



TESIS - KS185411

**KINERJA DIAGRAM KENDALI *BIVARIATE*
EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE
(BEWMA) MENGGUNAKAN DISTRIBUSI CARL DAN
EXCEEDANCE PROBABILITY CRITERION (EPC)**

SELLY ACITA
06211750012002

Dosen Pembimbing
Dr. Muhammad Mashuri, M.T.
Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si.

Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2020



TESIS - KS185411

**KINERJA DIAGRAM KENDALI *BIVARIATE*
EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE
(BEWMA) MENGGUNAKAN DISTRIBUSI CARL DAN
EXCEEDANCE PROBABILITY CRITERION (EPC)**

SELLY ACITA
06211750012002

Dosen Pembimbing
Dr. Muhammad Mashuri, M.T.
Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si.

Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2020



THESIS - KS185411

**THE PERFORMANCE OF THE BIVARIATE
EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE
(BEWMA) CONTROL CHART USING CARL DISTRIBUTION
AND EXCEEDANCE PROBABILITY CRITERION (EPC)**

**SELLY ACITA
06211750012002**

Supervisor
Dr. Muhammad Mashuri, M.T.
Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si.

Department of Statistics
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2020

LEMBAR PENGESAHAN TESIS

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar

Magister Statistika (M.Stat)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

SELLY ACITA

NRP: 06211750012002

Tanggal Ujian : 24 Januari 2020

Periode Wisuda: Maret 2020

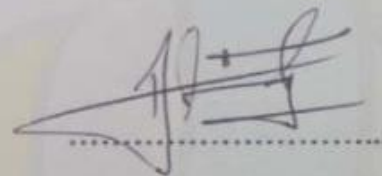
Disetujui oleh:

Pembimbing:

1. Dr. Muhammad Mashuri, M.T.
NIP: 19620408 198701 1 001

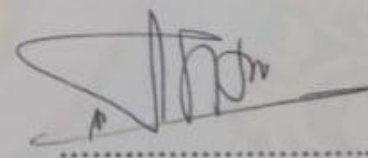


2. Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si.
NIP: 19831204 200812 1 002

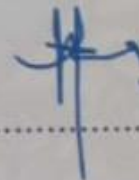


Penguji :

1. Dr. Agus Suharsono, M.S.
NIP: 19580823 198403 1 003



2. Dr. Kartika Fithriasari, M.Si.
NIP: 19691212 199303 2 002



**KINERJA DIAGRAM KENDALI BIVARIATE
EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE (BEWMA)
MENGUNAKAN DISTRIBUSI CARL DAN EXCEEDANCE
PROBABILITY CRITERION (EPC)**

Nama Mahasiswa : Selly Acita

NRP : 06211750012002

Dosen Pembimbing : Dr. Muhammad Mashuri, M.T.

Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si.

ABSTRAK

Pada umumnya diagram kendali dikembangkan dengan asumsi karakteristik kualitas dari sebuah proses produksi berdistribusi normal dengan parameter yang diketahui. Namun dalam praktik, karakteristik kualitas tidak selalu berdistribusi normal dan parameter proses tidak selalu diketahui. Oleh karena itu perlu dilakukan estimasi parameter. Apabila data set yang digunakan pada Fase I berbeda-beda jumlahnya, maka kinerja diagram kendali pada Fase II akan bervariasi. Kinerja diagram yang bervariasi itu disebut “variabilitas praktisi ke praktisi”. Salah satu ukuran kinerja diagram kendali adalah *Average Run Length* (ARL), yaitu rata-rata banyaknya *run* sampai ditemukan *out-of-control* yang pertama. Ketika parameter proses di estimasi dari *reference* sampel *in-control*, *run-length* mengikuti distribusi *conditional*-nya yang disebut *Conditional Average Run Length* (CARL). Pada penelitian ini, akan dievaluasi kinerja diagram kendali *Bivariate Exponentially Weighted Moving Average* (BEWMA) dengan mempertimbangkan variabilitas praktisi ke praktisi menggunakan distribusi *Conditional Average Run Length* (CARL) dan *Exceedance Probability Criterion* (EPC). Nilai dari CARL pada penelitian ini dihitung menggunakan metode Rantai Markov. EPC digunakan untuk mengevaluasi variabilitas praktisi ke praktisis yang berkaitan erat dengan estimasi parameter. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa, untuk menjamin kinerja *in-control* dengan dengan probabilitas tinggi $1-p$ (yang merupakan kriteria EPC) dibutuhkan data Fase I yang cukup besar, yaitu lebih dari 10.000 data. Namun dalam praktiknya, sulit untuk mendapatkan data Fase I yang cukup besar. Sehingga untuk menghasilkan kinerja *in-control* yang baik dengan jumlah data Fase I yang tersedia harus dilakukan penyesuaian batas kendali.

Kata Kunci: BEWMA, CARL, EPC, Rantai Markov.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

THE PERFORMANCE OF THE BIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE (BEWMA) USING CARL DISTRIBUTION AND EXCEEDANCE PROBABILITY CRITERION (EPC)

Name : Selly Acita
NRP : 06211750012002
Supervisor : Dr. Muhammad Mashuri, M.T.
Co-Supervisor : Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si.

ABSTRACT

In general, control charts are developed with the assumption that the critical quality of a production process is normally distributed with known parameters. However, in practice, critical quality is not always normally distributed and process parameters are typically unknown. In such a case, it is necessary to estimate the parameters. If the number of observations in Phase I varies, the performance of the control chart in Phase II will also vary. The various performance charts are called practitioner to practitioner variability. One of the measures to evaluate the performance control charts is Average Run Length (ARL), which is the average number of runs until the first out-of-control detected. When the process parameters are estimated from an in-control reference sample, the run-length follows its conditional distribution so-called Conditional Average Run Length (CARL). In this study, the performance of the Bivariate Exponentially Weighted Moving Average (BEWMA) control chart will be evaluated by considering the practitioner to practitioner variability using the CARL distribution and the Exceedance Probability Criterion (EPC). The value of CARL is calculated using the Markov Chain method. The EPC is used to evaluate practitioner to practitioner variability that is closely related to parameter estimation. The results show that to guarantee the in-control performance with a high probability of $1-p$ (which is the EPC criterion), the large size of observations (more than 10.000 data) in Phase I data is needed. However, in practice, it is difficult to collect such a huge size of data in Phase I. Therefore, to produce the best in-control performance with available Phase I, the control limits are adjusted.

Keywords: BEWMA, CARL, EPC, Markov Chain.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karuniaNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “*Kinerja Diagram Kendali Bivariate Exponentially Weighted Moving Average (BEWMA) menggunakan Distribusi CARL dan Exceedance Probability Criterioon (EPC)*”. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata dua (S2) pada Departemen Statistika Program Pascasarjana, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari kesempurnaan dan dalam penyelesaiannya tak lepas dari bimbingan, arahan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang telah mendoakan dan membantu baik secara moril maupun materiil.
2. Dr. Muhammad Mashuri, M.T dan Dr.rer.pol Dedy Dwi Prastyo, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan dan dorongan serta telah meluangkan waktunya selama penulisan tesis ini.
3. Dr. Agus Suharsono, M.S dan Dr. Kartika Fithriasari, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran sebagai penyempurna tesis ini.
4. Seluruh dosen Departemen Statistika ITS yang telah memberi banyak ilmu selama masa perkuliahan, serta staff dan karyawan atas segala bantuan dan pelayanan yang telah diberikan selama menjadi mahasiswa statistika ITS.
5. Teman-teman seangkatan (Mega, Merin, Gaby, Aisyah, Ilhamna, Romy, Didin, Fatkhur) yang telah memberikan semangat dan motivasi, serta kebersamaan selama menempuh pendidikan bersama.
6. Teman-teman bimbingan SPC (Istin, Nimas, Rumaisa) yang selalu memberikan motivasi dan meluangkan waktu untuk berdiskusi.
7. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan tesis ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan pada tesis ini. Oleh karena itu, penulis menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini.

Surabaya, Januari 2020

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL.....	xvii
DAFTAR SIMBOL.....	xix
DAFTAR LAMPIRAN.....	xxi
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Diagram Kendali <i>Exponentially Weighted Moving Average</i> (EWMA)....	7
2.2 Diagram kendali Multivariat <i>Exponentially Weighted Moving Average</i> (MEWMA).....	9
2.3 Pergeseran Proses.....	11
2.4 <i>Average Run Length</i> (ARL)	12
2.4.1 On-Target ARL (ARL0)	13
2.4.2 Off-Target ARL (ARL1).....	13
2.5 Rantai Markov	14
2.5.1.. Perhitungan ARL dengan Pendekatan Rantai Markov untuk Grafik EWMA.....	15
2.5.2.. Perhitungan ARL dengan Pendekatan Rantai Markov untuk Grafik MEWMA	16

2.6	Grafik Kendali BEWMA dengan Estimasi Parameter	22
2.7	Desain Grafik Pengendali MEWMA Optimal	23
2.8	Distribusi <i>Conditional Run-Length</i>	24
2.9	<i>Exceedance Probability Criterion</i> (EPC).....	26
2.10	Uji Normal Multivariat.....	27
BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN		29
3.1	Studi literatur.....	29
3.2	Struktur Data	29
3.3	Langkah Analisis	29
BAB 4 ANALISIS DAN PEMBAHASAN		37
4.1	Matriks Probabilitas Transisi Conditional.....	37
4.2	Kinerja Grafik BEWMA Fase II Menggunakan EPC	41
4.3	Penyesuaian Batas Kendali Grafik BEWMA Fase II yang Menjamin Kinerja Conditional	45
4.3.1	... Analisis Kinerja <i>In-Control</i> dan <i>Out-of-Control</i> dan Perbandingan Batas Kendali yang Disesuaikan dan Tidak Disesuaikan	48
4.4	Contoh Ilustrasi	51
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN		55
DAFTAR PUSTAKA.....		57
LAMPIRAN		61
BIODATA PENULIS.....		87

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Ilustrasi partisi daerah in-control dari grafik MEWMA.....	17
Gambar 2.2 State rantai Markov yang digunakan kasus off-target grafik MEWMA..	19
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian	30
Gambar 3.2 Diagram Alir ARL	32
Gambar 4.1 State dalam rantai Markov. Titik melambangkan titik tengah state..	39
Gambar 4.2 Grafik nilai h yang disesuaikan dan tidak disesuaikan (K) untuk $n = 5$	47
Gambar 4.3 Grafik BEWMA Fase II menggunakan batas kendali yang tidak disesuaikan.....	533
Gambar 4.4 Grafik BEWMA Fase II menggunakan penyesuaian batas kendali..	53

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Struktur Data	29
Tabel 4. 1 Nilai h yang menghasilkan ARL in-control 100, 200, 370, dan 500 ketika parameter diketahui	41
Tabel 4. 2 Jumlah minimum M Fase I yang disarankan untuk mencapai $CARL_{IN,p}$ menjadi $\varepsilon = 0\%$, 10% , 20% dibawah $ARL_0 = 100, 200, 370, 500$ untuk $n = 3$ dan 5	43
Tabel 4.3 Nilai h yang menjamin bahwa $P(CARL_{IN} > ARL_0) = 0,90$ untuk grafik BEWMA untuk $n= 3$ dan 5 , $M = 30, 50, 100, 400, 500$, $\varepsilon = 0\%$	45
Tabel 4.4 Nilai $CARL_{IN,p}$ untuk kinerja in-control dan out-of-control dari grafik BEWMA dengan batas kendali yang disesuaikan ($ARL_0 = 370$, $p = 10\%$) dan tidak disesuaikan ($ARL_0 = 370$) untuk $n = 3$ dan beberapa nilai presentil, M , λ , dan d	48
Tabel 4.5 Mardia Test	52

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Pengertian
M	Jumlah subgrup atau banyaknya pengamatan
n	Ukuran subgrup
λ	<i>Konstanta smothing</i>
μ_0	Mean proses <i>in-control</i>
μ_1	Mean ketika terjadi proses pergeseran
σ^2	Varians
\bar{X}	Grandmean
S	Standart deviasi
S_p	Standar deviasi pooled
T_i	Standardisasi sampel mean Fase II
T_0	Standardisasi antara rata-rata <i>in-control</i> yang sebenarnya dengan estimasi rata-rata <i>in-control</i>
Y	Rasio estimasi standar deviasi <i>in-control</i> dengan <i>in-control</i> standar deviasi sebenarnya pada kasus bivariate
O	Rasio estimasi standar deviasi <i>in-control</i> dengan standar deviasi <i>in-control</i> yang sebenarnya pada diagram kendali EWMA
δ	Pergeseran proses
d	Standardisasi pergeseran mean
r	Jumlah variabel
Q_i	Statistik kendali MEWMA
h	Batas kendali atas
Σ	Matriks Kovarian
S_k	Subinterval ke k pada rantai Markov
w	Setengah ukuran subinterval
g	Panjang subinterval
m	Jumlah transient state
c	Parameter non-central
Z_{i1}	Statistik kendali EWMA dimensi 1
$\ Z_{i2}\ $	Statistik kendali EWMA dimensi $r-1$
H	Matriks transisi Z_{i1}

Simbol	Pengertian
V	Matriks Transisi $\ Z_{i2}\ $
p	Nilai probabilitas yang ditentukan
ε	Nilai <i>percentage different</i> yang ditentukan
Ω	Estimasi matriks kovarian x
B	Jumlah iterasi
τ	Hasil bangkitan data berdistribusi $Wishart_2(I, M(n-1))$
a	Vektor kolom satu
u	Vektor baris dengan satu diposisi tengah dan 0 untuk lainnya
I	Matriks identitas
P_c	Matriks probabilitas transisi essential conditional BEWMA
P_{EWMA}	Matriks probabilitas transisi essential conditional EWMA

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Matriks Kovarian MEWMA.....	61
Lampiran 2. Bukti bahwa simulasi pengamatan T_{01} dan T_{02} pada langkah analisis 2c berdistribusi $N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$	64
Lampiran 3. Nilai $CARL_{IN}$ Sebagai Fungsi M untuk $\lambda = 0,1, 0,2, 0,5$, dan 1, $ARL_0 = 100, 200, 370, 500$	65
Lampiran 4. Grafik yang tidak disesuaikan (Kasus K) dan nilai h yang disesuaikan untuk $0 < \lambda \leq 1$, $ARL = 100, 200, 370$, $n = 3$	74
Lampiran 5. Nilai $CARL_{IN,p}$ untuk kinerja in-control dan out-of-control dari grafik BEWMA dengan batas kendali yang disesuaikan ($ARL_0 = 370$, $p = 10\%$) dan tidak disesuaikan ($ARL_0 = 370$) untuk $n = 5$ dan beberapa nilai presentil, M, λ , dan d	75
Lampiran 6. Syntax ARL MEWMA menggunakan rantai Markov ketika parameter diketahui.....	77
Lampiran 7. Syntax CARL	78
Lampiran 8. Syntax percentage difference.....	81
Lampiran 9. Syntax penyesuaian batas kendali	81
Lampiran 10. Syntax grafik kendali MEWMA.....	82
Lampiran 11. Uji Normal Multivariat.....	83
Lampiran 12. Hasil output grafik kendali MEWMA	84

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pengendalian kualitas merupakan hal yang sangat penting dilakukan oleh setiap perusahaan pada proses produksi untuk mendapatkan kualitas produk yang baik. Pada proses produksi, kualitas suatu produk dianggap baik apabila dalam proses produksi yang sama dihasilkan produk dengan karakteristik yang sama atau ragam antar produk kecil. Namun pada kenyataannya, tidak jarang pada proses produksi menghasilkan produk yang berbeda antara satu dengan yang lain atau memiliki keragaman yang besar. Maka dari itu, pengendalian kualitas produksi sangat dibutuhkan untuk menjaga kestabilan suatu produk dan untuk mengetahui penyebab keragaman dalam proses produksi.

Pada proses pengendalian kualitas diperlukan alat bantu untuk mengetahui apakah proses produksi telah sesuai dengan standar kualitas yang dibutuhkan atau tidak. Alat bantu yang digunakan dalam pengendalian kualitas adalah diagram kendali. Diagram kendali digunakan untuk memonitor, menganalisis, dan meningkatkan proses produksi. Diagram kendali di klasifikasikan menjadi dua tipe yaitu diagram kendali atribut dan diagram kendali variabel. Montgomery (2013) menjelaskan bahwa diagram kendali atribut merupakan karakteristik kualitas yang tidak dapat direpresentasikan secara numerik seperti mengklasifikasikan setiap produk yang diperiksa sesuai atau tidak sesuai dengan spesifikasi pada karakteristik kualitas tersebut. Sedangkan diagram kendali variabel merupakan karakteristik kualitas yang *measurable* seperti panjang, lebar, suhu, dan volume. Diagram kendali variabel memberikan jauh lebih banyak informasi tentang tampilan proses daripada diagram kendali atribut. Informasi yang diberikan mengenai mean dan variabilitas sehingga titik-titik yang berada diluar batas kendali (produk yang tidak sesuai) dapat dicari penyebabnya.

Khoo, dkk (2011) menjelaskan bahwa ada 2 Fase yang berbeda dalam mengimplementasi diagram kendali. Pada Fase I, parameter diestimasi dari dataset yang diberikan oleh sampel awal. Setelah diagram kendali Fase I dibuat, dilakukan

pemeriksaan untuk memastikan bahwa proses tetap *in-control* sebelum diagram kendali untuk proses Fase II dimulai. Pada proses Fase II, diagram kendali digunakan untuk memantau proses selanjutnya. Saleh, dkk (2015b) menjelaskan bahwa diagram kendali Fase II dirancang untuk memantau proses dan mendeteksi penyimpangan dari nilai-nilai parameter kendali yang tidak terkendali. Karena nilai sebenarnya dari parameter *in-control* jarang diketahui dalam praktik, praktisi biasanya memulai dengan mengumpulkan informasi awal tentang proses tersebut. Praktisi mengumpulkan M sampel masing-masing berukuran $n \geq 1$ yang merupakan kumpulan data Fase I. Data Fase I digunakan untuk mengevaluasi stabilitas proses dan menentukan sampel *reference in-control* dimana estimasi dari parameter proses dapat diperoleh. Estimasi parameter tersebut kemudian digunakan untuk merancang diagram kendali Fase II yang sesuai, dengan tujuan untuk mendeteksi *out-of-control* dengan cepat.

Diagram kendali dibedakan berdasarkan karakteristik kualitas yaitu diagram kendali univariat yang menggunakan satu variabel karakteristik kualitas dan diagram kendali multivariat yang menggunakan lebih dari satu variabel karakteristik kualitas. Diagram kendali yang pertama kali dikembangkan adalah diagram kendali univariat yaitu diagram kendali *Shewhart*, akan tetapi diagram kendali *Shewhart* tidak sensitif terhadap pergeseran kecil pada proses mean. Salah satu alternatif diagram kendali *Shewhart* adalah diagram kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA). Diagram kendali EWMA di kenalkan oleh Roberts (1959) sebagai alat untuk mendeteksi pergeseran kecil pada proses mean. Pada kasus multivariat diagram kendali EWMA dikembangkan menjadi *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) oleh Lowry, dkk (1992).

Kinerja proses diagram kendali untuk mendeteksi pergeseran proses mean dapat diukur dengan menggunakan *False Alarm Rate* atau *Average Run Length* (ARL). ARL dapat diaproksimasi dengan menggunakan metode rantai Markov. Pada penelitian Brook dan Evans (1972) pendekatan rantai Markov digunakan untuk menganalisis kinerja diagram kendali univariat CUSUM, sedangkan pada penelitian Lucas dan Saccucci (1990) metode rantai Markov digunakan untuk memberikan rekomendasi desain grafik univariat *Exponentially Weighted Moving*

Averages (EWMA). Selanjutnya rantai Markov dikembangkan untuk menganalisis MEWMA oleh Runger dan Prabhu (1996).

Pada umumnya, diagram kendali termasuk diagram EWMA diasumsikan memiliki proses pengamatan yang berdistribusi normal dengan mean dan varian diketahui. Namun pada realita, distribusi data dan parameter proses jarang diketahui. Dalam praktiknya, parameter yang tidak diketahui sering diganti dengan estimasi tak bias dari sampel *reference in-control*. Kinerja diagram kendali EWMA dengan estimasi parameter pertama kali dievaluasi oleh Jones, dkk (2001). Jones, dkk (2001) mempelajari distribusi EWMA *conditional* dan *unconditional* dengan parameter estimasi dalam kasus *in-control* (IC) dan *out-of-control* (OOC). Berdasarkan persentase peningkatan dalam *false alarm rate* (FAR), Jones, dkk (2001) menyimpulkan bahwa ketika parameter diestimasi dan konstanta smoothing (λ) kecil, ukuran sampel Fase I yang lebih besar diperlukan untuk merancang grafik dengan kinerja FAR yang dapat diterima. Namun, penelitian mereka tidak memperhitungkan variabilitas acak FAR, yang disebut variabilitas "praktisi ke praktisi" yang melekat pada estimasi parameter. Berdasarkan penelitian Jones, dkk (2001), Saleh, dkk (2015b) meneliti distribusi *conditional in-control average run length* ($CARL_{IN}$) dari grafik EWMA sebagai fungsi dari sejumlah subgrup Fase I (M), ukuran subgrup (n), dan λ (konstanta smoothing). Berdasarkan standar deviasi ($SDCARL_{IN}$) dari $CARL_{IN}$, ukuran sampel Fase I yang jauh lebih besar diperlukan untuk merancang grafik EWMA Fase II dengan λ yang lebih besar.

Chakraborti (2006) adalah penulis pertama yang menyoroti variasi dalam distribusi *conditional run-length* dan karenanya penting memeriksa variabilitas praktisi melalui distribusi *conditional run length*. Chakraborti (2006) menekankan bagaimana *conditional False Alarm Rate* (CFAR) berperilaku sebagai variabel random ketika parameter diestimasi dan digunakan untuk membuat grafik Fase II. Berdasarkan hal tersebut, untuk grafik Fase II \bar{S} dan S^2 , Epprecht, dkk (2015) memeriksa distribusi CFAR sebagai fungsi dari ukuran sampel Fase I Mn dan kemudian membuat rekomendasi tentang ukuran minimum sampel Fase I yang diperlukan untuk menjamin dengan probabilitas tinggi $1-p$, bahwa CFAR tidak akan melebihi beberapa nilai CFAR nominal yang ditentukan (dinotasikan $CFAR_0$).

Hal tersebut merupakan *Exceedance Probability Criterion* (EPC) yang diperkenalkan oleh Albers, dkk (2005) yang menetapkan prediksi tertinggi untuk CFAR. EPC dipopulerkan oleh Gandy dan Kvaløy (2013) dengan menggunakan metode bootstrap yang telah banyak digunakan oleh para peneliti.

Berdasarkan penelitian sebelumnya yang menyoroti tentang variabilitas tinggi dalam kinerja *in-control*, Diko, dkk (2019) mempelajari kinerja dan desain grafik EWMA Fase II untuk rata-rata menggunakan distribusi $CARL_{IN}$ dan EPC. Pendekatan yang digunakan adalah pendekatan yang didasarkan pada gagasan sederhana tentang aproksimasi distribusi $CARL_{IN}$ oleh distribusi empiris, yang diperoleh dengan menghasilkan banyak subgroup Fase I dan menggunakan rantai Markov untuk menghitung nilai $CARL_{IN}$ yang sesuai. Penelitian Diko, dkk (2019) menunjukkan bahwa nilai λ yang kecil memerlukan ukuran sampel Fase I yang lebih besar daripada nilai λ yang besar.

Berdasarkan penelitian sebelumnya yang membahas tentang kinerja EWMA menggunakan distribusi $CARL_{IN}$ dan EPC, maka pada penelitian ini akan dikaji mengenai penerapan *Bivariate Exponentially Weighted Moving Average* (BEWMA) menggunakan distribusi $CARL$ dan EPC dengan menggunakan metode rantai Markov. Penggunaan EPC digunakan untuk mengevaluasi variabilitas praktisi ke praktisi yang berkaitan erat dengan estimasi parameter.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka diperoleh rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana evaluasi kinerja diagram kendali *Bivariate Exponentially Weighted Moving Average* (BEWMA) dengan menggunakan distribusi *Conditional Average Run Length* (CARL) dan (*exceedance probability criterion*) EPC ?
2. Bagaimana diagram kendali BEWMA dapat memenuhi spesifikasi EPC ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengevaluasi kinerja diagram kendali BEWMA dengan menggunakan distribusi CARL dan EPC.
2. Mendapatkan diagram kendali BEWMA yang memenuhi spesifikasi EPC.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin dicapai pada penelitian ini adalah untuk mendapatkan hasil evaluasi kinerja diagram kendali BEWMA yang lebih tepat dengan menggunakan distribusi CARL dan EPC dan memberikan desain diagram kendali BEWMA dengan kinerja yang baik.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Nilai konstanta smoothing yang digunakan untuk setiap variabel bernilai sama.
2. Jumlah *transient state* yang digunakan adalah $m_1 = m_2 = 25$

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Diagram Kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA)

Montgomery (2013) menjelaskan bahwa diagram kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) telah dikenalkan oleh Roberts (1959). Misalkan $X_i, i = 1, 2, \dots, M$ merupakan pengamatan dengan satu karakteristik kualitas, maka statistik kendali diagram EWMA dirumuskan sebagai berikut

$$Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda) Z_{i-1} \quad (2.1)$$

dengan $0 \leq \lambda \leq 1$ adalah konstanta *smoothing* dan nilai awal dari statistik EWMA adalah

$$Z_0 = \mu_0.$$

Tidak ada aturan umum untuk memilih nilai konstanta *smoothing*, tetapi Montgomery (2013) merekomendasikan $0,05 \leq \lambda \leq 0,25$ dengan $\lambda = 0,1$ menjadi nilai default. Beberapa penelitian menggunakan nilai konstanta *smoothing* yang berbeda-beda ketika mengevaluasi kinerja diagram kendali, misalkan pada penelitian Diko, dkk (2019) konstanta *smoothing* yang digunakan adalah 0,1; 0,2; 0,5; 1. Ketika nilai $\lambda = 1$, grafik menjadi diagram kendali Shewhart \bar{X} . Jika X_1, X_2, \dots independen dan secara identik berdistribusi normal $N(\mu_0, \sigma^2)$, maka mean dari Z_i adalah μ_0 dan variansnya adalah

$$Var(Z_i) = \frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \sigma^2 \quad (2.2)$$

Jika $i \rightarrow \infty$, maka persamaan (2.2) menjadi

$$Var(Z_i) = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \sigma^2$$

Misalkan $X_{ij}, i = 1, 2, \dots, M$, dengan M adalah banyaknya subgrup, dan $j = 1, 2, \dots, n$, dengan n adalah ukuran subgrup, menunjukkan data *in-control* pada Fase I dari distribusi normal dengan rata-rata μ_0 dan standar deviasi σ_0 yang tidak diketahui. Untuk konstanta *smoothing* $0 < \lambda \leq 1$, mulai dari pengambilan sampel

pada Fase II yaitu pada $i = M+1, M+2, \dots$, statistik plot standar untuk grafik EWMA Fase II dengan estimasi parameter adalah

$$Y_i = \lambda W_i + (1-\lambda)Y_{i-1}$$

dengan $W_i = \frac{\bar{x}_i - \hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}_0 / \sqrt{n}}$, \bar{x} adalah rata-rata sampel Fase II, dan $\hat{\mu}_0$ dan $\hat{\sigma}_0$ adalah

estimator Fase I dari parameter μ_0 dan σ_0 yang tidak diketahui. Diasumsikan bahwa data Fase II berdistribusi normal dengan parameter μ dan σ yang menunjukkan rata-rata dan standar deviasi pada distribusi tersebut. Estimator

$\hat{\mu}_0 = \frac{1}{Mn} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^n X_{ij}$ atau disebut *grand mean* (Schoonhoven, dkk (2011)), dan

$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_i^2} = S_p$ merupakan estimator Standar deviasi *pooled*, dimana S_i^2

menunjukkan varians pada subgrup ke i pada sampel Fase I. Di antara penaksir yang umum digunakan untuk σ_0 , penaksir standar deviasi *pooled* memberikan nilai terendah dari MSE (Mahmoud, dkk (2010)).

