298)
t7<-frech2gev(f7, 56.05482,39.44495,-0.30982)
t8<-frech2gev(f8, 55.57297,39.26958,-0.18901)
t9<-frech2gev(f9, 62.36427,40.00261,-0.30736)
t10<-frech2gev(f10, 51.33189,37.12957,-0.27089)
t11<-frech2gev(f11, 55.48075,37.74159,-0.04469)
t12<-frech2gev(f12, 56.44559,37.24350,-0.27562)
TT2025<-matrix(c(t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9,t10,t11,t12),ncol=12)
print(TT2025)

#Peridoe 2030 ret.per=80
k1<-log(0.9931)
k2<-log(0.9903)
k3<-log(0.9941)
k4<-log(0.9928)
k5<-log(0.9908)
k6<-log(0.9956)
k7<-log(0.9951)
k8<-log(0.9924)
k9<-log(0.9883)
k10<-log(0.9952)
k11<-log(0.9956)
k12<-log(0.9934)

f1<-(-1/k1)
f2<-(-1/k2)
f3<-(-1/k3)
f4<-(-1/k4)
f5<-(-1/k5)
f6<-(-1/k6)
f7<-(-1/k7)
f8<-(-1/k8)
f9<-(-1/k9)
f10<-(-1/k10)
f11<-(-1/k11)
f12<-(-1/k12)
FF<-matrix(c(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,f11,f12),ncol=12)
t1<-frech2gev(f1, 45.87321,31.83715,-0.18253)
t2<-frech2gev(f2, 40.31868,30.07970,-0.16285)
t3<-frech2gev(f3, 26.03293,30.94695,-0.03604)
t4<-frech2gev(f4, 48.20154,36.84957,-0.10944)
t5<-frech2gev(f5, 57.12203,40.01547,-0.19352)
t6<-frech2gev(f6, 59.39116,37.38978,-0.04298)
t7<-frech2gev(f7, 56.05482,39.44495,-0.30982)
t8<-frech2gev(f8, 55.57297,39.26958,-0.18901)
t9<-frech2gev(f9, 62.36427,40.00261,-0.30736)

