



**TUGAS AKHIR- SM141501**

**KENDALI OPTIMAL PADA MODEL  
PENYEBARAN PENYAKIT KOLERA DENGAN  
VARIASI TIGA VARIABEL KENDALI**

**TALITHA BRILLIANTY ATLANTA  
NRP 0611144000089**

**Dosen Pembimbing :  
Subchan, Ph.D**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2020**





**FINAL PROJECT- SM141501**

**OPTIMAL CONTROL ON CHOLERA DISEASE  
SPREADING MODEL WITH THREE VARIABLE  
CONTROL VARIATION**

**TALITHA BRILLIANTY ATLANTA  
NRP 0611144000089**

**Supervisor:  
Subchan, Ph.D**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty Of Science and Data Analytics  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2020**



**LEMBAR PENGESAHAN**

**KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT  
KOLERA DENGAN VARIASI TIGA VARIABEL KENDALI**

***OPTIMAL CONTROL ON CHOLERA DISEASE SPREADING  
MODEL WITH THREE VARIABLE CONTROL VARIATION***

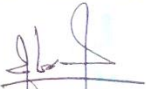
**TUGAS AKHIR**

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika  
Pada Bidang Studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya


Oleh:

**TALITHA BRILLIANTY ATLANTA**  
NRP. 0611144000089

Menyetujui,  
Dosen Pembimbing

  
**Subchan, Ph.D**  
NIP. 19710513 199702 1 001

Mengetahui,  
Kepala Departemen

  
**Subchan, Ph.D**  
NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, 31 Januari 2020



# KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT KOLERA DENGAN VARIASI TIGA VARIABEL KENDALI

**Nama** : Talitha Brillianty Atlanta  
**NRP** : 0611144000089  
**Departemen** : Matematika FSAD – ITS  
**Pembimbing** : Subchan, Ph.D

## ABSTRAK

Dalam Tugas Akhir ini dijelaskan tentang kendali optimal pada model penyebaran penyakit kolera dengan variasi tiga variabel kendali. Terdapat empat kendali yang digunakan dalam Tugas Akhir ini untuk meminimalkan penyebaran penyakit kolera yaitu pengendalian dalam bentuk perbaikan sanitasi, pengobatan karantina, peningkatan edukasi, dan klorinasi. Dari keempat kendali tersebut dibentuk variasi sistem dinamik dengan tiga kendali kemudian dibandingkan hasilnya manakah yang lebih efektif. Model epidemi yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah tipe SEIIQRB (*Susceptible, Educated, Mildly Infected, Heavily Infected, Quarantined, Recovered, Bacteria*) dengan enam subpopulasi manusia dan satu subpopulasi bakteri. Metode penyelesaian permasalahan kendali optimal yang digunakan adalah *Pontryagin Minimum Principle*. Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta untuk mengetahui hasil kendali optimal. Tujuan dari kendali optimal dalam masalah ini adalah untuk meminimalkan jumlah populasi manusia yang terinfeksi, populasi bakteri dan untuk meminimalkan biaya. Berdasarkan hasil simulasi numerik ditunjukkan bahwa kombinasi perbaikan sanitasi, peningkatan edukasi dan klorinasi adalah yang paling efektif.

**Kata kunci:** *Kolera, Kendali Optimal, Pontryagin Minimum Principle*





## **OPTIMAL CONTROL ON CHOLERA DISEASE SPREADING MODEL WITH THREE VARIABLE CONTROL VARIATION**

**Name** : *Talitha Brillianty Atlanta*  
**NRP** : *0611144000089*  
**Departement** : *Matematika FSAD – ITS*  
**Supervisor** : *Subchan, Ph.D*

### **ABSTRACT**

*This Final Project explained about the optimal control on the cholera disease spread model with variations of three control variables. There are four controls to minimize the spread of cholera, namely control in the form of improved sanitation, quarantine treatment, increased education, and chlorination. Three controls combinations are taken to find the most effective. The epidemic model used in this Final Project is SEIIQRB type (Susceptible, Educated, Mildly Infected, Heavily Infected, Quarantined, Recovered, Bacteria) with six human subpopulations and one bacterial subpopulation. The optimal control problem solving method used is the Pontryagin Minimum Principle. Next, a numerical simulation is performed using the Runge-Kutta method to find out the optimal control results. The aim of optimal control in this problem is to minimize the number of infected human populations, bacterial populations and to minimize costs. Based on the results of numerical simulations it is shown that the combination of improved sanitation, increased education and chlorination is the most effective.*

**Key words:** *Cholera, Optimal Control, Pontryagin Minimum Principle*



## **KATA PENGANTAR**

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'aalamin, segala puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat, taufiq dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul

### **KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT KOLERA DENGAN VARIASI TIGA VARIABEL KENDALI**

yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini, penulis telah banyak mendapat bantuan serta masukan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Subchan, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika FSAD ITS dan Bapak Budi Setiyono, S.Si., MT selaku Sekertaris Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesainya Tugas Akhir ini.
2. Ibu Dwi Ratna S., S.Si, MT selaku Kepala Program Studi Program Studi Sarjana Matematika FSAD ITS yang telah memberikan arahan akademik selama penulis kuliah Departemen Matematika FSAD ITS.
3. Bapak Subchan, Ph.D selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat selesai dengan baik.
4. Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si, Bapak Hariyanto, M.Si, dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran demi perbaikan Tugas Akhir.
5. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T selaku dosen wali yang telah membantu dan mendukung penulis selama menempuh pendidikan di ITS ini.

6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Departemen Matematika FSAD ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Keluarga penulis yang senantiasa memberikan semangat dan doa yang sungguh berarti.
8. Dwita Suci A. yang telah membagi ilmunya dalam penyusunan Tugas Akhir ini dan teman seperjuangan, Alvinda dan Indah, yang banyak membantu dan selalu menyemangati.
9. Sahabat Anti Cupu Cupu team, Sabrina, Febri, Dita, Jesika, dan teman-teman BIDS, Nia, Anin, dan Ema yang telah banyak membantu dan selalu memberikan semangat dan motivasi untuk segera lulus.
10. Khafi Anillah yang selalu memberikan motivasi.  
Apabila dalam Tugas Akhir ini ada kekurangan, penulis mohon kritik dan saran. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.  
Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Surabaya, 27 Januari 2020

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>TITLE PAGE</b> .....	ii
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xv
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan.....	4
1.5 Manfaat.....	4
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	7
2.1 Kolera.....	7
2.2 Penelitian Terdahulu.....	7
2.3 Model Sistem Dinamik penyebaran Penyakit Kolera.....	8
2.4 Kendali Optimal.....	10
2.5 Prinsip Minimum Pontryagin.....	11
2.6 Metode Runge Kutta.....	12
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b> .....	13
3.1 langkah Pengerjaan.....	13
3.2 Diagram Alur Pengerjaan.....	14
<b>BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN</b> .....	15
4.1 Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera degan Kendali Optimal.....	15
4.2 Permasalahan Kendali Optimal.....	21
4.2.1 Model Sistem Dinamik.....	21
4.2.2 Fungsi Tujuan.....	22
4.2.3 Kondisi Batas Sistem.....	22

4.3 Penyelesaian kendali Optimal.....	23
4.4 Penyelesaian Numerik dan Simulasi.....	44
4.4.1 Penyelesaian Numerik Persamaan <i>State</i> .....	45
4.4.2 Penyelesaian Numerik Persamaan <i>Costate</i> ..	49
4.5 Hasil Simulasi Numerik.....	56
4.5.1 laju Perubahan Jumlah Populasi.....	57
<b>BAB V KESIMPULAN</b> .....	65
5.1 Kesimpulan.....	65
5.2 Saran.....	65
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	67
<b>LAMPIRAN</b> .....	69
<b>BIODATA PENULIS</b> .....	87

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 2.1</b> Variabel dan Parameter Model Matematika Penyakit Kolera.....	9
<b>Tabel 4.1</b> Variabel dan Parameter pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera.....	20
<b>Tabel 4.2</b> Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera.....	56





## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 3.1</b>	Diagram Alur Penelitian.....	14
<b>Gambar 4.1</b>	Kompartmen Model pertama (Tanpa Klorinasi).....	16
<b>Gambar 4.2</b>	Kompartmen Model kedua (Tanpa Perbaikan Sanitasi).....	17
<b>Gambar 4.3</b>	Kompartmen Model ketiga (Tanpa Karantina).....	18
<b>Gambar 4.4</b>	Kompartmen Model keempat (Tanpa Edukasi).....	19
<b>Gambar 4.5</b>	Laju Perubahan Populasi Rentan.....	57
<b>Gambar 4.6</b>	Laju Perubahan Populasi Tereduksi.....	58
<b>Gambar 4.7</b>	Laju Perubahan Populasi Terinfeksi Ringan.....	59
<b>Gambar 4.8</b>	Laju Perubahan Populasi Terinfeksi Berat.....	59
<b>Gambar 4.9</b>	Laju Perubahan Populasi Karantina.....	60
<b>Gambar 4.10</b>	Laju Perubahan Populasi Sembuh.....	61
<b>Gambar 4.11</b>	Laju Perubahan Konsentrasi Bakteri.....	62



## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Lampiran</b>	<b>A.</b>	<i>Source code</i>	Simulasi Model	
		kedua.....		69



# BAB I

## PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat Tugas Akhir dari permasalahan yang dibahas.

### **1.1 Latar Belakang Masalah**

Kolera adalah diare akut yang disebabkan oleh infeksi usus akibat terkena bakteri bernama *Vibrio cholerae* [1]. Sarana penyebaran penyakit kolera adalah makanan yang tidak higienis atau minuman yang terkontaminasi bakteri kolera. Gejala utama infeksi kolera adalah banyak diare berair yang parah, muntah, kram kaki, dan jika tidak segera diobati menyebabkan dehidrasi yang parah, asidosis, kolaps sirkulasi, dan kematian. Kolera dengan cepat menyebar di daerah padat penduduk, sanitasi air yang buruk dan kurangnya pasokan air bersih. Oleh karena itu kolera secara luas diidentifikasi di negara-negara miskin dan berkembang [2].

Pada tahun 2016, terdapat laporan dari 38 negara dengan total 132.121 kasus kolera. Namun angka sesungguhnya dari seluruh kasus kolera diketahui lebih tinggi. Diperkirakan terdapat 1,3 juta hingga 4 juta kasus dan 21.000 hingga 143.000 kematian di seluruh dunia karena kolera setiap tahun. Secara keseluruhan dunia, Afrika menempati posisi tertinggi dengan 54% kasus, kemudian Hispaniola sebanyak 32%, dan Asia sebanyak 13% kasus kolera [3]. Kasus kolera di Indonesia tercatat pada rentang waktu 1993-1999 dan 2008-2011 di beberapa tempat seperti Papua, Nusa Tenggara Timur, Jawa Timur, Jawa Barat dan Banten. Pada tahun berikutnya tidak ditemukan catatan untuk penyakit kolera, namun ditemukan kejadian diare massal seperti di Depok pada tahun 2018. Ada kemungkinan bahwa kasus-kasus kolera dimasukkan dalam data diare yang bersifat umum [4]. Kolera yang mematikan dan menular berbeda dengan diare biasa. Untuk itu penanganan yang

tepat sangat diperlukan. Tindakan pencegahan dan pengendalian yang efektif bergantung pada penyediaan layanan kesehatan lingkungan yang memadai, seperti meningkatkan akses air bersih, penanganan pembuangan kotoran dan pengolahan air minum yang memadai, dan pengobatan untuk kolera [5].

Permasalahan penyebaran penyakit menular dalam bidang matematika dikaji dengan pendekatan pemodelan matematika. Penyebaran penyakit dimodelkan secara matematis dan dicari variabel kendali yang optimum untuk meminimalisir penyebaran penyakit tersebut. Dalam praktiknya, penelitian tentang penyakit kolera telah banyak dilakukan. Pada tahun 2016 penelitian dilakukan oleh Lemos-Paiao, dkk [6] mengenai *optimal control treatment* terhadap manusia yang terinfeksi penyakit kolera dengan memberikan pengobatan kepada individu yang terinfeksi. Pada tahun 2018 penelitian kembali dilakukan oleh Subchan, dkk [2] mengenai model penyebaran penyakit kolera dengan pemberian kendali berupa pengobatan dan intervensi melalui perbaikan sanitasi, pemberian edukasi dan karantina. Pada tahun 2019 penelitian kembali dilakukan oleh Siti Maulida Hasanah [7] mengenai kendali optimal pencegahan penyebaran penyakit kolera dengan *control treatment* dan klorinasi.

Merujuk pada penelitian-penelitian yang telah dijelaskan, dalam Tugas Akhir ini kendali optimal yang digunakan, yaitu perbaikan sanitasi, pengobatan karantina, peningkatan edukasi, dan klorinasi. Tujuan dari kendali optimal dalam Tugas Akhir ini adalah untuk meminimalkan jumlah populasi manusia yang terinfeksi, populasi bakteri, dan untuk meminimalkan biaya upaya pencegahan penyebaran penyakit kolera. Kemudian dari keempat kendali tersebut dibentuk variasi sistem dinamik berisi tiga kendali kemudian dibandingkan hasilnya manakah yang lebih efektif. Model dalam Tugas Akhir ini merekonstruksi model yang telah dikembangkan oleh Subchan, dkk [2]. Model pertama berisi

kendali optimal perbaikan sanitasi, pengobatan karantina, dan peningkatan edukasi. Model kedua berisi pengobatan karantina, peningkatan edukasi, dan klorinasi. Model ketiga berisi perbaikan sanitasi, peningkatan edukasi, dan klorinasi. Model keempat berisi perbaikan sanitasi, peningkatan edukasi, dan klorinasi.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, permasalahan yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk optimal pada model matematika penyebaran penyakit kolera dengan kendali perbaikan sanitasi, pengobatan karantina, peningkatan edukasi, dan klorinasi dengan variasi tiga kendali.
2. Bagaimana hasil perbandingan kendali optimal pada penyebaran penyakit kolera dengan variasi tiga kendali.

## **1.3 Batasan Masalah**

Berdasarkan rumusan masalah, maka ruang lingkup penelitian dibatasi sebagai berikut:

1. Model matematika yang digunakan dalam Tugas Akhir ini merupakan model yang telah direkonstruksi pada penelitian [2].
2. Upaya kendali optimal yang diterapkan antara lain perbaikan sanitasi, pengobatan karantina, peningkatan edukasi, dan klorinasi.
3. Setiap individu yang sembuh dapat kehilangan kekebalan terhadap penyakit kolera sehingga dapat menjadi rentan kembali.
4. Dalam model ini populasi yang terinfeksi tidak mempertimbangkan usia dan jenis kelamin.

#### **1.4 Tujuan**

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan yang akan dicapai adalah sebagai berikut:

1. Mendapat bentuk optimal pada model matematika penyebaran penyakit kolera dengan kendali perbaikan sanitasi, pengobatan karantina, peningkatan edukasi, dan klorinasi dengan variasi tiga kendali.
2. Mengetahui hasil perbandingan kendali optimal pada penyebaran penyakit kolera dengan variasi tiga kendali yang terbaik.

#### **1.5 Manfaat**

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan informasi tentang pengendalian penyebaran penyakit kolera dengan perbaikan sanitasi, pengobatan karantina, peningkatan edukasi, serta pemberian klorin pada air untuk membunuh bakteri. Sehingga dapat digunakan dalam pengambilan kebijakan untuk mengatasi penyebaran penyakit kolera.
2. Bagi akademis, penelitian ini dapat digunakan sebagai pembelajaran mengenai penerapan prinsip minimum ponyagin dalam memperoleh kendali optimal dari model dinamika penyebaran penyakit kolera.

#### **1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir**

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

##### **1. BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan penulisan, rumusan masalah, Batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.



## 2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan beberapa definisi dan teorema yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan serta untuk membantu memahami permasalahan yang akan dibahas.

## 3. BAB III METODOLOGI

Bab ini menjelaskan tahapan yang dilakukan dalam penyusunan penulisan.

## 4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan secara detil mengenai hasil penelitian.

## 5. BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan penulis untuk pengembangan penelitian selanjutnya.



## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan, serta untuk membantu memahami permasalahan yang akan dibahas.

#### **2.1 Kolera**

Kolera adalah diare akut yang disebabkan oleh infeksi usus akibat terkena bakteri bernama *Vibrio cholerae*. Infeksi biasanya ringan atau tanpa gejala, namun terkadang parah. Infeksi berat ditandai dengan diare yang sangat encer, muntah-muntah, dan kram kaki [1]. Gejala muncul sekitar 12 jam hingga 5 hari setelah mengonsumsi makanan atau minuman yang terkontaminasi. Kolera dapat menyerang anak-anak maupun orang dewasa dan berakibat fatal hingga kematian dalam waktu beberapa jam jika tidak segera ditangani [8].

Sumber kontaminasi utama adalah tinja orang yang telah terinfeksi. Penyakit ini dapat menyebar dengan cepat di tempat yang tidak mempunyai penanganan pembuangan kotoran (*sewage*) dan pengolahan air minum yang memadai. Bakteri kolera juga dapat hidup di lingkungan air payau dan perairan pesisir. Kerang-kerangan (*shellfish*) yang dimakan mentah juga dapat menjadi sumber kolera [1]. Dalam keadaan kondisi yang kurang menguntungkan bagi pertumbuhannya, bakteri kolera dapat menyesuaikan diri dengan lingkungannya dengan cara dorman dan menunggu suasana yang mendukung untuk berkembang kembali dan siap menyebabkan penyakit [4].

#### **2.2 Penelitian Terdahulu**

Beberapa hasil penelitian terkait kendali optimal penyebaran

penyakit kolera yang telah dilakukan adalah:

1. Lemos-Paiao dkk (2016) mengenai *optimal control treatment* terhadap manusia yang terinfeksi penyakit kolera dengan memberikan pengobatan kepada individu yang terinfeksi [6].
2. Subchan dkk (2018) mengenai model penyebaran penyakit kolera dengan pemberian kendali berupa pengobatan dan intervensi melalui perbaikan sanitasi, pemberian edukasi dan karantina [2].
3. Siti Maulida Hasanah (2019) mengenai kendali optimal pencegahan penyebaran penyakit kolera dengan *control treatment* dan klorinasi [7].

### 2.3 Model Sistem Dinamik Penyebaran Penyakit Kolera

Berdasarkan model yang telah dibentuk pada penelitian Subchan dkk, model sistem dinamik penyebaran penyakit kolera terbagi menjadi enam sub populasi manusia dan satu sub populasi bakteri [2]. Dalam model sistem dinamik ini akan diberikan empat kendali untuk untuk meminimalkan jumlah populasi manusia yang terinfeksi, populasi bakteri dan untuk meminimalkan biaya dalam upaya pencegahan penyebaran penyakit kolera. Berikut adalah model sistem dinamik penyebaran penyakit kolera dengan empat kendali, yaitu perbaikan sanitasi untuk mengurangi tingkat penyebaran bakteri ( $u_1$ ), karantina untuk orang dengan infeksi simtomatik parah ( $u_2$ ), peningkatan edukasi untuk populasi yang rentan ( $u_3$ ), dan pemberian klorin dalam air agar bakteri didalamnya mati ( $u_4$ ).

$$\dot{S}(t) = \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - u_3 \psi S - (1 - u_1) \beta \frac{B}{\kappa + B} S$$

$$\dot{E}(t) = u_3 \psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - u_1) \gamma E$$

$$\dot{I}_A(t) = (1 - u_1) p \beta \frac{B}{\kappa + B} S + (1 - u_1) p \gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_S(t) &= (1 - u_1)(1 - p)\beta \frac{B}{\kappa + B} S + (1 - u_1)(1 - p)\gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - \\ &\quad u_2 \delta I_S \\ \dot{Q}(t) &= u_2 \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \\ \dot{R}(t) &= \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - \nu R \\ \dot{B}(t) &= \eta I_A + \eta I_S - dB - u_4 B \end{aligned}$$

Dengan variabel dan parameter sebagai berikut:

**Tabel 2.1** Variabel dan Parameter Model Matematika Penyakit Kolera

Variabel	Arti	Keterangan
$S(t)$	<i>Susceptible</i>	Populasi rentan
$E(t)$	<i>Educated</i>	Populasi teredukasi
$I_A(t)$	<i>Mildly Infected</i>	Populasi terinfeksi dengan gejala ringan
$I_S(t)$	<i>Heavily Infected</i>	Populasi terinfeksi dengan gejala berat
$Q(t)$	<i>Quarantine</i>	Populasi dikarantina
$R(t)$	<i>Recovery</i>	Populasi sembuh
$B(t)$	<i>Bacteria</i>	Populasi bakteri
Parameter	Keterangan	
$\Lambda$	Penambahan pada populasi rentan karena kelahiran alami	
$\nu$	Rate hilangnya kekebalan individu pulih sehingga rentan kembali	
$\epsilon$	Rate populasi terdidik berhenti menjalankan langkah pencegahan	
$\mu$	Rate kematian alami	
$\psi$	Rate peningkatan edukasi individu rentan	
$\beta$	Rate konsumsi bakteri kolera	
$\gamma$	Rate populasi terdidik yang terkena kolera	
$k$	Setengah saturasi konstan dari populasi bakteri	
$p$	Proporsi individu terinfeksi dengan tanpa gejala	

Parameter	Keterangan
$\beta \frac{B}{k+B}$	Rate perpindahan populasi rentan kedalam populasi terinfeksi
$(1-p)$	Proporsi individu terinfeksi dengan gejala
$\alpha_1$	Rate kesembuhan orang yang terinfeksi tanpa gejala
$\alpha_2$	Rate kesembuhan orang yang terinfeksi dengan gejala
$\mu_s$	Rate kematian karena terinfeksi kolera dengan gejala
$\mu_Q$	Rate kematian karena kolera ketika dikarantina
$\delta$	Rate karantina individu
$\eta$	Rate pertumbuhan bakteri
$d$	Rate kematian bakteri

## 2.4 Kendali Optimal

Tujuan utama dari kendali optimal adalah untuk mencari kendali  $u(t)$  yang akan diproses dalam sistem dinamik dan dapat mengoptimalkan indeks performansi [9]. Adapun masalah formulasi kendali optimal terdiri dari:

1. Membentuk model matematika dari permasalahan.
  2. Menentukan fungsi objektif.
  3. Menentukan kendala dan kondisi batas yang harus di penuhi.
- Fungsi objektif dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.1)$$

dengan kendala

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.2)$$

dan kondisi batas  $x(t_0) = x_0$  dan  $x(t_f) = x_f$  masing-masing adalah waktu awal dan akhir.  $S, V$ , dan  $f$  adalah fungsi skalar. Serta kendali  $u^*(t)$  merupakan kendali optimal, jika disubstitusikan ke dalam sistem (2.2) akan memperoleh keadaan yang optimal  $u^*(t)$  dan pada saat yang sama juga dapat mengoptimalkan indeks performansi (2.1).