Bentuk kanonik W_i dapat ditulis sebagai berikut

$$W_i = \frac{1}{O} \left(T_i + \sqrt{nd} - \frac{T_0}{\sqrt{M}} \right) \quad (2.3)$$

dengan $T_i = \frac{\bar{x}_i - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$, $T_0 = \frac{\hat{\mu}_0 - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{Mn}}$, $O = \frac{S_p}{\sigma_0}$, dan $d = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0}$. Perhatikan bahwa

variabel random T_i dan T_0 adalah variabel normal standar independen yang saling

independen dan juga independen dari O. oleh karena itu, $M(n-1) \frac{S_p^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{M(n-1)}^2$ dan

O didistribusikan sebagai $\sqrt{\frac{\chi_{M(n-1)}^2}{M(n-1)}}$. Batas kendali yang digunakan adalah batas

kendali asymptotic (steady state)

$$h = \pm L \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$$

dengan L adalah konstanta chart yang dapat ditentukan untuk nilai λ dan beberapa desain grafik / metrik kinerja. Metrik kinerja biasanya merupakan sifat dari distribusi *in-control* (IC) *run-length*, misalnya *in-control* ARL (ARL_{IN}). Sebagai contoh, diberikan nilai λ dan ARL_{IN} nominal (ARL_0) ketika parameter diketahui, nilai L dapat ditemukan dalam paket R "spc." Seringkali, nilai L tersebut untuk kasus K (mean dan varians diketahui) digunakan untuk membangun EWMA Fase II ketika estimasi parameter digunakan dalam batas kendali. Hal tersebut merupakan masalah dalam mendapatkan lebih banyak alarm palsu dari yang diperkirakan, terutama ketika jumlah data Fase I kecil hingga cukup besar.

2.2 Diagram kendali Multivariat *Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA)

Diagram kendali MEWMA adalah diagram kendali yang digunakan untuk mendeteksi terjadinya pergeseran mean kecil dalam proses secara multivariat, Lowry, dkk (1992) menjelaskan bahwa grafik Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) merupakan perluasan dari grafik EWMA (persamaan (2.1)) dengan $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\mathbf{Z}_i = \lambda(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0) + (1 - \lambda)\mathbf{Z}_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Pada umumnya diasumsikan nilai $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$, sehingga rumus diagram kendali MEWMA menjadi

$$\mathbf{Z}_i = \lambda\mathbf{X}_i + (1 - \lambda)\mathbf{Z}_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

\mathbf{Z}_i adalah vektor MEWMA ke i dengan $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$ dan $\boldsymbol{\lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, $0 \leq \lambda_j \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, r$ dengan r merupakan banyaknya variabel yang digunakan. Jika nilai $\lambda = 1$, maka diagram kendali MEWMA akan menjadi diagram kendali T^2 Hotelling. \mathbf{X}_i merupakan vektor karakteristik yang diamati pada sampel ke i , i merupakan banyaknya pengamatan yang dilakukan dan diasumsikan bahwa \mathbf{X}_i berdistribusi normal multivariat dengan mean $\boldsymbol{\mu}_0$ dan matriks kovariansinya adalah $\boldsymbol{\Sigma}_0$, $\mathbf{X}_i \sim N_r(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$.

Jika ditulis dalam bentuk matriks, persamaan (2.4) dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} Z_{i1} \\ Z_{i2} \\ \vdots \\ Z_{ir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{ir} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{(i-1)1} \\ Z_{(i-1)2} \\ \vdots \\ Z_{(i-1)r} \end{bmatrix}$$

Jika ukuran sampel $n > 1$, \mathbf{X}_i diasumsikan sebagai vektor dari mean sampel, sehingga dapat ditulis

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \bar{\mathbf{X}}_i + (1-\lambda) \mathbf{Z}_{i-1}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{i1} \\ Z_{i2} \\ \vdots \\ Z_{ir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_{i1} \\ \bar{X}_{i2} \\ \vdots \\ \bar{X}_{ir} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{(i-1)1} \\ Z_{(i-1)2} \\ \vdots \\ Z_{(i-1)r} \end{bmatrix}$$

Analog dengan kasus univariat, grafik MEWMA ekuivalen dengan T^2 Hotelling jika $\lambda = 1$.

Statistik kendali yang digunakan pada grafik MEWMA dirumuskan sebagai berikut

$$Q_i = \mathbf{Z}_i' \Sigma_{\mathbf{Z}_i}^{-1} \mathbf{Z}_i \quad (2.5)$$

$\Sigma_{\mathbf{Z}_i}^{-1}$ adalah invers dari matriks kovarian dari \mathbf{Z}_i . Grafik MEWMA memberikan sinyal *out of control* jika $Q_i > h$, dengan $h (> 0)$ dipilih untuk mencapai *in-control* ARL tertentu.

Lowry, dkk (1992) menunjukkan bahwa grafik MEWMA dengan konstanta smoothing yang sama merupakan invarian terarah. Champ, dkk (2005) menunjukkan bahwa distribusi *in-control run length* dari grafik statistik T^2 Hotelling's invarian terarah tidak tergantung pada parameter proses yang tidak diketahui. Distribusi *in-control run length* dari grafik statistik T^2 Hotelling's hanya bergantung pada jumlah variabel (r), jumlah grup Fase I (M), dan ukuran sampel dalam setiap subgroup (n). Jika $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = \lambda$, maka vektor MEWMA dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + (1-\lambda) \mathbf{Z}_{i-1}$$

sehingga

$$\Sigma_{z_i} = \frac{\lambda}{2-\lambda} \left[1 - (1-\lambda)^{2i} \right] \Sigma \quad (2.6)$$

Untuk $i \rightarrow \infty$, persamaan (2.6) dapat disederhanakan menjadi

$$\Sigma_{z_i} = \frac{\lambda}{2-\lambda} \Sigma_{x_i}$$

Mahmoud dan Maravelakis (2010) menjelaskan bahwa ketika parameter μ_0 dan Σ_0 tidak diketahui, maka dapat diestimasi menggunakan suatu sampel yang terdiri dari M subgrup dengan ukuran sampel n dari *in-control* $N_r(\mu_0, \Sigma_0)$, dengan $M \geq 1$ dan $M(n-1) > r$. Estimasi parameter yang digunakan adalah

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{X}_i \quad \text{dan} \quad \hat{\Sigma}_0 = \bar{S} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_i.$$

Anderson (2013) menunjukkan bahwa jika sampel acak X_1, X_2, \dots, X_n diambil dari $N_r(\mu_0, \Sigma_0)$ pada tahap pengambilan sampel i , maka vektor sampel mean $\bar{X}_i \sim N_r\left(\mu_0, \frac{1}{n} \Sigma_0\right)$ dan matriks berdistribusi $(n-1)S_i \sim Wishart_r(\Sigma_0, (n-1))$ dengan $Wishart_r(\Sigma_0, (n-1))$ adalah distribusi Wishart r -variat dengan parameter Σ_0 dan derajat bebas $(n-1)$. Oleh sebab itu, estimator *in-control* dari proses vektor mean $\bar{\bar{X}} \sim N_r\left(\mu_0, \frac{1}{Mn} \Sigma_0\right)$ dan matriks $M(n-1)\bar{S} \sim Wishart_r(\Sigma_0, M(n-1))$.

2.3 Pergeseran Proses

Sebuah grafik menunjukkan sinyal *out-of-control* ketika statistik plot $Q_i > h$ dimana pada diagram kendali MEWMA $UCL = h$ dan $h > 0$ (Montgomery, 2013). Dengan kata lain, h adalah batas kendali dari grafik MEWMA. Nilai h bergantung pada nilai ARL (*average run length*) pada proses terkendali yang dipilih. ARL adalah rata-rata banyaknya titik sampel yang digambarkan sebelum satu titik menunjukkan keadaan *out-of-control*.

Kinerja dari sebuah diagram kendali dilihat berdasarkan nilai pergeseran proses yang terjadi. Besarnya nilai pergeseran untuk diagram kendali MEWMA dilambangkan dengan δ yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\delta = \sqrt{(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)}$$

dengan $\boldsymbol{\mu}_0$ merupakan vektor rata-rata karakteristik kualitas dan $\boldsymbol{\mu}_1$ merupakan vektor rata-rata yang bergeser dari karakteristik kualitas. Besarnya $\boldsymbol{\mu}_0$ dan $\boldsymbol{\mu}_1$ ditentukan dari data pengamatan X_1, X_2, \dots, X_M dengan M adalah banyaknya pengamatan.

Jika X_1, X_2, \dots, X_M merupakan sampel random dari populasi berdistribusi normal, maka besarnya pergeseran atau rata-rata yang mengalami pergeseran yang memungkinkan atau yang masih dapat diterima ($\boldsymbol{\mu}_1$) merupakan interval konfidensi dari distribusi *Student's t* dengan derajat bebas $M - 1$, yaitu $\boldsymbol{\mu}_1$ berada pada interval konfidensi $100(1 - \alpha)\%$, $\boldsymbol{\mu}_0 \pm t_{M-1(\frac{\alpha}{2})} \frac{s}{\sqrt{M}}$ yang ekuivalen dengan

$$\boldsymbol{\mu}_0 - t_{M-1(\alpha/2)} \frac{s}{\sqrt{M}} \leq \boldsymbol{\mu}_1 \leq \boldsymbol{\mu}_0 + t_{M-1(\alpha/2)} \frac{s}{\sqrt{M}}$$

dimana $\boldsymbol{\mu}_0$ merupakan rata-rata proses yang dirumuskan dengan $\boldsymbol{\mu}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i$, dan s adalah standar deviasi proses, yang dirumuskan dengan $s^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_i - \boldsymbol{\mu}_0)^2$. Interval konfidensi tersebut memuat semua nilai $\boldsymbol{\mu}_1$ yang dapat diterima pada suatu proses dengan tingkat signifikansi sebesar α (Wiratih, 2015).

2.4 Average Run Length (ARL)

Average Run Length (ARL) merupakan salah satu cara yang sering digunakan untuk mengukur kinerja diagram kendali untuk mendeteksi pergeseran proses mean. ARL adalah jumlah rata-rata atau sampel yang harus digambarkan sebelum sebuah titik atau sampel menunjukkan suatu keadaan tidak terkendali (Montgomery, 2013). Ketika grafik kendali proses di atur, diharapkan akan menghasilkan ARL yang besar ketika proses *in-control* sementara nilai ARL yang lebih kecil lebih disukai ketika proses *out-of-control* (Pham,2006). *In-control* ARL yang besar mengurangi *false alarm rate* sementara ARL kecil *out-of-control*

menunjukkan deteksi cepat dari perubahan. Huh (2010) menjelaskan bahwa secara umum ARL dapat dirumuskan dengan $ARL = \frac{1}{\alpha}$, dengan α adalah probabilitas bahwa setiap titik melebihi batas kendali.

ARL memiliki dua tipe :

- ARL sesuai target (*in-control*) yang dinotasikan dengan ARL_0
- ARL diluar target (*out-of-control*) yang dinotasikan dengan ARL_1 .

2.4.1 On-Target ARL (ARL_0)

Definisi proses *in-control* (*on-target*) adalah suatu proses yang disebabkan karena penyebab umum variasi yang ada. Penyebab umum merupakan hal yang alami dan berhubungan erat pada setiap proses produksi. Misalkan suatu proses *in-control*. Maka ARL_0 adalah jumlah rata-rata titik yang diplot sebelum *false alarm* muncul untuk pertama kalinya. Misalkan ARL_0 adalah 200, diharapkan bahwa grafik menandakan sinyal *false alarm* pada rata-rata setiap plot 200 titik yang direncanakan meskipun pada kenyataannya proses stabil. Perhatikan bahwa penggunaan ARL yang lebih besar direkomendasikan untuk mengurangi frekuensi *false alarm*.

2.4.2 Off-Target ARL (ARL_1)

Proses *out-of-control* (*off-target* atau tidak stabil) diartikan bahwa suatu proses beroperasi dengan adanya penyebab yang dapat ditentukan, misalnya kerusakan mesin, kesalahan operator, dan lonjakan daya merupakan penyebab yang dapat dialihkan. Ketika proses *out-of-control*, diagram kendali menunjukkan bahwa titik data tidak mengelompok disekitar mean dan berada diluar batas kendali. Misalkan proses *out-of-control*, maka ARL_1 didefinisikan sebagai jumlah rata-rata titik yang diperlukan untuk mendeteksi pergeseran atau dapat diartikan sebagai rata-rata titik pengamatan yang diplot sampai ditemukannya pengamatan yang *out-of-control* pada proses dalam kondisi *out-of-control*. Sebagai contoh, katakanlah ARL_1 adalah 68,1 untuk pergeseran mean tertentu. Sehingga grafik rata-rata membutuhkan 68,1 sampel untuk mendeteksi pergeseran mean. Perhatikan bahwa

untuk mendeteksi pergeseran secara efisien diperlukan ARL_1 yang lebih kecil. (Huh,2014).

2.5 Rantai Markov

Misalkan proses stokastik dalam waktu diskrit dengan ruang finite $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Rantai Markov adalah urutan variabel acak X_0, X_1, X_2, \dots , yang memiliki sifat tersebut. Kondisi yang sebelum dan sesudahnya adalah independen. Dengan kata lain

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) disebut sebagai probabilitas transisi. Pendekatan rantai Markov sering digunakan untuk mengaproksimasi ARL pada diagram kendali. Misalkan Z_i adalah statistik kendali dengan $i = 1, 2, 3, \dots$ dan proses Z_i adalah rantai Markov. Maka, peroleh rantai Markov yang didiskritisasi dengan membagi daerah *in-control* yang dibatasi oleh batas kendali ke banyak sub-daerah. Area diluar batas kendali merepresentasikan keadaan penyerap (absorbing state) sedangkan setiap sub-daerah dalam daerah *in-control* disebut keadaan transien (*transient state*). *Absorbing state* adalah state yang tidak mungkin diabaikan. Dengan kata lain, *state* x disebut absorbing jika dan hanya jika $P(Z_i = x | Z_{i-1} = x) = 1$ dan $P(Z_i = y | Z_{i-1} = x) = 0$ untuk $x \neq y$. Denotasikan probabilitas perulangan pertama hingga x pada n langkah dengan $f_{xx}^n = P(Z_n = x, Z_{n-1} \neq x, \dots, Z_1 \neq x | Z_0 = x)$. Maka, jika $\sum_{n=1}^{\infty} f_{xx}^n < 1$, *state* x disebut transient (Karlin dan Taylor, 1975). Pada waktu i , proses dikatakan *in-control* jika Z_i berada dalam *transient state* dan proses dikatakan *out-of-control* ketika Z_i berada dalam *absorbing state*. Matriks probabilitas transisi dapat dibangun dengan menghitung semua probabilitas transisi dari satu *transient state* ke *transient state* lain. ARL dapat diperoleh sebagai berikut

$$ARL = \mathbf{u}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{a} \quad (2.8)$$

dengan \mathbf{u} adalah vektor probabilitas awal untuk state, \mathbf{a} adalah vektor kolom satu, \mathbf{I} adalah matriks identitas dan \mathbf{P} adalah matriks probabilitas transisi (Huh,2014).

2.5.1 Perhitungan ARL dengan Pendekatan Rantai Markov untuk Grafik EWMA

Lucas dan Saccucci (1990) menggunakan metode rantai markov untuk grafik EWMA dengan mendiskritisasi statistik kendali. Membagi daerah *in-control* (interval antara batas kendali LCL dan UCL) ke dalam $2m+1$ subinterval dan S_k merepresentasikan subinterval ke k , dengan $k = -m, \dots, 0, \dots, m$. Untuk aproksimasi, titik tengah subinterval k (s_k) menggambarkan nilai representatif untuk S_k dan w didefinisikan sebagai setengah ukuran dari subinterval yaitu

$$w = \frac{UCL - LCL}{2(2m+1)}.$$

Jika $s_k - w < Z_i < s_k + w$ untuk $k = -m, \dots, 0, \dots, m$ maka proses dikatakan sebagai *transient state*, jika tidak maka dikatakan dalam kondisi *absorbing state*. Maka probabilitas transisi *in-control* dari satu *transient state* S_l ke state transient lainnya S_k dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} p_{lk} &= P[Z_i \in S_k | Z_{i-1} \in S_l] \\ &= P[s_k - w < \lambda X_i + (1-\lambda)Z_{i-1} < s_k + w | Z_{i-1} = s_l] \\ &= P[\{s_k - w - (1-\lambda)s_l\} / \lambda < X_i < \{s_k + w - (1-\lambda)s_l\} / \lambda], \end{aligned} \quad (2.9)$$

dengan $l, k = -m, \dots, 0, \dots, m$.

Jika $X_i \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, maka persamaan (2.9) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} p_{lk} &= P[Z_i \in S_k | Z_{i-1} \in S_l] \\ &= \Phi\left[\frac{\{(s_k + w) - (1-\lambda)s_l - \lambda\mu_0\}}{\lambda\sigma_0}\right] - \Phi\left[\frac{\{(s_k - w) - (1-\lambda)s_l - \lambda\mu_0\}}{\lambda\sigma_0}\right], \end{aligned}$$

dengan $l, k = -m, \dots, 0, \dots, m$ dan Φ adalah cdf dari distribusi normal standar.

Selain itu, ketika proses *in-control* mean bergeser dari μ_0 ke μ_1 , probabilitas transisi *out-of-control* dari satu state transient s_k ke state transient lainnya s_l dapat diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} p_{lk} &= P[Z_i \in S_k | Z_{i-1} \in S_l] \\ &= P[s_k - w < \lambda X_i + (1 - \lambda)Z_{i-1} < s_l + w | Z_{i-1} = s_l] \\ &= \Phi\left[\frac{\{(s_k + w) - (1 - \lambda)s_l - \lambda\mu_1\}}{(\lambda\sigma_0)}\right] - \Phi\left[\frac{\{(s_k - w) - (1 - \lambda)s_l - \lambda\mu_1\}}{(\lambda\sigma_0)}\right], \end{aligned}$$

dengan $l, k = -m, \dots, 0, \dots, m$. Matriks probabilitas transisi menjadi

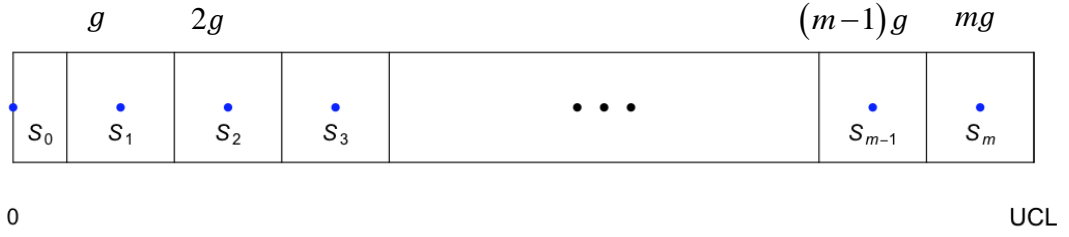
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{-m,-m} & P_{-m,-m+1} & \cdots & P_{-m,m} \\ P_{-m+1,-m} & P_{-m+1,-m+1} & \cdots & P_{-m+1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m,-m} & P_{m,-m+1} & \cdots & P_{m,m} \end{bmatrix}$$

2.5.2 Perhitungan ARL dengan Pendekatan Rantai Markov untuk Grafik MEWMA

Runger dan Prabhu (1996) menggunakan metode rantai Markov untuk menghitung kinerja *run length* diagram kendali MEWMA. Kinerja dari grafik MEWMA dapat dilihat dari nilai *off-target* ARL grafik MEWMA yang disusun. Semakin kecil nilai *off-target* ARL maka semakin baik suatu grafik pengendali karena grafik semakin cepat mendeteksi sampel yang berada di luar batas kendali.

Nilai ARL dengan pendekatan rantai Markov dapat dihitung dengan terlebih dahulu menyusun matriks probabilitas transisi, dengan menentukan *state* yang terbentuk pada rantai. Pada pendekatan rantai Markov, Runger dan Prabhu (1996) merumuskan bahwa dengan menggunakan $q_i = \|\mathbf{Z}_i\|$ sebagai statistik, yang merupakan ukuran jarak dalam ruang dimensional r dengan $\|\mathbf{Z}_i\| = \sqrt{\mathbf{Z}_i' \mathbf{Z}_i}$. Maka $Q_i > h$ (persamaan 2.5) ekuivalen dengan $q_i = \|\mathbf{Z}_i\| > \sqrt{\frac{\lambda h}{2 - \lambda}}$. Sehingga,

$$UCL = \sqrt{\frac{\lambda h}{2 - \lambda}} \text{ dan daerah } in-control \text{ adalah } [0, UCL].$$



Gambar 2.1 Ilustrasi partisi daerah in-control dari grafik MEWMA
(Sumber : Huh, 2014).

Untuk kinerja *in-control*, gambar 2.1 mengilustrasikan *transient state* ketika proses *in-control* dengan mendiskritisasi statistik grafik persamaan (2.5). Daerah *in-control* $[0, UCL]$ dibagi kedalam $m+1$ subinterval, m memiliki panjang g dan subinterval pertama memiliki panjang $\frac{g}{2}$. Maka

$$mg + \frac{g}{2} = UCL$$

$$g \left(m + \frac{1}{2} \right) = UCL$$

$$g = \frac{UCL}{\left(m + \frac{1}{2} \right)} = \frac{2UCL}{2m+1}.$$

S_l , $l=1,2,\dots,m$, merepresentasikan state transient dan titik pada setiap subinterval merepresentasikan titik tengah interval. Distribusi q_i dapat diaproksimasi sebagai berikut. Untuk $l=0,1,2,\dots,m$ dan k tidak sama dengan 0, probabilitas transisi q_i dari state l ke state k adalah

$$\begin{aligned} p_{lk} &= P[q_i \in S_k | q_{i-1} \in S_l] \\ &= P[(k-0,5)g < \|\lambda \mathbf{X}_i + (1-\lambda)\mathbf{Z}_{i-1}\| < (k+0,5)g | \|\mathbf{Z}_{i-1}\| \in S_l] \\ &= P[(k-0,5)g < \|\lambda \mathbf{X}_i + (1-\lambda)\mathbf{Z}_{i-1}\| < (k+0,5)g | q_{i-1} = lg] \end{aligned}$$

(catatan : \mathbf{Z}_{i-1} adalah distribusi spherical dan distribusi dari \mathbf{Z}_{i-1} (diberikan $\|\mathbf{Z}_{i-1}\|, \|\mathbf{Z}_{i-2}\|, \dots, \|\mathbf{Z}_1\|$) adalah uniform (U) pada dimensi sphere r dari jari-jari $\|\mathbf{Z}_{i-1}\|$).

$$\begin{aligned}
&= P\left[(k-0,5)g < \|\lambda \mathbf{X}_i + (1-\lambda)lgU\| < (k+0,5)g\right] \\
&= P\left[(k-0,5)g/\lambda < \|\mathbf{X}_i + (1-\lambda)lge/\lambda\| < (k+0,5)g/\lambda\right] \\
&= P\left[(k-0,5)^2 g^2/\lambda^2 < \chi^2(r,c) < (k+0,5)^2 g^2/\lambda^2\right],
\end{aligned}$$

dengan $\mathbf{e}' = (1,0,0,\dots,0)$, $c = [(1-\lambda)lg/\lambda]^2$ dan $\chi^2(r,c)$ dalam distribusi non-central chi-square dengan derajat bebas r dan parameter non-centrality c .

Untuk $k=0$, maka

$$p_{i0} = P[q_i \in S_0 | q_{i-1} \in S_1] = P[\chi^2(r,c) < (0,5)^2 g^2/\lambda^2].$$

Untuk kinerja *out-of-control*, Runger dan Prabhu (1996) menggunakan metode rantai Markov bivariat. Diasumsikan bahwa

$$E[\mathbf{X}] = \begin{cases} \mu_0 & \text{ketika proses } in\text{-control} \\ \mu_1 & \text{ketika proses out-of-control} \end{cases}$$

dan $Var[\mathbf{X}] = \Sigma_X$. Jika mempertimbangkan variabel $\Sigma_X^{-1/2}(\mathbf{X} - \mu_0)$, maka diperoleh

$$E[\Sigma_X^{-1/2}(\mathbf{X} - \mu_0)] = \begin{cases} \Sigma_X^{-1/2}E[\mathbf{X} - \mu_0] = 0 & \text{ketika proses } in\text{-control} \\ \Sigma_X^{-1/2}(\mu_1 - \mu_0) & \text{ketika proses out-of-control.} \end{cases}$$

Pada saat yang sama, diketahui bahwa $Var[\Sigma_X^{-1/2}(\mathbf{X} - \mu_0)] = \Sigma_X^{-1/2}\Sigma_X(\Sigma_X^{-1/2}) = \mathbf{I}$.

Sehingga, parameter *non-centrality* dari variabel $\Sigma_X^{-1/2}(\mathbf{X} - \mu_0)$ adalah

$$\begin{aligned}
c &= (\Sigma_X^{-1/2}(\mu_1 - \mu_0) - 0)' (\mathbf{I})^{-1} (\Sigma_X^{-1/2}(\mu_1 - \mu_0) - 0) \\
&= (\mu_1 - \mu_0)' \Sigma_X^{-1/2} \Sigma_X^{-1/2} (\mu_1 - \mu_0) \\
&= (\mu_1 - \mu_0)' \Sigma_X^{-1} (\mu_1 - \mu_0).
\end{aligned}$$

Maka, transformasi menunjukkan bahwa kinerja grafik MEWMA adalah sebuah fungsi dari μ_1 hanya melalui parameter non-centrality (Lowry, dkk. 1992). Selain itu, dapat diasumsikan bahwa \mathbf{X} memiliki mean 0 dan matriks kovarian identitas.