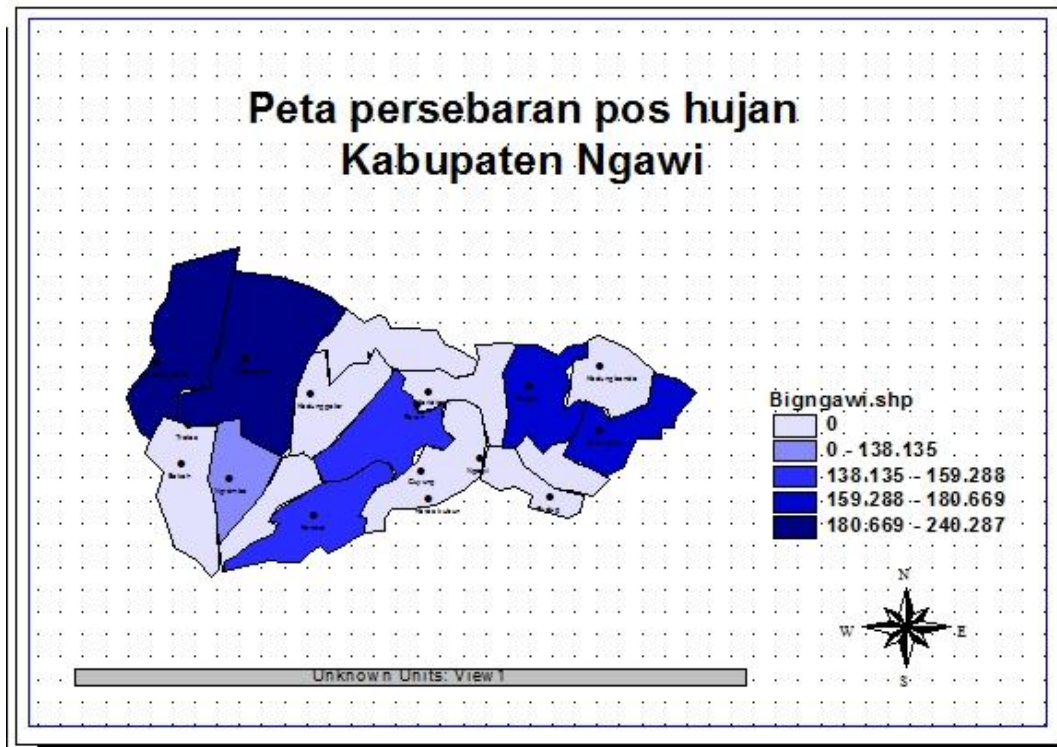
```

```
t10<-frech2gev(f10, 51.33189,37.12957,-0.27089)
t11<-frech2gev(f11, 55.48075,37.74159,-0.04469)
t12<-frech2gev(f12, 56.44559,37.24350,-0.27562)
TT2030<-matrix(c(t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9,t10,t11,t12),ncol=12)
print(TT2030)
```

**Lampiran 10.** Jarak *Euclid* dan Nilai Koefisien Ekstremal

Pasangan lokasi ke-	Jarak Euclid Antarlokasi	Koefisien Ekstremal	<i>Standar Error</i>	Pasangan lokasi ke-	Jarak Euclid Antarlokasi	Koefisien Ekstremal	<i>Standar Error</i>
1	0.0718	1.4603	0.0593	34	0.4411	1.3417	0.0361
2	0.2841	1.7697	0.0910	35	0.1578	1.4210	0.0506
3	0.0496	1.3880	0.0545	36	0.1818	1.4383	0.0569
4	0.0971	1.4540	0.0568	37	0.0718	1.4259	0.0614
5	0.0600	1.5117	0.0704	38	0.2236	1.3848	0.0550
6	0.1531	1.5652	0.0849	39	0.1390	1.4011	0.0572
7	0.3923	1.3702	0.0467	40	0.1226	1.4534	0.0621
8	0.1331	1.4346	0.0671	41	0.3144	1.4321	0.0567
9	0.1332	1.5316	0.0689	42	0.0614	1.3557	0.0482
10	0.0937	1.5582	0.0692	43	0.1144	1.4307	0.0648
11	0.1742	1.4280	0.0550	44	0.1906	1.4549	0.0627
12	0.3198	1.6536	0.0778	45	0.1132	1.3718	0.0540
13	0.0654	1.3341	0.0516	46	0.1434	1.4731	0.0715
14	0.1038	1.3975	0.0500	47	0.3973	1.4554	0.0676
15	0.1304	1.5110	0.0789	48	0.1867	1.4380	0.0671
16	0.2047	1.4856	0.0721	49	0.1213	1.5267	0.0765
17	0.4182	1.3890	0.0532	50	0.0740	1.3577	0.0629
18	0.1015	1.4523	0.0530	51	0.1797	1.4278	0.0696
19	0.1884	1.4727	0.0584	52	0.2554	1.4221	0.0606
20	0.1371	1.4608	0.0745	53	0.1816	1.5296	0.0737
21	0.2112	1.4437	0.0652	54	0.0221	1.3896	0.0519
22	0.3336	1.6300	0.0842	55	0.2173	1.4654	0.0668
23	0.2182	1.6033	0.0639	56	0.0502	1.4706	0.0675
24	0.2832	1.7106	0.0810	57	0.3397	1.4489	0.0559
25	0.1401	1.6139	0.0756	58	0.2772	1.3801	0.0544
26	0.1165	1.6763	0.0887	59	0.4702	1.5002	0.0676
27	0.2574	1.7252	0.0835	60	0.2193	1.4778	0.0633
28	0.1621	1.5234	0.0621	61	0.1752	1.5042	0.0674
29	0.3567	1.6078	0.0788	62	0.2235	1.5137	0.0728
30	0.1103	1.6816	0.0945	63	0.1630	1.4374	0.0707
31	0.1373	1.3681	0.0495	64	0.1952	1.4213	0.0644
32	0.0850	1.3944	0.0556	65	0.0667	1.4281	0.0513
33	0.2022	1.4233	0.0585	66	0.2514	1.4324	0.0599

Lampiran 11. Peta persebaran pos hujan Kabupaten Ngawi



## BIOGRAFI PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Meirinda Fauziyah, lahir di Samarinda tanggal 1 Mei 1995, dan merupakan anak kedua dari dua bersaudara. Penulis menyelesaikan pendidikan formal yaitu di TK Barunawati 1 Samarinda, SD Muhammadiyah 2 Samarinda hingga lulus tahun 2007. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMPN 1 Samarinda lulus tahun 2010, dan SMAN 2 Samarinda lulus tahun 2013.

Penulis meraih gelar Sarjana Sains dari Program Studi Statistika Universitas Mulawarman Samarinda pada tahun 2017 dan pada tahun yang sama diterima secara resmi sebagai mahasiswa Program Magister Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Bagi pembaca yang ingin menyampaikan saran dan kritik atau berdiskusi terkait tesis ini dapat menghubungi alamat email penulis [meirindaf@gmail.com](mailto:meirindaf@gmail.com).