## 2.5 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin telah dikembangkan oleh L.S. Pontryagin dan rekan kerjanya pada tahun 1950 yang diaplikasikan untuk semua masalah kalkulus variasi. Metode ini digunakan untuk meminimumkan fungsi tujuan dimana kendali  $u(t)$  terbatas pada  $u(t) \in \mathcal{U}$ .

Prinsip ini menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan diminimumkan sepanjang  $\mathcal{U}$  yang merupakan himpunan kendali yang mungkin. Secara umum langkah-langkah penyelesaian kendali optimal dapat diuraikan sebagai berikut [9]:

1. Membentuk Fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda(t)f(x(t), u(t), t) \quad (2.3)$$

2. Meminimumkan  $H$  terhadap semua vektor kendali  $u(t)$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Dan diperoleh

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Gunakan hasil dari langkah (2) kedalam langkah (1) dan tentukan  $H^*$  yang optimal

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Selesaikan persamaan *state* dan *costate*

$$\dot{x}^*(t) = + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right)_*, \text{ persamaan } \textit{state} \quad (2.4)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)_*, \text{ persamaan } \textit{costate} \quad (2.5)$$

dengan kondisi awal  $x_0$  dan kondisi akhir

$$\left[ H^* \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f} \delta x_f = 0 \quad (2.6)$$

5. Untuk memperoleh kendali optimal, substitusikan solusi  $x^*(t)$ ,  $\lambda^*(t)$  dari langkah (4) ke dalam ekspresi optimal  $u^*$  kendali pada langkah (2).

## 2.6 Metode Runge-Kutta

Dalam analisis numerik, metode Runge-Kutta termasuk dalam metode iterasi implisit dan eksplisit, yang mencakup metode Euler, yang digunakan dalam diskritisasi temporal untuk solusi perkiraan persamaan diferensial biasa [4]. Metode ini ditemukan sekitar tahun 1900 oleh matematikawan Jerman Carl Runge dan Wilhelm Kutta.

Metode Runge-Kutta adalah alternative dari Deret Taylor. Metode ini menghasilkan derajat yang lebih tinggi sekaligus menghindari mencari turunan yang lebih tinggi. Metode Runge-Kutta yang umum digunakan untuk mengintegrasikan persamaan diferensial adalah metode Runge-Kutta orde keempat [8]. Rumus metode Runge Kutta orde 4 adalah sebagai berikut [10]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dimana:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n}$$

dengan  $h$  adalah panjang interval,  $t_0$  dan  $t_f$  adalah waktu awal dan akhir. Nilai  $k$  menunjukkan hubungan beruntun karena  $k_1$  muncul dalam persamaan untuk menghitung  $k_2$ , dan juga  $k_2$  muncul dalam persamaan untuk menghitung  $k_3$  dan seterusnya.



## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Bab ini menjelaskan mengenai langkah-langkah sistematis dan metode yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan yang dibahas.

#### **3.1 Langkah Pengerjaan**

Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

##### **1. Studi Literatur**

Kegiatan ini dilakukan dengan mencari materi penunjang dari buku, jurnal, paper, artikel dan lain sebagainya. Bahan-bahan yang dikaji meliputi kolera, model matematika penyebaran penyakit kolera, teori sistem kendali, Prinsip Minimum Pontryagin, dan metode Runge-Kutta.

##### **2. Mengonstruksi Model Matematika**

Pada tahap ini, dilakukan konstruksi model penyakit kolera dengan pemberian kendali optimal berupa pemberian klorinasi dan menentukan fungsi tujuan serta kondisi batas. Sehingga dalam Tugas Akhir ini total variabel kendali berjumlah empat antara lain perbaikan sanitasi, pengobatan karantina, peningkatan edukasi, dan klorinasi pada bakteri.

##### **3. Menyelesaikan Masalah Kendali Optimal**

Pada tahap ini, akan diselesaikan masalah kendali optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Membentuk fungsi Hamilton
2. Menentukan persamaan *state* dan *co-state*
3. Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi
4. Menentukan kondisi pengendali optimal
5. Simulasi

#### 4. Simulasi

Pada tahap ini, sistem persamaan disimulasikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta dengan software MATLAB untuk melihat perilaku sistem pada grafik yang dihasilkan oleh model penyebaran penyakit kolera sebelum dan setelah diberi kendali.

#### 5. Penarikan Kesimpulan dan Saran

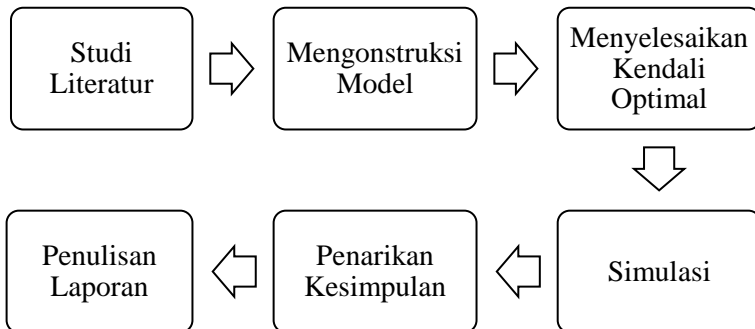
Pada tahap ini, akan ditarik kesimpulan dari penelitian yang telah dikerjakan. Serta member sebuah saran untuk penelitian ini dapat dikembangkan mejadi lebih baik lagi.

#### 6. Penulisan Laporan

Pada tahap terakhir ini, akan disusun sebuah laporan tentang hasil dari penelitian yang telah dikerjakan secara runtut dan teratur.

### 3.2 Diagram Alur Pengerjaan

Alur penelitian yang dilakukan dalam Tugas Akhir ini disajikan dalam Gambar berikut ini.



**Gambar 3.1** Diagram Alur Penelitian

## **BAB IV**

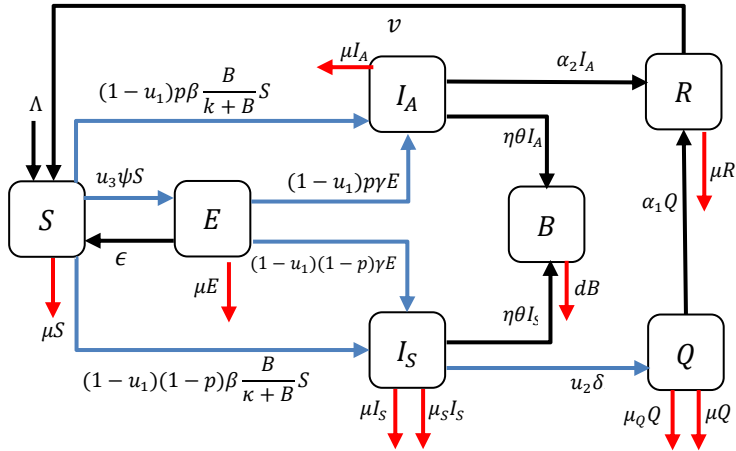
### **ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Bab ini membahas mengenai rekonstruksi model matematika penyebaran penyakit kolera dengan kendali optimal. Kendali optimal meliputi perbaikan sanitasi, pengobatan karantina untuk individu dengan infeksi gejala berat, peningkatan edukasi untuk individu rentan, dan pemberian klorin pada bakteri. Selanjutnya, dijelaskan tentang permasalahan kendali optimal berupa penentuan sistem dinamik, fungsi tujuan serta kondisi batas kemudian diselesaikan menggunakan *Pontryagin Minimum Principle* serta diakhiri dengan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta dan simulasi model menggunakan *software* Matlab.

#### **4.1 Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera dengan Kendali Optimal**

Model matematika yang digunakan pada penelitian ini mengkaji dari penelitian [2] dengan modifikasi berupa penambahan kendali klorinasi ( $u_4$ ) dan pembentukan variasi sistem dinamik dari keempat variabel. Model dibangun dengan populasi manusia dan populasi bakteri serta kendali optimal. Populasi manusia dibagi menjadi enam subpopulasi yaitu populasi rentan ( $S(t)$ ), populasi tereduksi ( $E(t)$ ), populasi terinfeksi dengan gejala ringan ( $I_A(t)$ ), populasi terinfeksi dengan gejala berat ( $I_S(t)$ ), populasi yang dikarantina ( $Q(t)$ ), dan populasi yang sembuh ( $R(t)$ ). Empat kendali optimal yang digunakan, yaitu perbaikan sanitasi untuk mengurangi tingkat penyebaran bakteri ( $u_1$ ), karantina untuk orang dengan infeksi gejala berat ( $u_2$ ), peningkatan edukasi untuk populasi yang rentan ( $u_3$ ), dan pemberian klorin dalam air agar bakteri didalamnya mati ( $u_4$ ). Interpretasi model matematika ke dalam diagram kompartemen

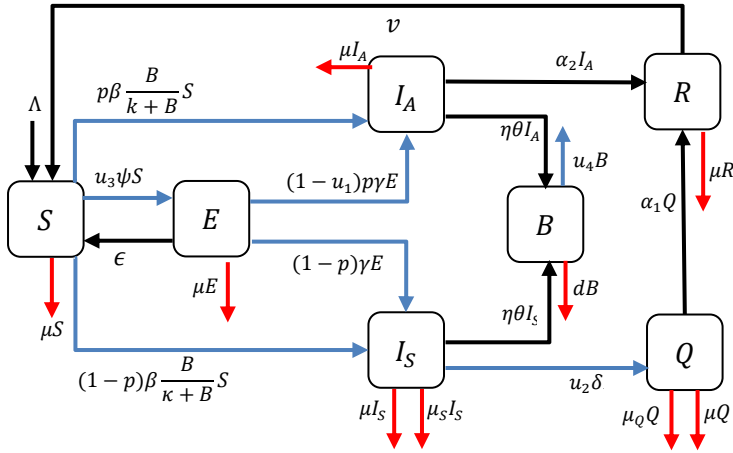
dapat dilihat pada Gambar 4.1 hingga Gambar 4.4. Tanda panah berwarna biru menunjukkan adanya upaya pemberian kendali optimal dan panah berwarna merah menyatakan berkurangnya subpopulasi karena adanya kematian. dengan



**Gambar 4.1** Diagram Kompartmen Model 1 (Tanpa Klorinasi)

Pada model pertama, sistem dinamik dibentuk menggunakan tiga kendali yaitu perbaikan sanitasi ( $u_1$ ), pengobatan karantina ( $u_2$ ), dan peningkatan edukasi ( $u_3$ ). Berdasarkan diagram diatas, model matematika penyebaran penyakit kolera model pertama disajikan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

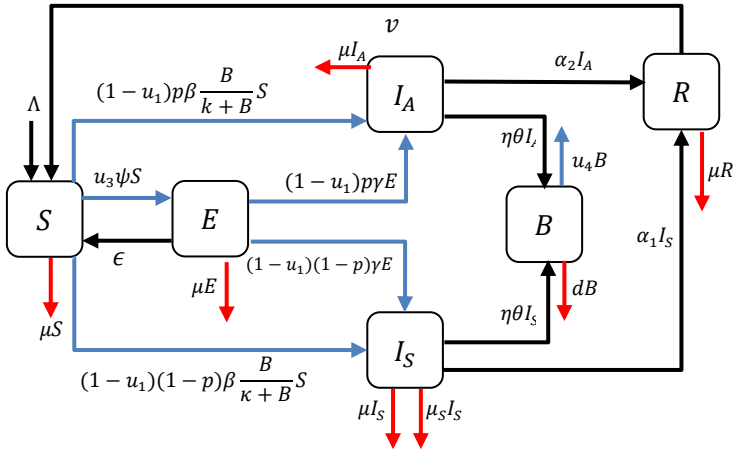
$$\begin{aligned}
 \dot{S}(t) &= \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - u_3\psi S - (1 - u_1)\beta \frac{B}{\kappa+B} S \\
 \dot{E}(t) &= u_3\psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - u_1)\gamma E \\
 \dot{I}_A(t) &= (1 - u_1)p\beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1)p\gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \\
 \dot{I}_S(t) &= (1 - u_1)(1 - p)\beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1)(1 - p)\gamma E \\
 &\quad - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2\delta I_S \\
 \dot{Q}(t) &= u_2\delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \\
 \dot{R}(t) &= \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - vR \\
 \dot{B}(t) &= \eta\theta I_A + \eta\theta I_S - dB
 \end{aligned} \tag{4.1}$$



**Gambar 4.2** Diagram Kompartemen Model 2 (Tanpa Perbaikan Sanitasi)

Model kedua dengan kendali berupa pengobatan karantina ( $u_2$ ), peningkatan edukasi ( $u_3$ ) dan klorinasi ( $u_4$ ) disajikan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

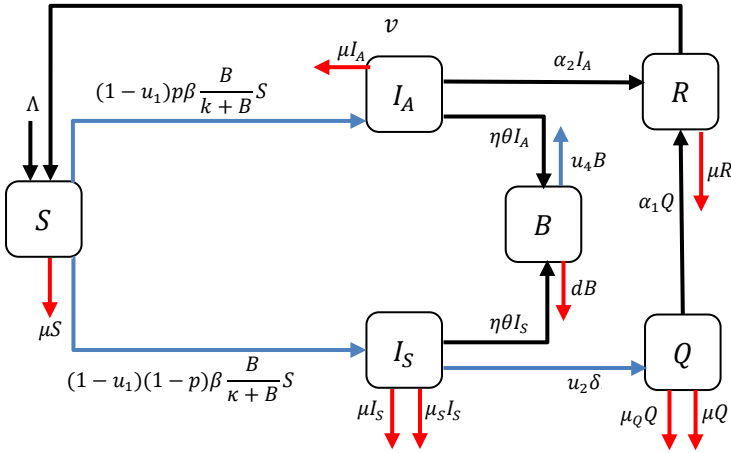
$$\begin{aligned}
 \dot{S}(t) &= \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - u_3 \psi S - \beta \frac{B}{\kappa+B} S \\
 \dot{E}(t) &= u_3 \psi S - \epsilon E - \mu E - \gamma E \\
 \dot{I}_A(t) &= p\beta \frac{B}{\kappa+B} S + p\gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \\
 \dot{I}_S(t) &= (1-p)\beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1-p)\gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2 \delta I_S \quad (4.2) \\
 \dot{Q}(t) &= u_2 \delta I_S - \mu_Q Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \\
 \dot{R}(t) &= \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - vR \\
 \dot{B}(t) &= \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - u_4 B
 \end{aligned}$$



**Gambar 4.3** Diagram Kompartmen Model 3 (Tanpa Karantina)

Model ketiga dengan kendali berupa perbaikan sanitasi ( $u_1$ ), peningkatan edukasi ( $u_3$ ), dan klorinasi ( $u_4$ ) disajikan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(t) &= \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - u_3 \psi S - (1 - u_1) \beta \frac{B}{k+B} S \\
 \dot{E}(t) &= u_3 \psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - u_1) \gamma E \\
 \dot{I}_A(t) &= (1 - u_1) p \beta \frac{B}{k+B} S + (1 - u_1) p \gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \\
 \dot{I}_S(t) &= (1 - u_1) (1 - p) \beta \frac{B}{k+B} S + (1 - u_1) (1 - p) \gamma E \\
 &\quad - \mu I_S - \mu_S I_S - \alpha_1 I_S \\
 \dot{R}(t) &= \alpha_1 I_S + \alpha_2 I_A - \mu R - vR \\
 \dot{B}(t) &= \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - u_4 B
 \end{aligned} \tag{4.3}$$



**Gambar 4.4** Diagram Kompartemen Model 4 (Tanpa Edukasi)

Model keempat dengan kendali berupa perbaikan sanitasi ( $u_1$ ), pengobatan karantina ( $u_2$ ), dan klorinasi ( $u_4$ ) disajikan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(t) &= \Lambda + vR - \mu S - (1 - u_1)\beta \frac{B}{\kappa + B} S \\
 \dot{I}_A(t) &= (1 - u_1)p\beta \frac{B}{\kappa + B} S - \mu I_A - \alpha_2 I_A \\
 \dot{I}_S(t) &= (1 - u_1)(1 - p)\beta \frac{B}{\kappa + B} S - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2 \delta I_S \\
 \dot{Q}(t) &= u_2 \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \\
 \dot{R}(t) &= \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - vR \\
 \dot{B}(t) &= \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - u_4 B
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Adapun notasi serta definisi dari variabel dan masing-masing parameter yang digunakan pada model matematika penyebaran penyakit kolera tertera pada Tabel 4.1.

**Tabel 4.1** Variabel dan Parameter pada Model Matematika  
Penyebaran Penyakit Kolera

<b>Variabel</b>	<b>Arti</b>	<b>Keterangan</b>
$S(t)$	<i>Susceptible</i>	Populasi rentan
$E(t)$	<i>Educated</i>	Populasi tereduksi
$I_A(t)$	<i>Mildly Infected</i>	Populasi terinfeksi dengan gejala ringan
$I_S(t)$	<i>Heavily Infected</i>	Populasi terinfeksi dengan gejala berat
$Q(t)$	<i>Quarantine</i>	Populasi dikarantina
$R(t)$	<i>Recovery</i>	Populasi sembuh
$B(t)$	<i>Bacteria</i>	Populasi bakteri
<b>Parameter</b>	<b>Keterangan</b>	
$\Lambda$	Penambahan pada populasi rentan karena kelahiran alami	
$\nu$	Rate hilangnya kekebalan individu pulih sehingga rentan kembali	
$\epsilon$	Rate populasi terdidik berhenti menjalankan langkah pencegahan	
$\mu$	Rate kematian alami	
$\psi$	Rate peningkatan edukasi individu rentan	
$\beta$	Rate konsumsi bakteri kolera	
$\gamma$	Rate populasi terdidik yang terkena kolera	
$k$	Setengah saturasi konstan dari populasi bakteri	
$\beta \frac{B}{k+B}$	Rate perpindahan populasi rentan kedalam populasi terinfeksi	
$p$	Proporsi individu terinfeksi dengan gejala ringan	
$(1-p)$	Proporsi individu terinfeksi dengan gejala berat	
$\alpha_1$	Rate kesembuhan orang yang terinfeksi dengan gejala ringan	
$\alpha_2$	Rate kesembuhan orang yang terinfeksi dengan gejala berat	
$\mu_s$	Rate kematian karena terinfeksi kolera dengan gejala berat	



Parameter	Keterangan
$\mu_Q$	Rate kematian karena kolera ketika dikarantina
$\eta$	Rate pertumbuhan bakteri
$\delta$	Rate karantina individu
$d$	Rate kematian bakteri
$\theta I$	Rate pembuangan oleh populasi terinfeksi

Karena  $S, E, I_A, I_S, Q$  dan  $R$  merupakan notasi yang menyatakan jumlah individu pada masing-masing subpopulasi, maka diasumsikan  $S, E > 0, I_A, I_S, Q, R \geq 0$ . Selain itu, untuk setiap parameter diasumsikan selalu bernilai positif.