Karena ARL adalah sebuah fungsi dari parameter *non-centrality* atau ketika proses pergeseran mean ke μ_1 dari vektor 0 ($\mu_0 = 0$), vektor mean μ_1 dapat

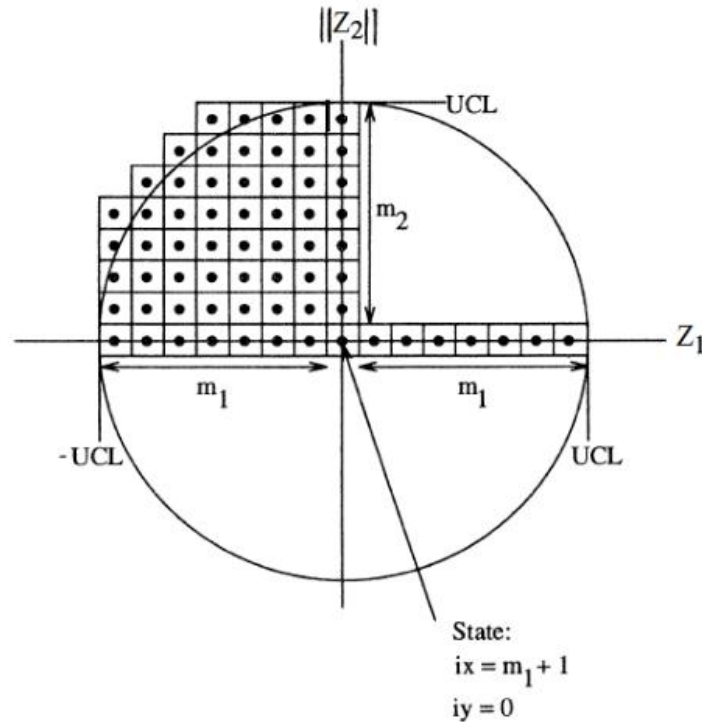
dianggap $\boldsymbol{\mu}_1 = \delta e$ dengan $\delta = \|\boldsymbol{\mu}_1\| = \sqrt{(\boldsymbol{\mu}_1 - 0)' I (\boldsymbol{\mu}_1 - 0)} = \sqrt{\boldsymbol{\mu}_1' \boldsymbol{\mu}_1}$ yang merupakan parameter *noncentrality*. Maka, statistik grafik \mathbf{Z}_i dapat dibagi menjadi:

$$q_i = \|\mathbf{Z}_i\| = (Z_{i1}^2 + \mathbf{Z}'_{i2} \mathbf{Z}_{i2})^{1/2}$$

Z_{i1} adalah variabel random dimensi satu dengan δ mean bukan nol dan \mathbf{Z}_{i2} adalah vektor random dimensi $r-1$ dengan vektor mean nol, dengan $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}_X^{-1} \boldsymbol{\mu})^{1/2}$.

Perhatikan bahwa Z_{i1} dan \mathbf{Z}_{i2} adalah independen.

Nilai *off-target* ARL dari grafik MEWMA dapat dianalisis menggunakan rantai Markov dengan mempartisi \mathbf{Z}_i menjadi Z_{i1} dan $\|\mathbf{Z}_{i2}\|$.



Gambar 2.2 State rantai Markov yang digunakan kasus *off-target* grafik MEWMA (Sumber : Runger dan Prabhu, 1996)

Gambar 2.2 mengilustrasikan grafik 2 dimensi dari $(Z_{i1}, \|\mathbf{Z}_{i2}\|)$ dengan sumbu Z_{i1} dan $\|\mathbf{Z}_{i2}\|$. Aproksimasi dari Z_{i1} seperti pada gambar 2.2 menunjukkan ada $2m_1 + 1$ *transient state* antara $-UCL$ dan UCL . Sehingga lebar setiap *state* g_1 adalah

$$2UCL = 2\left(m_1 g_1 + \frac{g_1}{2}\right)$$

$$2UCL = 2m_1 g_1 + g_1$$

$$2UCL = g_1 (2m_1 + 1)$$

$$g_1 = \frac{2UCL}{2m_1 + 1}.$$

Sedangkan untuk $\|Z_{i2}\|$, jumlah *state* antara 0 dan UCL adalah $m_2 + 1$. Maka lebar *state* $\|Z_{i2}\|$ adalah

$$UCL = m_2 g_2 + \frac{g_2}{2}$$

$$2UCL = 2m_2 g_2 + g_2$$

$$2UCL = g_2 (2m_2 + 1)$$

$$g_2 = \frac{2UCL}{2m_2 + 1}.$$

Probabilitas transisi dari Z_{i1} disebut juga sebagai probabilitas transisi horisontal dan digunakan untuk menganalisa komponen *out-of-control*. *Transient state t* dan *transient state k* untuk Z_{i1} , yang digambarkan pada garis horisontal akan dinotasikan sebagai *state t_x* dan *state k_x*. Untuk $t_x, k_x = 1, 2, \dots, 2m_1 + 1$, Probabilitas transisi Z_{i1} dari *state t_x* ke *state k_x* adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} h(t_x, k_x) &= P\left[Z_{i1} \text{ pada state } k_x \mid Z_{i-1,1} \text{ pada state } t_x\right] \\ &= P\left[-UCL + (k_x - 1)g_1 < \lambda X_{i1} + (1 - \lambda)Z_{i-1,1} < -UCL + k_x g_1 \mid Z_{i-1,1} = c_{t_x}\right] \\ &= P\left[\left(-UCL + (k_x - 1)g_1 - (1 - \lambda)c_{t_x}\right) / \lambda - \delta < X_{i1} - \delta < \left(-UCL + k_x g_1 - (1 - \lambda)c_{t_x}\right) / \lambda - \delta\right] \\ &= \Phi\left(\left(-UCL + k_x g_1 - (1 - \lambda)c_{t_x}\right) / \lambda - \delta\right) - \Phi\left(\left(-UCL + (k_x - 1)g_1 - (1 - \lambda)c_{t_x}\right) / \lambda - \delta\right), \end{aligned}$$

dengan Φ adalah cdf distribusi normal standar dan $c_{t_x} = -UCL + (t_x - 0,5)g_1$ merupakan titik pusat *state t_x*. Matriks transisi Z_{i1} dinotasikan dengan \mathbf{H} dengan ukuran matriks $(2m_1 + 1) \times (2m_1 + 1)$.

Pada probabilitas transisi $\|Z_{i2}\|$ disebut juga probabilitas transisi vertikal dan digunakan untuk menganalisa komponen *in-control*, partisi digambarkan dari 0 sampai dengan UCL. *State t* dan *state k* untuk $\|Z_{i2}\|$ yang digambarkan pada garis

vertikal akan dinotasikan sebagai *state* t_y dan *state* k_y . Untuk $t_y, k_y = 0, 1, 2, \dots, m_2$ probabilitas transisi $\|Z_{i2}\|$ *state* t_y ke *state* k_y adalah sebagai berikut

$$v(t_y, k_y) = P\left[\|Z_{i2}\| \text{ pada } \textit{state } k_y \mid \|Z_{i-1,2}\| \text{ pada } \textit{state } t_y\right]$$

$$= \begin{cases} P\left\{\left(k_y - 0,5\right)^2 g_2^2 / \lambda^2 < \chi^2(r-1, c) < \left(k_y + 0,5\right)^2 g_2^2 / \lambda^2\right\} & \text{jika } k_y \neq 0 \\ P\left\{\chi^2(r-1, c) < (0,5)^2 g_2^2 / \lambda^2\right\} & \text{jika } k_y = 0 \end{cases}$$

dimana elemen-elemen yang menyusun matriks probabilitas transisi berdistribusi *chi-square* non-central dengan derajat bebas $r-1$ dan parameter noncentral

$$c = \left(\frac{(1-\lambda)t_y g_2}{\lambda}\right)^2. \text{ Matriks transisi } \|Z_{i2}\| \text{ dinotasikan dengan } \mathbf{V} \text{ dengan ukuran}$$

matriks $(m_2 + 1) \times (m_2 + 1)$.

Besarnya *off-target* ARL ditentukan oleh probabilitas transisi yang terdiri dari probabilitas transisi horisontal dan probabilitas transisi vertikal. Karena Z_{i1} independen terhadap $\|Z_{i2}\|$, maka probabilitas transisi untuk $(Z_{i1}, \|Z_{i2}\|)$ dari *state* (t_x, t_y) ke *state* (k_x, k_y) yang dinotasikan dengan $P\left[(t_x, t_y), (k_x, k_y)\right]$ dirumuskan sebagai berikut

$$P\left[(t_x, t_y), (k_x, k_y)\right] = h(t_x, k_x) \cdot v(t_y, k_y)$$

Nilai *off-target* ARL dihitung menggunakan persamaan (2.8) dengan nilai \mathbf{P} merupakan matriks transisi $(Z_{i1}, \|Z_{i2}\|)$, dengan syarat $(t_x - (m_1 + 1))^2 g_1^2 + t_y^2 g_2^2 < UCL^2$, dengan $t_x = 1, 2, \dots, 2m_1 + 1$ dan $t_y = 0, 1, \dots, m_2$ dan pasangan (t_x, t_y) adalah *state* dari rantai Markov. Perhatikan gambar 2.2, beberapa *state* harus dikeluarkan dari kumpulan *transient state*. Lebih tepatnya, beberapa probabilitas transisi digantikan dengan 0 dan *state* yang berhubungan dengan probabilitas transisi dianggap sebagai *absorbing state*. Maka \mathbf{P} dihitung dengan mencari *kronecker product* dari \mathbf{H} dan \mathbf{V} ($\mathbf{P} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{V}$).

2.6 Grafik Kendali BEWMA dengan Estimasi Parameter

Pada Fase II diagram Q_i didesain dengan asumsi bahwa vektor random \mathbf{X} berukuran 2×1 berdistribusi bivariat normal dengan parameter $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$. Proses dikatakan in-control ketika $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ dan $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$. Asumsikan $\boldsymbol{\Sigma}$ definit positif dan terdapat matriks non-singular $\boldsymbol{\Lambda}$ dan $\boldsymbol{\Lambda}_0$, sehingga $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{\Lambda}_0^T$. Ketika $\boldsymbol{\mu}_0$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_0$ tidak diketahui atau tidak diberikan sebagai nilai target, maka diasumsikan bahwa terdapat M sampel random independen $\{X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n}\}_{i=1}^M$ dengan $(M \geq 1, M(n-1) \geq r)$ dari sebuah proses r -variat normal untuk menghitung parameter estimasi.

Berdasarkan prosedur yang sama pada penelitian Diko, dkk (2019) dan Champ, dkk (2012), statistik diagram kendali BEWMA dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathbf{Y}_i = \lambda \mathbf{W}_i + (1 - \lambda) \mathbf{Y}_{i-1} \quad (2.10)$$

dengan $\mathbf{W}_i = \sqrt{n} \boldsymbol{\Lambda}_0^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_0)$, $\bar{\mathbf{X}}_i$ adalah rata-rata sampel Fase II. Bentuk kanonik \mathbf{W}_i dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathbf{W}_i = \gamma \mathbf{T}_i + \sqrt{n} \mathbf{d} - \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{T}_0 \quad (2.11)$$

dengan $\mathbf{T}_i = \sqrt{n} \boldsymbol{\Lambda}_0^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu})$, $\mathbf{d} = \boldsymbol{\Lambda}_0^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)$, $\mathbf{T}_0 = \sqrt{Mn} \boldsymbol{\Lambda}_0^{-1} (\bar{\bar{\mathbf{X}}} - \boldsymbol{\mu}_0)$, $\gamma = \boldsymbol{\Lambda}_0^{-1} \boldsymbol{\Lambda}$. Karena pada penelitian ini hanya dilakukan monitoring pada proses mean, maka diasumsikan tidak ada perubahan matriks kovarian ($\gamma = \mathbf{I}$).

Perhatikan bahwa variabel random \mathbf{T}_i , dan \mathbf{T}_0 adalah variabel normal standar independen yang saling independen dan juga independen terhadap $\boldsymbol{\Omega}$. Pada kasus BEWMA diketahui bahwa

$$\bar{\bar{\mathbf{X}}} \sim N_2 \left(\boldsymbol{\mu}_0, \frac{1}{Mn} \boldsymbol{\Sigma}_0 \right) \quad (2.12a)$$

$$M(n-1) \bar{\mathbf{S}} \sim \text{Wishart}_2(\boldsymbol{\Sigma}_0, M(n-1)) \quad (2.12b)$$

$$\mathbf{T}_i \sim N_2(0, \mathbf{I}) \quad (2.12c)$$

$$\mathbf{T}_0 = \sqrt{Mn}\Lambda_0^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \sim N_2(0, \mathbf{I}) \quad (2.12d)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Lambda_0^{-1}\bar{S}(\Lambda_0^{-1})^T \quad (2.12e)$$

Karena $M(n-1)\Lambda_0^{-1}\bar{S}(\Lambda_0^{-1})^T \sim \text{Wishart}_2(I, M(n-1))$, maka $\boldsymbol{\Omega}$ didistribusikan sebagai $\frac{\text{Wishart}_2(I, M(n-1))}{M(n-1)}$. Sehingga nilai estimasi $\boldsymbol{\Sigma}_x$ diperoleh dari nilai $\boldsymbol{\Omega}$

dan persamaan (2.5) dapat ditulis

$$\begin{aligned} Q_i &= \mathbf{Y}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_{Y_i}^{-1} \mathbf{Y}_i \\ &= \left(\lambda \left(\mathbf{T}_i + \sqrt{nd} - \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{T}_0 \right) + (1-\lambda) \mathbf{Y}_{i-1} \right)^T \boldsymbol{\Sigma}_{Y_i}^{-1} \\ &\quad \times \left(\lambda \left(\mathbf{T}_i + \sqrt{nd} - \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{T}_0 \right) + (1-\lambda) \mathbf{Y}_{i-1} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.7 Desain Grafik Pengendali MEWMA Optimal

Wiratih (2015) menjelaskan bahwa pemilihan parameter dari grafik pengendali MEWMA menggunakan rantai Markov bertujuan untuk mendapatkan grafik pengendali MEWMA yang optimal. Grafik pengendali MEWMA dikatakan optimal dalam mendeteksi pergeseran jika grafik MEWMA memiliki nilai *off-target* ARL terkecil diantara semua grafik MEWMA dengan *on-target* ARL yang sama pada suatu pergeseran tertentu.

Penentuan parameter grafik, yaitu λ dan h yang optimal untuk grafik MEWMA dapat dilakukan dengan mengikuti langkah-langkah berikut:

1. Menentukan *on-target* ARL
2. Menentukan pergeseran (δ)
3. Menentukan nilai λ yang berdasarkan ARL pada langkah 1 untuk nilai pergeseran yang sudah didapatkan. Nilai λ diperoleh berdasarkan grafik optimal parameter λ (Lee dan Khoo, 2006)
4. Berdasarkan nilai optimal λ pada langkah 3, ditemukan nilai h yang memenuhi *on-target* ARL pada langkah 1

5. Membandingkan nilai *off-target* ARL untuk kombinasi λ dan h yang optimal dengan pilihan λ dan h yang lain yang menghasilkan *on-target* ARL yang sama.

2.8 Distribusi *Conditional Run-Length*

Epprecht, dkk (2015) menjelaskan bahwa penelitian tentang pengaruh estimasi parameter pada kinerja diagram kendali sebagian besar terfokus pada distribusi *run length* marginal (*unconditional*) dan beberapa karakteristik terkait, misalnya mean, standar deviasi, dan presentil. Namun, ketika parameter proses di estimasi dari *reference* sampel *in-control*, *run length* mengikuti distribusi *conditional*-nya dengan memberikan estimasi parameter (*in-control average run length* (ARL) menjadi *conditional average run length* (CARL)).

Distribusi *unconditional* RL_0 adalah distribusi *in-control run length* setelah “*Averaging out*” yang merupakan efek dari estimasi parameter. Sehingga, sebagaimana dicatat oleh beberapa peneliti [misalnya, Albers dan Kallenberg (2004a, 2004b, dan 2005)., Albers, dkk (2005), Bischak dan Trietsch (2007), Kumar dan Chakraborti (2014)., Saleh, dkk (2015a, 2015b)., Epprecht dkk (2015), Faraz, dkk (2015), Goedhart, dkk (2017a, 2017b dan 2018) dan Jardim, dkk (2018)] dalam aplikasi praktis, distribusi *unconditional in-control* ARL tidak mewakili kinerja sebenarnya dari grafik. Alasannya adalah bahwa distribusi *in-control run length* dikondisikan pada estimasi parameter (*conditional run length*) yang merupakan variabel acak yang pada realisasinya bervariasi dari praktisi ke praktisi dan tidak akan sama dengan *unconditional run length*. Hal ini karena distribusi *conditional average run length* (CARL) adalah fungsi dari estimasi parameter yang diperoleh dari data Fase I yang dapat bervariasi secara signifikan dari dataset ke dataset (variabilitas praktisi ke praktisi).

Pada diagram kendali EWMA, distribusi *conditional run-length* merupakan distribusi *run-length* yang dihitung untuk nilai O dan T_0 (persamaan (2.3)) yang diberikan untuk set data tertentu yang diperoleh dari analisis Fase I. Nilai CARL yang merupakan variabel random dengan distribusinya sendiri. Nilai yang diharapkan dari distribusi CARL adalah *unconditional* ARL. Distribusi

conditional run-length dan CARL dari grafik EWMA dapat dihitung (diaproksimasi) menggunakan metode rantai Markov. CARL dapat ditulis sebagai

$$\text{CARL} = \mathbf{u}_{EWMA}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{EWMA})^{-1} \mathbf{a}_{EWMA}$$

dengan m mewakili jumlah state transient, \mathbf{u}_{EWMA}^T adalah vektor baris $1 \times (2m+1)$ dengan satu di posisi tengah dan 0 untuk *entry* yang lainnya, \mathbf{a}_{EWMA} adalah vektor kolom satu dengan ukuran $(2m+1) \times 1$, \mathbf{I} adalah matriks identitas, $\mathbf{P}_{EWMA} = [p_{lk}]$ adalah matriks probabilitas transisi “*essential*” (*conditional*) berukuran $(2m+1) \times (2m+1)$ dan $l, k = -m, \dots, 0, \dots, m$. Maka probabilitas transisi EWMA (persamaan (2.9)) berubah menjadi matriks probabilitas transisi *conditional essential* yang dihitung dibawah normalitas dan *conditional* pada O dan T_0 yang dirumuskan sebagai berikut

$$p_{lk} = \Phi \left(O \left(\frac{S_k + w - (1-\lambda)S_l}{\lambda} \right) - \sqrt{nd} + \frac{T_0}{\sqrt{M}} \right) - \Phi \left(O \left(\frac{S_k - w - (1-\lambda)S_l}{\lambda} \right) - \sqrt{nd} + \frac{T_0}{\sqrt{M}} \right)$$

dengan $S_f = -w + ((m+f)+1)w$ dan $f = l, k$.

Diko, dkk (2019) menjelaskan bahwa ketika parameter diestimasi, menggunakan konstanta *chart* untuk kasus K untuk merancang Fase II grafik EWMA adalah persoalan yang berisiko, karena dapat menghasilkan nilai CARL_{IN} yang sangat rendah yang hampir pasti akan mempertanyakan proses pemantauan kinerja. Risiko ini dapat sedikit dikurangi dengan meningkatkan M . Namun, nilai M yang diperlukan untuk mengurangi probabilitas nilai CARL_{IN} yang rendah bisa sangat besar. Oleh karena itu, banyak grafik kendali dalam literatur terbaru dengan parameter estimasi dirancang sedemikian rupa

$$P(\text{CARL}_{IN} > \text{ARL}_0) = 1 - p \quad (2.14)$$

Oleh karena itu nilai ARL_0 adalah nilai persentil $100p$ dari distribusi CARL_{IN} . Hal ini merupakan pendekatan EPC yang digunakan untuk mengevaluasi dan merancang grafik pada penelitian ini.

2.9 Exceedance Probability Criterion (EPC)

Ketika melakukan analisis tentang kinerja suatu diagram kendali, terkadang praktisi menghasilkan kinerja diagram kendali yang kurang memuaskan. Oleh karena itu, praktisi juga harus memperhatikan kinerja *conditional* yaitu menggunakan *exceedance probability criterion* (EPC). Hal ini bertujuan untuk menjamin kinerja diagram kendali bersyarat minimum (pada umumnya dalam FAR atau ARL) untuk praktisi dengan probabilitas yang ditentukan sebelumnya.

Pendekatan EPC memperhitungkan variabilitas distribusi $CARL_{IN}$. Oleh karena itu, digunakan pendekatan EPC untuk mempelajari grafik kendali. Pendekatan EPC yang digunakan pada penelitian ini adalah pendekatan EPC yang dirumuskan oleh Diko, dkk (2019) yaitu

$$P(CARL_{IN} \leq ARL_0) = p$$

Maka, untuk $p \in (0,1)$, akan ditentukan presentil ke $100p$ dari $CARL_{IN}$ ($CARL_{IN,p}$).

Setelah diperoleh $CARL_{IN,p}$, maka $CARL_{IN,p}$ dibandingkan dengan ARL_0 yang merupakan nilai teoritis yang harus dilampaui dengan probabilitas $1-p$. Perbandingan antara $CARL_{IN,p}$ dan ARL_0 berdasarkan pada *percentage difference* (PD),

$$PD = \frac{CARL_{IN,p} - ARL_0}{ARL_0} \times 100$$

Secara matematis, jumlah subgroup M yang diperlukan untuk menjamin bahwa $CARL_{IN}$ melebihi $CARL_{IN,p}$ dengan probabilitas tinggi tertentu yang ditetapkan ($1-p$) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} P(CARL_{IN} > CARL_{IN,p}) &\geq 1-p \\ P(CARL_{IN} > ARL_0(1-\varepsilon)) &\geq 1-p \end{aligned} \tag{2.15}$$

dengan $\varepsilon \geq 0\%$ adalah nilai PD yang ditentukan secara nominal. Perhatikan bahwa $\varepsilon \geq 0$ karena pada umumnya $CARL_{IN,p} < ARL_0$. Perhatikan juga bahwa jika $\varepsilon = 0\%$ maka $CARL_{IN,p} = ARL_0$, sehingga persamaan (2.15) tereduksi menjadi persamaan (2.14).

2.10 Uji Normal Multivariat

Pada penyusunan diagram kendali MEWMA, data harus memenuhi asumsi normal multivariat. Namun pada beberapa penelitian mengasumsikan bahwa data berdistribusi normal multivariat ketika merancang diagram kendali MEWMA. Karena tidak semua data memiliki distribusi normal multivariat, maka dilakukan pengujian untuk mengetahui apakah data berdistribusi normal multivariat. Salah satu pengujian normal multivariat adalah dengan menggunakan prosedur yang dikembangkan oleh mardia, dkk (1979) yaitu menggunakan perhitungan skewness dan kurtosis. Kriteria pengujian yang digunakan untadalah

Hipotesis

$H_0 : \mu = \mu_0$ (data berdistribusi normal multivariat)

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ (data tidak berdistribusi normal multivariat)

Statistik uji yang digunakan adalah skewness dan kurtosis yang dirumuskan sebagai berikut:

Skewness ($b_{1,r}$)

$$b_{1,r} = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M g_{ij}^3, g_{ij} = (x_i - \bar{x})^T \mathbf{S}^{-1} (x_j - \bar{x})$$

Kurtosis ($b_{2,r}$)

$$b_{2,r} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g_{ii}^2, g_{ii} = (x_i - \bar{x})^T \mathbf{S}^{-1} (x_i - \bar{x}).$$

Kriteria penolakan adalah tolak H_0 apabila nilai $\frac{1}{6} M b_{1,r} > \chi^2_{\alpha, \frac{1}{6} r(r+1)(r+2)}$ dan

$$\left| \frac{b_{2,r} - r(r+2)}{\sqrt{8r(r+2)/n}} \right| > Z_{\alpha/2} \text{ atau p-value yaitu } P\left(\chi^2 > \frac{1}{6} M b_{1,r}\right) \text{ dan } P\left(Z > \frac{b_{2,r} - r(r+2)}{\sqrt{8r(r+2)/n}}\right)$$

yang dihasilkan kurang dari α .

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Studi literatur

Pada tahap ini dilakukan studi pendahuluan untuk menentukan tujuan dan permasalahan dalam Tesis. Selanjutnya dilakukan studi literatur untuk mengumpulkan informasi yang diperlukan untuk pengerjaan Tesis. Pada penelitian ini, akan di evaluasi kinerja diagram kendali BEWMA dengan menggunakan bantuan program R. Data yang akan digunakan pada penelitian ini adalah data simulasi yang digunakan untuk menghitung CARL dan data hasil monitoring uji lab kimia kualitas *billet* baja yang diambil dari penelitian Syahputra (2019).

3.2 Struktur Data

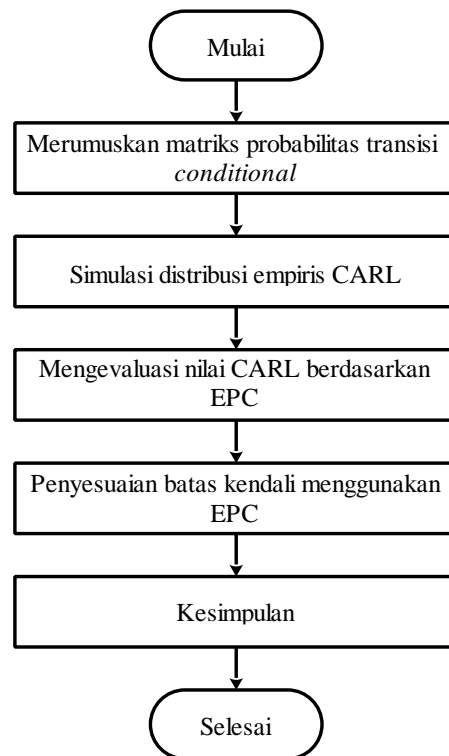
Data simulasi yang digunakan merupakan standardisasi antara rata-rata *in-control* yang sebenarnya dengan estimasi rata-rata *in-control*, dengan struktur data bangkitan sebagai berikut.

Tabel 3.1 Struktur Data

Iterasi ke - b	Rata-rata karakteristik kualitas	
	T_{01}	T_{02}
1	T_{011}	T_{021}
2	T_{012}	T_{022}
3	T_{013}	T_{023}
\vdots	\vdots	\vdots
B	T_{01B}	T_{02B}

3.3 Langkah Analisis

Langkah-langkah analisis yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

1. Merumuskan matriks probabilitas transisi *essential*

Berdasarkan statistik BEWMA pada persamaan (2.13) dan (2.11) akan dirumuskan matriks probabilitas transisi Y_i dari satu state transien ke state transien yang lainnya, atau dapat dirumuskan dengan

$$P(Y_i \in \text{state transien} | Y_{i-1} \in \text{state transien lainnya})$$

2. Simulasi distribusi empiris CARL

- a. Mengestimasi h yang diperlukan untuk menghasilkan *in-control* ARL (ARL_0) ketika nilai yang berbeda dari parameter *smoothing* λ digunakan dalam merancang statistik diagram BEWMA. Estimasi h dilakukan untuk ARL_0 bernilai 100, 200, 370 dan 500

Langkah-langkah menghitung ARL:

I. Menetapkan nilai $\lambda, h, \delta, m_1, m_2$

$$\lambda = 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1$$

$$5 < h < 11,999$$

$$\delta = 0$$

$$m_1 = m_2 = 25$$

II. Hitung nilai

$$UCL = \sqrt{\frac{\lambda h}{2-\lambda}}; \quad g_1 = \frac{2UCL}{2m_1+1}; \quad g_2 = \frac{2UCL}{2m_2+1}$$

III. Hitung nilai matriks transisi

$$\mathbf{H} = \Phi\left(\frac{-UCL + k_x g_1 - (1-\lambda)c_{t_x}}{\lambda - \delta}\right) - \Phi\left(\frac{-UCL + (k_x - 1)g_1 - (1-\lambda)c_{t_x}}{\lambda - \delta}\right)$$

$$c_{t_x} = -UCL + (t_x - 0,5)g_1; \quad t_x, k_x = 1, 2, \dots, 2m+1$$

$$\mathbf{V} = \begin{cases} P\left\{(k_y - 0,5)^2 g_2^2 / \lambda^2 < \chi^2(r-1, c) < (k_y + 0,5)^2 g_2^2 / \lambda^2\right\} & \text{jika } k_y \neq 0 \\ P\left\{\chi^2(r-1, c) < (0,5)^2 g_2^2 / \lambda^2\right\} & \text{jika } k_y = 0 \end{cases}$$

$$c = \left(\frac{(1-\lambda)t_y g_2^2}{\lambda}\right)^2; \quad t_y, k_y = 0, 1, 2, \dots, m_2$$

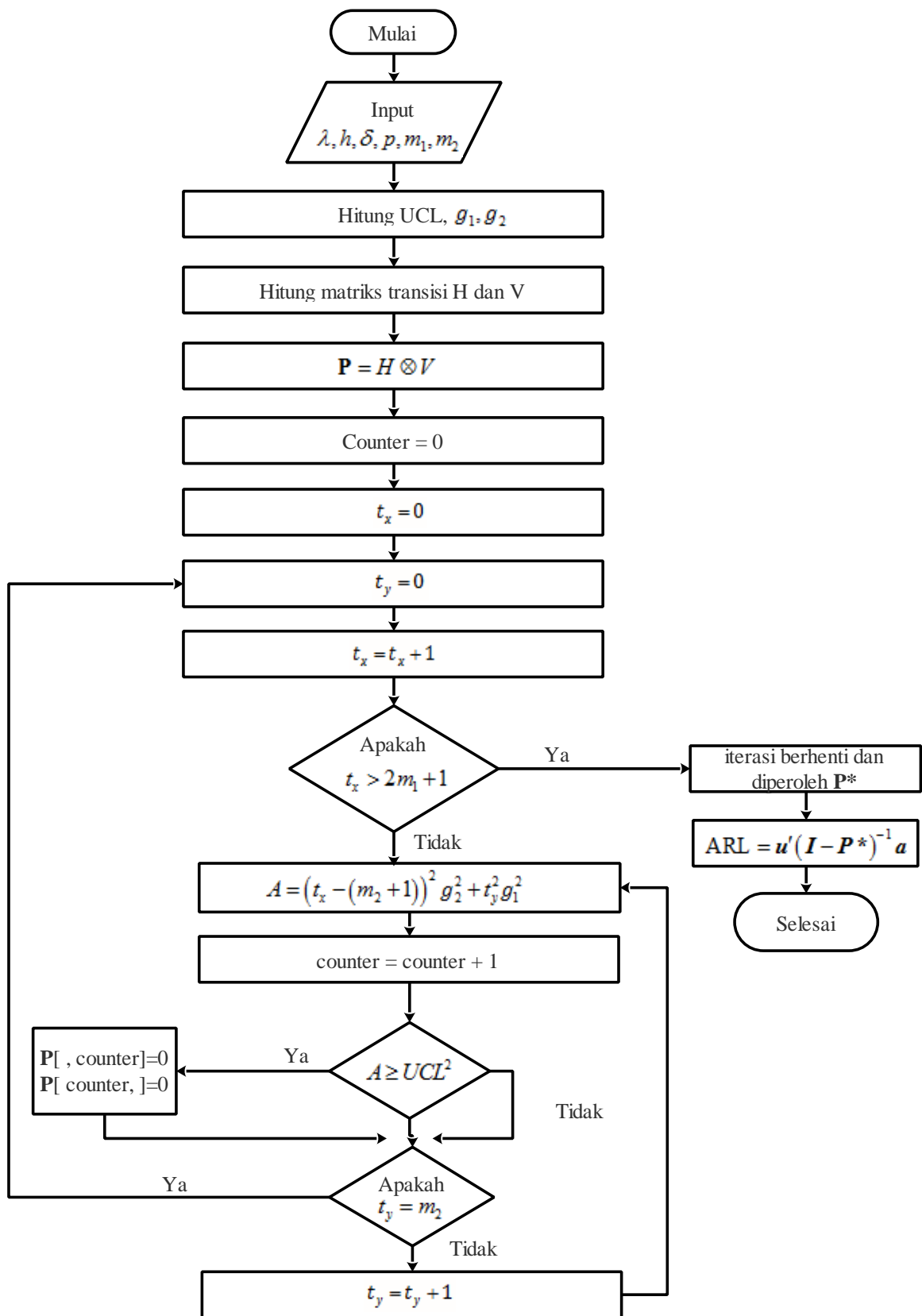
IV. Hitung kronecker matriks transisi $\mathbf{P} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{V}$

V. Hitung $A = (t_x - (m_2 + 1))^2 g_2^2 + t_y^2 g_1^2$, dengan $t_x = 1, 2, \dots, 2m_1 + 1$ dan $t_y = 0, 1, \dots, m_2$. Jika $A \geq UCL^2$ maka kolom dan baris pertama matriks \mathbf{P} adalah nol. Jika tidak, maka dilanjutkan ke baris dan kolom selanjutnya. Hingga proses selesai dan diperoleh matriks \mathbf{P} dengan *transient state* (misalkan \mathbf{P}^*)

VI. Hitung ARL dengan rumus

$$ARL = \mathbf{u}'(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{a}$$

\mathbf{u}' adalah matrik $1 \times ((2m_1 + 1)(m_2 + 1))$ dengan satu di posisi tengah (pada posisi $m_1(m_2 + 1) + 1$) dan 0 untuk *entry* yang lainnya, \mathbf{a} adalah vektor kolom satu dengan ukuran $((2m_1 + 1)(m_2 + 1)) \times 1$, \mathbf{I} adalah matriks identitas $((2m_1 + 1)(m_2 + 1)) \times ((2m_1 + 1)(m_2 + 1))$



Gambar 3.2 Diagram Alir ARL

b. Menetapkan $M, n, \lambda, h, p, m_1, m_2$

$$M = 30, 50, 100, 400, 500, 600, 900, 1000, 1500, 2000, 4000, 6000, 10000$$

$$n = 3, 5$$

$$\lambda = 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1$$

$$p = 0,05 ; 0,10$$

$$m_1 = m_2 = 25$$

c. Simulasi pengamatan

- Bangkitkan data $T_0 \sim N_2(0, I)$ berdasarkan pada persamaan (2.12)

Data dibangkitkan menggunakan transformasi langsung.

Membangkitkan data dari

$$N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right) = N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

- Bangkitkan u_1 dan u_2 dari $N(0,1)$, dengan jumlah bangkitan masing-masing 1 angka dengan nilai min = 0 dan nilai max = 1.
- Lakukan transformasi

$$T_{01} = \mu_1 + \sigma_1 u_1$$

$$T_{02} = \mu_2 + \rho\sigma_2 u_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} u_2$$

$$\text{maka } (T_{01}, T_{02}) \text{ adalah data dari } N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

(Tirta, 2003).

- Bangkitkan τ berdistribusi $Wishart_2(I, M(n-1))$.
 - Hitung U, faktor upper-triangular Cholesky dari matriks I .
 - Simulasi matriks lower-triangular 2×2 sebagai berikut

$$L = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ z_{21} & c_2 \end{pmatrix}$$

dengan $c_i^2 \sim \chi_{M(n-1)-i+1}^2$ dan $z_{ij} \sim N(0,1)$. Maka $\tau = U^T L L^T U$.

$$\text{Hitung } \Sigma_X = \Omega = \frac{1}{M(n-1)} \tau \text{ (Koch \& Bopp, 2019).}$$

- d. Hitung probabilitas matriks transisi menggunakan rumus yang diperoleh pada langkah satu.
- e. Hitung $CARL_{IN}$.

$$CARL = \mathbf{u}_c^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_c)^{-1} \mathbf{a}_c$$

\mathbf{u}_c^T adalah vektor baris dengan satu diposisi tengah dan 0 untuk entry lainnya, \mathbf{a}_c adalah vektor kolom satu, \mathbf{I} adalah matriks identitas, \mathbf{P}_c adalah matriks probabilitas transisi conditional yang diperoleh pada langkah satu. $CARL_{IN}$ merupakan nilai CARL pada saat pergeseran sama dengan nol.

- f. Ulang step a-e sebanyak $B=1000$ kali dan mendapatkan $(CARL_{IN})_b$, dengan $b = 1, 2, \dots, B$

3. Mengevaluasi nilai CARL berdasarkan EPC

Evaluasi kinerja EPC dilihat berdasarkan nilai *Precentage Differrent* (PD).

Langkah-Langkah menghitung PD adalah sebagai berikut

- a. Menetapkan $M, n, \lambda, h, p, m_1, m_2$ dan ARL_0
- b. Mendapatkan distribusi empiris dari $CARL_{IN}$
- c. Menghitung persentil ke- $100p$ dari $CARL_{IN}$ ($CARL_{IN,p}$)
- d. Menghitung $PD = \frac{CARL_{IN,p} - ARL_0}{ARL_0} \times 100$, perbedaan presentase antara $CARL_{IN,p}$ dan ARL_0

(Jika PD bernilai negatif maka $CARL_{IN,p} < ARL_0$ dan sebaliknya)

4. Mencari nilai batas kendali (penyesuaian batas kendali) menggunakan EPC

- a. Tetapkan $\varepsilon, p, ARL_0, M, n, \lambda$ dan nilai h

$$\varepsilon = 0\%$$

$$ARL_0 = 100, 200, 370, 500$$

$$M = 30, 50, 100, 400, 500$$

Nilai h yang digunakan berbeda-beda dalam interval $[h, \infty)$ yaitu mulai dari nilai h hasil estimasi sampai menuju ∞

$$n = 3, 5$$

$$\lambda = 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1$$

$$p = 0,10$$

- b. Mendapatkan distribusi empiris dari $CARL_{IN}$
 - c. Hitung presentil $100p$ dari $CARL_{IN}$ ($CARL_{IN,p}$)
 - d. Jika $CARL_{IN,p} > ARL_0(1-\varepsilon)$ maka proses iterasi berhenti dan gunakan nilai h pada kondisi tersebut, jika tidak maka menambahkan nilai h dan kembali ke tahap 4b.
(Untuk menemukan h dengan cepat, mulailah dengan M besar)
5. Membuat kesimpulan berdasarkan evaluasi kinerja menggunakan EPC.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 4 ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Matriks Probabilitas Transisi Conditional

Pada persamaan (2.13) diketahui statistik BEWMA adalah $Q_i = \mathbf{Y}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_{Y_i}^{-1} \mathbf{Y}_i$.

Misalkan

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_0 = \bar{X} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{10} \\ \hat{\mu}_{20} \end{pmatrix} \text{ dan } \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_X = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \rho \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \\ \rho \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 & \hat{\sigma}_2^2 \end{bmatrix}$$

matrik kovarian \mathbf{Y}_i adalah

$$\boldsymbol{\Sigma}_{Y_i} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 \hat{\sigma}_1^2 (1 - (1 - \lambda_1)^{2i})}{2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 (1 - (1 - \lambda_1)^i (1 - \lambda_2)^i)}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 (1 - (1 - \lambda_1)^i (1 - \lambda_2)^i)}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2} & \frac{\lambda_2 \hat{\sigma}_2^2 (1 - (1 - \lambda_2)^{2i})}{2 - \lambda_2} \end{bmatrix}$$

bentuk *steady state* matriks kovarian \mathbf{Y}_i (ketika $i \rightarrow \infty$), adalah

$$\boldsymbol{\Sigma}_{Y_i} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 \hat{\sigma}_1^2}{2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2} & \frac{\lambda_2 \hat{\sigma}_2^2}{2 - \lambda_2} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Invers matriks kovarian $\boldsymbol{\Sigma}_{Y_i}^{-1}$ adalah

$$\boldsymbol{\Sigma}_{Y_i}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

dengan

$$a = \frac{(2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2)^2}{\lambda_1 \hat{\sigma}_1^2 (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2)^2 - \lambda_1^2 \lambda_2 \rho^2 \hat{\sigma}_1^2 (2 - \lambda_1)(2 - \lambda_2)}$$

$$b = \frac{\rho (2 - \lambda_1)(2 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 \rho^2 \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 (2 - \lambda_1)(2 - \lambda_2) - \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2)^2}$$

$$c = \frac{(2 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2)^2}{\lambda_2 \hat{\sigma}_2^2 (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2)^2 - \lambda_1 \lambda_2^2 \rho^2 \hat{\sigma}_2^2 (2 - \lambda_1)(2 - \lambda_2)}$$

Sehingga

$$Q_i = \mathbf{Y}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \mathbf{Y}_i > h$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1,i} \\ Y_{2,i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1,i} \\ Y_{2,i} \end{bmatrix} = aY_{1,i}^2 + 2bY_{1,i}Y_{2,i} + cY_{2,i}^2 > h. \quad (4.2)$$

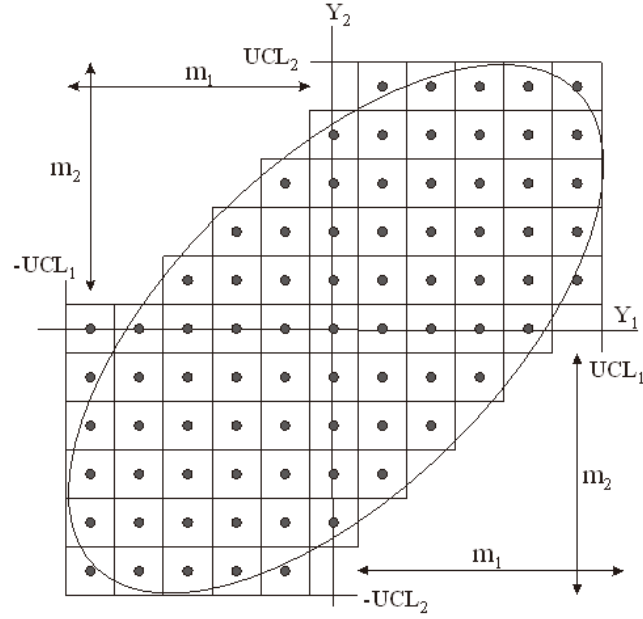
Persamaan (4.2) membentuk elips miring (gambar 4.1) pada Y_1 dan Y_2 dengan pusat (0,0). Batas kendali Y_1 adalah $[-UCL_1, UCL_1]$ yang dibagi kedalam $2m_1 + 1$ subinterval dan batas kendali Y_2 adalah $[-UCL_2, UCL_2]$ yang dibagi kedalam $2m_2 + 1$ subinterval. Jika g_1 dan g_2 menunjukkan panjang subinterval, maka

$$UCL_i = (2m_i + 1) \frac{g_i}{2}; \quad i = 1, 2$$

dengan differensiasi persamaan (4.2) sehubungan dengan Y_1 dan Y_2 seperti pada penelitian Huh,dkk (2017) menghasilkan panjang subinterval

$$g_1 = \frac{2\sqrt{hc}}{(2m_1 + 1)\sqrt{(ac - b^2)}} \quad \text{dan} \quad g_2 = \frac{2\sqrt{ha}}{(2m_2 + 1)\sqrt{(ac - b^2)}}.$$

Misalkan bahwa subinterval sumbu, I_1, \dots, I_{2m_1+1} untuk Y_1 dan J_1, \dots, J_{2m_2+1} untuk Y_2 . Induksi $(2m_1 + 1) \times (2m_2 + 1)$ subrectangle $I_i \times J_j$, $i = 1, \dots, 2m_1 + 1$ dan $j = 1, \dots, 2m_2 + 1$. Titik akhir subinterval di notasikan dengan $I_i = [A_i, B_i] = [-UCL_1 + (i-1)g_1, -UCL_1 + ig_1]$ dan $J_j = [C_j, D_j] = [-UCL_2 + (j-1)g_2, -UCL_2 + jg_2]$. Pusat $I_i \times J_j$ adalah $(\alpha_i, \beta_j) = (-UCL_1 + (i-0.5)g_1, -UCL_2 + (j-0.5)g_2)$. State transient rantai Markov bivariat terdiri dari semua subrectangles $I_i \times J_j$ yang pusatnya (α_i, β_j) berada dalam elips, yaitu di dalam daerah kendali.



Gambar 4.1 State dalam rantai Markov. Titik melambangkan titik tengah state.
Sumber : Huh,dkk (2017)

Pada penelitian Huh (2017) memisalkan state transient $I_i \times J_j$ dan $I_k \times J_l$ dengan $i, k = 1, 2, \dots, 2m_1 + 1$ dan $j, l = 1, 2, \dots, 2m_2 + 1$. Hal ini menunjukkan bahwa probabilitas transisi Y_i dari state $I_k \times J_l$ ke $I_i \times J_j$ adalah

$$\begin{aligned}
 & P\left(Y_i \in I_i \times J_j \mid Y_{i-1} \in I_k \times J_l\right) \\
 &= P\left(\begin{pmatrix} Y_{1,i} \\ Y_{2,i} \end{pmatrix} \in I_i \times J_j \mid \begin{pmatrix} Y_{1,i-1} \\ Y_{2,i-1} \end{pmatrix} \in I_k \times J_l\right) \\
 &= P\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 W_{1,i} + (1-\lambda_1) Y_{1,i-1} \\ \lambda_2 W_{2,i} + (1-\lambda_2) Y_{2,i-1} \end{pmatrix} \in I_i \times J_j \mid \begin{pmatrix} Y_{1,i-1} \\ Y_{2,i-1} \end{pmatrix} \in I_k \times J_l\right) \\
 &= P\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 W_{1,i} + (1-\lambda_1) Y_{1,i-1} \\ \lambda_2 W_{2,i} + (1-\lambda_2) Y_{2,i-1} \end{pmatrix} \in I_i \times J_j \mid \begin{pmatrix} Y_{1,i-1} = \alpha_k \\ Y_{2,i-1} = \beta_l \end{pmatrix}\right) \\
 &= P\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 W_{1,i} + (1-\lambda_1) \alpha_k \\ \lambda_2 W_{2,i} + (1-\lambda_2) \beta_l \end{pmatrix} \in I_i \times J_j\right)
 \end{aligned}$$

dengan $\alpha_k = -UCL_1 + (k-0,5)g_1$ dan $\beta_l = -UCL_2 + (l-0,5)g_2$

$$\begin{aligned}
& P\left(\left(\begin{array}{c} \lambda_1 W_{1,i} + (1-\lambda_1)\alpha_k \\ \lambda_2 W_{2,i} + (1-\lambda_2)\beta_l \end{array}\right) \in I_i \times J_j\right) \\
&= P\left(\lambda_1 W_{1,i} + (1-\lambda_1)\alpha_k \in I_i \ \& \ \lambda_2 W_{2,i} + (1-\lambda_2)\beta_l \in J_j\right) \\
&= P\left(\lambda_1 W_{1,i} + (1-\lambda_1)\alpha_k \in I_i\right) P\left(\lambda_2 W_{2,i} + (1-\lambda_2)\beta_l \in J_j \mid \lambda_1 W_{1,i} + (1-\lambda_1)\alpha_k \in I_i\right) \\
&= P\left(\lambda_1 W_{1,i} + (1-\lambda_1)\alpha_k \in I_i\right) P\left(\lambda_2 W_{2,i} + (1-\lambda_2)\beta_l \in J_j \mid \lambda_1 W_{1,i} + (1-\lambda_1)\alpha_k = \alpha_i\right)
\end{aligned}$$

Maka dapat dirumuskan matriks probabilitas transisi dari CARL adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& P\left(\mathbf{Y}_i \in I_i \times J_j \mid \mathbf{Y}_{i-1} \in I_k \times J_l\right) \\
&= P\left(A_i < \lambda_1 \left(T_{1i} + \sqrt{nd_1} - \frac{T_{10}}{\sqrt{M}}\right) + (1-\lambda_1)\alpha_k \leq B_i\right) \\
&\times P\left(C_i < \lambda_2 \left(T_{2i} + \sqrt{nd_2} - \frac{T_{20}}{\sqrt{M}}\right) + (1-\lambda_2)\beta_l \leq D_i \mid \lambda_1 \left(T_{1i} + \sqrt{nd_1} - \frac{T_{10}}{\sqrt{M}}\right) + (1-\lambda_1)\alpha_k = \alpha_i\right) \\
&= P\left(\frac{A_i - (1-\lambda_1)\alpha_k}{\lambda_1} - \sqrt{nd_1} + \frac{T_{10}}{\sqrt{M}} < T_{1i} \leq \frac{B_i - (1-\lambda_1)\alpha_k}{\lambda_1} - \sqrt{nd_1} + \frac{T_{10}}{\sqrt{M}}\right) \times \\
&P\left(\begin{array}{c} \frac{C_i - (1-\lambda_2)\beta_l}{\lambda_2} - \sqrt{nd_2} + \frac{T_{20}}{\sqrt{M}} < T_{2i} \\ \leq \frac{D_i - (1-\lambda_2)\beta_l}{\lambda_2} - \sqrt{nd_2} + \frac{T_{20}}{\sqrt{M}} \mid T_{1i} = \frac{\alpha_i - (1-\lambda_1)\alpha_k}{\lambda_1} - \sqrt{nd_1} + \frac{T_{10}}{\sqrt{M}} \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Penerapan metode rantai Markov *conditional* pada Ω dan \mathbf{T}_0 dari grafik BEWMA Fase II dapat ditulis

$$\text{CARL} = \mathbf{u}_c^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_c)^{-1} \mathbf{a}_c \quad (4.3)$$

\mathbf{u}_c^T adalah vektor baris $1 \times ((2m_1 + 1)(2m_2 + 1))$ dengan satu diposisi tengah dan 0 untuk entry lainnya, \mathbf{a}_c adalah vektor kolom satu dengan ukuran $((2m_1 + 1)(2m_2 + 1)) \times 1$, \mathbf{I} adalah matriks identitas, $\mathbf{P} = [p_{(k+1)(2m_1+1)+l, (i+1)(2m_1+1)+j}]$ adalah matriks probabilitas transisi conditional berukuran $((2m_1 + 1)(2m_2 + 1)) \times ((2m_1 + 1)(2m_2 + 1))$, $i, k = 1, \dots, 2m_1 + 1$ dan $j, l = 1, \dots, 2m_2 + 1$ dengan syarat $a(\alpha - (m_1 + 1))^2 g_1^2 + 2b(\alpha - (m_1 + 1))(\beta - (m_2 + 1))g_1 g_2 + c(\beta - (m_2 + 1))^2 g_2^2 < h$, dengan nilai $\alpha = 1, \dots, 2m_1 + 1$ dan $\beta = 1, \dots, 2m_2 + 1$.

$$\begin{aligned}
& P_{(k-1)(2m_1+1)+l, (i-1)(2m_2+1)+j} \\
& = \left[\Phi \left(\frac{-UCL_1 + ig_1 - (1-\lambda_1)\alpha_k}{\lambda_1} - \sqrt{nd_1} + \frac{T_{10}}{\sqrt{M}} \right) - \Phi \left(\frac{-UCL_1 + (i-1)g_1 - (1-\lambda_1)\alpha_k}{\lambda_1} - \sqrt{nd_1} + \frac{T_{10}}{\sqrt{M}} \right) \right] \times \\
& \left[\Phi \left(\frac{-UCL_2 + jg_2 - (1-\lambda_2)\beta_l}{\lambda_2} - \sqrt{nd_2} + \frac{T_{20}}{\sqrt{M}} \right) - \Phi \left(\frac{-UCL_2 + (j-1)g_2 - (1-\lambda_2)\beta_l}{\lambda_2} - \sqrt{nd_2} + \frac{T_{20}}{\sqrt{M}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

dengan Φ adalah fungsi cdf dari variabel normal standar.

4.2 Kinerja Grafik BEWMA Fase II Menggunakan EPC

Pada diagram kendali, ketika proses dilakukan dengan menggunakan Fase I dan Fase II maka batas kendali yang digunakan pada grafik Fase II merupakan batas kendali yang diperoleh dalam kasus parameter diketahui. Parameter yang diketahui untuk membentuk batas kendali yang digunakan pada Fase II merupakan hasil estimasi parameter dari Fase I. Sehingga pada penelitian ini, untuk melakukan evaluasi kinerja grafik BEWMA Fase II dilakukan estimasi batas kendali atas (h) yang dibutuhkan untuk menghasilkan ARL *in-control* 100, 200, 370, dan 500 dengan nilai konstanta smoothing yang berbeda-beda. Tabel 4.1 merupakan hasil estimasi h dengan menggunakan metode rantai Markov. Nilai ARL *in-control* yang besar membutuhkan batas kendali dan konstanta smoothing yang besar, atau dengan kata lain, ketika menggunakan nilai konstanta smoothing dan batas kendali yang besar maka akan menghasilkan nilai ARL *in-control* yang besar.