## 4.2 Permasalahan Kendali Optimal

Permasalahan kendali optimal pada penelitian ini diselesaikan menggunakan empat variabel kendali dengan tiga variable pada masing-masing kombinasi. Tujuan dari upaya pemberian kendali optimal ini untuk meminimumkan jumlah populasi manusia terinfeksi dan populasi bakteri serta meminimumkan biaya yang dikeluarkan untuk perbaikan sanitasi, penggunaan klorin, pemberian edukasi dan karantina. Selain itu, dalam bab ini akan dijelaskan mengenai model matematika dari sistem yang dikendalikan, fungsi tujuan serta kondisi batas.

### 4.2.1 Model Sistem Dinamik

Diketahui berdasarkan model sistem dinamik pada penyebaran penyakit kolera dapat dinyatakan secara matematis melalui Persamaan (2.2) sebagai berikut,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

dengan variabel *state* sebagai berikut,

$$x(t) = (S(t), E(t), I_A(t), I_S(t), Q(t), R(t), B(t))^T$$

dengan keadaan (*state*) awal  $x(t_0) = x_0$ . Sehingga, model sistem dinamik pada penyebaran penyakit kolera dengan kendali optimal seperti pada persamaan (4.1) - (4.4).

#### 4.2.2 Fungsi Tujuan

Tujuan dalam permasalahan Tugas Akhir ini adalah untuk memperoleh kendali optimal dengan meminimumkan jumlah populasi manusia terinfeksi dan populasi bakteri serta meminimumkan biaya yang dikeluarkan untuk upaya pengendalian penyakit kolera. Secara matematis, tujuan kendali optimal dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi objektif (*performance index*) sebagai berikut

$$\min J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 u_1^2(t) + C_5 u_2^2(t) + C_6 u_3^2(t) + C_7 u_4^2(t)] dt \quad (4.5)$$

Dengan  $t_0$  adalah waktu awal dan  $t_f$  adalah waktu akhir yang telah ditetapkan, serta  $C_i$  adalah parameter bobot atau koefisien harga yang dikeluarkan pada setiap kendali selama periode hari, dimana  $C_i > 0$  untuk setiap  $i = 1,2,3,4,5,6,7$ .

#### 4.2.3 Kondisi Batas Sistem

Tipe permasalahan kendali optimal dari penelitian ini yaitu *fixed-final time* ( $t_f$ ) dengan kondisi  $0 < t < t_f$  dan *free-final state* ( $x(t_f)$ ) pada waktu awal ( $x(t_0)$ ) sudah ditetapkan dan *state* pada waktu akhir ( $x(t_f)$ ) tidak ditetapkan. Sehingga, setiap sistem yang ada menggunakan kondisi batas *state* pada kondisi awal sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S(t_0) &= S_0, & E(t_0) &= E_0, & I_A(t_0) &= I_{A_0}, & I_S(t_0) &= I_{S_0}, \\ Q(t_0) &= Q_0, & R(t_0) &= R_0, & B(t_0) &= B_0 \end{aligned}$$

Kondisi batas yang memenuhi pada tipe *fixed-final time* dan *free-final state* yaitu  $x(t_0) = x_0$ ,  $\lambda^*(t_f) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{*t_f}$ , dengan  $x_0 =$

$$\{S_0, E_0, I_{A_0}, I_{S_0}, Q_0, R_0, B_0\}.$$

*Fixed-final time* artinya waktu akhir penelitian ini *fixed* atau tidak ada variasi waktu sehingga  $\delta t_f = 0$  dan *free-final state* artinya *state* diwaktu akhir tidak ditentukan berarti terdapat variasi *state* diwaktu akhir sehingga  $\delta x_f \neq 0$ . Oleh sebab itu, persamaan (2.6) dapat didefinisikan menjadi

$$\left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f} \delta x_f = 0$$

Sehingga, pembuat nolnya adalah  $\left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f}$ .

Selanjutnya, sesuai dengan persamaan (2.1) fungsi tujuan pada persamaan (4.5) tidak mengandung persamaan Meyer. Sehingga, persamaan Meyer dianggap sama dengan nol dan diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda^*(t_f) &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{*t_f}, \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} 0 \right)_{*t_f}, \\ &= 0, \end{aligned}$$

dengan  $\lambda^*(t_f)$  merupakan kondisi transversalitas. Oleh karena itu, diperoleh *costate* pada waktu akhir  $\left( \lambda^*(t_f) \right)$  sama dengan nol. Jadi setiap sistem yang ada pada persamaa ini diinisialisasikan dengan kondisi batas *costate* pada waktu akhir sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lambda_S^*(t_f) = 0, & \quad \lambda_E^*(t_f) = 0, & \quad \lambda_{I_A}^*(t_f) = 0, & \quad \lambda_{I_S}^*(t_f) = 0, \\ \lambda_Q^*(t_f) = 0, & \quad \lambda_R^*(t_f) = 0, & \quad \lambda_B^*(t_f) = 0 \end{aligned}$$

### 4.3 Penyelesaian Kendali Optimal

Berdasarkan penjelasan pada subbab 4.2.1 – 4.2.3, telah diketahui model sistem dinamik pada penyebaran penyakit kolera dengan kendali optimal, fungsi tujuan serta kondisi batas. Selanjutnya, permasalahan kendali optimal tersebut dapat diselesaikan dengan beberapa langkah sebagai berikut,

### 1. Membentuk Fungsi Hamiltonian

Berdasarkan persamaan (2.3) permasalahan pada Tugas Akhir ini dapat disusun kedalam persamaan sebagai berikut

#### a. Fungsi Hamiltonian model pertama

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \left( C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 u_1^2(t) + \right. \\
 & C_5 u_2^2(t) + C_6 u_3^2(t) \left. \right) + \lambda_S \left( \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - u_3 \psi S - \right. \\
 & (1 - u_1) \beta \frac{B}{\kappa+B} S \left. \right) + \lambda_E (u_3 \psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - u_1) \gamma E) + \\
 & \lambda_{I_A} \left( (1 - u_1) p \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1) p \gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \right) + \\
 & \lambda_{I_S} \left( (1 - u_1) (1 - p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1) (1 - p) \gamma E - \mu I_S - \right. \\
 & \mu_S I_S - u_2 \delta I_S \left. \right) + \lambda_Q (u_2 \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q) + \\
 & \lambda_R (\alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - vR) + \lambda_B (\eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB) \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

#### b. Fungsi Hamiltonian model kedua

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \left( C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_5 u_2^2(t) + \right. \\
 & C_6 u_3^2(t) + C_7 u_4^2(t) \left. \right) + \lambda_S \left( \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - u_3^* \psi S - \right. \\
 & \beta \frac{B}{\kappa+B} S \left. \right) + \lambda_E (u_3^* \psi S - \epsilon E - \mu E - \gamma E) + \lambda_{I_A} \left( p \beta \frac{B}{\kappa+B} S + \right. \\
 & p \gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \left. \right) + \lambda_{I_S} \left( (1 - p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - p) \gamma E - \right. \\
 & \mu I_S - \mu_S I_S - u_2^* \delta I_S \left. \right) + \lambda_Q (u_2^* \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q) + \\
 & \lambda_R (\alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - vR) + \lambda_B (\eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - \\
 & u_4 B) \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

#### c. Fungsi Hamiltonian model ketiga

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \left( C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 u_1^2(t) + \right. \\
 & C_6 u_3^2(t) + C_7 u_4^2(t) \left. \right) + \lambda_S \left( \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - u_3 \psi S - \right. \\
 & (1 - u_1) \beta \frac{B}{\kappa+B} S \left. \right) + \lambda_E (u_3 \psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - u_1) \gamma E) + \\
 & \lambda_{I_A} \left( (1 - u_1) p \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1) p \gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \right) + \\
 & \lambda_{I_S} \left( (1 - u_1) (1 - p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1) (1 - p) \gamma E - \mu I_S - \right.
 \end{aligned}$$

$$\mu_S I_S - \alpha_1 I_S) + \lambda_R(\alpha_1 I_S + \alpha_2 I_A - \mu R - vR) + \lambda_B(\eta\theta I_A + \eta\theta I_S - dB - u_4 B) \quad (4.8)$$

d. Fungsi Hamiltonian model keempat

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \left( C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 u_1^2(t) + \right. \\ & \left. C_5 u_2^2(t) + C_7 u_4^2(t) \right) + \lambda_S \left( \Lambda + vR - \mu S - (1 - \right. \\ & \left. u_1) \beta \frac{B}{\kappa+B} S \right) + \lambda_{I_A} \left( (1 - u_1) p \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \mu I_A - \alpha_2 I_A \right) + \\ & \lambda_{I_S} \left( (1 - u_1)(1 - p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2 \delta I_S \right) + \\ & \lambda_Q \left( u_2 \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \right) + \lambda_R (\alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - \\ & vR) + \lambda_B (\eta\theta I_A + \eta\theta I_S - dB - u_4 B) \quad (4.9) \end{aligned}$$

2. Meminimumkan  $H$  terhadap  $u$

Persamaan kendali optimal dapat diperoleh dengan melakukan penurunan  $H$  terhadap masing-masing variabel kendali optimal yaitu perbaikan sanitasi ( $u_1$ ), pengobatan melalui karantina ( $u_2$ ), edukasi ( $u_3$ ), dan pemberian klorin ( $u_4$ ). Persamaan  $H$  diturunkan terhadap  $u$  yaitu sebagai berikut,

a. Persamaan kendali optimal model pertama

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_1} = & C_4 u_1 + \lambda_S \beta \frac{B}{\kappa+B} S + \lambda_E \gamma E - \lambda_{I_A} p \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \lambda_{I_A} p \gamma E - \\ & \lambda_{I_S} (1 - p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \lambda_{I_S} (1 - p) \gamma E = 0 \\ \mathbf{u}_1^* = & \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{\kappa+B} S (\lambda_{I_A} \mathbf{p} + \lambda_{I_S} (\mathbf{1} - \mathbf{p}) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} \mathbf{p} + \right. \\ & \left. \lambda_{I_S} (\mathbf{1} - \mathbf{p}) - \lambda_E) \right) \quad (4.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_2} = & C_5 u_2^2(t) - \lambda_{I_S} \delta I_S + \lambda_Q \delta I_S = 0 \\ \mathbf{u}_2^* = & \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \quad (4.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_3} = & C_6 u_3^2(t) - \lambda_S \psi S + \lambda_E \psi S = 0 \\ \mathbf{u}_3^* = & \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \quad (4.12) \end{aligned}$$

Persamaan kendali optimal (4.10) – (4.12) merupakan suatu proporsi, maka dapat didefinisikan  $0.001 \leq u_1 \leq 0.4$ ,  $0 \leq u_2 \leq 1$ ,  $0 \leq u_3 \leq 1$ , diperoleh nilai  $u_1^*$ ,  $u_2^*$ , dan  $u_3^*$ . Diasumsikan persamaan (4.10)  $u_1^* = z$ , maka,

$$u_1^* = \begin{cases} z & , \text{jika } 0.001 < z < 0.4 \\ 0.001 & , \text{jika } z \leq 0.001 \\ 4 & , \text{jika } z \geq 0.4 \end{cases}$$

$$u_2^* = \begin{cases} \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} & , \text{jika } 0 < \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} < 1 \\ 0 & , \text{jika } \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \leq 0 \\ 1 & , \text{jika } \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \geq 1 \end{cases}$$

$$u_3^* = \begin{cases} \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} & , \text{jika } 0 < \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} < 1 \\ 0 & , \text{jika } \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \leq 0 \\ 1 & , \text{jika } \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \geq 1 \end{cases}$$

Sehingga, nilai kendali yang optimal adalah

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \right\}, 1 \right\} \quad (4.13)$$

$$u_3^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\}$$

b. Persamaan kendali optimal model kedua

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = C_5 u_2^2(t) - \lambda_{I_S} \delta I_S + \lambda_Q \delta I_S = 0$$

$$u_2^* = \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = C_6 u_3^2(t) - \lambda_S \psi S + \lambda_E \psi S = 0$$

$$u_3^* = \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_4} &= C_7 u_4^2(t) - \lambda_B B = 0 \\ \mathbf{u}_4^* &= \frac{\lambda_B B}{C_7}\end{aligned}\quad (4.16)$$

Persamaan kendali optimal (4.14) – (4.16) merupakan suatu proporsi, maka dapat didefinisikan,  $0 \leq u_2 \leq 1$ ,  $0 \leq u_3 \leq 1$ ,  $0 \leq u_4 \leq 1$ , diperoleh nilai  $u_2^*$ ,  $u_3^*$ , dan  $u_4^*$ .

$$\begin{aligned}u_2^* &= \begin{cases} \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} & , \text{jika } 0 < \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} < 1 \\ 0 & , \text{jika } \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \leq 0 \\ 1 & , \text{jika } \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \geq 1 \end{cases} \\ u_3^* &= \begin{cases} \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} & , \text{jika } 0 < \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} < 1 \\ 0 & , \text{jika } \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \leq 0 \\ 1 & , \text{jika } \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \geq 1 \end{cases} \\ u_4^* &= \begin{cases} \frac{\lambda_B B}{C_7} & , \text{jika } 0 < \frac{\lambda_B B}{C_7} < 1 \\ 0 & , \text{jika } \frac{\lambda_B B}{C_7} \leq 0 \\ 1 & , \text{jika } \frac{\lambda_B B}{C_7} \geq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Sehingga, nilai kendali yang optimal adalah

$$\begin{aligned}u_2^* &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \right\}, 1 \right\} \\ u_3^* &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \\ u_4^* &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_B B}{C_7} \right\}, 1 \right\}\end{aligned}\quad (4.17)$$

c. Persamaan kendali optimal model ketiga

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_1} &= C_4 u_1 + \lambda_S \beta \frac{B}{\kappa+B} S + \lambda_E \gamma E - \lambda_{I_A} p \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \lambda_{I_A} p \gamma E - \\ &\lambda_{I_S} (1-p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \lambda_{I_S} (1-p) \gamma E = 0\end{aligned}$$

$$u_1^* = \frac{1}{c_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{IA}p + \lambda_{IS}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{IA}p + \lambda_{IS}(1-p) - \lambda_E) \right) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = C_6 u_3^2(t) - \lambda_S \psi S + \lambda_E \psi S = 0$$

$$u_3^* = \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_4} = C_7 u_4^2(t) - \lambda_B B = 0$$

$$u_4^* = \frac{\lambda_B B}{C_7} \quad (4.20)$$

Persamaan kendali optimal (4.18) – (4.20) merupakan suatu proporsi, maka dapat didefinisikan  $0.001 \leq u_1 \leq 0.4$ ,  $0 \leq u_3 \leq 1$ ,  $0 \leq u_4 \leq 1$ , diperoleh nilai  $u_1^*$ ,  $u_3^*$ , dan  $u_4^*$ . Diasumsikan persamaan (4.18)  $u_1^* = z$ , maka,

$$u_1^* = \begin{cases} y & , \text{jika } 0.001 < z < 0.4 \\ 0.001 & , \text{jika } z \leq 0.001 \\ 4 & , \text{jika } z \geq 0.4 \end{cases}$$

$$u_3^* = \begin{cases} \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} & , \text{jika } 0 < \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} < 1 \\ 0 & , \text{jika } \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \leq 0 \\ 1 & , \text{jika } \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \geq 1 \end{cases}$$

$$u_4^* = \begin{cases} \frac{\lambda_B B}{C_7} & , \text{jika } 0 < \frac{\lambda_B B}{C_7} < 1 \\ 0 & , \text{jika } \frac{\lambda_B B}{C_7} \leq 0 \\ 1 & , \text{jika } \frac{\lambda_B B}{C_7} \geq 1 \end{cases}$$

Sehingga, nilai kendali yang optimal adalah

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{c_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{IA}p + \lambda_{IS}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{IA}p + \lambda_{IS}(1-p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\}$$

$$u_3^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \quad (4.21)$$

$$u_4^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_B B}{C_7} \right\}, 1 \right\}$$



d. Persamaan kendali optimal kombinasi 4, tanpa kendali peningkatan edukasi

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = C_4 u_1 + \lambda_S \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \lambda_{I_A} p \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \lambda_{I_S} (1-p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S = 0$$

$$\mathbf{u}_1^* = \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{\kappa+B} S (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_S) \right) \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = C_5 u_2^2(t) - \lambda_{I_S} \delta I_S + \lambda_Q \delta I_S = 0$$

$$\mathbf{u}_2^* = \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_4} = C_7 u_4^2(t) - \lambda_B B = 0$$

$$\mathbf{u}_4^* = \frac{\lambda_B B}{C_7} \quad (4.24)$$

Persamaan kendali optimal (4.22) – (4.24) merupakan suatu proporsi, maka dapat didefinisikan  $0.001 \leq u_1 \leq 0.4$ ,  $0 \leq u_2 \leq 1$ ,  $0 \leq u_4 \leq 1$ , diperoleh nilai  $u_1^*$ ,  $u_2^*$ , dan  $u_4^*$ . Diasumsikan persamaan (4.22)  $u_1^* = y$ , maka,

$$u_1^* = \begin{cases} y & , \text{jika } 0.001 < y < 0.4 \\ 0.001 & , \text{jika } y \leq 0.001 \\ 4 & , \text{jika } y \geq 0.4 \end{cases}$$

$$u_2^* = \begin{cases} \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} & , \text{jika } 0 < \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} < 1 \\ 0 & , \text{jika } \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \leq 0 \\ 1 & , \text{jika } \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \geq 1 \end{cases}$$

$$u_4^* = \begin{cases} \frac{\lambda_B B}{C_7} & , \text{jika } 0 < \frac{\lambda_B B}{C_7} < 1 \\ 0 & , \text{jika } \frac{\lambda_B B}{C_7} \leq 0 \\ 1 & , \text{jika } \frac{\lambda_B B}{C_7} \geq 1 \end{cases}$$

Sehingga, nilai kendali yang optimal adalah

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{\kappa+B} S (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_S) \right) \right\}, 0.4 \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right\}, 1 \right\} \quad (4.25)$$

$$u_4^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_{BB}}{c_7} \right\}, 1 \right\}$$

### 3. Menentukan $H^*$ yang optimal

Persamaan kendali optimal yang diperoleh pada persamaan (4.13), (4.17), (4.21), dan (4.25) untuk menentukan  $H^*$  yang optimal disubstitusikan kedalam persamaan (4.6 – 4.8) sehingga diperoleh

#### a. Fungsi Hamiltonian optimal model pertama

$$\begin{aligned} H^* = & \frac{1}{2} \left( C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 u_1^{*2}(t) + \right. \\ & C_5 u_2^{*2}(t) + C_6 u_3^{*2}(t) \left. \right) + \lambda_S \left( \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - \right. \\ & u_3^* \psi S - (1 - u_1^*) \beta \frac{B}{\kappa+B} S \left. \right) + \lambda_E \left( u_3^* \psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - \right. \\ & u_1^*) \gamma E \left. \right) + \lambda_{I_A} \left( (1 - u_1^*) p \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1^*) p \gamma E - \mu I_A - \right. \\ & \alpha_2 I_A \left. \right) + \lambda_{I_S} \left( (1 - u_1^*) (1 - p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1^*) (1 - \right. \\ & p) \gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2^* \delta I_S \left. \right) + \lambda_Q \left( u_2^* \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \right. \\ & \alpha_1 Q \left. \right) + \lambda_R \left( \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - vR \right) + \lambda_B \left( \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - \right. \\ & \left. dB \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

#### b. Fungsi Hamiltonian optimal model kedua

$$\begin{aligned} H^* = & \frac{1}{2} \left( C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_5 u_2^{*2}(t) + \right. \\ & C_6 u_3^{*2}(t) + C_7 u_4^2(t) \left. \right) + \lambda_S \left( \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - \right. \\ & u_3^* \psi S - \beta \frac{B}{\kappa+B} S \left. \right) + \lambda_E \left( u_3^* \psi S - \epsilon E - \mu E - \gamma E \right) + \\ & \lambda_{I_A} \left( p \beta \frac{B}{\kappa+B} S + p \gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \right) + \lambda_{I_S} \left( (1 - \right. \\ & p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - p) \gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2^* \delta I_S \left. \right) + \\ & \lambda_Q \left( u_2^* \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \right) + \lambda_R \left( \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - \right. \\ & \left. vR \right) + \lambda_B \left( \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - u_4 B \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

c. Fungsi Hamiltonian optimal model ketiga

$$\begin{aligned}
 H^* = & \frac{1}{2} \left( C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 u_1^{*2}(t) + \right. \\
 & \left. C_6 u_3^{*2}(t) + C_7 u_4^{*2}(t) \right) + \lambda_S \left( \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - \right. \\
 & \left. u_3^* \psi S - (1 - u_1^*) \beta \frac{B}{\kappa+B} S \right) + \lambda_E \left( u_3^* \psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - \right. \\
 & \left. u_1^*) \gamma E \right) + \lambda_{I_A} \left( (1 - u_1^*) p \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1^*) p \gamma E - \mu I_A - \right. \\
 & \left. \alpha_2 I_A \right) + \lambda_{I_S} \left( (1 - u_1^*) (1 - p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1^*) (1 - \right. \\
 & \left. p) \gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - \alpha_1 I_S \right) + \lambda_R \left( \alpha_1 I_S + \alpha_2 I_A - \mu R - \right. \\
 & \left. vR \right) + \lambda_B \left( \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - u_4^* B \right) \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

d. Fungsi Hamiltonian optimal model keempat

$$\begin{aligned}
 H^* = & \frac{1}{2} \left( C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 u_1^{*2}(t) + \right. \\
 & \left. C_5 u_2^{*2}(t) + C_7 u_4^{*2}(t) \right) + \lambda_S \left( \Lambda + vR - \mu S - (1 - \right. \\
 & \left. u_1^*) \beta \frac{B}{\kappa+B} S \right) + \lambda_{I_A} \left( (1 - u_1^*) p \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \mu I_A - \alpha_2 I_A \right) + \\
 & \lambda_{I_S} \left( (1 - u_1^*) (1 - p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2^* \delta I_S \right) + \\
 & \lambda_Q \left( u_2^* \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \right) + \lambda_R \left( \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - \right. \\
 & \left. vR \right) + \lambda_B \left( \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - u_4^* B \right) \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