Tabel 4.1 Nilai h yang menghasilkan ARL *in-control* 100, 200, 370, dan 500 ketika parameter diketahui

ARL ₀	λ			
	0,1	0,2	0,5	1
100	6,980	8,068	8,971	9,176
200	8,641	9,633	10,408	10,559
370	10,091	10,998	11,672	11,787
500	10,791	11,658	12,288	12,388

Lampiran 3 menunjukkan nilai CARL_{IN} dari grafik BEWMA untuk nilai M , n , p , dan λ yang berbeda-beda dengan menggunakan batas kendali pada tabel 4.1. Berdasarkan lampiran 3, dapat dilihat bahwa ketika nilai M kecil, nilai *percentage different* (PD) atau nilai yang ada pada tanda kurung pada setiap sel

sangat tinggi dalam nilai absolut. Misalkan untuk nilai $M = 30$, $ARL_0 = 370$, $p = 0,05$, $\lambda = 0,1$, $n = 3$ diperoleh $CARL_{IN,p} = 37,71$ yaitu 89,81% (PD = -89,81%) dibawah nilai $ARL_0 = 370$. Sehingga diharapkan nilai $CARL_{IN}$ dari grafik BEWMA setidaknya bernilai 37,71 dengan probabilitas 95% dan sebaliknya, yaitu nilai $CARL_{IN}$ dari grafik BEWMA paling banyak bernilai 37,71 dengan probabilitas 5%. Ketika ukuran subgrup lebih besar yaitu $n = 5$, nilai $CARL_{IN,p} = 38,21$ yaitu 89,67% dibawah $ARL_0 = 370$. Sehingga ketika n diperbesar maka nilai $CARL_{IN}$ akan semakin besar. Begitu pula dengan meningkatkan M maka akan memperbesar nilai $CARL_{IN}$. Konvergensi lebih cepat ketika nilai konstanta smoothing 0,1 dibandingkan nilai konstanta smoothing 1 atau dengan kata lain semakin kecil nilai konstanta smoothing maka akan lebih cepat konvergen.

Berdasarkan pemaparan hasil pada lampiran 3, dapat disimpulkan bahwa kinerja diagram kendali BEWMA sangat dipengaruhi oleh penggunaan batas kendali atas (h) yang dirancang berdasarkan parameter yang diketahui. Ketika parameter diestimasi, nilai CARL yang kecil (ditunjukkan pada lampiran 3) lebih sering terjadi daripada yang dikehendaki. Karena hal tersebut tidak dapat diterima, maka pada tabel 4.2 dibuat sebuah rekomendasi kasar berdasarkan lampiran 3 tentang jumlah subgrup Fase I yang diperlukan untuk mencapai kinerja EPC Fase II yang memadai.

Pada tabel 4.2 dapat dilihat bahwa untuk nilai ARL_0 , presentil, dan konstanta smoothing yang tetap, penurunan ε dari 20% menjadi 0% akan meningkatkan jumlah subgrup Fase I yang diperlukan untuk mencapai kinerja in-control EPC yang memadai. Selain itu untuk nilai ARL_0 , ε , dan konstanta smoothing yang tetap, penurunan presentil dari 0,10 menjadi 0,05 juga akan meningkatkan jumlah subgrup Fase I. Sehingga, dengan menurunkan ε atau presentil atau menurunkan keduanya maka akan meningkatkan kinerja grafik *in-control*, sementara peningkatan ε atau presentil atau meningkatkan keduanya akan menurunkan kinerja grafik *in-control*. Hal tersebut menunjukkan fleksibilitas formula EPC yang dapat digunakan untuk meningkatkan kinerja grafik in-control atau menyeimbangkannya dengan kinerja grafik *out-of-control* dengan memanipulasi ε atau presentil atau keduanya.

Tabel 4.2 Jumlah minimum M Fase I yang disarankan untuk mencapai $CARL_{IN,p}$ menjadi $\varepsilon = 0\%, 10\%, 20\%$ dibawah $ARL_0 = 100, 200, 370, 500$ untuk $n = 3$ dan 5

n	λ	E	ARL ₀ =100		ARL ₀ =200		ARL ₀ =370		ARL ₀ =500		
			p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	
3	0,1	0%	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000
		10%	2000	1500	4000	>2000 <4000	>4000 <6000	4000	6000	4000	
		20%	600	500	900	>600 <900	1500	>900 <1000	1500	>1000 <1500	
	0,2	0%	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000
		10%	>2000 <4000	1500	4000	>2000 <4000	6000	4000	6000	4000	
		20%	600	500	900	>600 <900	>1000 <1500	900	1500	1000	
	0,5	0%	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000
		10%	4000	>2000 <4000	4000	>2000 <4000	6000	4000	10000	6000	
		20%	600	500	1000	4000	>1000 <1500	>600 <900	1500	1000	
	1	0%	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000
		10%	4000	2000	6000	4000	1000	4000	10000	6000	
		20%	>600 <900	500	1000	600	>1000 <1500	900	1500	900	

Tabel 4.2 (Lanjutan)

n	λ	ε	ARL ₀ =100		ARL ₀ =200		ARL ₀ =370		ARL ₀ =500	
			p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
5	0,1	0%	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000
		10%	1500	>1000 <1500	2000	2000	>2000 <4000	2000	4000	4000
		20%	600	400	>600 <900	600	1000	>600 <900	>1000 <1500	900
	0,2	0%	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000
		10%	1500	1000	2000	1500	4000	2000	4000	>2000 <4000
		20%	500	>100 <400	>600 <900	500	900	>600 <900	1000	>600 <900
	0,5	0%	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000
		10%	2000	1500	>2000 <4000	2000	4000	2000	4000	>2000 <4000
		20%	400	>100 <400	>500 <600	400	>600 <900	600	>600 <900	500
	1	0%	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000	>10000
		10%	2000	1500	>2000 <4000	2000	4000	>2000 <4000	4000	>2000 <4000
		20%	400	>100 <400	400	>100 <400	600	>400 <500	>600 <900	500

Berdasarkan tabel 4.2 dapat dilihat bahwa untuk nilai precentil ke 5 dan 10, $\varepsilon = 0\%$, n sebesar 3 dan 5, dan semua nilai λ , diperlukan lebih dari 10.000 subgrup Fase I untuk menjamin bahwa nilai ARL_0 yang ditentukan akan dilampaui. Berdasarkan pendekatan EPC, dapat dilihat bahwa ketika $CARL_{IN,p}$ dengan $\varepsilon = 10\%$ atau $\varepsilon = 20\%$ dibawah ARL_0 , sejumlah besar subgrup Fase I masih diperlukan untuk menjamin bahwa nilai $CARL_{IN} > ARL_0(1 - \varepsilon)$. Selain itu, penggunaan nilai λ yang kecil ataupun yang besar membutuhkan data yang tidak terlalu berbeda, meskipun beberapa nilai pada tabel 4.2 menunjukkan bahwa dengan menggunakan λ yang besar maka jumlah data yang perlukan akan semakin kecil.

4.3 Penyesuaian Batas Kendali Grafik BEWMA Fase II yang Menjamin Kinerja Conditional

Pada pembahasan sub bab 4.2 telah dijelaskan bahwa untuk mencapai kinerja EPC yang memadai diperlukan subgrup Fase I yang cukup besar untuk merancang batas grafik BEWMA Fase II. Karena dalam kasus real untuk mendapatkan data subgrup Fase I adalah hal yang sulit diperoleh atau memerlukan waktu yang cukup lama untuk mendapatkannya, maka dilakukan penyesuaian batas kendali untuk sejumlah data Fase I tertentu. Hasil penyesuaian batas kendali dengan $M = 30, 50, 100, 400, 500$ dan ukuran subgrup $n = 3$ dan 5 dapat dilihat pada tabel 4.3.

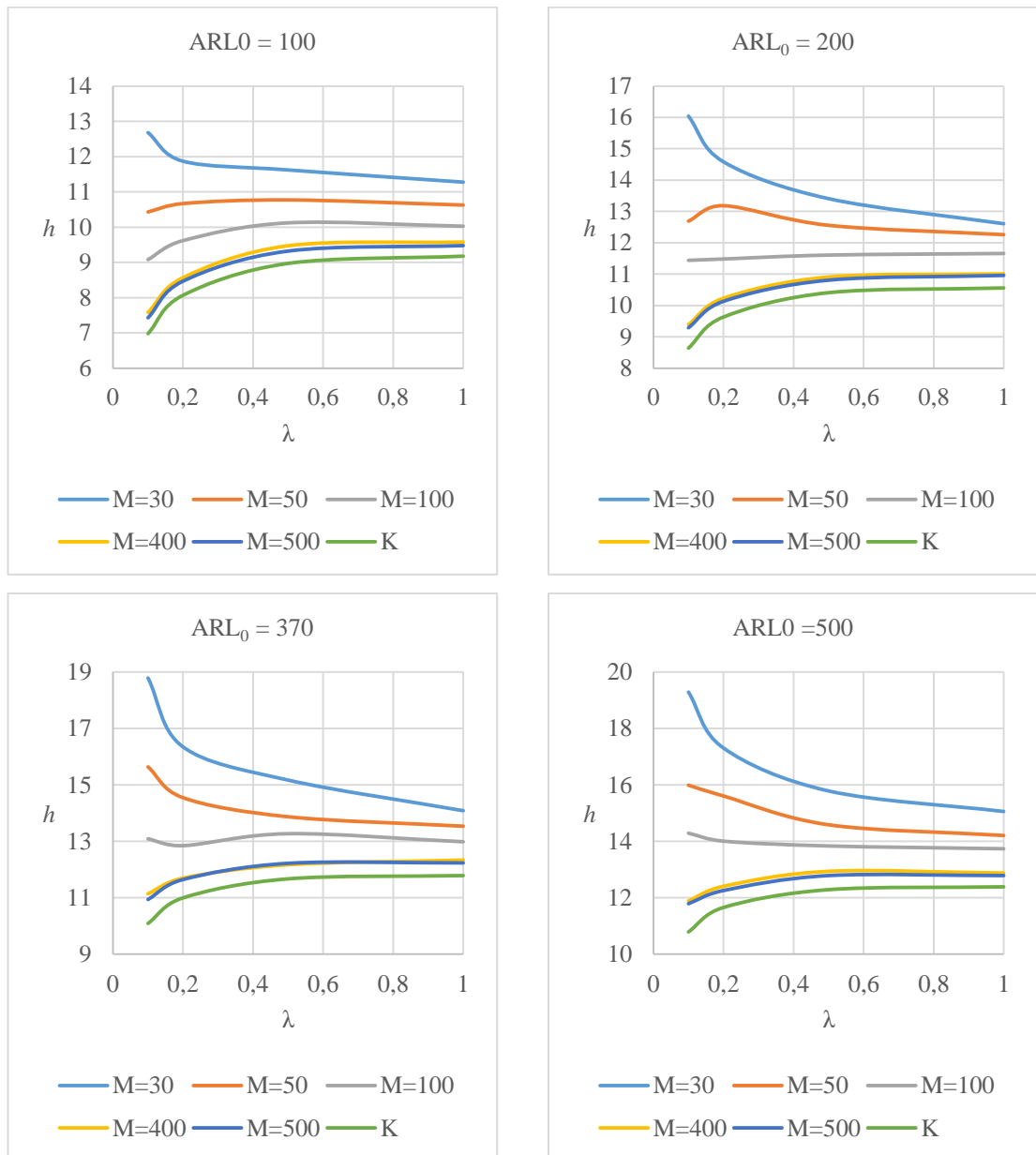
Tabel 4.3 Nilai h yang menjamin bahwa $P(CARL_{IN} > ARL_0) = 0,90$ untuk grafik BEWMA untuk $n = 3$ dan 5, $M = 30, 50, 100, 400, 500$, $\varepsilon = 0\%$

λ	M	n	ARL_0			
			100	200	370	500
0,1	30	3	13,230	17,191	18,841	20,991
		5	12,680	16,041	18,791	19,291
	50	3	11,380	13,991	16,541	17,091
		5	10,430	12,691	15,641	15,991
	100	3	9,280	11,291	13,441	14,441
		5	9,080	11,441	13,091	14,291
	400	3	7,680	9,641	11,341	11,991
		5	7,580	9,391	11,141	11,891
	500	3	7,530	9,391	10,991	11,841
		5	7,430	9,291	10,941	11,791

Tabel 4.3 (Lanjutan)

λ	M	n	ARL ₀				
			100	200	370	500	
0,2	30	3	12,718	15,733	17,498	18,438	
		5	11,868	14,583	16,348	17,308	
	50	3	10,918	13,933	15,348	16,738	
		5	10,668	13,183	14,548	15,608	
	100	3	9,768	11,683	13,198	14,058	
		5	9,618	11,483	12,848	14,008	
	400	3	8,618	10,333	11,898	12,608	
		5	8,568	10,233	11,698	12,408	
	500	3	8,658	10,233	11,689	12,408	
		5	8,468	10,133	11,648	12,258	
	0,5	30	3	12,721	14,208	17,122	17,638
			5	11,621	13,408	15,172	15,788
50		3	11,671	12,958	14,672	15,538	
		5	10,771	12,558	13,872	14,588	
100		3	11,371	12,108	13,322	14,188	
		5	10,121	11,608	13,272	13,838	
400		3	9,671	11,108	12,472	13,038	
		5	9,471	10,908	12,172	12,938	
500		3	9,521	10,958	12,322	12,938	
		5	9,321	10,808	12,222	12,788	
1		30	3	12,126	13,809	15,087	15,938
			5	11,276	12,609	14,087	15,059
	50	3	11,326	12,909	14,327	14,938	
		5	10,626	12,259	13,537	14,209	
	100	3	10,426	11,859	13,557	14,038	
		5	10,026	11,659	12,987	13,738	
	400	3	9,676	11,159	12,437	13,088	
		5	9,576	11,009	12,337	12,878	
	500	3	9,626	11,109	12,387	12,988	
		5	9,476	10,959	12,237	12,788	

Tabel 4.3 merupakan nilai-nilai h yang menjamin bahwa nilai CARL yang dihasilkan akan lebih besar atau mendekati dengan nilai ARL₀ yang telah ditentukan dengan probabilitas $(1-p)$, sehingga tidak akan menghasilkan nilai-nilai CARL yang kecil seperti pada lampiran 3. Selain penyesuain batas kendali pada tabel 4.3 untuk ARL₀ = 100,200,370 dan 500, dengan menggunakan gambar 4.2 dapat ditemukan nilai h untuk M dan λ yang lain menggunakan interpolasi.



Gambar 4.2 Grafik nilai h yang disesuaikan dan tidak disesuaikan (K) untuk $n = 5$

Berdasarkan tabel 4.3, untuk setiap nilai ARL_0 , M dan λ yang diberikan, dapat dilihat bahwa nilai h yang disesuaikan semuanya lebih besar dari pada nilai h yang tidak disesuaikan. Selain itu, ketika nilai M bertambah, maka nilai h yang disesuaikan akan berkurang dan mendekati nilai h yang tidak disesuaikan. Sehingga, grafik BEWMA Fase II yang dirancang menggunakan nilai h yang telah disesuaikan akan memiliki batas kendali yang lebih lebar. Hal tersebut akan mengakibatkan peningkatan dalam kinerja *in-control* grafik BEWMA Fase II dan juga dapat mengakibatkan penurunan kinerja *out-of-control* grafik karena batas

kendali yang melebar. Namun hal tersebut dapat diatasi dengan meningkatkan ε atau p atau keduanya untuk mengurangi kinerja in-control grafik dan meningkatkan kinerja *out-of-control* grafik seperti yang telah dijelaskan pada sub bab 4.2.

4.3.1 Analisis Kinerja In-Control dan Out-of-Control dan Perbandingan

Batas Kendali yang Disesuaikan dan Tidak Disesuaikan

Pada bagian ini dilakukan evaluasi dan perbandingan hasil yang lebih terperinci antara kinerja grafik BEWMA dengan batas kendali yang disesuaikan dan batas kendali yang tidak disesuaikan untuk berbagai nilai pergeseran (d). Analisis kinerja *in-control* dilakukan ketika nilai $d=0$, sedang kinerja *out-of-control* dilakukan ketika nilai $d>0$. Tabel 4.4 menunjukkan nilai $CARL_{IN,p}$ untuk berbagai kombinasi nilai p , λ , d , M dan n untuk batas yang disesuaikan dan tidak disesuaikan. Pada semua nilai λ dan $d=0$, batas kendali yang disesuaikan diperoleh dengan acuan bahwa $P(CARL_{IN} > ARL_0) = 1 - p$ adalah 0,90. Sehingga, nilai percentil ke 10 dari $CARL_{IN}$ harus mendekati nilai ARL_0 yang telah ditentukan (pada tabel 4.4 menggunakan $ARL_0 = 370$). Sedangkan pada batas kendali yang tidak disesuaikan, nilai batas kendali diperoleh dari perhitungan ARL konvensional yang menghasilkan nilai $ARL_0 = 370$ (untuk nilai pada tabel 4.4), pada kasus parameter diketahui.

Tabel 4.4 Nilai $CARL_{IN,p}$ untuk kinerja in-control dan *out-of-control* dari grafik BEWMA dengan batas kendali yang disesuaikan ($ARL_0 = 370$, $p = 10\%$) dan tidak disesuaikan ($ARL_0 = 370$) untuk $n = 3$ dan beberapa nilai presentil, M , λ , dan d

M=50								
Persentil	$\lambda=0,1$		$\lambda=0,2$		$\lambda=0,5$		$\lambda=1$	
	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2
$d=0$								
0,05	63,78	220,10	71,96	232,57	99,21	263,25	102,81	263,48
0,10	76,50	368,72	88,25	369,45	117,48	375,87	127,64	366,79
0,25	107,57	665,35	127,20	551,42	156,44	517,85	178,88	538,03
0,50	165,54	1467,53	185,69	1005,31	227,61	857,94	257,94	854,98
0,75	236,93	3008,56	273,36	1732,21	341,27	1464,63	401,69	1353,84
0,90	325,33	5227,75	402,75	2679,23	487,43	2307,33	557,84	2260,33
0,95	397,11	7548,62	490,65	3909,62	654,62	3184,04	670,25	2960,46

M=50								
Persentil	$\lambda=0,1$		$\lambda=0,2$		$\lambda=0,5$		$\lambda=1$	
	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2
$d=0,25$								
0,05	13,81	23,88	14,01	25,94	23,17	47,12	50,78	116,25
0,10	15,26	26,94	15,93	31,05	27,23	59,74	60,60	146,86
0,25	18,47	34,91	20,79	42,54	37,94	94,78	83,39	223,72
0,50	23,35	51,22	29,64	67,51	58,01	156,58	122,97	351,83
0,75	32,24	86,27	45,56	123,03	90,04	269,10	184,86	555,72
0,90	43,99	154,07	67,66	213,15	136,63	453,83	276,39	932,76
0,95	58,61	241,33	89,31	284,25	178,04	644,01	351,47	1196,59
$d=0,5$								
0,05	6,55	9,22	5,99	8,01	6,78	10,43	14,85	31,73
0,10	6,85	9,81	6,36	8,64	7,74	12,04	18,27	39,69
0,25	7,54	11,10	7,12	9,90	9,31	15,69	25,09	57,11
0,50	8,50	12,79	8,13	12,01	11,81	21,77	35,91	90,21
0,75	9,64	15,19	9,56	14,77	15,85	31,29	51,89	142,16
0,90	10,76	18,14	11,40	18,35	21,19	46,46	70,63	216,35
0,95	11,53	19,78	12,33	21,87	24,92	58,26	93,93	285,01
$d=1$								
0,05	3,29	4,19	2,72	3,23	2,20	2,72	2,66	4,02
0,10	3,40	4,41	2,81	3,33	2,32	2,84	2,99	4,53
0,25	3,58	4,70	2,96	3,58	2,52	3,12	3,59	5,80
0,50	3,82	4,99	3,15	3,88	2,80	3,50	4,51	7,73
0,75	4,05	5,34	3,38	4,19	3,12	3,97	5,74	10,61
0,90	4,31	5,69	3,62	4,52	3,47	4,43	7,15	14,45
0,95	4,48	5,84	3,77	4,69	3,68	4,87	8,14	17,06
$d=1,5$								
0,05	2,26	2,85	1,92	2,18	1,37	1,57	1,25	1,40
0,10	2,34	2,93	1,96	2,23	1,42	1,63	1,30	1,50
0,25	2,43	3,07	2,04	2,33	1,50	1,73	1,40	1,69
0,50	2,56	3,26	2,12	2,44	1,60	1,86	1,52	1,94
0,75	2,70	3,43	2,21	2,57	1,71	1,99	1,69	2,23
0,90	2,82	3,61	2,30	2,69	1,81	2,10	1,90	2,67
0,95	2,90	3,74	2,36	2,77	1,89	2,18	2,04	3,08
M=100								
Persentil	$\lambda=0,1$		$\lambda=0,2$		$\lambda=0,5$		$\lambda=1$	
	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2
$d=0$								
0,05	108,28	269,07	125,75	261,55	150,01	282,90	154,77	327,66
0,10	126,49	378,90	146,59	366,07	170,67	365,50	184,65	372,65
$d=0$								
0,25	72,24	504,17	187,07	434,04	215,28	436,16	234,10	520,19
0,50	229,04	791,42	249,76	606,52	280,66	588,45	307,38	697,04

M=100								
Persentil	$\lambda=0,1$		$\lambda=0,2$		$\lambda=0,5$		$\lambda=1$	
	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2
$d=0$								
0,75	300,57	1155,39	326,69	875,98	383,66	819,49	415,57	982,52
0,90	379,11	1626,37	423,68	1160,67	482,83	1165,86	563,83	1330,90
0,95	443,03	1876,45	502,39	1365,98	554,27	1430,22	667,97	1681,95
$d=0,25$								
0,05	16,22	22,21	17,83	24,56	30,80	51,17	70,46	137,22
0,10	17,47	24,48	20,14	27,19	35,52	59,37	83,09	158,46
0,25	20,25	29,14	23,95	34,58	46,84	79,51	105,44	217,09
0,50	24,26	37,66	30,05	46,88	64,22	111,30	141,20	297,39
0,75	29,77	49,25	39,23	66,57	87,69	16,56	191,52	418,84
0,90	37,41	64,03	52,59	92,90	113,71	229,35	255,83	569,89
0,95	42,97	78,58	61,20	116,60	137,33	276,99	296,41	697,98
$d=0,5$								
0,05	7,10	8,64	6,50	7,57	7,88	10,19	20,04	34,72
0,10	7,35	9,06	6,80	8,02	8,77	11,41	22,44	41,98
0,25	7,85	9,78	7,38	8,96	10,23	13,66	28,92	53,95
0,50	8,54	10,77	8,26	10,09	12,34	16,92	37,12	71,44
0,75	9,44	11,86	9,30	11,48	15,21	21,40	50,38	96,49
0,90	10,24	13,20	10,40	13,01	17,99	26,68	64,34	129,79
0,95	10,71	13,84	11,157	14,19	20,83	31,71	76,01	157,80
$d=1$								
0,05	3,46	3,99	2,84	3,14	2,41	2,70	3,22	4,31
0,10	3,53	4,10	2,93	3,23	2,49	2,81	3,44	4,70
0,25	3,68	4,28	3,05	3,39	2,64	2,99	3,96	5,46
0,50	3,84	4,48	3,19	3,56	2,82	3,23	4,69	6,65
0,75	4,01	4,69	3,36	3,74	3,04	3,51	5,53	8,17
0,90	4,17	4,89	3,52	3,94	3,26	3,80	6,61	9,71
0,95	4,28	5,03	3,64	4,06	3,41	4,02	7,29	11,21
$d=1,5$								
0,05	2,37	2,72	1,99	2,13	1,43	1,56	1,31	1,47
0,10	2,42	2,78	2,02	2,17	1,47	1,60	1,35	1,52
0,25	2,49	2,87	2,07	2,22	1,53	1,66	1,43	1,63
0,50	2,59	2,97	2,13	2,31	1,61	1,75	1,53	1,79
0,75	2,68	3,08	2,19	2,39	1,69	1,83	1,66	1,98
0,90	2,78	3,19	2,26	2,47	1,75	1,92	1,77	2,20
0,95	2,84	3,25	2,30	2,53	1,80	1,96	1,86	2,34

* h_1 : batas yang tidak disesuaikan

h_2 : batas yang disesuaikan

Pada tabel 4.4 dapat dilihat bahwa untuk semua nilai λ dan $d = 0$, kinerja grafik in-control dengan batas kendali yang disesuaikan telah sesuai dengan apa

yang diharapkan. Misalkan, untuk $M = 50$, $n = 3$, $p = 10\%$ dan $\lambda = 0,1$, $0,2$, $0,5$ dan 1 dapat dilihat bahwa nilai $CARL_{IN,p} = 368,72; 369,45; 375,87$ dan $366,79$. Sedangkan untuk $M = 100$, nilai $CARL_{IN,p} = 378,90; 366,07; 365,50$ dan $372,65$. Nilai-nilai $CARL_{IN,p}$ tersebut sangat dekat dengan $ARL_0 = 370$. Selain itu, Nilai $CARL_{IN,p}$ untuk $d = 0$ dan semua kombinasi nilai λ , M , p , dan n (untuk $n = 5$ dilampirkan pada lampiran 5) yang menggunakan batas kendali yang disesuaikan selalu memiliki nilai $CARL_{IN}$ yang tinggi dari batas kendali yang tidak disesuaikan. Sehingga untuk semua nilai persentil, batas kendali yang disesuaikan menjamin bahwa nilai $CARL_{IN}$ akan lebih besar dibandingkan dengan grafik batas yang tidak disesuaikan. Hal tersebut mengindikasikan bahwa kinerja in-control yang baik tidak hanya terjadi ketika $p = 10\%$, tetapi juga pada seluruh precentil.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, batas yang disesuaikan lebih luas dan mengakibatkan tidak sensitif terhadap pergeseran proses yang sebenarnya dibandingkan dengan batas yang tidak disesuaikan. Sehingga, dilakukan evaluasi untuk kasus ketika $d = 0,25; 0,5; 1$ dan $1,5$ (diasumsikan pergeseran ttiap variabel bernilai sama). Pada tabel 4.4 untuk $M = 50$, pergeseran $0,25$ dan $0,5$ dan semua nilai λ , dapat dilihat bahwa median dari CARL untuk grafik batas kendali yang disesuaikan dan tidak disesuaikan berbeda, terutama ketika $\lambda = 1$. Pada pegeseran kecil ($d \leq 0,50$), dapat disimpulkan bahwa kinerja out-of-control grafik dari batas yang disesuaikan tidak sebgus batas yang tidak disesuaikan. Namun, ketika pergeseran besar (misalkan d bernilai 1 atau $1,5$), nilai $CARL_{IN,p}$ tidak jauh berbeda. Hal tersebut juga terjadi ketika $M = 100$ dan $n = 5$. Sehingga pada pergeseran sedang hingga besar, kinerja out-of-control grafik BEWMA dari batas yang disesuaikan dapat dibandingkan dengan batas yang tidak disesuaikan.