#### 4. Membentuk persamaan *state*

Persamaan *state* dalam kondisi optimal diperoleh dengan cara menurunkan Fungsi Hamiltonian yang sudah optimal  $H^*$  terhadap  $\lambda$  dapat dinyatakan secara matematis melalui persamaan (2.4) yaitu  $x^*(t) = + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right)_*$ , sehingga diperoleh persamaan *state* untuk setiap subpopulasi sebagai berikut,

a. Persamaan *state* model pertama

$$S^* = \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - u_3^* \psi S - (1 - u_1^*) \beta \frac{B}{\kappa+B} S$$



$$\begin{aligned} & \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1-p) - \\ & \lambda_E))\}, 0.4\}})(1-p)\gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - \\ & \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta I_S \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}^* &= u_2^* \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \\ &= \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q \\ & \quad - \alpha_1 Q \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\dot{R}^* = \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - vR \quad (4.35)$$

$$\dot{B}^* = \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB \quad (4.36)$$

b. Persamaan *state model* kedua

$$\begin{aligned} \dot{S}^* &= \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - u_3^* \psi S - \beta \frac{B}{\kappa+B} S \\ &= \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{c_6} \right\}, 1 \right\} \right) \psi S - \\ & \quad \beta \frac{B}{\kappa+B} S \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}^* &= u_3^* \psi S - \epsilon E - \mu E - \gamma E \\ &= \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{c_6} \right\}, 1 \right\} \right) \psi S - \epsilon E - \mu E - \gamma E \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\dot{I}_A^* = p\beta \frac{B}{\kappa+B} S + p\gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_S^* &= (1-p)\beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1-p)\gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2^* \delta I_S \\ &= (1-p)\beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1-p)\gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - \\ & \quad \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta I_S \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}^* &= u_2^* \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \\ &= \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q \\ & \quad - \alpha_1 Q \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\dot{R}^* = \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - \nu R \quad (4.42)$$

$$\dot{B}^* = \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB \quad (4.43)$$

c. Persamaan *state model* ketiga

$$\begin{aligned} \dot{S}^* &= \Lambda + \nu R + \epsilon E - \mu S - u_3^* \psi S - (1 - u_1^*) \beta \frac{B}{\kappa+B} S \\ &= \Lambda + \nu R + \epsilon E - \mu S - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \right) \psi S - \\ &\quad \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{\kappa+B} S (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \beta \frac{B}{\kappa+B} S \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}^* &= u_3^* \psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - u_1^*) \gamma E \\ &= \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \right) \psi S - \epsilon E - \mu E - \left( 1 - \right. \\ &\quad \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{\kappa+B} S (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \gamma E \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_A^* &= (1 - u_1^*) p \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1^*) p \gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \\ &= \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{\kappa+B} S (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) p \beta \frac{B}{\kappa+B} S + \left( 1 - \right. \\ &\quad \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{\kappa+B} S (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) p \gamma E - \\ &\quad \mu I_A - \alpha_2 I_A \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_S^* &= (1 - u_1^*) (1 - p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S + (1 - u_1^*) (1 - p) \gamma E - \mu I_S - \\ &\quad \mu_S I_S - u_2^* \delta I_S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{c_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) (1 - \\
&\quad p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S + \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{c_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) (1-p) \gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - \alpha_1 I_S \quad (4.47)
\end{aligned}$$

$$\dot{R}^* = \alpha_1 I_S + \alpha_2 I_A - \mu R - vR \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}
\dot{B}^* &= \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - u_4^* B \\
&= \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_{BB}}{c_7} \right\}, 1 \right\} \right) B \quad (4.49)
\end{aligned}$$

d. Persamaan *state* model keempat

$$\begin{aligned}
\dot{S}^* &= \Lambda + vR - \mu S - (1 - u_1^*) \beta \frac{B}{\kappa+B} S \\
&= \Lambda + vR - \mu S - \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{c_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_S) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \beta \frac{B}{\kappa+B} S \quad (4.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{I}_A^* &= (1 - u_1^*) p \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \mu I_A - \alpha_2 I_A \\
&= \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{c_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_S) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) p \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \mu I_A - \alpha_2 I_A \quad (4.51)
\end{aligned}$$

$$\dot{I}_S^* = (1 - u_1^*) (1-p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2^* \delta I_S$$

$$\begin{aligned}
&= \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{c_4} \left( \beta \frac{B}{\kappa+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_S) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) (1-p) \beta \frac{B}{\kappa+B} S - \mu_{I_S} - \mu_S I_S - \right. \\
&\quad \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta_{I_S}(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta_{I_S} \right) \delta_{I_S} \quad (4.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Q}^* &= u_2^* \delta_{I_S} - \mu_Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \\
&= \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta_{I_S}(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta_{I_S} - \mu_Q - \mu_Q \\
&\quad - \alpha_1 Q \quad (4.53)
\end{aligned}$$

$$\dot{R}^* = \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - \nu R \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}
\dot{B}^* &= \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - u_4^* B \\
&= \eta \theta I_A + \eta \theta I_S - dB - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_{B^E}}{c_7} \right\}, 1 \right\} \right) B \quad (4.55)
\end{aligned}$$

## 5. Membentuk persamaan *costate*

Persamaan *costate* dalam kondisi optimal diperoleh dengan cara menurunkan negatif fungsi Hamiltonian yang sudah optimal terhadap  $\lambda$  dapat dinyatakan secara matematis melalui persamaan (2.5) yaitu  $\lambda^*(t) = - \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)_*$

### a. Persamaan *costate* model pertama

$$\begin{aligned}
\lambda_S^* &= - \left( -\mu \lambda_S - u_3^* \psi \lambda_S - (1 - u_1^*) \beta \frac{B}{\kappa+B} \lambda_S + u_3^* \psi \lambda_E + (1 - \right. \\
&\quad \left. u_1^*) p \beta \frac{B}{\kappa+B} \lambda_{I_A} + (1 - u_1^*) (1-p) \beta \frac{B}{\kappa+B} \lambda_{I_S} \right) \\
&= \mu \lambda_S + u_3^* \psi \lambda_S + (1 - u_1^*) \beta \frac{B}{\kappa+B} \lambda_S - u_3^* \psi \lambda_E - (1 - \\
&\quad u_1^*) p \beta \frac{B}{\kappa+B} \lambda_{I_A} - (1 - u_1^*) (1-p) \beta \frac{B}{\kappa+B} \lambda_{I_S} \\
&= \mu \lambda_S + \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{c_6} \right\}, 1 \right\} \right) \psi \lambda_S + \left( 1 - \right. \\
&\quad \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{c_4} \left( \beta \frac{B}{\kappa+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_S) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \beta \frac{B}{\kappa+B} \lambda_S - \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \right) \psi \lambda_E - \left( 1 - \right. \\
& \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_S) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) p \beta \frac{B}{\kappa+B} \lambda_{I_A} - \left( 1 - \right. \\
& \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_S) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) (1-p) \beta \frac{B}{\kappa+B} \lambda_{I_S}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_E^* &= -(\epsilon \lambda_S - \epsilon \lambda_E - \mu \lambda_E - (1 - u_1^*) \gamma \lambda_E + (1 - u_1^*) p \gamma \lambda_{I_A} + \\
& \quad (1 - u_1^*) (1-p) \gamma \lambda_{I_S}) \\
&= -\epsilon \lambda_S + \epsilon \lambda_E + \mu \lambda_E + (1 - u_1^*) \gamma \lambda_E - (1 - u_1^*) p \gamma \lambda_{I_A} - \\
& \quad (1 - u_1^*) (1-p) \gamma \lambda_{I_S} \\
&= -\epsilon \lambda_S + \epsilon \lambda_E + \mu \lambda_E + \left( 1 - \right. \\
& \quad \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \gamma \lambda_E - \\
& \quad \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. p) - \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) p \gamma \lambda_{I_A} - \left( 1 - \right. \\
& \quad \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1-p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) (1 - \\
& \quad p) \gamma \lambda_{I_S}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{I_A}^* &= -(C_2 I_A + -\mu \lambda_{I_A} - \alpha_2 \lambda_{I_A} + \alpha_2 \lambda_R + \eta \theta \lambda_B) \\
&= -C_2 I_A + \mu \lambda_{I_A} + \alpha_2 \lambda_{I_A} - \alpha_2 \lambda_R - \eta \theta \lambda_B
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{I_S}^* &= -(C_1 I_S - \mu \lambda_{I_S} - \mu_S \lambda_{I_S} - u_2^* \delta \lambda_{I_S} + u_2^* \delta \lambda_Q + \eta \theta \lambda_B) \\
&= -C_1 I_S + \mu \lambda_{I_S} + \mu_S \lambda_{I_S} + u_2^* \delta \lambda_{I_S} - u_2^* \delta \lambda_Q - \eta \theta \lambda_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -C_1 I_S + \mu \lambda_{I_S} + \mu_S \lambda_{I_S} + \\
&\quad \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \right\}, 1 \right\} \delta \lambda_{I_S} - \\
&\quad \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \right\}, 1 \right\} \delta \lambda_Q - \eta \theta \lambda_B \quad (4.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_Q^* &= -(-\mu \lambda_Q - \mu_Q \lambda_Q - \alpha_1 \lambda_Q + \alpha_1 \lambda_R) \\
&= \mu \lambda_Q + \mu_Q \lambda_Q + \alpha_1 \lambda_Q - \alpha_1 \lambda_R \quad (4.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_R^* &= -(v \lambda_S - \mu \lambda_R - v \lambda_R) \\
&= -v \lambda_S + \mu \lambda_R + v \lambda_R \quad (4.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_B^* &= -\left( C_3 B - (1 - u_1^*) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S + (1 - u_1^*) p \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} + \right. \\
&\quad \left. (1 - u_1^*) (1 - p) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} - d \lambda_B \right) \\
&= -C_3 B + (1 - u_1^*) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S - (1 - u_1^*) p \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} - \\
&\quad (1 - u_1^*) (1 - p) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} + d \lambda_B \\
&= -C_3 B + \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \lambda_E \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S - \left( 1 - \right. \\
&\quad \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \lambda_E \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) p \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} - \left( 1 - \right. \\
&\quad \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_E \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \left( 1 - \right. \\
&\quad \left. p \right) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} + d \lambda_B \quad (4.62)
\end{aligned}$$

b. Persamaan *costate* model kedua

$$\begin{aligned}
\lambda_S^* &= -\left(-\mu\lambda_S - u_3^*\psi\lambda_S - \beta\frac{B}{\kappa+B}\lambda_S + u_3^*\psi\lambda_E + p\beta\frac{B}{\kappa+B}\lambda_{I_A} + \right. \\
&\quad \left. (1-p)\beta\frac{B}{\kappa+B}\lambda_{I_S}\right) \\
&= \mu\lambda_S + u_3^*\psi\lambda_S + \beta\frac{B}{\kappa+B}\lambda_S - u_3^*\psi\lambda_E - p\beta\frac{B}{\kappa+B}\lambda_{I_A} - (1-p)\beta\frac{B}{\kappa+B}\lambda_{I_S} \\
&= \mu\lambda_S + \left(\min\left\{\max\left\{0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6}\right\}, 1\right\}\right)\psi\lambda_S + \beta\frac{B}{\kappa+B}\lambda_S - \\
&\quad \left(\min\left\{\max\left\{0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6}\right\}, 1\right\}\right)\psi\lambda_E - p\beta\frac{B}{\kappa+B}\lambda_{I_A} + (1-p)\beta\frac{B}{\kappa+B}\lambda_{I_S}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_E^* &= -(\epsilon\lambda_S - \epsilon\lambda_E - \mu\lambda_E - \gamma\lambda_E + p\gamma\lambda_{I_A} + (1-p)\gamma\lambda_{I_S}) \\
&= -\epsilon\lambda_S + \epsilon\lambda_E + \mu\lambda_E + \gamma\lambda_E - p\gamma\lambda_{I_A} - (1-p)\gamma\lambda_{I_S}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{I_A}^* &= -(C_2I_A + -\mu\lambda_{I_A} - \alpha_2\lambda_{I_A} + \alpha_2\lambda_R + \eta\theta\lambda_B) \\
&= -C_2I_A + \mu\lambda_{I_A} + \alpha_2\lambda_{I_A} - \lambda_R\alpha_2 - \eta\theta\lambda_B
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{I_S}^* &= -(C_1I_S - \mu\lambda_{I_S} - \mu_S\lambda_{I_S} - u_2^*\delta\lambda_{I_S} + u_2^*\delta\lambda_Q + \eta\theta\lambda_B) \\
&= -C_1I_S + \mu\lambda_{I_S} + \mu_S\lambda_{I_S} + u_2^*\delta\lambda_{I_S} - u_2^*\delta\lambda_Q - \eta\theta\lambda_B \\
&= -C_1I_S + \mu\lambda_{I_S} + \mu_S\lambda_{I_S} + \\
&\quad \left(\min\left\{\max\left\{0, \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5}\right\}, 1\right\}\right)\delta\lambda_{I_S} - \\
&\quad \left(\min\left\{\max\left\{0, \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5}\right\}, 1\right\}\right)\delta\lambda_Q - \eta\theta\lambda_B
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_Q^* &= -(-\mu\lambda_Q - \mu_Q\lambda_Q - \alpha_1\lambda_Q + \alpha_1\lambda_R) \\
&= \mu\lambda_Q + \mu_Q\lambda_Q + \alpha_1\lambda_Q - \alpha_1\lambda_R
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_R^* &= -(v\lambda_S - \mu\lambda_R - v\lambda_R) \\
&= -v\lambda_S + \mu\lambda_R + v\lambda_R
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_B^* &= -\left(C_3 B - \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S + p\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} + (1 - \right. \\
&\quad \left. p)\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} - d\lambda_B - u_4^* \lambda_B\right) \\
&= -C_3 B + \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S - p\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} - (1 - \\
&\quad p)\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} + d\lambda_B + u_4^* \lambda_B \\
&= -C_3 B + \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S - p\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} - (1 - \\
&\quad p)\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} + d\lambda_B + \\
&\quad \left(\min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_B B}{C_7} \right\}, 1 \right\} \right) \lambda_B \tag{4.69}
\end{aligned}$$

c. Persamaan *costate* model ketiga

$$\begin{aligned}
\lambda_S^* &= -\left(-\mu \lambda_S - u_3^* \psi \lambda_S - (1 - u_1^*) \beta \frac{B}{k+B} \lambda_S + u_3^* \psi \lambda_E + (1 - \right. \\
&\quad \left. u_1^*) p \beta \frac{B}{k+B} \lambda_{I_A} + (1 - u_1^*) (1 - p) \beta \frac{B}{k+B} \lambda_{I_S}\right) \\
&= \mu \lambda_S + u_3^* \psi \lambda_S + (1 - u_1^*) \beta \frac{B}{k+B} \lambda_S - u_3^* \psi \lambda_E - (1 - \\
&\quad u_1^*) p \beta \frac{B}{k+B} \lambda_{I_A} - (1 - u_1^*) (1 - p) \beta \frac{B}{k+B} \lambda_{I_S} \\
&= \mu \lambda_S + \left(\min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \right) \psi \lambda_S + \left(1 - \right. \\
&\quad \left. \left(\min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p)) - \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_E) \right\}, 0.4 \right\} \right) \beta \frac{B}{k+B} \lambda_S - \\
&\quad \left(\min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \right) \psi \lambda_E - \left(1 - \right. \\
&\quad \left. \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p)) - \lambda_S \right) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_E) \right\}, 0.4 \right\} \right) p \beta \frac{B}{k+B} \lambda_{I_A} - \left(1 - \right. \\
&\quad \left. \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p)) - \lambda_S \right) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_E) \right\}, 0.4 \right\} \right) (1 - p) \beta \frac{B}{k+B} \lambda_{I_S} \\
&\tag{4.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_E^* &= -(\epsilon \lambda_S - \epsilon \lambda_E - \mu \lambda_E - (1 - u_1^*) \gamma \lambda_E + (1 - u_1^*) p \gamma \lambda_{I_A} + \\
&\quad (1 - u_1^*) (1 - p) \gamma \lambda_{I_S})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\epsilon\lambda_S + \epsilon\lambda_E + \mu\lambda_E + (1 - u_1^*)\gamma\lambda_E - (1 - u_1^*)p\gamma\lambda_{I_A} - \\
&\quad (1 - u_1^*)(1 - p)\gamma\lambda_{I_S} \\
&= -\epsilon\lambda_S + \epsilon\lambda_E + \mu\lambda_E + \left(1 - \right. \\
&\quad \left. \left(\min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_E) \right\}, 0.4 \right\} \right) \gamma\lambda_E - \\
&\quad \left(1 - \left(\min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. p) - \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \lambda_E) \right\}, 0.4 \right\} \right) p\gamma\lambda_{I_A} - \left(1 - \right. \\
&\quad \left. \left(\min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_E) \right\}, 0.4 \right\} \right) \left(1 - \right. \\
&\quad \left. p \right) \gamma\lambda_{I_S} \tag{4.71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{I_A}^* &= -(C_2I_A - \mu\lambda_{I_A} - \alpha_2\lambda_{I_A} + \alpha_2\lambda_R + \eta\theta\lambda_B) \\
&= -C_2I_A + \mu\lambda_{I_A} + \alpha_2\lambda_{I_A} - \alpha_2\lambda_R - \eta\theta\lambda_B \tag{4.72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{I_S}^* &= -(C_1I_S - \mu\lambda_{I_S} - \mu_S\lambda_{I_S} - \alpha_1\lambda_{I_S} + \alpha_1\lambda_R + \eta\theta\lambda_B) \\
&= -C_1I_S + \mu\lambda_{I_S} + \mu_S\lambda_{I_S} + \alpha_1\lambda_{I_S} - \alpha_1\lambda_R - \eta\theta\lambda_B \tag{4.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_R^* &= -(v\lambda_S - \mu\lambda_R - v\lambda_R) \\
&= -v\lambda_S + \mu\lambda_R + v\lambda_R \tag{4.74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_B^* &= -\left(C_3B - (1 - u_1^*)\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S + (1 - u_1^*)p\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} + \right. \\
&\quad \left. (1 - u_1^*)(1 - p)\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} - dB\lambda_B - u_4^* \right) \\
&= -C_3B + (1 - u_1^*)\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S - (1 - u_1^*)p\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} - \\
&\quad (1 - u_1^*)(1 - p)\beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} + d\lambda_B + u_4^* \\
&= -C_3B + \left(1 - \left(\min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A}p + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \lambda_E) \right\}, 0.4 \right\} \right) \gamma\lambda_E - \left(1 - \left(\min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A}p + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_E) \right\}, 0.4 \right\} \right) p\gamma\lambda_{I_A} - \left(1 - \left(\min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A}p + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_E) \right\}, 0.4 \right\} \right) \left(1 - p \right) \gamma\lambda_{I_S} \tag{4.75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_E))\}, 0.4\}}) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S - \left( 1 - \right. \\
& \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{IA}p + \lambda_{IS}(1-p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{IA}p + \lambda_{IS}(1-p) - \\
& \lambda_E))\}, 0.4\}}) \right) p \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{IA} - \left( 1 - \right. \\
& \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{IA}p + \lambda_{IS}(1-p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{IA}p + \lambda_{IS}(1-p) - \lambda_E))\}, 0.4\}}) \right) (1 - \\
& p) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{IS} + d\lambda_B + \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_{BB}}{C_7} \right\}, 1 \right\} \lambda_B \quad (4.75)
\end{aligned}$$