4.4 Contoh Ilustrasi

Contoh ilustrasi evaluasi penggunaan batas kendali yang disesuaikan dan tidak disesuaikan dilakukan pada data yang diambil pada penelitian Syahputra (2019). Data yang digunakan merupakan data hasil monitoring uji lab kimia kualitas *billet baja* dengan mengambil dua karakteristik kualitas, yaitu $X_1 = \text{Silikon (Si)}$ dan $X_2 = \text{Mangan (Mn)}$. Kedua karakteristik kualitas tersebut diukur dalam

bentuk komposisi cairan dengan satuan persen berat (%). Silikon dan Mangan merupakan unsur tambahan yang digunakan dalam pembuatan baja untuk menghasilkan sifat-sifat baja yang diinginkan. Silikon dapat meningkatkan kekuatan, kekerasan, kekenyalan, ketahanan aus dan ketahanan terhadap panas dan karat. Unsur Mangan dalam baja dapat menaikkan kuat tarik tanpa mengurangi atau sedikit mengurangi regangan, sehingga penggunaan unsur Mangan dalam baja memerlukan sifat kuat dan ulet.

Jumlah data karakteristik *billet baja* yang digunakan sebanyak 60 data subgrup (pengambilan data 2 Oktober 2017 sampai 30 November 2017) dengan ukuran subgrup sebesar tiga (menggunakan pengambilan tiga sampel setiap harinya). Berikut merupakan hasil uji normalitas data.

Tabel 4.5 *Mardia Test*

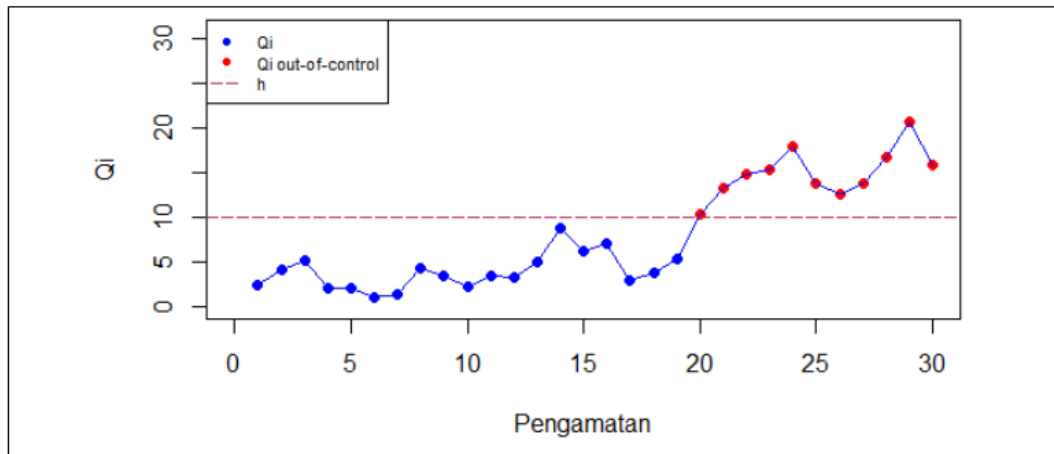
	Statistik	<i>p-value</i>
Mardia skewness	4,052	0,399
Mardia kurtosis	1,458	0,145

Data kualitas *billet baja* yang digunakan berdistribusi normal multivariat. Hal tersebut ditunjukkan berdasarkan hasil pengujian normal multivariat menggunakan *mardiaTest* dengan bantuan prograam *R* pada tabel 4.5. Nilai *p-value* pada uji *mardiaTest* bernilai lebih dari alpha 5%, sehingga menghasilkan keputusan gagal tolak H_0 yaitu data berdistribusi normal multivariat.

Penggunaan data dibagi menjadi dua Fase, yaitu Fase I sebanyak 30 data dan Fase II sebanyak 30 data. Berdasarkan data Fase I diperoleh estimasi mean dan kovarian matriks sebagai berikut

$$\hat{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 0,0773 \\ 0,5195 \end{bmatrix} \text{ dan } \hat{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 8,9198 \times 10^{-5} & -1,6943 \times 10^{-5} \\ -1,6943 \times 10^{-5} & 5,1920 \times 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

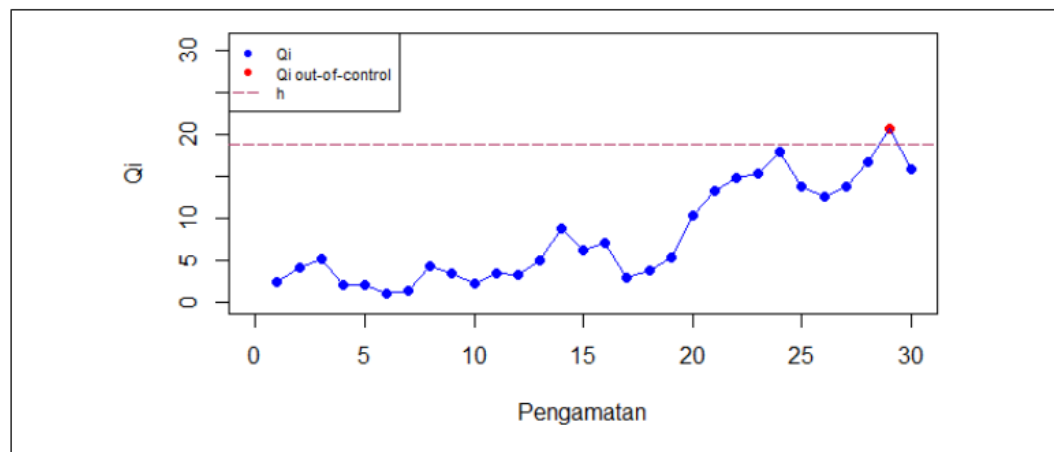
Nilai estimasi mean kovarian matriks tersebut digunakan untuk membuat grafik BEWMA Fase II.



* Q_i : nilai statistik BEWMA

Gambar 4.3 Grafik BEWMA Fase II menggunakan batas kendali yang tidak disesuaikan

Gambar 4.3 merupakan grafik kendali BEWMA Fase II dengan menggunakan batas kendali yang tidak disesuaikan untuk mencapai $ARL_0 = 370$ dan $\lambda = 0.1$ dengan nilai $h = 10.091$. Plot titik berwarna merah menunjukkan adanya data yang tidak terkendali atau *out-of-control*. Suatu proses dikatakan *out-of-control* apabila nilai statistik kendalinya berada diluar batas kendalinya. Pada gambar 4.3 terlihat bahwa ketika menggunakan batas kendali yang tidak di sesuaikan terdapat 11 titik yang *out-of-control*.



* Q_i : nilai statistik BEWMA

Gambar 4.4 Grafik BEWMA Fase II menggunakan penyesuaian batas kendali

Gambar 4.4 merupakan hasil plot grafik BEWMA Fase II dengan menggunakan batas kendali untuk mencapai $ARL_0 = 370$ dan $\lambda = 0,1$. Batas kendali yang digunakan sebesar 18,841 karena menggunakan jumlah data Fase I sebanyak 30 data dengan ukuran subgrup sebanyak tiga (lihat tabel 4). Ketika menggunakan

batas kendali yang disesuaikan, pengamatan yang *out of control* hanya terjadi pada pengamatan ke-29. Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan bahwa dalam keadaan *in-control* kinerja grafik dengan batas yang disesuaikan lebih baik dari batas yang tidak disesuaikan. Karena ketika menggunakan batas kendali yang disesuaikan, hampir seluruh data dalam keadaan terkendali.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Kinerja diagram kendali BEWMA sangat dipengaruhi oleh penggunaan batas kendali (h) yang dirancang berdasarkan parameter yang diketahui. Ketika parameter diestimasi, nilai CARL sering kali lebih kecil dari nilai ARL_0 yang dikehendaki. Sehingga, kriteria EPC yang digunakan untuk mengevaluasi kinerja grafik BEWMA Fase II tidak dapat terpenuhi karena nilai $CARL_{IN}$ kurang dari ARL_0 yang telah ditentukan.
2. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk mencapai kriteria EPC (menjamin bahwa $P(CARL_{IN} > ARL_0) = 1 - p$) yang digunakan untuk mengevaluasi grafik BEWMA Fase II diperlukan data Fase I lebih dari 10.000 data untuk mencapai kinerja nominal (ARL_0) yang ditentukan. Karena sulit atau membutuhkan waktu yang lama untuk mendapatkan data Fase I yang begitu besar untuk mengestimasi parameter proses, maka dilakukan penyesuaian batas kendali sesuai dengan jumlah data Fase I yang tersedia. Batas kendali yang disesuaikan memiliki batas yang lebih luas, sehingga mengakibatkan penurunan kinerja *out-of-control* grafik. Pada pergeseran kecil ($\leq 0,50$), kinerja *out-of-control* grafik dari batas yang disesuaikan tidak sebanding dengan batas yang tidak disesuaikan. Namun, ketika pergeseran besar (misalkan d bernilai 1 atau 1,5), nilai $CARL_{IN,p}$ tidak jauh berbeda.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, penelitian terbatas pada penggunaan nilai konstanta smoothing yang sama. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan perhitungan menggunakan nilai konstanta smoothing yang berbeda. Hasil rumus CARL pada penelitian ini hanya dapat digunakan pada kasus bivariat, untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan untuk kasus multivariat secara umum untuk

berbagai jumlah karakteristik kualitas. Selain itu, statistik kendali MEWMA pada penelitian ini jika diterapkan pada data mengabaikan asumsi ketidaknormalan dalam data atau mengasumsikan data berdistribusi normal. Pada penelitian selanjutnya dapat digunakan MEWMA dengan menggunakan fungsi copula. Sehingga ketika proses produksi tidak berdistribusi normal, kita dapat menggunakan proses produksi tanpa mengabaikan ketidaknormalan distribusinya.

DAFTAR PUSTAKA

- Albers, W., & Kallenberg, W. C. M. (2004a). Are Estimated Control Charts in Control. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **38**, No. 1, 67-79.
- Albers, W., & Kallenberg, W. C. M. (2004b). Estimation in Shewhart Control Charts: Effects and Correction. *Metrika*, **59**, No. 3, 207-234.
- Albers, W., & Kallenberg, W. C. M. (2005). New Corrections for old Control Charts. *Quality Engineering*, **17**, No. 3, 467-473.
- Albers, W., Kallenberg, W. C. M., & Nurdianti, S. (2005). Excedance Probabilities for Parametric Control Charts. *Statistics*, **39**, No. 5, 429-443.
- Anderson, T. W. (2013). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis Third Edition*. New Jersey : John Wiley & Sons.
- Bischak, D. P., & Trietsch, D. (2007). The Rate of False Signals in \bar{U} Control Charts with Estimated Limits. *Journal of Quality Technology*, **39**, No. 1, 54-65.
- Brook, D., & Evans, D. A. (1972). An Approach to the Probability Distribution of Cusum Run Length. *Biometrika*, **59**, No. 3, 539-549.
- Chakraborti, S. (2006). Parameter Estimation and Design Considerations in Prospective Applications of the \bar{X} Chart. *Journal of Applied Statistics*, **33**, No. 4, 439-459.
- Champ, C. W., Jones-Farmer, L.A., & Rodgon, S. E. (2012). Properties of the T^2 Control Chart when Parameters are Estimated. *Technometrics*, **47**, No. 4, 437-445.
- Diko, M. D., Chakraborti, S., & Ronald, Does, J. M. M. (2019). Guaranteed In-Control Performance of the EWMA Chart for Monitoring the Mean. *Quality and Reliability Engineering International*.
- Diko, M.D., Goedhart, R., Chakraborti, S., Does, R.J.M.M., & Epprecht, E. K. (2017). Phase II Control Charts for monitoring dispersion when parameters are Estimated. *Quality Engineering*, **29**, No. 4, 605-622.
- Epprecht, E. K., Loureiro, L. D., & Chakraborti, S. (2015). Effect of the Amount of Phase I Data on the Phase II Performance of s^2 and \bar{s} Control Charts. *Journal of Quality Technology*, **47**, No. 2, 139-155.

- Faraz, A., Woodall, W. H., & Heuchenne, C. (2015). Guaranteed o Conditional Performance of the S^2 Control Chart with Estimated Parameters. *International Journal of Production Research*, **53**, No. 14, 4405-4413.
- Gandy, A., & Kvaløy, J. T. (2013). Guaranteed Conditional Performance of Control Charts via Bootstrap Methods. *Scandinavian Journal of Statistics*, **40**, No. 4, 647-668.
- Geodhart, R., Schoonhoven, M., & Does, R. J. M. M. (2017a). Guaranteed In-Control Performance for the Shewhart X and \bar{X} Control Charts. *Journal of Quality Technology*, **49**, No. 2, 155-171.
- Geodhart, R., da Silva, M. M., Schoonhoven, M., Epprecht, E. K., Chakraborti, S., Does, R. J. M. M., & Veiga, A. (2017b). Shewhart Control Charts for Dispersion Adjusted for Parameter Estimation. *IISE Transaction*, **49**, No. 8, 838-848.
- Goedhart, R., Schoonhoven, M., & Does, R. J. M. M. (2018). On Guaranteed In-Control Performance for the Shewhart X and Control Charts. *Journal of Quality Technology*, **50**, No. 1, 130-132.
- Huh, I. (2010). *Multivariate EWMA Control Charts and Application to a Semiconductor Manufacturing Process*. Canada : McMaster University.
- Huh, I. (2014). *Optimal Monitoring Methods for Univariate and Multivariate EWMA Control Charts*. Canada : McMaster University.
- Huh, I., Viveroros-Aguilera, R., & Balakhrisnan N. (2017). Differential Smoothing in Bivariate Exponentially Weighted Moving Average Chart. *Journal of Quality Technology*. **45**, No. 4, 377-393.
- Jones, L. A., Champ, C.W., & Ridgon, S. E. (2001). The Performance of Exponentially Weighted Moving Average Charts with Estimated Parameters. *Technometrics*, **43**, No. 2, 156-167.
- Karlin, S., & Taylor, H.M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes Second Edition*. New York : Academic Press.
- Khoo, M. B. C., Teh, S.Y., Ang, L. F., & Ng, S, W. (2011). A Study on False Alarm Rates of \bar{X} , EWMA and CUSUM Control Chart when Parameters are Estimated. *System and Simulation IPCSIT*, **7**.
- Koch, H., & Bopp, G. P. Fast and Exact Simulation of Multivariate Normal and Wishart Random Variabels with Box Constrain. *Computation (Stat.co)*.

- Kumar, N., & Chakraborti, S. (2014). Phase II Ahewhart-type Control Charts for Monitoring Times Between Events and Effects of Parameter Estimation. *Quality and Reliability Engineering International*, **32**, No. 1, 315-328.
- Lee, M. H., & Khoo, M. B. C. (2006). Optimal Statistical Design of a Multivariate EWMA Chart Based on ARL dan MRL. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **35**, No. 3, 831-847.
- Lowry, C. A., Woodall, W. H., Champ, C. W., & Ridgon, S. E. (1992). A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. *Technometrics*, **34**, No. 1, 46-53.
- Lucas, J. M., & Saccucci, M. S. (1990). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. *Technometrics*, **32**, No. 1, 1-12.
- Mahmoud. A. M., G., Henderson, G. R., Epprecht, E. K., & Woodall, W. H. (2010). Estimating the Standard Deviation in Quality-Control Applications. *Journal of Quality Technology*, **42**, No.4, 348-357.
- Mahmoud, M.A., & Maravelakis, P. E. (2010). The Performance of the MEWMA Control Chart when Parameter ar Estimated. *Communication in Statistics Simulation and computation*, **39**, No. 1803-1817.
- Mardia, K. V., Kent, J. T., & Bibby, J. M. (1979). *Multivariate Analysis*. London: Acadeic Press.
- Montgomery, D. C. (2013). *Introduction to Statisrical Quality Control 7th Edition*. New Jersey: Jhon Wiley & Sons.
- Pham, H. (2006). *Handbook of Enginering Statistics*. New York : Springer.
- Reynolds, M. R., & Cho, G.-Y., (2006). Multivariate Control Charts for Monitoring the Mean Vector and Covariance Matrix. *Journal of Quality Technology*, **38**, No. 3, 230-253.
- Roberts, S. W. (1959). Properties of Control Chart Zone Tests. *Bell System Technical Journal*, **37**, No. 1, 83-114.
- Runger. G.C., & Prabu, S. S. (1996). A Markov Chain Model for the Multivariate Exponentially Weighted Moving Averages Control Chart. *Journal of the American Statistical Association*. **91**, No. 436, 1701-1706.
- Saleh, N. A., Mahmoud, M. A., Keefe, M. J., & Woodall, W. H. (2015a). The Difficulty in Desaigning Shewhart \bar{X} and \bar{X} Control Charts with Estimated Parameters. *Journal of Quality Technology*, **47**. No. 2, 127-138.

- Saleh, N. A., Mahmoud, M. A., Jones-Farmer, L. A., Zwestloot, I., & Woodall, W. H. (2015b). Another Look at the EWMA Control Chart with Estimated Parameters. *Journal of Quality Technology*. **47**, No. 4, 363-382.
- Schoonhoven, M., Nazir, H Z., Riaz, M., & Does, R. J. M M. (2011). Robust Location Estimators for the \bar{X} Control Chart. *Jurnal of Quality Technology*, **43**, No. 4, 363-379.
- Syahputra, Tb. E. F. (2019). *Pengendalian kualitas produk billet baja KS1008 di PT Krakatau steel Cilegon menggunakan grafik kendali maximum multivariate exponential weighted moving average (max-mewma)*. Tugas Akhir, ITS, Surabaya.
- Tirta, I. M. *Pengantar Metode Simulasi Statistika dengan Aplikasi R dan S⁺*. Diklat Kuliah, Universitas Jember, Jember.
- Wiratih, I. A. (2015). *Grafik Pengendali Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) Berdasarkan ARL dengan Pendekatan Rantai Markov (Studi Kasus : Pengendalian Kualitas Produksi Air Minum dalam Kemasan di PT Tirtamas Lestari)*. Tugas Akhir, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Matriks Kovarian MEWMA

Diketahui bahwa diagram kendali MEWMA merupakan perluasan dari diagram kendali EWMA dengan statistik $Z_i = \lambda X_i + (1-\lambda)Z_{i-1}$. Maka

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \lambda X_1 + (1-\lambda)Z_0 \\
 Z_2 &= \lambda X_2 + (1-\lambda)Z_1 \\
 &= \lambda X_2 + (1-\lambda)(\lambda X_1 + (1-\lambda)Z_0) \\
 &= \lambda X_2 + (1-\lambda)\lambda X_1 + (1-\lambda)(1-\lambda)Z_0 \\
 &= \lambda(X_2 + (1-\lambda)X_1) + (1-\lambda)^2 Z_0 \\
 &= \lambda \left(\sum_{j=0}^1 (1-\lambda)^j X_{2-j} \right) + (1-\lambda)^2 Z_0 \\
 Z_3 &= \lambda X_3 + (1-\lambda)Z_2 \\
 &= \lambda X_3 + (1-\lambda) \left(\lambda(X_2 + (1-\lambda)X_1) + (1-\lambda)^2 Z_0 \right) \\
 &= \lambda X_3 + (1-\lambda)\lambda(X_2 + (1-\lambda)X_1) + (1-\lambda)(1-\lambda)^2 Z_0 \\
 &= \lambda X_3 + \lambda(1-\lambda)X_2 + \lambda(1-\lambda)^2 X_1 + (1-\lambda)^3 Z_0 \\
 &= \lambda(X_3 + (1-\lambda)X_2 + (1-\lambda)^2 X_1) + (1-\lambda)^3 Z_0 \\
 &= \lambda \left(\sum_{j=0}^2 (1-\lambda)^j X_{3-j} \right) + (1-\lambda)^3 Z_0,
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh pola $Z_i = \lambda \left(\sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j} \right) + (1-\lambda)^i Z_0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Z_i) &= \text{Var} \left(\lambda \left(\sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j} \right) + (1-\lambda)^i Z_0 \right) \\
 &= \text{Var} \left(\lambda \left(\sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j} \right) \right) + \text{Var} \left((1-\lambda)^i Z_0 \right)
 \end{aligned}$$

Karena nilai $\lim_{i \rightarrow \infty} (1-\lambda)^i$ nilainya mendekati nol, apabila i semakin besar. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Z_i) &= \text{Var}\left(\lambda\left(\sum_{j=0}^{i-1}(1-\lambda)^j X_{i-j}\right)\right) \\
&= \lambda^2 \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j} \text{Var}(X_{i-j}) \\
&= \lambda^2 \left(\sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j}\right) \sigma^2.
\end{aligned}$$

Pandang $G_i = \lambda^2 \left(\sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j}\right)$ sebagai deret geometri dengan rasio $(1-\lambda)^2$ dan suku pertama λ^2 , maka G_i dapat ditulis sebagai berikut

$$G_i = \lambda^2 + \lambda^2(1-\lambda)^2 + \lambda^2(1-\lambda)^4 + \dots + \lambda^2(1-\lambda)^{2i-2},$$

kalikan kedua ruas dengan $(1-\lambda)^2$

$$(1-\lambda)^2 G_i = \lambda^2(1-\lambda)^2 + \lambda^2(1-\lambda)^4 + \dots + \lambda^2(1-\lambda)^{2i-2} + \lambda^2(1-\lambda)^{2i}.$$

Selanjutnya kurangkan G_i dengan $(1-\lambda)^2 G_i$

$$\begin{aligned}
G_i - (1-\lambda)^2 G_i &= \lambda^2 - \lambda^2(1-\lambda)^{2i} \\
G_i(1 - (1-\lambda)^2) &= \lambda^2 - \lambda^2(1-\lambda)^{2i} \\
G_i &= \frac{\lambda^2 - \lambda^2(1-\lambda)^{2i}}{1 - (1-\lambda)^2} \\
G_i &= \frac{\lambda^2(1 - (1-\lambda)^{2i})}{1 - (1-\lambda)^2}.
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Z_i) &= \lambda^2 \left(\sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j}\right) \sigma^2 \\
\sigma_{Z_i}^2 &= \frac{\lambda^2(1 - (1-\lambda)^{2i})}{1 - (1-\lambda)^2} \sigma^2.
\end{aligned}$$

Matriks kovarian Z_i adalah

$$\Sigma_{Z_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,Z_i}^2 & \rho\sigma_{1,Z_i}\sigma_{2,Z_i} \\ \rho\sigma_{1,Z_i}\sigma_{2,Z_i} & \sigma_{2,Z_i}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2(1-(1-\lambda_1)^{2i})}{1-(1-\lambda_1)^2}\sigma_1^2 & \frac{\lambda_1\lambda_2(1-(1-\lambda_1)^i(1-\lambda_2)^i)}{1-(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\rho\sigma_1\sigma_2 \\ \frac{\lambda_1\lambda_2(1-(1-\lambda_1)^i(1-\lambda_2)^i)}{1-(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\rho\sigma_1\sigma_2 & \frac{\lambda_2^2(1-(1-\lambda_2)^{2i})}{1-(1-\lambda_2)^2}\sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

bentuk *steady state* matriks kovarian Z_i (ketika $i \rightarrow \infty$), adalah

Lampiran 2. Bukti bahwa simulasi pengamatan T_{01} dan T_{02} pada langkah analisis

$$2c \text{ berdistribusi } N_2 \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} E(T_{01}) &= E(\mu_1 + \sigma_1 u_1) \\ &= E(\mu_1) + E(\sigma_1 u_1) \\ &= E(\mu_1) + \sigma_1 E(u_1) \\ &= 0 + 1(\mu_1) \\ &= \mu_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(T_{02}) &= E(\mu_2 + \sigma_2 u_2) \\ &= E(\mu_2) + E(\sigma_2 u_2) \\ &= E(\mu_2) + \sigma_2 E(u_2) \\ &= 0 + 1(\mu_2) \\ &= \mu_2 \end{aligned}$$

$$Var(T_{01}) = Var(\mu_1 + \sigma_1 u_1)$$

$$Var(T_{02}) = Var(\mu_2 + \sigma_2 u_2)$$

$$\sigma_1^2 = E((\mu_1 + \sigma_1 u_1)^2) - E((\mu_1 + \sigma_1 u_1))^2$$

$$\sigma_2^2 = E((\mu_2 + \sigma_2 u_2)^2) - E((\mu_2 + \sigma_2 u_2))^2$$

$$\sigma_1^2 = E((\mu_1 + \sigma_1 u_1)^2) - \mu_1^2$$

$$\sigma_2^2 = E((\mu_2 + \sigma_2 u_2)^2) - \mu_2^2$$

$$\sigma_1^2 + \mu_1^2 = E((\mu_1 + \sigma_1 u_1)^2)$$

$$\sigma_2^2 + \mu_2^2 = E((\mu_2 + \sigma_2 u_2)^2)$$

sehingga

sehingga

$$Var(T_{01}) = Var(\mu_1 + \sigma_1 u_1)$$

$$Var(T_{02}) = Var(\mu_2 + \sigma_2 u_2)$$

$$= E((\mu_1 + \sigma_1 u_1)^2) - E((\mu_1 + \sigma_1 u_1))^2$$

$$= E((\mu_2 + \sigma_2 u_2)^2) - E((\mu_2 + \sigma_2 u_2))^2$$

$$= (\sigma_1^2 + \mu_1^2) - \mu_1^2$$

$$= (\sigma_2^2 + \mu_2^2) - \mu_2^2$$

$$= \sigma_1^2 \quad \blacksquare$$

$$= \sigma_2^2 \quad \blacksquare$$

Lampiran 3. Nilai $CARL_{IN}$ sebagai fungsi M untuk $\lambda = 0,1, 0,2, 0,5, \text{ dan } 1$, $ARL_0 = 100, 200, 370, 500$ Presentil ke-5 dan ke-10 ($p = 0,05$ dan $p = 0,10$) dari $CARL_{IN}$ untuk $n = 3$

λ	M	$ARL_0=100$ ($H=6,980$)		$ARL_0=200$ ($H=8,641$)		$ARL_0=370$ ($H=10,091$)		$ARL_0=500$ ($H=10,791$)	
		$p=0,05$	$p=0,10$	$p=0,05$	$p=0,10$	$p=0,05$	$p=0,10$	$p=0,05$	$p=0,10$
0,1	30	22,44 (-77,56%)	27,01 (-72,99%)	29,64 (-85,18%)	35,14 (-82,43%)	37,71 (-89,81%)	45,59 (-87,68%)	39,62 (-92,08%)	51,51 (-89,70%)
	50	31,56 (-68,44%)	36,03 (-63,97%)	45,3 (-77,35%)	52,8 (-73,60%)	59,18 (-84,01%)	73,74 (-80,07%)	66,97 (-86,61%)	87,72 (-82,46%)
	100	45,85 (-54,15%)	51,98 (-48,02%)	69,42 (-65,29%)	81,02 (-59,49%)	104,56 (-71,74%)	124,77 (-66,28%)	122,20 (-75,56%)	149,69 (-70,06%)
	400	73,61 (-26,39%)	77,13 (-22,87%)	132,57 (-33,72%)	143,01 (-28,50%)	221,22 (-40,21%)	244,95 (-33,80%)	292,78 (-41,44%)	318,60 (-36,28%)
	500	76,65 (-23,35%)	80,65 (-19,35%)	141,78 (-29,11%)	149,51 (-25,25%)	235,73 (-36,29%)	255,47 (-30,95%)	308,89 (-38,22%)	332,23 (-33,55%)
	600	79,20 (-20,80%)	82,34 (-17,66%)	148,77 (-25,62%)	155,63 (-22,18%)	252,50 (-31,76%)	272,29 (-26,41%)	320,19 (-35,96%)	343,83 (-31,23%)
	900	83,59 (-16,41%)	86,02 (-13,98%)	159,19 (-20,41%)	165,59 (-17,20%)	277,79 (-24,92%)	291,42 (-21,24%)	367,91 (-26,42%)	385,62 (-22,88%)
	1000	84,66 (-15,34%)	86,83 (-13,17%)	162,06 (-18,97)	168,04 (-15,98%)	286,3 (-22,62%)	301,2 (-18,59%)	371,52 (-25,70%)	390,62 (-21,88%)
	1500	87,89 (-12,11%)	89,54 (-10,46%)	169,41 (-15,30%)	174,88 (-12,56%)	297,97 (-19,47%)	311,26 (-15,88%)	400,15 (-19,97%)	414,17 (-17,17%)
	2000	89,81 (-10,19%)	90,95 (-9,05%)	173,42 (-13,29%)	177,67 (-11,17%)	308,43 (-16,64%)	318,91 (-13,81%)	415,82 (-16,84%)	429,50 (-14,10%)
	4000	92,66 (-7,34%)	93,66 (-6,34%)	181,70 (-9,15%)	184,19 (-7,91%)	327,67 (-11,44%)	333,92 (-9,75%)	438,49 (-12,30%)	448,60 (-10,28%)
	6000	93,83 (-6,17%)	94,70 (-5,30%)	183,85 (-8,08%)	186,44 (-6,78%)	336,77 (-8,98%)	340,51 (-7,97%)	450,22 (-9,96%)	457,79 (-8,44%)

λ	M	ARL ₀ =100 (H=6,980)		ARL ₀ =200 (H=8,641)		ARL ₀ =370 (H=10,091)		ARL ₀ =500 (H=10,791)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
	10000	95,07 (-4,93%)	95,86 (-4,14)	187,66 (-6,17%)	189,53 (-5,23%)	342,40 (-7,46%)	346,25 (-6,42%)	459,51 (-8,10%)	465,25 (-6,95%)

λ	M	ARL ₀ =100 (H=8,068)		ARL ₀ =200 (H=9,633)		ARL ₀ =370 (H=10,998)		ARL ₀ =500 (H=11,658)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
0,2	30	22,73 (-77,27%)	26,85 (-73,15%)	31,73 (-84,14%)	40,27 (-79,86%)	44,97 (-87,85%)	53,96 (-85,42%)	49,94 (-90,01%)	68,09 (-86,38%)
	50	33,01 (-66,99%)	37,62 (-62,38%)	48,92 (-75,54%)	59,17 (-70,41%)	72,20 (-80,49%)	88,59 (-76,06%)	86,61 (-82,68%)	106,01 (-78,80%)
	100	48,69 (-51,31%)	53,75 (-46,25%)	77,23 (-61,38%)	89,38 (-55,31%)	128,02 (-65,40%)	151,50 (-59,05%)	162,96 (-67,41%)	196,36 (-60,73%)
	400	72,88 (-27,12%)	76,84 (-23,16%)	137,92 (-31,04%)	146,30 (-26,85%)	236,38 (-36,11%)	256,30 (-30,73%)	309,27 (-38,15%)	337,59 (-32,48%)
	500	77,91 (-22,09%)	80,64 (-19,36%)	143,24 (-28,38%)	150,92 (-24,54%)	251,53 (-32,02%)	267,26 (-27,77%)	329,45 (-34,11%)	354,10 (-29,18%)
	600	79,17 (-20,83%)	82,04 (-17,96%)	146,07 (-26,97%)	154,56 (-22,72%)	260,49 (-29,60%)	275,34 (-25,58%)	348,19 (-30,36%)	368,47 (-26,31%)
	900	83,03 (-16,97%)	85,86 (-14,14%)	159,44 (-20,28%)	165,40 (-17,30%)	284,44 (-23,12%)	295,95 (-20,01%)	372,06 (-25,59%)	391,35 (-21,73%)
	1000	84,32 (-15,68%)	86,07 (-13,93%)	162,56 (-18,72%)	167,58 (-16,21%)	290,63 (-21,45%)	302,90 (-18,14%)	377,73 (-24,45%)	401,37 (-19,73%)
	1500	87,03 (-12,97%)	89,19 (-10,81%)	169,43 (-15,28%)	173,91 (-13,05%)	305,87 (-17,33%)	315,41 (-14,75%)	403,52 (-19,30%)	418,71 (-16,26%)
	2000	88,65 (-11,35%)	90,48 (-9,52%)	171,70 (-14,15%)	176,92 (-11,54%)	309,26 (-16,42%)	318,01 (-14,05%)	419,04 (-16,19%)	430,28 (-13,94%)
4000	91,74	93,26	180,02	183,02	326,16	332,43	438,34	447,82	

λ	M	ARL ₀ =100 (H=8,068)		ARL ₀ =200 (H=9,633)		ARL ₀ =370 (H=10,998)		ARL ₀ =500 (H=11,658)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
		(-8,26%)	(-6,74%)	(-9,99%)	(-8,49%)	(-11,85%)	(-10,15%)	(-12,33%)	(-10,44%)
	6000	92,86 (-7,14%)	94,08 (-5,92%)	182,73 (-8,64%)	185,24 (-7,38%)	332,99 (-10,0%)	338,91 (-8,4%)	445,97 (-10,81%)	454,26 (-9,15%)
	10000	94,17 (-5,83%)	94,95 (-5,05%)	185,49 (-7,25%)	187,82 (-6,09%)	339,76 (-8,17%)	343,96 (-7,04%)	453,39 (-9,32%)	460,82 (-7,84%)

λ	M	ARL ₀ =100 (H=8,971)		ARL ₀ =200 (H=10,408)		ARL ₀ =370 (H=11,672)		ARL ₀ =500 (H=12,288)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
0,5	30	25,09 (-74,91%)	29,31 (-70,69%)	37,46 (-81,27%)	47,42 (-76,29%)	58,12 (-84,29%)	74,76 (-79,79%)	74,57 (-85,09%)	91,52 (-81,70%)
	50	36,65 (-63,35%)	42,72 (-57,28%)	59,33 (-70,34%)	71,72 (-64,14%)	94,03 (-74,59%)	114,51 (-69,05%)	107,90 (-78,42%)	137,33 (-72,53%)
	100	50,98 (-49,02%)	57,37 (-42,63%)	91,79 (-54,10%)	103,98 (-48,01%)	146,37 (-60,44%)	171,98 (-53,52%)	192,08 (-61,58%)	221,51 (-55,70%)
	400	74,59 (-25,41%)	78,03 (-21,97%)	139,40 (-30,3%)	148,59 (-25,7%)	245,38 (-33,68%)	265,51 (-28,24%)	321,93 (-35,61%)	346,54 (-30,69%)
	500	76,22 (-23,78%)	79,76 (-20,24%)	145,05 (-27,47%)	153,10 (-23,45%)	252,79 (-31,68%)	270,45 (-26,91%)	346,58 (-30,68%)	367,06 (-26,59%)
	600	79,29 (-20,71%)	82,29 (-17,71%)	148,99 (-25,50%)	157,31 (-21,34%)	266,68 (-27,92%)	279,90 (-24,35%)	345,96 (-30,81%)	369,69 (-26,06%)
	900	82,42 (-17,58%)	85,32 (-14,68%)	157,56 (-21,22%)	166,56 (-16,72%)	287,26 (-22,36%)	301,79 (-18,44%)	377,21 (-24,56%)	395,08 (-20,98%)
	1000	83,34 (-16,66%)	85,97 (-14,03%)	160,66 (-19,67%)	167,26 (-16,37%)	288,05 (-22,15%)	301,93 (-18,40%)	382,97 (-23,41%)	400,13 (-19,97%)
	1500	85,78 (-14,22%)	88,23 (-11,77%)	167,09 (-16,45%)	173,13 (-13,44%)	302,81 (-18,16%)	314,96 (-14,88%)	400,29 (-19,94%)	416,14 (-16,77%)

λ	M	ARL ₀ =100 (H=8,971)		ARL ₀ =200 (H=10,408)		ARL ₀ =370 (H=11,672)		ARL ₀ =500 (H=12,288)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
	2000	86,41 (-13,59%)	88,68 (-11,32%)	171,78 (-14,11%)	176,34 (-11,83%)	309,51 (-16,35%)	318,69 (-13,87%)	413,25 (-17,35%)	425,47 (-14,91%)
	4000	90,43 (-9,57%)	91,86 (-8,14%)	178,20 (-10,90%)	181,76 (-9,12%)	323,60 (-12,54%)	331,43 (-10,42%)	434,65 (-13,07%)	443,25 (-11,35%)
	6000	91,51 (-8,49%)	92,53 (-7,47%)	180,85 (-9,58%)	183,38 (-8,31%)	330,75 (-10,61%)	336,85 (-8,96%)	442,48 (-11,50%)	450,81 (-9,84%)
	10000	93,00 (-7,00%)	93,94 (-6,06%)	184,02 (-7,99%)	186,08 (-6,96%)	334,89 (-9,49%)	341,25 (-7,77%)	453,96 (-9,21%)	460,89 (-7,82%)

λ	M	ARL ₀ =100 (H=9,176)		ARL ₀ =200 (H=10,559)		ARL ₀ =370 (H=11,787)		ARL ₀ =500 (H=12,388)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
1	30	28,02 (-71,98%)	35,06 (-64,94%)	45,40 (-77,30%)	54,14 (-72,93%)	68,87 (-81,39%)	84,11 (-77,27%)	77,95 (-84,41%)	102,44 (-79,51%)
	50	39,32 (-60,68%)	44,39 (-55,61%)	66,27 (-66,87%)	77,07 (-61,47%)	95,85 (-74,09%)	116,61 (-68,48%)	130,80 (-73,84%)	161,73 (-67,65%)
	100	53,62 (-46,38%)	58,46 (-41,54%)	96,57 (-51,72%)	110,76 (-44,62%)	157,36 (-57,47%)	184,74 (-50,07%)	200,09 (-59,98%)	230,93 (-53,81%)
	400	73,99 (-26,01%)	77,59 (-22,41%)	139,65 (-30,17%)	149,83 (-25,08%)	247,74 (-33,04%)	269,07 (-27,28%)	327,27 (-34,55%)	351,19 (-29,76%)
	500	76,18 (-23,82%)	79,60 (-20,40%)	146,49 (-26,75%)	154,44 (-22,78%)	255,75 (-30,88%)	273,96 (-25,96%)	344,31 (-31,14%)	367,69 (-26,46%)
	600	77,90 (-22,10%)	81,97 (-18,03%)	150,58 (-24,71%)	159,30 (-20,35%)	269,33 (-27,21%)	285,48 (-22,84%)	358,02 (-28,40%)	376,83 (-24,63%)
	900	82,01 (-17,99%)	84,76 (-15,24%)	157,58 (-21,21%)	165,14 (-17,43%)	279,43 (-24,48%)	296,75 (-19,80%)	383,00 (-23,40%)	404,17 (-19,17%)
	1000	82,55	85,76	158,04	167,19	288,66	302,02	385,99	401,72

λ	M	ARL ₀ =100 (H=9,176)		ARL ₀ =200 (H=10,559)		ARL ₀ =370 (H=11,787)		ARL ₀ =500 (H=12,388)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
		(-17,45%)	(-14,24%)	(-20,98%)	(-16,41%)	(-21,98%)	(-18,37%)	(-22,80%)	(-19,66%)
	1500	85,12 (-14,88%)	87,43 (-12,57%)	166,40 (-16,80%)	172,31 (-13,84%)	302,88 (-18,14%)	313,75 (-15,20%)	402,24 (-19,55%)	422,77 (-15,45%)
	2000	87,53 (-12,47%)	89,72 (-10,28%)	167,77 (-16,11%)	173,08 (-13,46%)	305,97 (-17,31%)	318,07 (-14,04%)	415,20 (-16,96%)	429,88 (-14,02%)
	4000	89,53 (-10,47%)	91,36 (-8,64%)	177,08 (-11,46%)	180,97 (-9,52%)	322,66 (-12,79%)	330,38 (-10,71%)	433,41 (-13,32%)	444,35 (-11,13%)
	6000	91,34 (-8,66%)	92,53 (-7,47%)	179,49 (-10,25%)	182,63 (-8,69%)	326,85 (-11,66%)	333,84 (-9,77%)	441,47 (-11,71%)	449,98 (-10,00%)
	10000	92,63 (-7,37%)	93,53 (-6,47%)	183,29 (-8,36%)	185,42 (-7,29%)	335,61 (-9,29%)	340,14 (-8,07%)	449,61 (-10,08%)	457,30 (-8,54%)

Presentil ke-5 dan ke-10 ($p = 0,05$ dan $p = 0,10$) dari CARL_{IN} untuk $n = 5$

λ	M	ARL ₀ =100 (H=6,980)		ARL ₀ =200 (H=8,641)		ARL ₀ =370 (H=10,091)		ARL ₀ =500 (H=10,791)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
0,1	30	23,17 (-76,83%)	27,31 (-72,69%)	30,34 (-84,83%)	35,96 (-82,02%)	38,21 (-89,67%)	47,85 (-87,07%)	44,99 (-91,00%)	58,67 (-88,27%)
	50	33,19 (-66,81%)	37,21 (-62,79%)	46,83 (-76,59%)	57,09 (-71,45%)	64,55 (-82,55%)	80,52 (-78,24%)	75,80 (-84,84%)	97,26 (-80,55%)
	100	47,3 (-52,7%)	52,4 (-47,6%)	76,36 (-61,82%)	88,67 (-55,66%)	115,29 (-68,84%)	132,36 (-64,23%)	138,87 (-72,23%)	165,18 (-66,96%)
	400	76,07 (-23,93%)	79,92 (-20,08%)	137,07 (-31,47%)	148,81 (-25,60%)	220,16 (-40,50%)	243,13 (-34,29%)	298,92 (-40,22%)	328,29 (-34,34%)
	500	78,52	82,06	145,68	154,46	252,85	272,72	324,13	352,17

λ	M	ARL ₀ =100 (H=6,980)		ARL ₀ =200 (H=8,641)		ARL ₀ =370 (H=10,091)		ARL ₀ =500 (H=10,791)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
		(-21,48%)	(-17,94%)	(-27,16%)	(-22,77%)	(-31,66%)	(-26,29%)	(-35,17%)	(-29,57%)
	600	80,73 (-19,27%)	84,01 (-15,99%)	153,69 (-23,16%)	159,99 (-20,00%)	267,40 (-27,73%)	281,15 (-24,0%)	347,99 (-30,40%)	368,82 (-26,23%)
	900	86,25 (-13,75%)	88,41 (-11,59%)	163,92 (-18,04%)	169,12 (-15,44%)	291,71 (-21,16%)	303,29 (-18,03%)	382,01 (-23,60%)	400,80 (-19,84%)
	1000	86,9 (-13,1%)	88,9 (-11,1%)	166,64 (-16,68%)	171,87 (-14,06%)	293,84 (-20,58%)	306,54 (-17,15%)	390,02 (-21,99%)	407,76 (-18,45%)
	1500	89,79 (-10,21%)	91,39 (-8,61%)	173,30 (-13,35%)	177,48 (-11,26%)	314,25 (-15,07%)	322,13 (-12,94%)	415,68 (-16,83%)	427,31 (-14,54%)
	2000	91,43 (-8,57%)	92,75 (-7,25%)	178,68 (-10,66%)	181,55 (-9,22%)	321,19 (-13,19%)	328,00 (-11,35%)	428,53 (-14,23%)	438,22 (-12,36%)
	4000	93,90 (-6,10%)	94,76 (-5,24%)	185,34 (-7,33%)	187,37 (-6,31%)	336,85 (-8,96%)	340,42 (-7,99%)	446,88 (-10,62%)	453,98 (-9,20%)
	6000	95,02 (-4,98%)	95,77 (-4,23%)	187,75 (-6,12%)	189,20 (-5,40%)	341,39 (-7,73%)	345,01 (-6,75%)	459,22 (-8,16%)	464,89 (-7,02%)
	10000	95,82 (-4,18%)	96,43 (-3,57%)	189,56 (-5,22%)	190,65 (-4,67%)	346,71 (-6,29%)	348,95 (-5,69%)	464,24 (-7,15%)	469,52 (-6,10%)

λ	M	ARL ₀ =100 (H=8,068)		ARL ₀ =200 (H=9,633)		ARL ₀ =370 (H=10,998)		ARL ₀ =500 (H=11,658)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
0,2	30	25,07 (-74,93%)	29,50 (-70,50%)	36,24 (-81,88%)	46,27 (-76,86%)	53,62 (-85,51%)	67,02 (-81,89%)	59,32 (-88,14%)	74,56 (-85,09%)
	50	34,45 (-65,55%)	40,51 (-59,49%)	54,91 (-72,55%)	66,83 (-66,59%)	82,94 (-77,58%)	101,58 (-72,55%)	99,61 (-80,08%)	124,99 (-75,00%)
	100	54,32 (-45,68%)	58,86 (-41,14%)	86,32 (-56,84%)	98,10 (-50,95%)	141,34 (-61,80%)	164,85 (-55,45%)	176,26 (-64,75%)	202,02 (-59,60%)

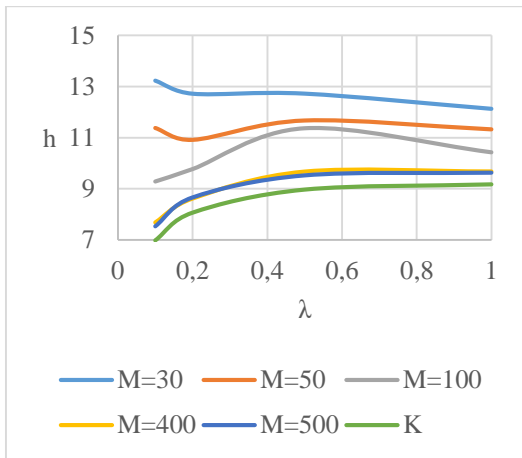
λ	M	ARL ₀ =100 (H=8,068)		ARL ₀ =200 (H=9,633)		ARL ₀ =370 (H=10,998)		ARL ₀ =500 (H=11,658)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
	400	78,89 (-21,11%)	81,94 (-18,06%)	146,16 (-26,92%)	153,26 (-23,37%)	257,50 (-30,41%)	273,63 (-26,05%)	344,04 (-31,19%)	364,44 (-27,11%)
	500	80,73 (-19,27%)	84,39 (-15,61%)	154,14 (-22,93%)	160,54 (-19,73%)	270,19 (-26,98%)	284,00 (-23,24%)	350,48 (-29,90%)	376,54 (-24,69%)
	600	82,57 (-17,43%)	85,65 (-14,35%)	157,41 (-21,30%)	163,24 (-18,38%)	280,03 (-24,32%)	290,97 (-21,36%)	369,55 (-26,09%)	392,41 (-21,52%)
	900	86,56 (-13,44%)	88,66 (-11,34%)	166,56 (-16,72%)	171,22 (-14,39%)	296,21 (-19,94%)	307,51 (-16,89%)	397,28 (-20,54%)	412,79 (-17,44%)
	1000	87,61 (-12,39%)	89,26 (-10,74%)	168,69 (-15,66%)	173,60 (-13,20%)	301,57 (-18,49%)	313,37 (-15,31%)	400,66 (-19,87%)	414,54 (-17,09%)
	1500	89,47 (-10,53%)	91,13 (-8,87%)	175,37 (-12,31%)	179,38 (-10,31%)	317,61 (-14,16%)	324,00 (-12,43%)	418,15 (-16,37%)	431,45 (-13,71%)
	2000	90,66 (-9,34%)	92,04 (-7,96%)	178,21 (-10,89%)	181,63 (-9,19)	321,48 (-13,11%)	329,70 (-10,89%)	429,41 (-14,12%)	441,02 (-11,80%)
	4000	93,08 (-6,92%)	94,16 (-5,84%)	183,77 (-8,11%)	186,00 (-7,00%)	333,76 (-9,79%)	338,68 (-8,46%)	448,43 (-10,31%)	456,76 (-8,65%)
	6000	94,27 (-5,73%)	94,84 (-5,16%)	186,97 (-6,51%)	188,54 (-5,73%)	339,15 (-8,34%)	343,93 (-7,05%)	454,44 (-9,11%)	461,80 (-7,64%)
	10000	95,00 (-5,00%)	95,66 (-4,34%)	188,07 (-5,97%)	189,55 (-5,22%)	343,40 (-7,19%)	347,37 (-6,12%)	463,69 (-7,26%)	467,86 (-6,43%)

λ	M	ARL ₀ =100 (H=8,971)		ARL ₀ =200 (H=10,408)		ARL ₀ =370 (H=11,672)		ARL ₀ =500 (H=12,288)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
0,5	30	32,93 (-67,07%)	39,55 (-60,45%)	53,99 (-73,00%)	64,09 (-67,95%)	78,29 (-78,84%)	91,84 (-75,18%)	96,70 (-80,66%)	118,54 (-76,29%)
	50	44,83	49,93	73,93	84,86	126,35	144,54	149,23	175,54

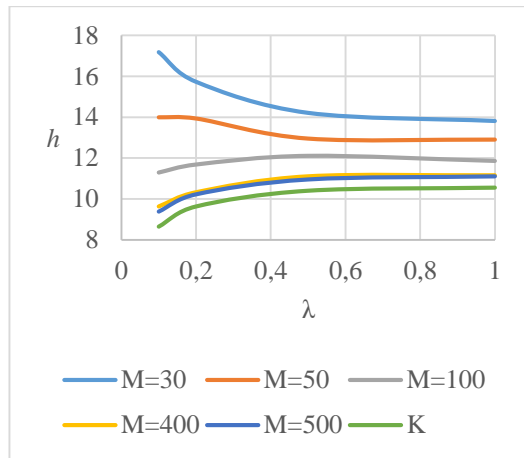
λ	M	ARL ₀ =100 (H=8,971)		ARL ₀ =200 (H=10,408)		ARL ₀ =370 (H=11,672)		ARL ₀ =500 (H=12,288)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
		(-55,17%)	(-50,07%)	(-63,03%)	(-57,57%)	(-65,85%)	(-60,94%)	(-70,15%)	(-64,89%)
	100	58,85 (-41,15%)	65,67 (-34,33%)	104,97 (-47,52%)	117,06 (-41,47%)	173,98 (-52,98%)	199,58 (-46,06%)	232,98 (-53,40%)	261,96 (-47,61%)
	400	80,33 (-19,67%)	83,24 (-16,76%)	153,72 (-23,14%)	160,41 (-19,80%)	267,93 (-27,59%)	282,51 (-23,65%)	362,60 (-27,48%)	386,99 (-22,60%)
	500	81,62 (-18,38%)	85,09 (-14,91%)	156,00 (-22,00%)	163,44 (-18,28%)	281,31 (-23,97%)	297,37 (-19,63%)	382,68 (-23,46%)	399,18 (-20,16%)
	600	84,21 (-15,79%)	85,97 (-14,03%)	162,08 (-18,96%)	168,35 (-15,83%)	286,96 (-22,44%)	298,93 (-19,21%)	384,66 (-23,07%)	401,79 (-19,6%)
	900	86,33 (-13,67%)	88,38 (-11,62%)	167,32 (-16,34%)	172,56 (-13,72%)	303,24 (-18,04%)	312,84 (-15,45%)	403,19 (19,36%)	418,07 (-16,39%)
	1000	86,48 (-13,52%)	88,89 (-11,11%)	168,31 (-15,84%)	173,12 (-13,44%)	307,88 (-16,79%)	316,83 (-14,37%)	405,42 (-18,92%)	422,12 (-15,58%)
	1500	88,93 (-11,07%)	90,96 (-9,04%)	172,63 (-13,69%)	177,67 (-11,17%)	312,40 (-15,57%)	321,61 (-13,08%)	423,73 (-15,25%)	432,68 (-13,46%)
	2000	90,17 (-9,83%)	91,77 (-8,23%)	177,16 (-11,42%)	180,23 (-9,89%)	320,97 (-13,25%)	329,98 (-10,82%)	427,85 (-14,43%)	440,95 (-11,81%)
	4000	92,32 (-7,68%)	93,34 (-6,66%)	182,96 (-8,52%)	185,13 (-7,44%)	333,23 (-9,94%)	338,12 (-8,62%)	446,75 (-10,65%)	455,47 (-8,91%)
	6000	93,49 (-6,51%)	94,48 (-5,52%)	183,77 (-8,11%)	185,76 (-7,12%)	337,32 (-8,83%)	341,66 (-7,66%)	453,67 (-9,27%)	459,51 (-8,10%)
	10000	94,06 (-5,94%)	94,88 (-5,12%)	186,82 (-6,59%)	188,38 (-5,81%)	341,46 (-7,71%)	345,23 (-6,69%)	460,69 (-7,8%)	464,26 (-7,15%)