d. Persamaan *costate* model keempat

$$\begin{aligned}
\lambda_S^* &= - \left( -\mu\lambda_S - (1 - u_1^*)\beta \frac{B}{k+B} \lambda_S + (1 - u_1^*)p\beta \frac{B}{k+B} \lambda_{IA} + (1 - \right. \\
& \left. u_1^*)(1 - p)\beta \frac{B}{k+B} S\lambda_{IS} \right) \\
&= \mu\lambda_S + (1 - u_1^*)\beta \frac{B}{k+B} \lambda_S - (1 - u_1^*)p\beta \frac{B}{k+B} \lambda_{IA} - (1 - \\
& u_1^*)(1 - p)\beta \frac{B}{k+B} S\lambda_{IS} \\
&= \mu\lambda_S + \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{IA}p + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \lambda_{IS}(1-p) - \lambda_S) \right\}, 0.4\}}) \right) \beta \frac{B}{k+B} \lambda_S - \left( 1 - \right. \\
& \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{IA}p + \lambda_{IS}(1-p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \lambda_S) \right\}, 0.4\}}) \right) p\beta \frac{B}{k+B} \lambda_{IA} - (1 - \\
& \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{IA}p + \lambda_{IS}(1-p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \lambda_S) \right\}, 0.4\}}) \right) (1 - p)\beta \frac{B}{k+B} S\lambda_{IS} \quad (4.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{IA}^* &= -(C_2I_A - \mu\lambda_{IA} - \alpha_2\lambda_{IA} + \alpha_2\lambda_R + \eta\theta\lambda_B) \\
&= -C_2I_A + \mu\lambda_{IA} + \alpha_2\lambda_{IA} - \alpha_2\lambda_R - \eta\theta\lambda_B \quad (4.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{IS}^* &= -(C_1I_S - \mu\lambda_{IS} - \mu_S\lambda_{IS} - u_2^*\delta\lambda_{IS} + u_2^*\delta\lambda_Q + \eta\theta\lambda_B) \\
&= -C_1I_S + \mu\lambda_{IS} + \mu_S\lambda_{IS} + u_2^*\delta\lambda_{IS} - u_2^*\delta\lambda_Q - \eta\theta\lambda_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -C_1 I_S + \mu \lambda_{I_S} + \mu_S \lambda_{I_S} + \\
&\quad \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta_{I_S}(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta \lambda_{I_S} - \\
&\quad \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta_{I_S}(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta \lambda_Q - \eta \theta \lambda_B \quad (4.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_Q^* &= -(-\mu \lambda_Q - \mu_Q \lambda_Q - \alpha_1 \lambda_Q + \alpha_1 Q \lambda_R) \\
&= \mu \lambda_Q + \mu_Q \lambda_Q + \alpha_1 \lambda_Q - \alpha_1 \lambda_R \quad (4.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_R^* &= -(v \lambda_S - \mu \lambda_R - v \lambda_R) \\
&= -v \lambda_S + \mu \lambda_R + v \lambda_R \quad (4.80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_B^* &= -\left( C_3 B - (1 - u_1^*) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S + (1 - u_1^*) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} + \right. \\
&\quad \left. (1 - u_1^*) (1 - p) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} - d \lambda_B - u_4^* \lambda_B \right) \\
&= -C_3 B + (1 - u_1^*) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S - (1 - u_1^*) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} - \\
&\quad (1 - u_1^*) (1 - p) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} + d \lambda_B + u_4^* \lambda_B \\
&= -C_3 B + \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_S \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_S - \left( 1 - \right. \\
&\quad \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \lambda_S \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_A} - \left( 1 - \right. \\
&\quad \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S} (1 - p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \lambda_S \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \beta \frac{Sk}{(k+B)^2} \lambda_{I_S} + d \lambda_B + \\
&\quad \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_B B}{C_7} \right\}, 1 \right\} \right) \lambda_B \quad (4.81)
\end{aligned}$$

Langkah berikutnya, sistem persamaan diferensial pada persamaan diatas diselesaikan secara numerik menggunakan nilai awal yang telah didefinisikan sebelumnya.

#### 4.4 Penyelesaian Numerik dan Simulasi

Penyelesaian masalah pada Tugas Akhir ini diselesaikan secara numerik menggunakan metode *Runge-Kutta Orde 4*. Pada subbab ini dijelaskan mengenai penyelesaian persamaan *state* menggunakan metode *Forward Sweep Runge-Kutta Orde 4* sedangkan untuk menyelesaikan persamaan *costate* menggunakan metode *Backward Sweep Runge-Kutta Orde 4*.

Berdasarkan persamaan *state* pada persamaan (4.30) – (4.55) dan persamaan *costate* pada persamaan (4.56) – (4.81) serta kondisi stasioner pada persamaan (4.13), (4.17), (4.21), dan (4.25), selanjutnya akan ditentukan solusi numerik. Variable  $S, E, I_A, I_S, Q, R, B, \lambda_S, \lambda_E, \lambda_{I_A}, \lambda_{I_S}, \lambda_Q, \lambda_R, \lambda_B, u_1, u_2, u_3, u_4$  dinyatakan dalam  $S(i), E(i), I_A(i), I_S(i), Q(i), R(i), B(i), \lambda_S(i), \lambda_E(i), \lambda_{I_A}(i), \lambda_{I_S}(i), \lambda_Q(i), \lambda_R(i), \lambda_B(i), u_1(i), u_2(i), u_3(i), u_4(i)$  dengan  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ .

Penyelesaian metode *Forward-Backward Sweep Runge Kutta Orde 4* adalah sebagai berikut.

**Langkah 1.** Menentukan dugaan awal untuk nilai  $u_1, u_2, u_3$ , dan  $u_4$  sama dengan nol.

**Langkah 2.** Menggunakan nilai awal variabel *state* dan dugaan nilai  $u_1, u_2, u_3$ , dan  $u_4$  untuk menyelesaikan *state* ( $x$ ). Variabel *state* ( $S, E, I_A, I_S, Q, R, B$ ) diselesaikan menggunakan langkah maju dengan nilai awal yang sudah ditentukan diawal  $S(t_0) = S_0, E(t_0) = E_0, I_A(t_0) = I_{A0}, I_S(t_0) = I_{S0}, Q(t_0) = Q_0, R(t_0) = R_0, B(t_0) = B_0$ . Sehingga diperoleh nilai *state* yang baru yaitu  $S(i + 1), E(i + 1), I_A(i + 1), I_S(i + 1), Q(i + 1), R(i + 1), B(i + 1)$ .

**Langkah 3.** Menggunakan nilai akhir *costate*, nilai dugaan awal  $u_1, u_2, u_3$ , dan  $u_4$  serta nilai variabel *state* baru pada langkah 2 untuk menyelesaikan *costate* ( $\lambda$ ). Variabel *costate* diselesaikan menggunakan langkah mundur dengan nilai akhir  $\lambda_S(t_f) =$



$$\lambda_E(t_f) = \lambda_{I_A}(t_f) = \lambda_{I_S}(t_f) = \lambda_Q(t_f) = \lambda_R(t_f) = \lambda_B(t_f) = 0.$$

Jadi dapat dihitung nilai  $\lambda_S(j-1)$ ,  $\lambda_E(j-1)$ ,  $\lambda_{I_A}(j-1)$ ,  $\lambda_{I_S}(j-1)$ ,  $\lambda_Q(j-1)$ ,  $\lambda_R(j-1)$ ,  $\lambda_B(j-1)$  dengan nilai  $j = N + 2 - i$  dan  $N$  adalah banyaknya langkah.

**Langkah 4.** Perbarui nilai kendali  $u_1, u_2, u_3$ , dan  $u_4$  menggunakan nilai *state* dan *costate* yang baru.

**Langkah 5.** Selanjutnya cek konvergensi. Jika nilai variabel pada iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya sangat kecil maka nilai tersebut dapat dijadikan solusi. Jika tidak demikian maka kembali ke langkah 2.

#### 4.4.1 Penyelesaian Numerik Persamaan *State*

Persamaan *state* pada (4.30) – (4.55) diselesaikan menggunakan metode *Forward Sweep Runge-Kutta Orde 4*, untuk memperoleh nilai *state* dapat dilihat algoritmanya pada subbab 4.4. berikut adalah proses perhitungsn untuk memperoleh nilai *state*.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{6}(k_{1a1} + 2k_{2a1} + 2k_{3a1} + k_{4a1}) \\ E_{n+1} &= E_n + \frac{1}{6}(k_{1a2} + 2k_{2a2} + 2k_{3a2} + k_{4a2}) \\ I_{A_{n+1}} &= I_{A_n} + \frac{1}{6}(k_{1a3} + 2k_{2a3} + 2k_{3a3} + k_{4a3}) \\ I_{S_{n+1}} &= I_{S_n} + \frac{1}{6}(k_{1a3} + 2k_{2a3} + 2k_{3a3} + k_{4a4}) \\ Q_{n+1} &= Q_n + \frac{1}{6}(k_{1a5} + 2k_{2a5} + 2k_{3a5} + k_{4a5}) \\ R_{n+1} &= R_n + \frac{1}{6}(k_{1a6} + 2k_{2a6} + 2k_{3a6} + k_{4a6}) \\ B_{n+1} &= B_n + \frac{1}{6}(k_{1a7} + 2k_{2a7} + 2k_{3a7} + k_{4a7}) \end{aligned} \quad (4.82)$$

$a = 1, 2, 3, 4$

Keterangan:

$a$  : kasus

$k_{1a1}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $S$

$k_{1a2}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $E$

$k_{1a3}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $I_A$

$k_{1a4}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $I_S$

$k_{1a5}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $Q$

- $k_{1a6}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $R$   
 $k_{1a7}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $B$   
 $k_{2a1}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $S$   
 $k_{2a2}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $E$   
 $k_{2a3}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $I_A$   
 $k_{2a4}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $I_S$   
 $k_{2a5}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $Q$   
 $k_{2a6}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $R$   
 $k_{2a7}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $B$   
 $k_{3a1}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $S$   
 $k_{3a2}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $E$   
 $k_{3a3}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $I_A$   
 $k_{3a4}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $I_S$   
 $k_{3a5}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $Q$   
 $k_{3a6}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $R$   
 $k_{3a7}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $B$   
 $k_{4a1}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $S$   
 $k_{4a2}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $E$   
 $k_{4a3}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $I_A$   
 $k_{4a4}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $I_S$   
 $k_{4a5}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $Q$   
 $k_{4a6}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $R$   
 $k_{4a7}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $B$

Untuk memperoleh penyelesaian pada persamaan (4.82) dilakukan beberapa langkah untuk mendapatkan nilai  $k_{1a} - k_{4a}$ . Berikut adalah model kedua dan untuk penyelesaian kasus yang lain dapat melakukan langkah yang sama. Langkah pertama adalah menentukan nilai  $k_1$ .

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, S_n, E_n, I_{A_n}, I_{S_n}, Q_n, R_n, B_n) \\
 k_{121} &= \Lambda + vR_n + \epsilon E_n - \mu S_n - u_3 \psi S_n - \beta \frac{B_n}{k+B_n} S_n \\
 k_{122} &= u_3 \psi S_n - \epsilon E_n - \mu E_n - \gamma E_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{123} &= p\beta \frac{B_n}{k+B_n} S_n + p\gamma E_n - \mu I_{A_n} - \alpha_2 I_{A_n} \\
k_{124} &= (1-p)\beta \frac{B_n}{k+B_n} S_n + (1-p)\gamma E_n - \mu I_{S_n} - \mu_S I_{S_n} - u_2 \delta I_{S_n} \\
k_{125} &= u_2 \delta I_{S_n} - \mu Q_n - \mu_Q Q_n - \alpha_1 Q_n \\
k_{126} &= \alpha_1 Q_n + \alpha_2 I_{A_n} - \mu R_n - v R_n \\
k_{127} &= \eta \theta I_{A_n} + \eta \theta I_{S_n} - d B_n - u_4 B_n
\end{aligned}$$

Langkah berikutnya menentukan nilai  $k_2$  dengan mengganti setiap *state* ( $x$ ) menjadi  $(x + \frac{1}{2}hk_1)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{111}, E_n + \frac{1}{2}hk_{112}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{113}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{114}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{115}, R_n + \frac{1}{2}hk_{116}, B_n + \frac{1}{2}hk_{117}\right) \\
k_{221} &= \Lambda + v\left(R_n + \frac{1}{2}hk_{126}\right) + \epsilon\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{122}\right) - \mu\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{121}\right) - \\
&\quad \left(\frac{u_{3n}+u_{3n+1}}{2}\right)\psi\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{121}\right) - \beta \frac{(B_n+\frac{1}{2}hk_{127})}{k+(B_n+\frac{1}{2}hk_{127})}\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{121}\right) \\
k_{222} &= \left(\frac{u_{3n}+u_{3n+1}}{2}\right)\psi\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{121}\right) - \epsilon\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{122}\right) - \mu\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{122}\right) - \gamma\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{122}\right) \\
k_{223} &= p\beta \frac{(B_n+\frac{1}{2}hk_{127})}{k+(B_n+\frac{1}{2}hk_{127})}\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{121}\right) + p\gamma\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{122}\right) - \\
&\quad \mu\left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{123}\right) - \alpha_2\left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{123}\right) \\
k_{224} &= (1-p)\beta \frac{(B_n+\frac{1}{2}hk_{127})}{k+(B_n+\frac{1}{2}hk_{127})}\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{121}\right) + (1-p)\gamma\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{122}\right) - \\
&\quad \mu\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{124}\right) - \mu_S\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{124}\right) - \\
&\quad \left(\frac{u_{2n}+u_{2n+1}}{2}\right)\delta\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{124}\right) \\
k_{225} &= \left(\frac{u_{2n}+u_{2n+1}}{2}\right)\delta\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{124}\right) - \mu\left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{125}\right) - \mu_Q\left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{125}\right) - \alpha_1\left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{125}\right) \\
k_{226} &= \alpha_1\left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{125}\right) + \alpha_2\left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{123}\right) - \mu\left(R_n + \frac{1}{2}hk_{126}\right) - \\
&\quad v\left(R_n + \frac{1}{2}hk_{126}\right) \\
k_{227} &= \eta\theta\left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{123}\right) + \eta\theta\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{124}\right) - d\left(B_n + \frac{1}{2}hk_{127}\right) - \\
&\quad \left(\frac{u_{4n}+u_{4n+1}}{2}\right)\left(B_n + \frac{1}{2}hk_{127}\right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya menentukan nilai  $k_3$  dengan mengganti setiap *state* ( $x$ ) menjadi  $(x + \frac{1}{2}hk_2)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{211}, E_n + \frac{1}{2}hk_{212}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{213}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{214}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{215}, R_n + \frac{1}{2}hk_{216}, B_n + \frac{1}{2}hk_{217}\right) \\
 k_{321} &= \Lambda + v\left(R_n + \frac{1}{2}hk_{226}\right) + \epsilon\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{222}\right) - \mu\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{221}\right) - \\
 &\quad \left(\frac{u_{3n}+u_{3n+1}}{2}\right)\psi\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{221}\right) - \beta\frac{(B_n+\frac{1}{2}hk_{127})}{k+(\frac{B_n+\frac{1}{2}hk_{127}}{2})}\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{221}\right) \\
 k_{322} &= \left(\frac{u_{3n}+u_{3n+1}}{2}\right)\psi\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{221}\right) - \epsilon\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{222}\right) - \mu\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{222}\right) - (1-u_1)\gamma\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{222}\right) \\
 k_{323} &= p\beta\frac{(B_n+\frac{1}{2}hk_{227})}{k+(\frac{B_n+\frac{1}{2}hk_{227}}{2})}\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{221}\right) + p\gamma\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{222}\right) - \\
 &\quad \mu\left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{223}\right) - \alpha_2\left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{223}\right) \\
 k_{324} &= (1-p)\beta\frac{(B_n+\frac{1}{2}hk_{227})}{k+(\frac{B_n+\frac{1}{2}hk_{227}}{2})}\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{221}\right) + (1-p)\gamma\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{222}\right) - \\
 &\quad \mu\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{224}\right) - \mu_S\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{224}\right) - \\
 &\quad \left(\frac{u_{2n}+u_{2n+1}}{2}\right)\delta\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{224}\right) \\
 k_{325} &= \left(\frac{u_{2n}+u_{2n+1}}{2}\right)\delta\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{224}\right) - \mu\left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{225}\right) - \mu_Q\left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{225}\right) - \alpha_1\left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{225}\right) \\
 k_{326} &= \alpha_1\left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{225}\right) + \alpha_2\left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{223}\right) - \mu\left(R_n + \frac{1}{2}hk_{226}\right) - \\
 &\quad v\left(R_n + \frac{1}{2}hk_{226}\right) \\
 k_{327} &= \eta\theta\left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{223}\right) + \eta\theta\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{224}\right) - d\left(B_n + \frac{1}{2}hk_{227}\right) - \\
 &\quad \left(\frac{u_{4n}+u_{4n+1}}{2}\right)\left(B_n + \frac{1}{2}hk_{227}\right)
 \end{aligned}$$

Langkah terakhir menentukan nilai  $k_4$  dengan mengganti setiap *state* ( $x$ ) menjadi  $(x + hk_3)$  sebagai berikut

$$k_4 = f\left(t_n + h, S_n + hk_{311}, E_n + hk_{312}, I_{A_n} + hk_{313}, I_{S_n} + hk_{314}, Q_n + hk_{315}, R_n + hk_{316}, B_n + hk_{317}\right)$$

$$\begin{aligned}
k_{421} &= \Lambda + v(R_n + hk_{326}) + \epsilon(E_n + hk_{322}) - \mu(S_n + hk_{321}) - \\
&\quad (u_{3_{n+1}})\psi(S_n + hk_{321}) - \beta \frac{(B_n + hk_{117})}{k + (B_n + hk_{117})} (S_n + hk_{321}) \\
k_{422} &= (u_{3_{n+1}})\psi(S_n + hk_{321}) - \epsilon(E_n + hk_{322}) - \mu(E_n + hk_{322}) - \\
&\quad (1 - u_1)\gamma(E_n + hk_{322}) \\
k_{423} &= p\beta \frac{(B_n + hk_{117})}{k + (B_n + hk_{117})} (S_n + hk_{321}) + p\gamma(E_n + hk_{322}) - \mu(I_{A_n} + \\
&\quad hk_{323}) - \alpha_2(I_{A_n} + hk_{323}) \\
k_{424} &= (1 - p)\beta \frac{(B_n + hk_{117})}{k + (B_n + hk_{117})} (S_n + hk_{321}) + (1 - p)\gamma(E_n + hk_{322}) - \\
&\quad \mu(I_{S_n} + hk_{324}) - \mu_S(I_{S_n} + hk_{324}) - (u_{2_{n+1}})\delta(I_{S_n} + hk_{324}) \\
k_{425} &= (u_{2_{n+1}})\delta(I_{S_n} + hk_{324}) - \mu(Q_n + hk_{325}) - \mu_Q(Q_n + hk_{325}) - \\
&\quad \alpha_1(Q_n + hk_{325}) \\
k_{426} &= \alpha_1(Q_n + hk_{325}) + \alpha_2(I_{A_n} + hk_{323}) - \mu(R_n + hk_{326}) - \\
&\quad v(R_n + hk_{326}) \\
k_{427} &= \eta\theta(I_{A_n} + hk_{323}) + \eta\theta(I_{S_n} + hk_{324}) - d(B_n + hk_{327}) - \\
&\quad (u_{4_{n+1}})(B_n + hk_{327})
\end{aligned}$$

Proses perhitungan  $k_1 - k_4$  telah selesai, maka selanjutnya adalah menghitung persamaan nilai *state* baru yang dapat dilihat pada persamaan (4.82)

#### 4.4.2 Penyelesaian Numerik Persamaan *Costate*

Metode *Backward Sweep Runge-Kutta Orde 4* digunakan untuk menyelesaikan persamaan *costate* pada persamaan (4.56) – (4.81), untuk memperoleh nilai *costate* dapat dilihat algoritmanya pada subbab 4.4. Berikut adalah proses perhitungan untuk memperoleh nilai *costate*.

$$\begin{aligned}
\lambda_{S_{n-1}} &= \lambda_{S_n} - \frac{1}{6}(k_{1a8} + 2k_{2a8} + 2k_{3a8} + k_{4a8}) \\
\lambda_{E_{n-1}} &= \lambda_{E_n} - \frac{1}{6}(k_{1a9} + 2k_{2a9} + 2k_{3a9} + k_{4a9}) \\
\lambda_{I_{A_{n-1}}} &= \lambda_{I_{A_n}} - \frac{1}{6}(k_{1a10} + 2k_{2a10} + 2k_{3a10} + k_{4a10}) \\
\lambda_{I_{S_{n-1}}} &= \lambda_{I_{S_n}} - \frac{1}{6}(k_{1a11} + 2k_{2a11} + 2k_{3a11} + k_{4a11}) \\
\lambda_{Q_{n-1}} &= \lambda_{Q_n} - \frac{1}{6}(k_{1a12} + 2k_{2a12} + 2k_{3a12} + k_{4a12}) \\
\lambda_{R_{n-1}} &= \lambda_{R_n} - \frac{1}{6}(k_{1a13} + 2k_{2a13} + 2k_{3a13} + k_{4a13})
\end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\lambda_{B_{n-1}} = \lambda_{B_n} - \frac{1}{6}(k_{1a14} + 2k_{2a14} + 2k_{3a14} + k_{4a14})$$

$$a = 1, 2, 3, 4$$

Keterangan:

$a$  : kasus

$k_{1a8}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $S$

$k_{1a9}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $E$

$k_{1a10}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $I_A$

$k_{1a11}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $I_S$

$k_{1a12}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $Q$

$k_{1a13}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $R$

$k_{1a14}$  : nilai kenaikan interval awal kasus  $a$  subpopulasi  $B$

$k_{2a8}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $S$

$k_{2a9}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $E$

$k_{2a10}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $I_A$

$k_{2a11}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $I_S$

$k_{2a12}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $Q$

$k_{2a13}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $R$

$k_{2a14}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $B$

$k_{3a8}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $S$

$k_{3a9}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $E$

$k_{3a10}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $I_A$

$k_{3a11}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $I_S$

$k_{3a12}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $Q$

$k_{3a13}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $R$

$k_{3a14}$  : nilai kenaikan interval titik tengah kasus  $a$  subpopulasi  $B$

$k_{4a8}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $S$

$k_{4a9}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $E$

$k_{4a10}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $I_A$

$k_{4a11}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $I_S$

$k_{4a12}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $Q$

$k_{4a13}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $R$

$k_{4a14}$  : nilai kenaikan interval akhir kasus  $a$  subpopulasi  $B$

Penyelesaian pada persamaan (4.83) diperoleh dengan melakukan beberapa langkah yaitu mencari nilai  $k_{1a} - k_{4a}$ . Berikut adalah model kedua dan untuk penyelesaian kasus yang lain dapat melakukan langkah yang sama. Langkah pertama yaitu menentukan  $k_1$  dengan memasukkan hasil persamaan diferensial pada setiap *costate* sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (t_n, \lambda_{S_n}, \lambda_{E_n}, \lambda_{I_{A_n}}, \lambda_{I_{S_n}}, \lambda_{Q_n}, \lambda_{R_n}, \lambda_{B_n}) \\
 k_{1218} &= \mu \lambda_{S_n} + \left( \frac{\psi S_n (\lambda_{S_n} - \lambda_{E_n})}{C_6} \right) \psi \lambda_{S_n} + \beta \frac{B_n}{k+B_n} \lambda_{S_n} - \\
 &\quad \left( \frac{\psi S_n (\lambda_{S_n} - \lambda_{E_n})}{C_6} \right) \psi \lambda_{E_n} - p \beta \frac{B_n}{k+B_n} \lambda_{I_{A_n}} + (1-p) \beta \frac{B_n}{k+B_n} \lambda_{I_{S_n}} \\
 k_{1219} &= -\epsilon \lambda_{S_n} + \epsilon \lambda_{E_n} + \mu \lambda_{E_n} + \gamma \lambda_{E_n} - p \gamma \lambda_{I_{A_n}} - (1-p) \gamma \lambda_{I_{S_n}} \\
 k_{1210} &= -C_2 I_{A_n} + \mu \lambda_{I_{A_n}} + \alpha_2 \lambda_{I_{A_n}} - \alpha_2 \lambda_{R_n} - \eta \theta \lambda_{B_n} \\
 k_{1211} &= -C_1 I_{S_n} + \mu \lambda_{I_{S_n}} + \mu_S \lambda_{I_{S_n}} + \left( \frac{\delta I_{S_n} (\lambda_{I_{S_n}} - \lambda_{Q_n})}{C_5} \right) \delta \lambda_{I_{S_n}} - \\
 &\quad \left( \frac{\delta I_{S_n} (\lambda_{I_{S_n}} - \lambda_{Q_n})}{C_5} \right) \delta \lambda_{Q_n} - \eta \theta \lambda_{B_n} \\
 k_{1212} &= \mu \lambda_{Q_n} + \mu_Q \lambda_{Q_n} + \alpha_1 \lambda_{Q_n} - \alpha_1 \lambda_{R_n} \\
 k_{1213} &= -v \lambda_{S_n} + \mu \lambda_{R_n} + v \lambda_{R_n} \\
 k_{1214} &= -C_3 B_n + \beta \frac{S_n k}{(k+B_n)^2} \lambda_{S_n} - p \beta \frac{S_n k}{(k+B_n)^2} \lambda_{I_{A_n}} - (1-p) \beta \frac{S_n k}{(k+B_n)^2} \lambda_{I_{S_n}} + d \lambda_{B_n} + \left( \frac{\lambda_{B_n} B_n}{C_7} \right) \lambda_{B_n}
 \end{aligned}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan  $k_2$  dengan setiap *costate* ( $\lambda$ ) diganti dengan  $\left( \lambda - \frac{hk_1}{2} \right)$ . Ada minus berarti bergerak mundur dalam setiap waktu.

$$\begin{aligned}
 k_2 &= \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{228} &= \mu \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{128}}{2} \right) + \\
&\quad \left( \frac{\psi \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{128}}{2} \right) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{129}}{2} \right) \right)}{c_6} \right) \psi \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{128}}{2} \right) + \\
&\quad \beta \frac{\frac{(B_n + B_{n-1})}{2}}{k + \frac{(B_n + B_{n-1})}{2}} \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{128}}{2} \right) - \\
&\quad \left( \frac{\psi \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{128}}{2} \right) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{129}}{2} \right) \right)}{c_6} \right) \psi \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{129}}{2} \right) - \\
&\quad p\beta \frac{\frac{(B_n + B_{n-1})}{2}}{k + \frac{(B_n + B_{n-1})}{2}} \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{1210}}{2} \right) - (1-p)\beta \frac{\frac{(B_n + B_{n-1})}{2}}{k + \frac{(B_n + B_{n-1})}{2}} \left( \lambda_{I_{S_n}} - \right. \\
&\quad \left. \frac{hk_{1211}}{2} \right) \\
k_{229} &= -\epsilon \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{128}}{2} \right) + \epsilon \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{129}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{129}}{2} \right) + \\
&\quad \gamma \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{129}}{2} \right) - p\gamma \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{1210}}{2} \right) - (1-p)\gamma \left( \lambda_{I_{S_n}} - \right. \\
&\quad \left. \frac{hk_{1211}}{2} \right) \\
k_{2210} &= -C_2 \left( \frac{I_{A_n} + I_{A_{n-1}}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{1210}}{2} \right) + \alpha_2 \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{1210}}{2} \right) - \\
&\quad \alpha_2 \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{1213}}{2} \right) - \eta\theta \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{1214}}{2} \right) \\
k_{2211} &= -C_1 \left( \frac{I_{S_n} + I_{S_{n-1}}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{1211}}{2} \right) + \mu_S \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{1211}}{2} \right) + \\
&\quad \left( \frac{\delta \left( \frac{I_{S_n} + I_{S_{n-1}}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{1211}}{2} \right) - \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{1212}}{2} \right) \right)}{c_5} \right) \delta \left( \lambda_{I_{S_n}} - \right. \\
&\quad \left. \frac{hk_{1211}}{2} \right) - \left( \frac{\delta \left( \frac{I_{S_n} + I_{S_{n-1}}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{1211}}{2} \right) - \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{1212}}{2} \right) \right)}{c_5} \right) \delta \left( \lambda_{Q_n} - \right. \\
&\quad \left. \frac{hk_{1212}}{2} \right) - \eta\theta \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{1214}}{2} \right) \\
k_{2212} &= \mu \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{1212}}{2} \right) + \mu_Q \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{1212}}{2} \right) + \alpha_1 \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{1212}}{2} \right) - \\
&\quad \alpha_1 \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{1213}}{2} \right) \\
k_{2213} &= -v \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{128}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{1213}}{2} \right) + v \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{1213}}{2} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
k_{2214} = & -C_3 \left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right) + \beta \frac{\left( \frac{S_n+S_{n-1}}{2} \right) k}{\left( k + \left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right) \right)^2} \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{128}}{2} \right) - \\
& p\beta \frac{\left( \frac{S_n+S_{n-1}}{2} \right) k}{\left( k + \left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right) \right)^2} \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{1210}}{2} \right) - (1 - \\
& p)\beta \frac{\left( \frac{S_n+S_{n-1}}{2} \right) k}{\left( k + \left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right) \right)^2} \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{1211}}{2} \right) + d \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{1214}}{2} \right) + \\
& \left( \frac{\left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{1214}}{2} \right) \left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right)}{C_7} \right) \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{1214}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan  $k_3$  dengan setiap  $costate$  ( $\lambda$ ) diganti dengan  $\left( \lambda - \frac{hk_2}{2} \right)$ . Ada minus berarti bergerak mundur dalam setiap waktu.

$$k_3 = \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_1}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
k_{328} = & \mu \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{228}}{2} \right) + \\
& \left( \frac{\psi \left( \frac{S_n+S_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{228}}{2} \right) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{229}}{2} \right) \right)}{C_6} \right) \psi \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{228}}{2} \right) + \\
& \beta \frac{\left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right)}{k + \left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right)} \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{228}}{2} \right) - \\
& \left( \frac{\psi \left( \frac{S_n+S_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{228}}{2} \right) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{229}}{2} \right) \right)}{C_6} \right) \psi \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{229}}{2} \right) - \\
& p\beta \frac{\left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right)}{k + \left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right)} \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{2210}}{2} \right) - (1-p)\beta \frac{\left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right)}{k + \left( \frac{B_n+B_{n-1}}{2} \right)} \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{2211}}{2} \right) \\
k_{329} = & -\epsilon \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{228}}{2} \right) + \epsilon \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{229}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{229}}{2} \right) + \\
& \gamma \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{229}}{2} \right) - p\gamma \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{2210}}{2} \right) - (1-p)\gamma \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{2211}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3210} &= -C_2 \left( \frac{{}^I A_n + {}^I A_{n-1}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{I A_n} - \frac{hk_{2210}}{2} \right) + \alpha_2 \left( \lambda_{I A_n} - \frac{hk_{2210}}{2} \right) - \\
&\quad \alpha_2 \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{2213}}{2} \right) - \eta \theta \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{2214}}{2} \right) \\
k_{3211} &= -C_1 \left( \frac{{}^I S_n + {}^I S_{n-1}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{I S_n} - \frac{hk_{2211}}{2} \right) + \mu_S \left( \lambda_{I S_n} - \frac{hk_{2211}}{2} \right) + \\
&\quad \left( \frac{\delta \left( \frac{{}^I S_n + {}^I S_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I S_n} - \frac{hk_{2211}}{2} \right) - \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{2212}}{2} \right) \right)}{C_5} \right) \delta \left( \lambda_{I S_n} - \right. \\
&\quad \left. \frac{hk_{2211}}{2} \right) - \left( \frac{\delta \left( \frac{{}^I S_n + {}^I S_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I S_n} - \frac{hk_{2211}}{2} \right) - \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{2212}}{2} \right) \right)}{C_5} \right) \delta \left( \lambda_{Q_n} - \right. \\
&\quad \left. \frac{hk_{2212}}{2} \right) - \eta \theta \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{2214}}{2} \right) \\
k_{3212} &= \mu \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{2212}}{2} \right) + \mu_Q \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{2212}}{2} \right) + \alpha_1 \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{2212}}{2} \right) - \\
&\quad \alpha_1 \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{2213}}{2} \right) \\
k_{3213} &= -v \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{228}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{2213}}{2} \right) + v \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{2213}}{2} \right) \\
k_{3214} &= -C_3 \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right) + \beta \frac{\left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) k}{\left( k + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right) \right)^2} \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{228}}{2} \right) - \\
&\quad p \beta \frac{\left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) k}{\left( k + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right) \right)^2} \left( \lambda_{I A_n} - \frac{hk_{2210}}{2} \right) - \left( 1 - \right. \\
&\quad \left. p \right) \beta \frac{\left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) k}{\left( k + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right) \right)^2} \left( \lambda_{I S_n} - \frac{hk_{2212}}{2} \right) + d \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{2214}}{2} \right) + \\
&\quad \left( \frac{\left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{2214}}{2} \right) \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)}{C_7} \right) \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{2214}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Langkah terakhir adalah menentukan  $k_4$  dengan setiap *costate* ( $\lambda$ ) diganti dengan  $(\lambda - hk_3)$ . Ada minus berarti bergerak mundur dalam setiap waktu.

$$\begin{aligned}
k_{428} &= \mu \left( \lambda_{S_n} - hk_{328} \right) + \left( \frac{\psi(S_{n-1}) \left( (\lambda_{S_n} - hk_{328}) - (\lambda_{E_n} - hk_{329}) \right)}{C_6} \right) \psi \left( \lambda_{S_n} - \right. \\
&\quad \left. hk_{328} \right) + \beta \frac{(B_{n-1})}{k + (B_{n-1})} \left( \lambda_{S_n} - hk_{328} \right) - \\
&\quad \left( \frac{\psi(S_{n-1}) \left( (\lambda_{S_n} - hk_{328}) - (\lambda_{E_n} - hk_{329}) \right)}{C_6} \right) \psi \left( \lambda_{E_n} - hk_{329} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p\beta \frac{(B_{n-1})}{k+(B_{n-1})} (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{3210}) - (1-p)\beta \frac{(B_{n-1})}{k+(B_{n-1})} (\lambda_{I_{S_n}} - \\
& \quad hk_{3211}) \\
k_{429} &= -\epsilon(\lambda_{S_n} - hk_{328}) + \epsilon(\lambda_{E_n} - hk_{329}) + \mu(\lambda_{E_n} - hk_{329}) + \\
& \quad \gamma(\lambda_{E_n} - hk_{329}) - p\gamma(\lambda_{I_{A_n}} - hk_{3210}) - (1-p)\gamma(\lambda_{I_{S_n}} - \\
& \quad hk_{3211}) \\
k_{4210} &= -C_2(I_{A_{n-1}}) + \mu(\lambda_{I_{A_n}} - hk_{3210}) + \alpha_2(\lambda_{I_{A_n}} - hk_{3210}) - \\
& \quad \alpha_2(\lambda_{R_n} - hk_{3213}) - \eta\theta(\lambda_{B_n} - hk_{3214}) \\
k_{4211} &= -C_1(I_{S_{n-1}}) + \mu(\lambda_{I_{S_n}} - hk_{3211}) + \mu_S(\lambda_{I_{S_n}} - hk_{3211}) + \\
& \quad \left( \frac{\delta(I_{S_{n-1}})((\lambda_{I_{S_n}} - hk_{3211}) - (\lambda_{Q_n} - hk_{3212}))}{c_5} \right) \delta(\lambda_{I_{S_n}} - hk_{3211}) - \\
& \quad \left( \frac{\delta(I_{S_{n-1}})((\lambda_{I_{S_n}} - hk_{3211}) - (\lambda_{Q_n} - hk_{3212}))}{c_5} \right) \delta(\lambda_{Q_n} - hk_{3212}) - \\
& \quad \eta\theta(\lambda_{B_n} - hk_{3214}) \\
k_{4212} &= \mu(\lambda_{Q_n} - hk_{3212}) + \mu_Q(\lambda_{Q_n} - hk_{3212}) + \alpha_1(\lambda_{Q_n} - hk_{3212}) - \\
& \quad \alpha_1(\lambda_{R_n} - hk_{3213}) \\
k_{4213} &= -v(\lambda_{S_n} - hk_{328}) + \mu(\lambda_{R_n} - hk_{3213}) + v(\lambda_{R_n} - hk_{3213}) \\
k_{4214} &= -C_3(B_{n-1}) + \beta \frac{(S_{n-1})k}{(k+(B_{n-1}))^2} (\lambda_{S_n} - hk_{328}) - \\
& \quad p\beta \frac{\left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right)k}{\left(k+\frac{(B_n+B_{n-1})}{2}\right)^2} (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{3210}) - (1- \\
& \quad p)\beta \frac{\left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right)k}{\left(k+\frac{(B_n+B_{n-1})}{2}\right)^2} (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{3211}) + d(\lambda_{B_n} - hk_{3214}) + \\
& \quad \left( \frac{(\lambda_{B_n} - hk_{3214})(B_{n-1})}{c_7} \right) (\lambda_{B_n} - hk_{3214})
\end{aligned}$$

Proses perhitungan nilai  $k_1$  hingga  $k_4$  untuk nilai costate telah selesai. Selanjutnya untuk menghitung nilai *costate* yang baru dapat dilihat pada persamaan (4.83).

#### 4.5 Hasil Simulasi Numerik

Pada subbab ini dijelaskan mengenai hasil simulasi yang telah dilakukan. Simulasi dilakukan untuk memudahkan pengamatan terhadap perbandingan laju perubahan setiap variabel pada masing-masing kombinasi. Berikut adalah nilai variable dan parameter.

**Tabel 4.2** Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera

Parameter	Nilai Parameter	Parameter	Nilai Parameter
$S(0)$	5750 [2]	$\Lambda$	$\frac{24.4N(0)}{365000}$ [7]
$E(0)$	0 [2]	$\mu$	$2.2493 \times 10^{-5}$ [7]
$I_A(0)$	1000 [2]	$\beta$	0.08 [7]
$I_S(0)$	700 [2]	$k$	$10^6$ [2]
$Q(0)$	0 [2]	$d$	$\frac{1}{30}$ [7]
$R(0)$	0 [2]	$t_f$	100 hari [7]
$B(0)$	275000 [2]	$\psi$	0.008 [2]
$C_1$	1 (asumsi)	$\epsilon$	0.003 [2]
$C_2$	0.1 (asumsi)	$\gamma$	0.0005 [2]
$C_3$	0.5 (asumsi)	$p$	0.78 [2]
$C_4$	0.5 (asumsi)	$\alpha_1$	0.78 [2]
$C_5$	1 (asumsi)	$\alpha_2$	0.2 [2]
$C_6$	0.5 (asumsi)	$\delta$	0.15 [7]
$C_7$	0.5 (asumsi)	$\mu_S$	0.00127 [2]
$v$	$\frac{0.4}{365}$ [7]	$\mu_Q$	0.0001 [7]
$u_1$	0.001 – 0.4 [7]	$u_3$	0 – 1 [2]
$u_2$	0 – 1 [2]	$u_4$	0 – 1 [2]
$\eta$	50 [2]		

Nilai parameter pada Tabel 4.2 digunakan untuk melakukan simulasi numerik. Sistem *state* dan *costate* diselesaikan menggunakan metode *Forward-Backward* Runge-Kutta Orde 4. Tujuan dari simulasi numerik adalah untuk mengetahui

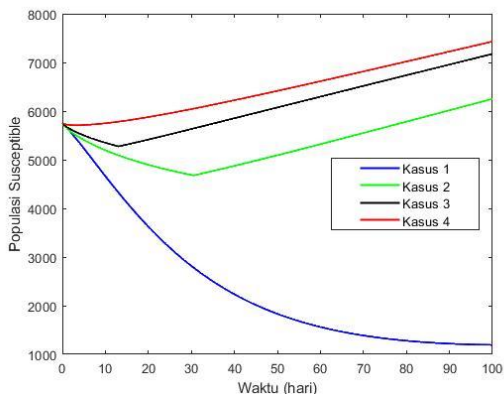
perbandingan kombinasi kendali optimal dan untuk menentukan kombinasi yang paling optimal. Hal tersebut ditinjau dari perbandingan jumlah populasi tiap kombinasi. Berikut adalah hasil simulasi numerik untuk setiap populasi.

#### 4.5.1 Laju Perubahan Jumlah Populasi

Berikut adalah analisis laju perubahan jumlah individu pada masing-masing subpopulasi dan konsentrasi bakteri dengan dan tanpa kendali optimal.

##### 1. Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Rentan

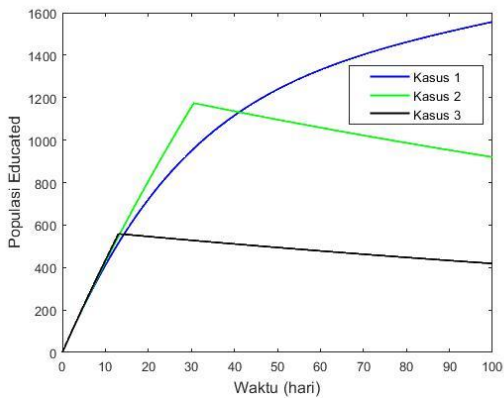
Nilai awal dari subpopulasi rentan berjumlah 5750 individu. Setelah dilakukan simulasi numerik, diperoleh perbandingan untuk keempat kasus. Berdasarkan grafik pada Gambar 4.5 dapat dilihat bahwa individu rentan mengalami penurunan terbanyak pada kasus pertama yakni menjadi 1193 individu. Tanpa kendali klorinasi, konsentrasi bakteri meningkat sehingga menyebabkan banyaknya perpindahan populasi ini ke populasi terinfeksi. Sedangkan pada kasus lain mengalami peningkatan yang terjadi karena perpindahan populasi tereduksi yang berhenti melakukan langkah pencegahan dan populasi sehat yang rentan kembali.