λ	M	ARL ₀ =100 (H=9,176)		ARL ₀ =200 (H=10,559)		ARL ₀ =370 (H=11,787)		ARL ₀ =500 (H=12,388)	
		p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10	p=0,05	p=0,10
1	30	39,20 (-60,80%)	44,35 (-55,65%)	69,06 (-65,47%)	81,68 (-59,16%)	106,82 (-71,13%)	129,53 (-64,99%)	138,36 (-72,33%)	163,40 (-67,32%)
	50	49,97 (-50,03%)	55,39 (-44,61%)	89,62 (-55,19%)	101,56 (-49,22%)	155,27 (-58,04%)	178,49 (-51,76%)	199,29 (-60,14%)	229,25 (-54,15%)
	100	62,48 (-37,52%)	67,63 (-32,37%)	114,73 (-42,63%)	125,62 (-37,19%)	207,28 (-43,98%)	226,96 (-38,66%)	268,72 (-46,26%)	290,35 (-41,93%)
	400	80,57 (-19,43%)	83,30 (-16,70%)	158,72 (-20,64%)	165,15 (-17,42%)	276,69 (-25,22%)	290,91 (-21,38%)	373,12 (-25,38%)	392,06 (-21,59%)
	500	81,90 (-18,10%)	84,97 (-15,03%)	160,29 (-19,86%)	165,17 (-17,42%)	288,02 (-22,16%)	299,99 (18,92%)	384,88 (-23,02%)	400,86 (-19,83%)
	600	83,55 (-16,45%)	86,35 (-13,65%)	161,50 (-19,25%)	166,11 (-16,94%)	294,11 (-20,51%)	302,97 (-18,12%)	388,91 (-22,22%)	405,48 (-18,90%)
	900	85,19 (-14,81%)	87,76 (-12,24%)	167,50 (-16,25%)	174,04 (-12,98%)	306,00 (-17,30%)	316,41 (-14,48%)	405,95 (-18,81%)	421,39 (-15,72%)
	1000	87,15 (-12,85%)	89,03 (-10,97%)	170,80 (-14,60%)	175,48 (-12,26%)	306,80 (-17,08%)	317,84 (-14,10%)	417,26 (-16,55%)	429,96 (-14,01%)
	1500	88,94 (-11,06%)	90,80 (-9,20%)	173,61 (-13,19%)	178,29 (-10,86%)	315,42 (-14,75%)	325,77 (-11,95%)	431,52 (-13,7%)	441,01 (-11,8%)
	2000	89,80 (-10,20%)	91,15 (-8,85%)	177,75 (-11,12%)	180,83 (-9,58%)	321,99 (-12,98%)	329,22 (-11,02%)	433,2 (-13,36%)	443,3 (-11,34%)
	4000	91,98 (-8,02%)	93,44 (-6,56%)	182,53 (-8,73%)	184,85 (-7,58%)	332,04 (-10,26%)	337,10 (-8,89%)	448,13 (-10,37%)	455,39 (-8,92%)
	6000	92,88 (-7,12%)	94,02 (-5,98%)	183,91 (-8,05%)	186,50 (-6,75%)	337,81 (-8,70%)	342,19 (-7,52%)	454,07 (-9,19%)	460,03 (-7,99%)
	10000	94,14 (-5,86%)	95,01 (-4,99%)	186,26 (-6,87%)	188,20 (-5,90%)	341,51 (-7,70%)	343,81 (-7,08%)	459,78 (-8,04%)	464,79 (-7,04%)

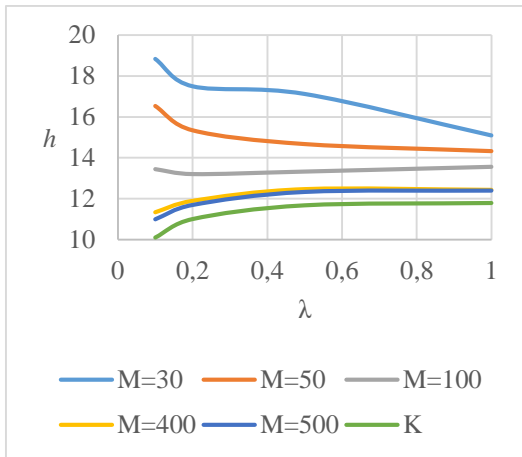
Lampiran 4. Grafik yang tidak disesuaikan (Kasus K) dan nilai h yang disesuaikan untuk $0 < \lambda \leq 1$, $ARL = 100, 200, 370, n = 3$



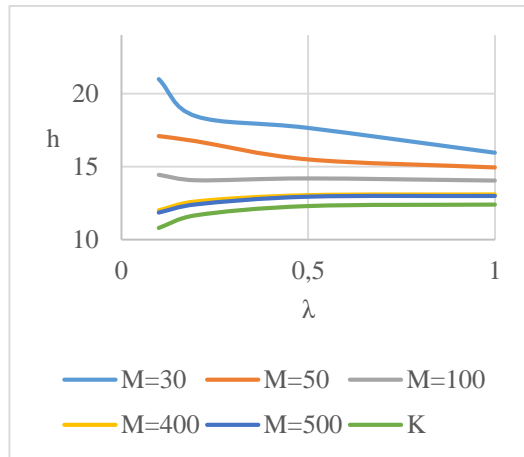
ARL = 100 dan n = 3



ARL = 200 dan n = 3



ARL = 370 dan n = 3



ARL = 500 dan n = 3

Lampiran 5. Nilai $CARL_{IN,p}$ untuk kinerja in-control dan out-of-control dari grafik BEWMA dengan batas kendali yang disesuaikan ($ARL_0 = 370$, $p = 10\%$) dan tidak disesuaikan ($ARL_0 = 370$) untuk $n = 5$ dan beberapa nilai presentil, M , λ , dan d

M=50								
Persentil	$\lambda=0,1$		$\lambda=0,2$		$\lambda=0,5$		$\lambda=1$	
	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2
$\delta=0$								
0,05	64,48	224,64	81,08	222,33	130,02	281,07	146,49	302,02
0,10	77,87	374,54	100,38	368,19	149,16	361,45	171,02	365,11
0,25	117,53	595,69	145,94	490,57	191,04	479,05	220,21	461,89
0,50	179,08	1212,74	203,28	814,10	258,73	683,83	294,82	660,15
0,75	255,57	2166,94	281,88	1261,51	348,85	1001,01	388,30	916,94
0,90	334,54	3428,48	360,57	1956,80	447,61	1406,07	502,73	1268,41
0,95	384,99	4362,55	423,21	2446,16	517,01	1685,05	585,74	1533,11
$\delta=0,25$								
0,05	10,59	15,68	10,40	15,66	17,01	28,60	45,35	83,54
0,10	11,42	17,27	11,59	17,78	19,81	34,84	54,68	98,17
0,25	13,09	20,83	14,09	22,57	25,79	46,26	67,85	135,83
0,50	15,93	26,19	17,45	30,72	35,47	67,76	94,78	191,22
0,75	19,93	34,99	22,87	46,42	52,13	105,27	129,80	279,46
0,90	25,29	49,76	30,81	68,13	71,10	167,35	173,81	383,48
0,95	29,04	64,07	36,89	82,63	92,42	206,18	202,31	507,83
$\delta=0,5$								
0,05	5,19	6,83	4,48	5,53	4,49	5,73	9,71	15,13
0,10	5,37	7,10	4,69	5,82	4,85	6,20	11,22	18,35
0,25	5,78	7,73	5,09	6,35	5,44	7,39	14,22	23,49
0,50	6,30	8,48	5,59	7,16	6,49	9,04	18,39	32,23
0,75	6,83	9,30	6,18	8,07	7,75	11,20	24,05	44,14
0,90	7,37	10,16	6,79	9,11	9,02	13,94	30,85	58,58
0,95	7,70	10,78	7,23	10,06	10,29	16,01	38,29	68,16
$\delta=1$								
0,05	2,69	3,30	2,21	2,50	1,68	1,90	1,66	2,01
0,10	2,75	3,38	2,25	2,56	1,74	1,97	1,75	2,12
0,25	2,86	3,52	2,34	2,67	1,83	2,06	1,94	2,39
0,50	2,98	3,69	2,43	2,81	1,93	2,19	2,17	2,80
0,75	3,11	3,87	2,54	2,95	2,05	2,34	2,49	3,92
0,90	3,25	4,04	2,63	3,08	2,17	2,50	2,82	3,83
0,95	3,32	4,15	2,70	3,17	2,24	2,59	3,01	4,30

M=50								
$\delta=1,5$								
0,05	1,99	2,26	1,56	1,83	1,09	1,17	1,06	1,03
0,10	2,01	2,30	1,61	1,89	1,11	1,19	1,07	1,04
0,25	2,04	2,38	1,68	1,92	1,14	1,23	1,10	1,06
0,50	2,08	2,48	1,75	1,97	1,18	1,29	1,13	1,08
0,75	2,12	2,59	1,81	2,01	1,22	1,35	1,17	1,11
0,90	2,17	2,70	1,86	2,05	1,26	1,41	1,22	1,14
0,95	2,20	2,75	1,89	2,07	1,29	1,45	1,25	1,16

M=100								
Persentil	$\lambda=0,1$		$\lambda=0,2$		$\lambda=0,5$		$\lambda=1$	
	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2
$\delta=0$								
0,05	115,14	266,85	142,66	269,59	175,72	362,83	203,91	346,17
0,10	137,51	391,09	166,65	370,98	198,66	377,19	228,74	375,81
0,25	182,17	486,54	212,26	30,49	239,82	501,02	262,93	461,80
0,50	241,47	706,08	262,11	558,90	297,66	627,53	318,92	577,99
0,75	303,44	971,91	317,74	731,40	365,94	815,84	381,49	715,71
0,90	366,21	1282,70	382,97	923,52	444,90	994,34	458,15	873,63
0,95	413,71	1469,68	439,94	1055,04	501,45	1104,41	521,64	975,01
$\delta=0,25$								
0,05	11,84	15,08	12,19	15,25	21,25	29,93	57,91	93,10
0,10	12,52	16,15	13,28	16,82	23,84	35,09	64,49	106,12
0,25	13,91	18,29	15,36	20,26	29,56	45,07	80,70	130,23
0,50	15,95	21,40	18,14	24,41	36,64	58,73	101,41	170,54
0,75	18,17	25,34	21,87	30,53	47,09	79,28	129,73	217,86
0,90	21,44	30,56	26,75	38,09	57,77	102,95	156,81	268,69
0,95	23,60	33,39	30,81	44,03	66,90	119,76	179,27	306,57
$\delta=0,5$								
0,05	5,57	6,50	4,76	5,36	5,07	6,19	12,11	17,02
0,10	5,69	6,64	4,91	5,58	5,37	6,54	13,39	18,87
0,25	5,95	7,00	5,24	5,98	5,96	7,29	15,79	22,98
0,50	6,28	7,44	5,63	6,40	6,67	8,29	19,12	28,29
0,75	6,67	7,95	6,02	6,88	7,55	9,66	23,40	34,95
0,90	7,03	8,44	6,49	7,48	8,53	11,25	28,11	43,04
0,95	7,23	8,80	6,79	7,90	9,21	12,57	31,79	48,81
$\delta=1$								
0,05	2,77	3,15	2,27	2,45	1,78	1,93	1,81	2,08
0,10	2,82	3,19	2,30	2,48	1,81	1,97	1,87	2,17
0,25	2,90	3,28	2,39	2,55	1,88	2,05	2,01	2,32
0,50	2,99	3,39	2,44	2,63	1,96	2,13	2,20	2,55
0,75	3,09	3,50	2,52	2,72	2,04	2,24	2,43	2,85
0,90	3,17	3,60	2,59	2,80	2,12	2,30	2,63	3,14
0,95	3,23	3,68	2,63	2,86	2,17	2,35	2,75	3,36

M=100								
$\delta=1,5$								
0,05	2,01	2,14	1,63	1,79	1,12	1,17	1,04	1,07
0,10	2,03	2,17	1,66	1,81	1,13	1,19	1,05	1,08
0,25	2,04	2,21	1,71	1,85	1,15	1,22	1,07	1,09
0,50	2,07	2,26	1,76	1,89	1,18	1,226	1,08	1,11
0,75	2,10	2,32	1,80	1,92	2,21	1,30	1,10	1,14
0,90	2,14	2,38	1,84	1,95	1,25	1,34	1,12	1,17
0,95	2,16	2,42	1,87	1,97	1,26	1,36	1,14	1,19

* h_1 : batas yang tidak disesuaikan ; h_2 : batas yang disesuaikan

Lampiran 6. Syntax ARL MEWMA menggunakan rantai Markov ketika parameter diketahui

```

ARL<-function(lambda,h,delta,m1,m2,p){
  # delta : pergeseran mean
  # p : jumlah variabel
  # S : vektor awal

  ucl<-sqrt(h*lambda/(2-lambda))
  g1<-2*ucl/(2*m1+1)
  g2<-2*ucl/(2*m2+1)
  H<-matrix(data=NA,nrow=2*m1+1,ncol=2*m1+1)

  # Mendefinisikan Matriks identitas dan vektor 1
  z<-(2*m1+1)*(m2+1)
  n1<-c(z)
  I<-matrix(0,nrow=n1,ncol=n1)
  I[row(I)==col(I)]<-1
  one<-matrix(1,nrow=z,ncol=1)
  # matrix transisi dari Wt1
  range1<-2*m1+1 #range1 adalah jumlah state Z1
  for (t in 1:range1) {
    c_t<- -ucl+(t-0.5)*g1
    for (k in 1:range1) {
      up<-(-ucl+k*g1-(1-lambda)*c_t)/lambda-delta
      down<-(-ucl+(k-1)*g1-(1-lambda)*c_t)/lambda-delta
      H[t,k]<-pnorm(up,mean=0,sd=1)-pnorm(down,mean=0,sd=1)
    }
  }
  #Matriks transisi Z2
  range2<-m2+1 #range2 adalah jumlah state Wt2
  V<-matrix(data=NA,nrow=range2,ncol=range2)
  for (t in 0:m2) {
    c<-((1-lambda)*t*g2/lambda)^2
    for (k in 0:m2) {
      if (k==0){
        V[t+1,1]<-pchisq((0.5*(g2)/lambda)^2,df=p-1,ncp=c)
      }
      else {

```

```
up<-((k+0.5)*g2/lambda)^2
```

Lampiran 6. (lanjutan)

```
down<-((k-0.5)*g2/lambda)^2
V[t+1,k+1]<-pchisq(up,df=p-1,ncp=c)-pchisq(down,df=p-1,ncp=c)
  }}
}
E<- kronecker(H,V) #kroneker product
#Mencari state transient
counter<-1
for (alpha in 1:rangel) {
  for (beta in 0:m2) {
    if ((alpha-(m1+1))^2*g1^2+(beta*g2)^2>=ucl^2) {
      E[,counter]<-0
      E[counter,]<-0
    }
    counter<-counter+1
  }}

temp<-solve(I-E)
temp%*%one
S<-matrix(0,nrow=z,ncol=1)
start<-m1*(m2+1)+1
S[start,1]<-1
ARL<-t(S)%*%temp%*%one
ARL
}
```

Lampiran 7. Syntax CARL

```
CARL<-function(M,n,h,lambda,B) {
  library(MASS)
  m1<-25
  m2<-25
  lambda1<-lambda
  lambda2<-lambda
  delta<-c(0,0.25,0.50,1,1.5)
  prob<-c(0.05,0.10,0.25,0.50,0.75,0.90,0.95)

  ARL<-matrix(NA,B,length(delta))
  for (shift in 1:length(delta)) {
    delta1<-delta[shift]
    delta2<-delta[shift]
    iterasi<-0
    while(iterasi<B) {
      iterasi<-iterasi+1
      #Data Bangkitan
      BVN<-function(n,mux,muy,sdx,sdy,korelasi) {
        dmat<-matrix(0,n,2)
        for(i in 1:n){
          u1<-rnorm(1,0,1)
          u2<-rnorm(1,0,1)
```

```
dmat[i,1]<-mux+sdx*u1
```

Lampiran 7. (lanjutan)

```
    dmat[i,2]<-muy+korelasi*sd*y*u1+sd*y*sqrt(1-
    korelasi^2)*u2
  }
x<-dmat[,1]
y<-dmat[,2]
dmat
}
T0<-BVN(1,0,0,1,1,0)
T10<-T0[1]
T20<-T0[2]

sgm<-function(M,n,sdx,sdy,korelasi){
  S<-
  matrix(c(sdx^2,korelasi*sdx*sdy,korelasi*sdx*sdy,sdy
  ^2),2,2,byrow = TRUE)
  U<-chol(S)

  A<-matrix(NA,2,2)
  for (i in 1:2) {
    for (j in 1:2) {
      if(i==j){
        A[i,j]<-sqrt(rchisq(1, df = (M*(n-1))-i+1, ncp
= 0))
      }
      else{A[i,j]<-rnorm(1, mean = 0, sd = 1)}
    }
  }

  ss<-t(U)%*%A%*%t(A)%*%(U)
  ss
}
sigma0<-sgm(M,n,1,1,0)/(M*(n-1))
sigma1<-sigma0[1] #varians X1
sigma2<-sigma0[4] #varians x2
sigma12<-sigma0[3] #Kovarian X1 dan X2

#Matriks Kovarian Yi
y_sigma1<-lambda1/(2-lambda1)*sigma1
y_sigma12<-lambda1*lambda2/(lambda1+lambda2-
lambda1*lambda2)*sigma12
y_sigma2<-lambda2/(2-lambda2)*sigma2
y<-matrix(c(y_sigma1, y_sigma12, y_sigma12,
y_sigma2),nrow=2,ncol=2, byrow=TRUE)
IY<-solve(y)

#Transient State
UCL1<-sqrt(IY[2,2]*h/(IY[1,1]*IY[2,2]-IY[1,2]^2))
UCL2<-sqrt(IY[1,1]*h/(IY[1,1]*IY[2,2]-IY[1,2]^2))
g1<-2*UCL1/(2*m1+1) #Interval setiap state Y1
g2<-2*UCL2/(2*m2+1) #Interval setiap state Y2
```

Lampiran 7. (lanjutan)

```
#Matrikx Transisi
P<-matrix(data=NA,nrow=(2*m1+1)*(2*m2+1),
  ncol=(2*m1+1)*(2*m2+1)) #matriks transisi
H<-matrix(data=NA,nrow=(2*m1+1),ncol=
  (2*m1+1))#Probabilitas Y1
V<-matrix(data=NA,nrow=(2*m2+1),ncol=
  (2*m2+1)) #Probabilitas Y2

#Range Y1 dan Y2
range1<-(2*m1+1)
range2<-(2*m2+1)

for (k in 1:range1){
  ak<-(-UCL1 + (k-0.5)*g1)
  for (i in 1: range1){
    up_y1<-((-UCL1 + i*g1 - (1-lambda1)*ak)/lambda1) -
      sqrt(n)*delta1 +T10/sqrt(M)
    down_y1<-((-UCL1 + (i-1)*g1 - (1-
      lambda1)*ak)/lambda1) -sqrt(n)*delta1
      +T10/sqrt(M)
    H[k,i]<-pnorm((up_y1 ), mean=0, sd=1) -
      pnorm((down_y1 ), mean=0, sd=1)
    ai<-(-UCL1 + (i-0.5)*g1)
    for (l in 1: range2){
      bl<-(-UCL2 + (l-0.5)*g2)
      for (j in 1: range2){
        up_y2<-((-UCL2 + j*g2 - (1-
          lambda2)*bl)/lambda2)-sqrt(n)*delta2
          +T20/sqrt(M)
        down_y2<-((-UCL2 + (j-1)*g2 - (1-
          lambda2)*bl)/lambda2)-sqrt(n)*delta2
          +T20/sqrt(M)
        V[l,j]<-pnorm((up_y2),mean=0, sd=1)-
          pnorm(down_y2,mean=0, sd=1)
        temp<-H[k,i]*V[l,j]
        P[(k-1)*(2*m2+1)+l, (i-1)*(2*m2 + 1)+j]<-temp
      }
    }
  }
}
Pc<-P
counter<-1

# Menghapus absorbing states
for (alpha in 1:range1){
  for (beta in 1:range2){
    if (IY[1,1]*(alpha-(m1+1))^2*(g1)^2 +
      2*IY[1,2]*(alpha-(m1+1))
      *(beta-(m2+1))*g1*g2 + IY[2,2]*(beta-
      (m2+1))^2*(g2)^2 >= h){
```

```
Pc[,counter]<-0
```

Lampiran 7. (lanjutan)

```
        Pc[counter,]<-0
      }
      counter<-counter+1
    }
  }
  y1<-(2*m1+1)*(2*m2+1)
  n1<-c(y1)
  I <- matrix(0,nrow=n1,ncol=n1)
  I[row(I)==col(I)]<-1 # matriks identitas
  one<- matrix(1,nrow=y1,ncol=1) # vektor 1
  temp<-solve(I-Pc)
  u<- matrix(0,nrow=y1,ncol=1)
  start<-m1*(2*m2+1)+m1+1
  u[start,1]<-1 # inisial vektor
  # Menghitung ARL
  ARLs<-t(u)%*% temp%*%one
  ARL[iterasi,shift]<-ARLs
}
}
#Nilai CARL_IN,p
CARLINP<-matrix(NA,length(prob),length(delta))
rownames(CARLINP)<-prob
colnames(CARLINP)<-delta
for (i in 1:length(delta)) {
  CARLINP[1:length(prob),i]<-quantile(ARL[,i], probs =
prob)
}
print(CARLINP)}
```

Lampiran 8. Syntax percentage difference

```
PD<-function(ARL0,M,n,h,lambda,B){
  source("E:/CARL.R")
  CARLINP<-CARL(M,n,h,lambda,B)
  print(CARLINP)
  PeDe<-(CARLINP-ARL0)/ARL0*100
  print(c(PeDe))
}
```

Lampiran 9. Syntax penyesuaian batas kendali

```
Climits<-function(eps,ARL0,M,n,h,lambda,B){

  source("E:/CARL.R")
  CARLINP<-CARL(M,n,h,lambda,B)

  while (CARLINP < ARL0*(1-eps)){
    h<-h+0.05
    #panggil CARL dengan nilai h yang baru
    CARLINP<-CARL(M,n,h,lambda,B)
  }
}
```

Lampiran 9. (Lanjutan)

```
print(h)

}

#untuk mendapatkan nilai  $CARL_{IN}$  dengan probabilitas 10% ubah
syntax delta=0 dan prob=0.10 pada syntax CARL
```

Lampiran 10. Syntax grafik kendali MEWMA

```
MEWMA<-function(data, destimasi, lambda, ucl) {
  x<-function(data) {
    t<-nrow(data)
    k<-ncol(data)
    xbar<-NULL
    stdev<-NULL
    for (i in 1:k) {
      xbar[i]<-mean(destimasi[,i])
    }
    output<-matrix(nrow=t, ncol=k)
    for (i in 1:k) {
      for (j in 1:t) {
        output[j,i]<-(data[j,i]-xbar[i])
      }
    }
    output
  }
  dataa<-x(data)

  mz<-function(dataa, lambda) {
    t=nrow(dataa)
    k<-ncol(dataa)
    z<-matrix(nrow = t, ncol = k)
    for (k in 1:k) {
      zawal<-0
      for (i in 1:t) {
        z[i,k]<-(lambda*dataa[i,k])+((1-lambda)*zawal)
        zawal<-z[i,k]
      }
    }
    z
  }
  z<-mz(dataa, lambda)
  sigmax<-cov(destimasi)
  b<-lambda/(2-lambda)
  sigmaz<-b*sigmax
  t<-nrow(data)
  Qi<-matrix(nrow=t, ncol=1)
  for (i in 1:t) {
```

```

      Qi[i,1]<-
matrix((z[i,]),nrow=1)%*%solve(sigmaz)%*%t(matrix((z[i,]),nr
ow = 1))

```

Lampiran 10. (lanjutan)

```

}

n<-nrow(data)
i=c(1:n)
  if(ucl>=max(Qi)){
    Pengamatan<-c(1:length(Qi))
    plot(Pengamatan,Qi,xlim = c(0,n),ylim =
c(0,(ucl+10)),pch=16,col= ifelse(Qi<ucl,"blue","red"))
lines(Pengamatan,Qi,type="l",xlim=0,n,ylim=0,n,col="blue",lt
y=1)
    abline(h=ucl,col="maroon",lty=5)
    legend("topleft", legend=c("Qi","Qi out-of-
control","h"),
          col=c("Blue","red","Maroon"),cex=0.7,lty =
c(0,0,5),pch = c(16,16,32))
  }
  if(ucl<max(Qi)){
    Pengamatan<-c(1:length(Qi))

plot(Pengamatan,Qi,xlim=c(0,n),ylim=c(0,max(Qi)+10),pch=16,
      col= ifelse(Qi<ucl,"blue","red"))

lines(Pengamatan,Qi,type="l",xlim=0,n,ylim=0,n,col="blue",lt
y=1)
    abline(h=ucl,col="maroon",lty=5)
    legend("topleft", legend=c("Qi","Qi out-of-
control","h"),

col=c("Blue","red","Maroon"),cex=0.7,lty=c(0,0,5),pch =
c(16,16,32))
  }
  print(Qi)
}

```

Lampiran 11. Uji Normal Multivariat

```

> library(MVN)
> a=read.csv("data mangan.csv",sep=";", header = FALSE)
> mvn(a,mvnTest = "mardia")
$multivariateNormality
      Test      Statistic      p value Result
1 Mardia Skewness 4.05225834604619 0.3989796480232 YES
2 Mardia Kurtosis 1.45761972765747 0.14494538890424 YES
3          MVN          <NA>          <NA> YES

```


Lampiran 12. Hasil output grafik kendali MEWMA

```
> a<-read.csv("data mangan.csv",header = FALSE,sep =";")
> destimasi<-a[1:30,]
> data<-a[31:60,]
> MEWMA(data,destimasi,0.1,18.841)
      [,1]
[1,]  2.536611
[2,]  4.270991
[3,]  5.204773
[4,]  2.186892
[5,]  2.164513
[6,]  1.030110
[7,]  1.426223
[8,]  4.402825
[9,]  3.540209
[10,] 2.363657
[11,] 3.445173
[12,] 3.421544
[13,] 5.106905
[14,] 8.834569
[15,] 6.197329
[16,] 7.075204
[17,] 2.913990
[18,] 3.797927
[19,] 5.320316
[20,] 10.369540
[21,] 13.322152
[22,] 14.767079
[23,] 15.321208
[24,] 17.884894
[25,] 13.832780
[26,] 12.693372
[27,] 13.784438
[28,] 16.765918
[29,] 20.763722
[30,] 15.820920

> MEWMA(data,destimasi,0.1,10.091)
      [,1]
[1,]  2.536611
[2,]  4.270991
[3,]  5.204773
[4,]  2.186892
[5,]  2.164513
[6,]  1.030110
[7,]  1.426223
[8,]  4.402825
[9,]  3.540209
[10,] 2.363657
[11,] 3.445173
[12,] 3.421544
[13,] 5.106905
[14,] 8.834569
```

Lampiran 12. (Lanjutan)

[15,]	6.197329
[16,]	7.075204
[17,]	2.913990
[18,]	3.797927
[19,]	5.320316
[20,]	10.369540
[21,]	13.322152
[22,]	14.767079
[23,]	15.321208
[24,]	17.884894
[25,]	13.832780
[26,]	12.693372
[27,]	13.784438
[28,]	16.765918
[29,]	20.763722
[30,]	15.820920

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Selly Acita, lahir pada tanggal 20 Agustus 1995 di Banyuwangi, Jawa Timur. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara dari Susilo Kasri dan Wiwik Herliningsih. Penulis telah menempuh pendidikan formal di TK Dharmawanita (1999-2001). SD Negeri 2 Tembokrejo (2001-2007). SMP Negeri 1 Srono (2007-2010). SMA Negeri 1 Giri (2010-2013). Pada tahun 2013 penulis melanjutkan studi jenjang Sarjana di Jurusan Matematika FMIPA-Universitas Jember, kemudian pada tahun 2017 semester genap penulis melanjutkan studi pada program Magister Statistika FSAD-ITS. Penulis menyadari masih banyak kesalahan dan kekurangan dalam laporan Tesis ini, bagi pembaca yang memiliki kritik, saran, dan ingin berdiskusi lebih lanjut tentang Tesis ini bisa menghubungi penulis melalui email sellyacita@gmail.com.