**Gambar 4.5** Laju Perubahan Populasi Rentan

## 2. Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Tereduksi

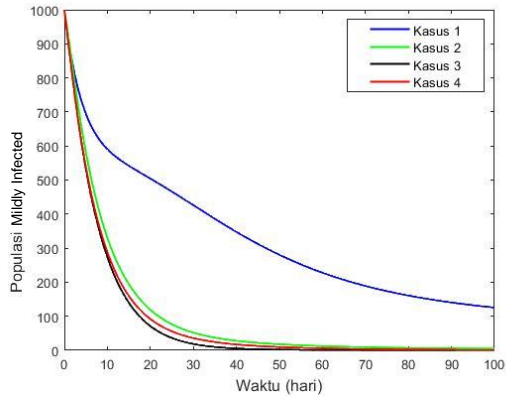
Pada kasus pertama, populasi tereduksi stabil mengalami kenaikan hingga berjumlah 1193 individu. Pada kasus kedua, peningkatan terjadi hingga hari ke-30 dengan jumlah individu sebanyak 1173 lalu menurun hingga menjadi 919 individu pada hari ke-100. Pada kasus ketiga mengalami peningkatan hingga 558 individu pada hari ke-13 dan menurun hingga 418 individu pada hari terakhir. Berikut adalah grafik dari subpopulasi tereduksi.



**Gambar 4.6** Laju Perubahan Populasi Tereduksi

## 3. Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Terinfeksi Ringan

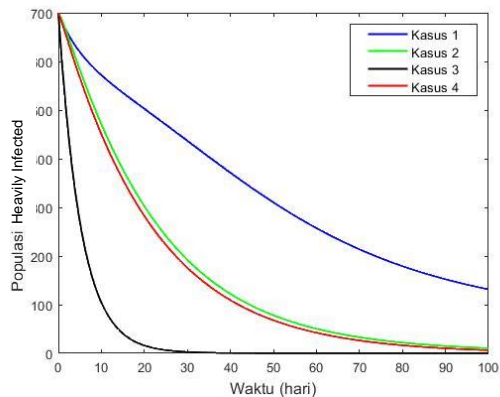
Subpopulasi terinfeksi dengan gejala ringan berjumlah awal 1000 individu. Setelah dilakukan simulasi numerik, subpopulasi ini mengalami penurunan pada keempat kasus. Pada kasus ketiga penurunan terjadi paling rendah hingga bernilai nol. Penurunan jumlah individu terinfeksi dengan gejala ringan disebabkan oleh pengaruh parameter tingkat konsumsi bakteri.



**Gambar 4.7** Laju Perubahan Populasi Terinfeksi Ringan

#### 4. Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Terinfeksi Berat

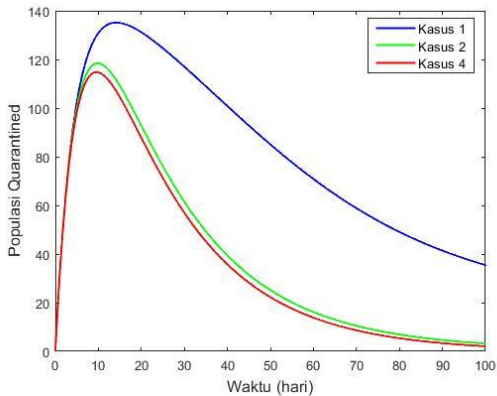
Subpopulasi terinfeksi dengan gejala berat juga mengalami penurunan pada keempat kasus. Dengan jumlah awal sebanyak 700 individu, penurunan paling rendah terjadi pada kasus ketiga hingga bernilai nol. Dapat dilihat pada grafik kasus pertama penurunan tidak setajam kasus lain, hal ini dikarenakan tidak adanya kendali klorinasi mempengaruhi jumlah populasi rentan berpindah ke populasi terinfeksi dengan gejala berat.



**Gambar 4.8** Laju Perubahan Populasi Terinfeksi Berat

### 5. Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi yang Dikarantina

Subpopulasi yang dikarantina berasal dari subpopulasi terinfeksi dengan gejala berat. Namun pada kasus ketiga tidak diberikan kendali pengobatan karantina sehingga subpopulasi karantina dianggap tidak ada. Pada waktu akhir, kasus pertama individu yang dikarantina berjumlah 35 individu, pada kasus kedua sebanyak 3 individu dan kasus keempat sebanyak 2 individu.

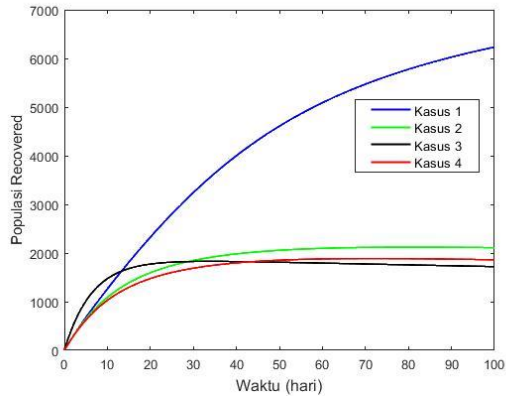


**Gambar 4.9** Laju Perubahan Populasi Karantina

### 6. Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Sembuh

Subpopulasi sembuh pada kasus pertama berjumlah 6232 individu pada waktu akhir. Pada kasus kedua berjumlah 2109 individu. Pada kasus ketiga sebanyak 1720. Pada kasus keempat sebanyak 1860 individu. Sedikitnya jumlah individu sembuh dikarenakan sedikit pula individu yang terinfeksi dengan gejala ringan maupun gejala berat dan yang dikarantina. Berikut adalah grafik dari subpopulasi sembuh.

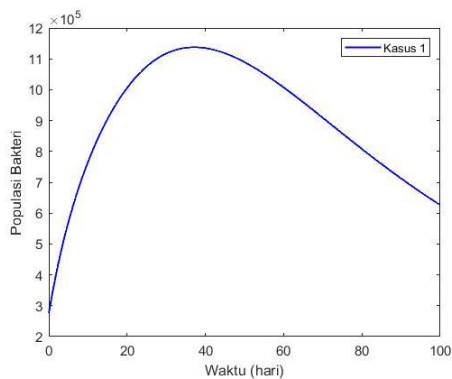




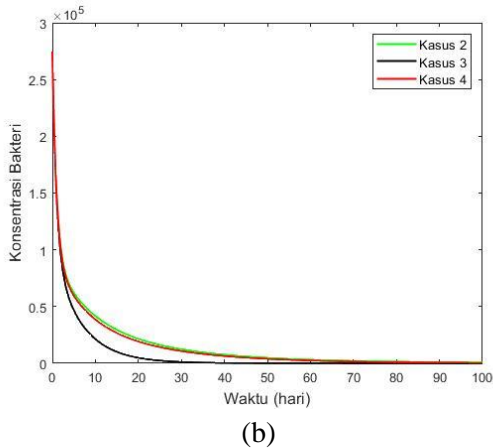
**Gambar 4.10** Laju Perubahan Populasi Sembuh

### 7. Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Bakteri

Tingkat konsentrasi bakteri awal sebesar  $275000 \text{ cell/ml}$ . Setelah dilakukan simulasi, terjadi kenaikan pada kasus pertama tanpa kendali klorinasi menjadi  $626785 \text{ cell/ml}$ . Pada kasus kedua konsentrasi bakteri menurun menjadi  $806,3458 \text{ cell/ml}$ , pada kasus ketiga menjadi  $46,0578 \text{ cell/ml}$ , dan pada kasus keempat menjadi  $397,1108 \text{ cell/ml}$ . Dapat dilihat pada grafik bahwa kendali berupa klorinasi berperan banyak untuk menurunkan konsentrasi bakteri.



(a)



**Gambar 4.11** (a) dan (b) Laju Perubahan Konsentrasi Bakteri

Tujuan dalam permasalahan Tugas Akhir ini adalah untuk memperoleh kendali optimal dengan meminimumkan jumlah populasi manusia terinfeksi dan populasi bakteri serta meminimumkan biaya yang dikeluarkan untuk upaya pengendalian penyakit kolera. Secara matematis, tujuan kendali optimal dinyatakan dalam bentuk fungsi objektif (*performance index*) pada persamaan (4.27) sebagai berikut

$$\min J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 u_1^2(t) + C_5 u_2^2(t) + C_6 u_3^2(t) + C_7 u_4^2(t)] dt.$$

Dari hasil simulasi numerik dapat diketahui nilai masing-masing populasi, kemudian nilai tersebut digunakan untuk menghitung nilai fungsi tujuan pada persamaan (4.27). Didapat nilai fungsi tujuan untuk masing-masing kasus adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} J_1 &= 2.1501 & J_2 &= 2.4489 \\ J_3 &= 1.8002 & J_4 &= 2.3137 \end{aligned}$$

Dari keempat hasil fungsi tujuan dapat dilihat bahwa kasus ketiga memiliki nilai paling kecil. Dapat disimpulkan

bahwa kasus ketiga adalah yang paling optimal dengan kendali berupa perbaikan sanitasi, peningkatan edukasi, dan klorinasi.



## BAB V

### PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dikerjakan serta saran yang diberikan untuk mengembangkan penelitian.

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan dari penelitian terkait kolera, diantaranya

1. Kendali optimal yang diperoleh dari model matematika penyebaran penyakit kolera menggunakan *Pontryagin Minimum Principle* dengan kendali berupa perbaikan sanitasi, peningkatan edukasi, dan klorinasi, akan optimal jika nilai

$$u_1^* = \frac{1}{c_4} \left( \beta \frac{B}{k+B} S (\lambda_{IA} p + \lambda_{IS} (1-p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{IA} p + \lambda_{IS} (1-p) - \lambda_E) \right)$$

$$u_3^* = \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{c_6}$$

$$u_4^* = \frac{\lambda_B B}{c_7}$$

2. Berdasarkan hasil simulasi ditunjukkan bahwa kasus ketiga dapat meminimumkan jumlah individu terinfeksi hingga tidak ada individu terinfeksi baik dengan gejala ringan maupun dengan gejala berat serta meminimumkan jumlah konsentrasi bakteri pada waktu akhir menjadi 46,0578 *cell/ml*.

#### 5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan melakukan modifikasi berupa upaya kendali optimal berdasarkan usia atau jenis kelamin.



## DAFTAR PUSTAKA

- [1] URL <<https://www.cdc.gov/cholera/general>> Diakses 25 Juli 2019.
- [2] Subchan, dkk. (2018). “An Epidemic Cholera with Control Treatment and Intervention”. Seminar Internasional ICoMPAC.
- [3] URL <[https://www.who.int/gho/epidemic\\_diseases/cholera/cases\\_text/en/](https://www.who.int/gho/epidemic_diseases/cholera/cases_text/en/)> Diakses 20 Juli 2019.
- [4] Sariadji, K. (2019). “Benarkah Tak Ada Kasus Kolera Di Indonesia Atau Tersamarkan Dengan Sebutan Diare?”. The Conversation.
- [5] Subchan, dkk. (2019). “Optimization of Cholera Spreading using Sanitation, Quarantine, Education and Chlorination Control”. Seminar Internasional ICASESS.
- [6] Lemos-Paiao, A.P., dkk. (2016). “An Epidemic Model for Cholera with Optimal Control Treatment”. Journal of Computational and Applied Mathematics. Portugal: University of Aveiro.
- [7] Hasanah, S.M. (2019). “Kendali Optimal Pencegahan Penyebaran Penyakit Kolera Dengan *Control Treatment* dan Klorinasi”. Tugas Akhir: Balikpapan, Institut Teknologi Kalimantan.
- [8] URL <<https://www.who.int/news-room/factsheets/detail/cholera>> Diakses 25 Juli 2019.
- [9] Naidu, D. S. (2002). “Optimal Control System”. USA: CRC Press LLC.
- [10] Triatmodjo, B. (2002). “Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer”. Yogyakarta: Beta Offset.

- [11] DeVries, P. L., dkk. (2010). "A First Course in Computational Physics (Second Edition)". Massachusetts: Jones and Barlett.
- [12] Subchan. (2007). "Computational Optimal Control of The Terminal Bunt Manoeuvre - Part 1: Minimum-Altitude Case". *Optimal Control Applications and Methods* 28(5), pp. 311-325.



## LAMPIRAN

### Lampiran A. Source code Simulasi Model kedua

```
%Persamaan State
fS =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lam
bdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
A+v*R+epsilen*E-miu*S-u3*psi*S-beta*S*(B/(k+B));
fE =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lam
bdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
u3*psi*S-epsilen*E-miu*E-gamma*E;
fIa =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lam
bdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
p*beta*S*(B/(k+B))+p*gamma*E-miu*Ia-alpha2*Ia;
fIs =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lam
bdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB) (1-
p)*beta*S*(B/(k+B))+(1-p)*gamma*E-miu*Is-
mius*Is-u2*delta*Is;
fQ =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lam
bdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
u2*delta*Is-miu*Q-miuq*Q-alpha1*Q;
fR =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lam
bdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
alpha1*Q+alpha2*Ia-miu*R-v*R;
fB =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lam
bdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
eta*Ia+eta*Is-d*B-u4*B;

%Persamaan Costate
fLS =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lam
bdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB) -1*(-
lambdaS*miu-lambdaS*u3*psi-
```

```

lambdaS*beta*(B/(k+B))+lambdaE*u3*psi+lambdaIA*p
*beta*(B/(k+B))+lambdaIS*(1-p)*beta*(B/(k+B));
fLE =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u2,u3,u4,lambdaS,lambdaE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambdaB) -
1*(lambdaS*epsilen-lambdaE*epsilen-lambdaE*miu-
lambdaE*gamma+lambdaIA*p*gamma+lambdaIS*(1-
p)*gamma);
fLIA =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u2,u3,u4,lambdaS,lambdaE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambdaB) -
1*(C2*Ia-lambdaIA*miu-
lambdaIA*alpha2+lambdaR*alpha2+lambdaB*eta);
fLIS =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u2,u3,u4,lambdaS,lambdaE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambdaB) -
1*(C1*Is-lambdaIS*miu-lambdaIS*mius-
lambdaIS*u2*delta+lambdaQ*u2*delta+lambdaB*eta);
fLQ =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u2,u3,u4,lambdaS,lambdaE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambdaB) -1*(-
lambdaQ*miu-lambdaQ*miuq-
lambdaQ*alpha1+lambdaR*alpha1);
fLR =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u2,u3,u4,lambdaS,lambdaE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambdaB) -
1*(lambdaS*v-lambdaR*miu-lambdaR*v);
fLB =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u2,u3,u4,lambdaS,lambdaE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambdaB) -
1*(C3*B+lambdaS*beta*S*(k/((k+B)^2))+lambdaIA*p*
beta*S*(k/((k+B)^2))+lambdaIS*(1-
p)*beta*S*(k/((k+B)^2))-lambdaB*d-lambdaB*u4);

%nilai variabel costate
w1=0;
w2=0;
w3=0;
w4=0;
w5=0;
w6=0;

```

```
w7=0;

%variabel u
u2 = zeros(1,N+1);
u3 = zeros(1,N+1);
u4 = zeros(1,N+1);

%variabel state
S = zeros(1,N+1);
E = zeros(1,N+1);
Ia= zeros(1,N+1);
Is= zeros(1,N+1);
Q = zeros(1,N+1);
R = zeros(1,N+1);
B = zeros(1,N+1);

t(1) =a;
t1(1)=a;
S(1) = S0;
E(1) = E0;
Ia(1)= Ia0;
Is(1)= Is0;
Q(1) = Q0;
R(1) = R0;
B(1) = B0;

% variabel costate
lambdaS = zeros(1,N+1);
lambdaE = zeros(1,N+1);
lambdaIA = zeros(1,N+1);
lambdaIS = zeros(1,N+1);
lambdaQ = zeros(1,N+1);
lambdaR = zeros(1,N+1);
lambdaB = zeros(1,N+1);

lambdaS(N+1) = w1;
lambdaE(N+1) = w2;
lambdaIA(N+1) = w3;
lambdaIS(N+1) = w4;
lambdaQ(N+1) = w5;
lambdaR(N+1) = w6;
```

```
lambdaB(N+1) = w7;
```

```
while(test < 0)
    oldu2 = u2;
    oldu3 = u3;
    oldu4 = u4;
    oldS = S;
    oldE = E;
    oldIa = Ia;
    oldIs = Is;
    oldQ = Q;
    oldR = R;
    oldB = B;

    oldlambdaS = lambdaS;
    oldlambdaE = lambdaE;
    oldlambdaIA = lambdaIA;
    oldlambdaIS = lambdaIS;
    oldlambdaQ = lambdaQ;
    oldlambdaR = lambdaR;
    oldlambdaB = lambdaB;

%---Representasi metode Runge-Kutta---%
%persamaan state
    for i = 1:N
        t(i+1) = t(i)+h;
        k1S =fS
        (t(i), S(i), E(i), Ia(i), Is(i), Q(i), R(i), B(i), u2(i)
        , u3(i), u4(i), lambdaS(i), lambdaE(i), lambdaIA(i), lambdaIS(i), lambdaQ(i), lambdaR(i), lambdaB(i));
        k1E =fE
        (t(i), S(i), E(i), Ia(i), Is(i), Q(i), R(i), B(i), u2(i)
        , u3(i), u4(i), lambdaS(i), lambdaE(i), lambdaIA(i), lambdaIS(i), lambdaQ(i), lambdaR(i), lambdaB(i));

        k1Ia=fIa(t(i), S(i), E(i), Ia(i), Is(i), Q(i), R(i), B(i), u2(i), u3(i), u4(i), lambdaS(i), lambdaE(i), lambdaIA(i), lambdaIS(i), lambdaQ(i), lambdaR(i), lambdaB(i));

        k1Is=fIs(t(i), S(i), E(i), Ia(i), Is(i), Q(i), R(i), B(i), u2(i), u3(i), u4(i), lambdaS(i), lambdaE(i), lambdaIA(i), lambdaIS(i), lambdaQ(i), lambdaR(i), lambdaB(i));
```

```
i), u2(i), u3(i), u4(i), lambdaS(i), lambdaE(i), lambdaIA(i), lambdaIS(i), lambdaQ(i), lambdaR(i), lambdaB(i));
```

```
k1Q = fQ
```

```
(t(i), S(i), E(i), Ia(i), Is(i), Q(i), R(i), B(i), u2(i), u3(i), u4(i), lambdaS(i), lambdaE(i), lambdaIA(i), lambdaIS(i), lambdaQ(i), lambdaR(i), lambdaB(i));
```

```
k1R = fR
```

```
(t(i), S(i), E(i), Ia(i), Is(i), Q(i), R(i), B(i), u2(i), u3(i), u4(i), lambdaS(i), lambdaE(i), lambdaIA(i), lambdaIS(i), lambdaQ(i), lambdaR(i), lambdaB(i));
```

```
k1B = fB
```

```
(t(i), S(i), E(i), Ia(i), Is(i), Q(i), R(i), B(i), u2(i), u3(i), u4(i), lambdaS(i), lambdaE(i), lambdaIA(i), lambdaIS(i), lambdaQ(i), lambdaR(i), lambdaB(i));
```

```
k2S = fS
```

```
(t(i)+h/2, S(i)+h2*k1S, E(i)+h2*k1E, Ia(i)+h2*k1Ia, Is(i)+h2*k1Is, Q(i)+h2*k1Q, R(i)+h2*k1R, B(i)+h2*k1B, 0.5*(u2(i)+ u2(i+1)), 0.5*(u3(i)+ u3(i+1)), 0.5*(u4(i)+ u4(i+1)), 0.5*(lambdaS(i)+ lambdaS(i+1)), 0.5*(lambdaE(i)+ lambdaE(i+1)), 0.5*(lambdaIA(i)+ lambdaIA(i+1)), 0.5*(lambdaIS(i)+ lambdaIS(i+1)), 0.5*(lambdaQ(i)+ lambdaQ(i+1)), 0.5*(lambdaR(i)+ lambdaR(i+1)), 0.5*(lambdaB(i)+ lambdaB(i+1)));
```

```
k2E = fE
```

```
(t(i)+h/2, S(i)+h2*k1S, E(i)+h2*k1E, Ia(i)+h2*k1Ia, Is(i)+h2*k1Is, Q(i)+h2*k1Q, R(i)+h2*k1R, B(i)+h2*k1B, 0.5*(u2(i)+ u2(i+1)), 0.5*(u3(i)+ u3(i+1)), 0.5*(u4(i)+ u4(i+1)), 0.5*(lambdaS(i)+ lambdaS(i+1)), 0.5*(lambdaE(i)+ lambdaE(i+1)), 0.5*(lambdaIA(i)+ lambdaIA(i+1)), 0.5*(lambdaIS(i)+ lambdaIS(i+1)), 0.5*(lambdaQ(i)+ lambdaQ(i+1)), 0.5*(lambdaR(i)+ lambdaR(i+1)), 0.5*(lambdaB(i)+ lambdaB(i+1)));
```

```
k2Ia=fIa(t(i)+h/2, S(i)+h2*k1S, E(i)+h2*k1E, Ia(i)+h2*k1Ia, Is(i)+h2*k1Is, Q(i)+h2*k1Q, R(i)+h2*k1R, B(i)+h2*k1B, 0.5*(u2(i)+ u2(i+1)), 0.5*(u3(i)+ u3(i+1)), 0.5*(u4(i)+ u4(i+1)), 0.5*(lambdaS(i)+ lambdaS(i+1)), 0.5*(lambdaE(i)+ lambdaE(i+1)), 0.5*(lambdaIA(i)+ lambdaIA(i+1)), 0.5*(lambdaIS(i)+ lambdaIS(i+1)), 0.5*(lambdaQ(i)+ lambdaQ(i+1)), 0.5*(lambdaR(i)+ lambdaR(i+1)), 0.5*(lambdaB(i)+ lambdaB(i+1)));
```

```

i)+h2*k1B,0.5*(u2(i)+u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+lambdaB(i+1)));
k2Is=fIs(t(i)+h/2,S(i)+h2*k1S,E(i)+h2*k1E,Ia(i)+
h2*k1Ia,Is(i)+h2*k1Is,Q(i)+h2*k1Q,R(i)+h2*k1R,B(
i)+h2*k1B,0.5*(u2(i)+u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+lambdaB(i+1)));
k2Q =fQ
(t(i)+h/2,S(i)+h2*k1S,E(i)+h2*k1E,Ia(i)+h2*k1Ia,
Is(i)+h2*k1Is,Q(i)+h2*k1Q,R(i)+h2*k1R,B(i)+h2*k1
B,0.5*(u2(i)+u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+lambdaB(i+1)));
k2R =fR
(t(i)+h/2,S(i)+h2*k1S,E(i)+h2*k1E,Ia(i)+h2*k1Ia,
Is(i)+h2*k1Is,Q(i)+h2*k1Q,R(i)+h2*k1R,B(i)+h2*k1
B,0.5*(u2(i)+u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+lambdaB(i+1)));

```

k2B =fB

(t(i)+h/2, S(i)+h2\*k1S, E(i)+h2\*k1E, Ia(i)+h2\*k1Ia, Is(i)+h2\*k1Is, Q(i)+h2\*k1Q, R(i)+h2\*k1R, B(i)+h2\*k1B, 0.5\*(u2(i)+ u2(i+1)), 0.5\*(u3(i)+ u3(i+1)), 0.5\*(u4(i)+ u4(i+1)), 0.5\*(lambdaS(i)+ lambdaS(i+1)), 0.5\*(lambdaE(i)+ lambdaE(i+1)), 0.5\*(lambdaIA(i)+ lambdaIA(i+1)), 0.5\*(lambdaIS(i)+ lambdaIS(i+1)), 0.5\*(lambdaQ(i)+ lambdaQ(i+1)), 0.5\*(lambdaR(i)+ lambdaR(i+1)), 0.5\*(lambdaB(i)+ lambdaB(i+1)));

k3S =fS

(t(i)+h/2, S(i)+h2\*k2S, E(i)+h2\*k2E, Ia(i)+h2\*k2Ia, Is(i)+h2\*k2Is, Q(i)+h2\*k2Q, R(i)+h2\*k2R, B(i)+h2\*k2B, 0.5\*(u2(i)+ u2(i+1)), 0.5\*(u3(i)+ u3(i+1)), 0.5\*(u4(i)+ u4(i+1)), 0.5\*(lambdaS(i)+ lambdaS(i+1)), 0.5\*(lambdaE(i)+ lambdaE(i+1)), 0.5\*(lambdaIA(i)+ lambdaIA(i+1)), 0.5\*(lambdaIS(i)+ lambdaIS(i+1)), 0.5\*(lambdaQ(i)+ lambdaQ(i+1)), 0.5\*(lambdaR(i)+ lambdaR(i+1)), 0.5\*(lambdaB(i)+ lambdaB(i+1)));

k3E =fE

(t(i)+h/2, S(i)+h2\*k2S, E(i)+h2\*k2E, Ia(i)+h2\*k2Ia, Is(i)+h2\*k2Is, Q(i)+h2\*k2Q, R(i)+h2\*k2R, B(i)+h2\*k2B, 0.5\*(u2(i)+ u2(i+1)), 0.5\*(u3(i)+ u3(i+1)), 0.5\*(u4(i)+ u4(i+1)), 0.5\*(lambdaS(i)+ lambdaS(i+1)), 0.5\*(lambdaE(i)+ lambdaE(i+1)), 0.5\*(lambdaIA(i)+ lambdaIA(i+1)), 0.5\*(lambdaIS(i)+ lambdaIS(i+1)), 0.5\*(lambdaQ(i)+ lambdaQ(i+1)), 0.5\*(lambdaR(i)+ lambdaR(i+1)), 0.5\*(lambdaB(i)+ lambdaB(i+1)));

k3Ia=fIa(t(i)+h/2, S(i)+h2\*k2S, E(i)+h2\*k2E, Ia(i)+ h2\*k2Ia, Is(i)+h2\*k2Is, Q(i)+h2\*k2Q, R(i)+h2\*k2R, B(i)+h2\*k2B, 0.5\*(u2(i)+ u2(i+1)), 0.5\*(u3(i)+ u3(i+1)), 0.5\*(u4(i)+ u4(i+1)), 0.5\*(lambdaS(i)+ lambdaS(i+1)), 0.5\*(lambdaE(i)+ lambdaE(i+1)), 0.5\*(lambdaIA(i)+

$$\begin{aligned} & \text{lambdaIA}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaIS}(i) + \\ & \text{lambdaIS}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaQ}(i) + \\ & \text{lambdaQ}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaR}(i) + \\ & \text{lambdaR}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaB}(i) + \text{lambdaB}(i+1))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k3Is = & fIs(t(i) + h/2, S(i) + h2 * k2S, E(i) + h2 * k2E, Ia(i) + \\ & h2 * k2Ia, Is(i) + h2 * k2Is, Q(i) + h2 * k2Q, R(i) + h2 * k2R, B(i) + \\ & h2 * k2B, 0.5 * (u2(i) + u2(i+1)), 0.5 * (u3(i) + \\ & u3(i+1)), 0.5 * (u4(i) + u4(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaS}(i) + \\ & \text{lambdaS}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaE}(i) + \\ & \text{lambdaE}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaIA}(i) + \\ & \text{lambdaIA}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaIS}(i) + \\ & \text{lambdaIS}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaQ}(i) + \\ & \text{lambdaQ}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaR}(i) + \\ & \text{lambdaR}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaB}(i) + \text{lambdaB}(i+1))); \end{aligned}$$

$$k3Q = fQ$$

$$\begin{aligned} & (t(i) + h/2, S(i) + h2 * k2S, E(i) + h2 * k2E, Ia(i) + h2 * k2Ia, \\ & Is(i) + h2 * k2Is, Q(i) + h2 * k2Q, R(i) + h2 * k2R, B(i) + h2 * k2 \\ & B, 0.5 * (u2(i) + u2(i+1)), 0.5 * (u3(i) + \\ & u3(i+1)), 0.5 * (u4(i) + u4(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaS}(i) + \\ & \text{lambdaS}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaE}(i) + \\ & \text{lambdaE}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaIA}(i) + \\ & \text{lambdaIA}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaIS}(i) + \\ & \text{lambdaIS}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaQ}(i) + \\ & \text{lambdaQ}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaR}(i) + \\ & \text{lambdaR}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaB}(i) + \text{lambdaB}(i+1))); \end{aligned}$$

$$k3R = fR$$

$$\begin{aligned} & (t(i) + h/2, S(i) + h2 * k2S, E(i) + h2 * k2E, Ia(i) + h2 * k2Ia, \\ & Is(i) + h2 * k2Is, Q(i) + h2 * k2Q, R(i) + h2 * k2R, B(i) + h2 * k2 \\ & B, 0.5 * (u2(i) + u2(i+1)), 0.5 * (u3(i) + \\ & u3(i+1)), 0.5 * (u4(i) + u4(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaS}(i) + \\ & \text{lambdaS}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaE}(i) + \\ & \text{lambdaE}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaIA}(i) + \\ & \text{lambdaIA}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaIS}(i) + \\ & \text{lambdaIS}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaQ}(i) + \\ & \text{lambdaQ}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaR}(i) + \\ & \text{lambdaR}(i+1)), 0.5 * (\text{lambdaB}(i) + \text{lambdaB}(i+1))); \end{aligned}$$

$$k3B = fB$$

$$\begin{aligned} & (t(i) + h/2, S(i) + h2 * k2S, E(i) + h2 * k2E, Ia(i) + h2 * k2Ia, \\ & Is(i) + h2 * k2Is, Q(i) + h2 * k2Q, R(i) + h2 * k2R, B(i) + h2 * k2 \\ & B, 0.5 * (u2(i) + u2(i+1)), 0.5 * (u3(i) + \end{aligned}$$



```

u3(i+1)), 0.5*(u4(i)+ u4(i+1)), 0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)), 0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)), 0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)), 0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)), 0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)), 0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)), 0.5*(lambdaB(i)+ lambdaB(i+1)));

```

```

k4S =fS

```

```

(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*k3Ia, Is(i)
+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)+h*k3B, u2(i+1)
, u3(i+1), u4(i+1), lambdaS(i+1), lambdaE(i+1), lambd
aIA(i+1), lambdaIS(i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1)
, lambdaB(i+1));

```

```

k4E =fE

```

```

(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*k3Ia, Is(i)
+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)+h*k3B, u2(i+1)
, u3(i+1), u4(i+1), lambdaS(i+1), lambdaE(i+1), lambd
aIA(i+1), lambdaIS(i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1)
, lambdaB(i+1));

```

```

k4Ia=fIa(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*k3
Ia, Is(i)+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)+h*k3B
, u2(i+1), u3(i+1), u4(i+1), lambdaS(i+1), lambdaE(i+
1), lambdaIA(i+1), lambdaIS(i+1), lambdaQ(i+1), lamb
daR(i+1), lambdaB(i+1));

```

```

k4Is=fIs(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*k3
Ia, Is(i)+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)+h*k3B
, u2(i+1), u3(i+1), u4(i+1), lambdaS(i+1), lambdaE(i+
1), lambdaIA(i+1), lambdaIS(i+1), lambdaQ(i+1), lamb
daR(i+1), lambdaB(i+1));

```

```

k4Q =fQ

```

```

(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*k3Ia, Is(i)
+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)+h*k3B, u2(i+1)
, u3(i+1), u4(i+1), lambdaS(i+1), lambdaE(i+1), lambd
aIA(i+1), lambdaIS(i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1)
, lambdaB(i+1));

```

```

k4R =fR

```

```

(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*k3Ia, Is(i)
+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)+h*k3B, u2(i+1)

```

```
, u3(i+1), u4(i+1), lambdaS(i+1), lambdaE(i+1), lambdaIA(i+1), lambdaIS(i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1), lambdaB(i+1));
```

```
    k4B = fB
```

```
(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*k3Ia, Is(i)+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)+h*k3B, u2(i+1), u3(i+1), u4(i+1), lambdaS(i+1), lambdaE(i+1), lambdaIA(i+1), lambdaIS(i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1), lambdaB(i+1));
```

```
%nilai state yang baru
```

```
S(i+1) = S(i) + (h/6) * (k1S+2*k2S+2*k3S+k4S);
```

```
E(i+1) = E(i) + (h/6) * (k1E+2*k2E+2*k3E+k4E);
```

```
Ia(i+1) = Ia(i) + (h/6) * (k1Ia+2*k2Ia+2*k3Ia+k4Ia);
```

```
Is(i+1) = Is(i) + (h/6) * (k1Is+2*k2Is+2*k3Is+k4Is);
```

```
Q(i+1) = Q(i) + (h/6) * (k1Q+2*k2Q+2*k3Q+k4Q);
```

```
R(i+1) = R(i) + (h/6) * (k1R+2*k2R+2*k3R+k4R);
```

```
B(i+1) = B(i) + (h/6) * (k1B+2*k2B+2*k3B+k4B);
```

```
    end
```

```
%persamaan costate
```

```
    for i = 1:N
```

```
        j = N + 2 - i;
```

```
        k1LS = fLS
```

```
(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

```
        k1LE = fLE
```

```
(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

```
k1LIA=fLIA(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

```
k1LIS=fLIS(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

$k1LQ = fLQ$   
 $(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u2(j), u3(j), u4(j), \lambda S(j), \lambda E(j), \lambda IA(j), \lambda \lambda IS(j), \lambda Q(j), \lambda R(j), \lambda B(j));$

$k1LR = fLR$   
 $(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u2(j), u3(j), u4(j), \lambda S(j), \lambda E(j), \lambda IA(j), \lambda \lambda IS(j), \lambda Q(j), \lambda R(j), \lambda B(j));$

$k1LB = fLB$   
 $(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u2(j), u3(j), u4(j), \lambda S(j), \lambda E(j), \lambda IA(j), \lambda \lambda IS(j), \lambda Q(j), \lambda R(j), \lambda B(j));$

$k2LS = fLS (t(j)+h/2, 0.5*(S(j)+S(j-1)), 0.5*(E(j)+E(j-1)), 0.5*(Ia(j)+Ia(j-1)), 0.5*(Is(j)+Is(j-1)), 0.5*(Q(j)+Q(j-1)), 0.5*(R(j)+R(j-1)), 0.5*(B(j)+B(j-1)), 0.5*(u2(j)+u2(j-1)), 0.5*(u3(j)+u3(j-1)), 0.5*(u4(j)+u4(j-1)), (\lambda S(j) - h^2*k1LS), (\lambda E(j) - h^2*k1LE), (\lambda IA(j) - h^2*k1LIA), (\lambda IS(j) - h^2*k1LIS), (\lambda Q(j) - h^2*k1LQ), (\lambda R(j) - h^2*k1LR), (\lambda B(j) - h^2*k1LB));$

$k2LE = fLE (t(j)+h/2, 0.5*(S(j)+S(j-1)), 0.5*(E(j)+E(j-1)), 0.5*(Ia(j)+Ia(j-1)), 0.5*(Is(j)+Is(j-1)), 0.5*(Q(j)+Q(j-1)), 0.5*(R(j)+R(j-1)), 0.5*(B(j)+B(j-1)), 0.5*(u2(j)+u2(j-1)), 0.5*(u3(j)+u3(j-1)), 0.5*(u4(j)+u4(j-1)), (\lambda S(j) - h^2*k1LS), (\lambda E(j) - h^2*k1LE), (\lambda IA(j) - h^2*k1LIA), (\lambda IS(j) - h^2*k1LIS), (\lambda Q(j) - h^2*k1LQ), (\lambda R(j) - h^2*k1LR), (\lambda B(j) - h^2*k1LB));$

$k2LIA = fLIA (t(j)+h/2, 0.5*(S(j)+S(j-1)), 0.5*(E(j)+E(j-1)), 0.5*(Ia(j)+Ia(j-1)), 0.5*(Is(j)+Is(j-1)), 0.5*(Q(j)+Q(j-1)), 0.5*(R(j)+R(j-1)), 0.5*(B(j)+B(j-1)), 0.5*(u2(j)+u2(j-1)), 0.5*(u3(j)+u3(j-1)), 0.5*(u4(j)+u4(j-1)), (\lambda S(j) - h^2*k1LS), (\lambda E(j) - h^2*k1LE), (\lambda IA(j) - h^2*k1LIA), (\lambda IS(j) - h^2*k1LIS), (\lambda Q(j) -$

$h2*k1LQ), (\lambda R(j) - h2*k1LR), (\lambda B(j) - h2*k1LB) );$

$k2LIS = fLIS(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k1LS), (\lambda E(j) - h2*k1LE), (\lambda IA(j) - h2*k1LIA), (\lambda IS(j) - h2*k1LIS), (\lambda Q(j) - h2*k1LQ), (\lambda R(j) - h2*k1LR), (\lambda B(j) - h2*k1LB) );$

$k2LQ = fLQ(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k1LS), (\lambda E(j) - h2*k1LE), (\lambda IA(j) - h2*k1LIA), (\lambda IS(j) - h2*k1LIS), (\lambda Q(j) - h2*k1LQ), (\lambda R(j) - h2*k1LR), (\lambda B(j) - h2*k1LB) );$

$k2LR = fLR(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k1LS), (\lambda E(j) - h2*k1LE), (\lambda IA(j) - h2*k1LIA), (\lambda IS(j) - h2*k1LIS), (\lambda Q(j) - h2*k1LQ), (\lambda R(j) - h2*k1LR), (\lambda B(j) - h2*k1LB) );$

$k2LB = fLB(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k1LS), (\lambda E(j) - h2*k1LE), (\lambda IA(j) - h2*k1LIA), (\lambda IS(j) - h2*k1LIS), (\lambda Q(j) - h2*k1LQ), (\lambda R(j) - h2*k1LR), (\lambda B(j) - h2*k1LB) );$

$h2*k1LQ), (\lambda R(j) - h2*k1LR), (\lambda B(j) - h2*k1LB));$

$k3LS = fLS(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k2LS), (\lambda E(j) - h2*k2LE), (\lambda IA(j) - h2*k2LIA), (\lambda IS(j) - h2*k2LIS), (\lambda Q(j) - h2*k2LQ), (\lambda R(j) - h2*k2LR), (\lambda B(j) - h2*k2LB));$

$k3LE = fLE(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k2LS), (\lambda E(j) - h2*k2LE), (\lambda IA(j) - h2*k2LIA), (\lambda IS(j) - h2*k2LIS), (\lambda Q(j) - h2*k2LQ), (\lambda R(j) - h2*k2LR), (\lambda B(j) - h2*k2LB));$

$k3LIA = fLIA(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k2LS), (\lambda E(j) - h2*k2LE), (\lambda IA(j) - h2*k2LIA), (\lambda IS(j) - h2*k2LIS), (\lambda Q(j) - h2*k2LQ), (\lambda R(j) - h2*k2LR), (\lambda B(j) - h2*k2LB));$

$k3LIS = fLIS(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k2LS), (\lambda E(j) - h2*k2LE), (\lambda IA(j) - h2*k2LIA), (\lambda IS(j) - h2*k2LIS), (\lambda Q(j) - h2*k2LQ), (\lambda R(j) - h2*k2LR), (\lambda B(j) - h2*k2LB));$

$h2*k2LQ), (\lambda R(j) - h2*k2LR), (\lambda B(j) - h2*k2LB));$

$k3LQ = fLQ(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k2LS), (\lambda E(j) - h2*k2LE), (\lambda IA(j) - h2*k2LIA), (\lambda IS(j) - h2*k2LIS), (\lambda Q(j) - h2*k2LQ), (\lambda R(j) - h2*k2LR), (\lambda B(j) - h2*k2LB));$

$k3LR = fLR(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k2LS), (\lambda E(j) - h2*k2LE), (\lambda IA(j) - h2*k2LIA), (\lambda IS(j) - h2*k2LIS), (\lambda Q(j) - h2*k2LQ), (\lambda R(j) - h2*k2LR), (\lambda B(j) - h2*k2LB));$

$k3LB = fLB(t(j) + h/2, 0.5*(S(j) + S(j-1)), 0.5*(E(j) + E(j-1)), 0.5*(Ia(j) + Ia(j-1)), 0.5*(Is(j) + Is(j-1)), 0.5*(Q(j) + Q(j-1)), 0.5*(R(j) + R(j-1)), 0.5*(B(j) + B(j-1)), 0.5*(u2(j) + u2(j-1)), 0.5*(u3(j) + u3(j-1)), 0.5*(u4(j) + u4(j-1)), (\lambda S(j) - h2*k2LS), (\lambda E(j) - h2*k2LE), (\lambda IA(j) - h2*k2LIA), (\lambda IS(j) - h2*k2LIS), (\lambda Q(j) - h2*k2LQ), (\lambda R(j) - h2*k2LR), (\lambda B(j) - h2*k2LB));$

$k4LS = fLS(t(j) + h, S(j-1), E(j-1), Ia(j-1), Is(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u2(j-1), u3(j-1), u4(j-1), (\lambda S(j) - h*k3LS), (\lambda E(j) - h*k3LE), (\lambda IA(j) - h*k3LIA), (\lambda IS(j) - h*k3LIS), (\lambda Q(j) - h*k3LQ), (\lambda R(j) - h*k3LR), (\lambda B(j) - h*k3LB));$

$k4LE = fLE(t(j) + h, S(j-1), E(j-1), Ia(j-1), Is(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u2(j-1), u3(j-1),$

```

1), u4(j-1), (lambdaS(j) - h*k3LS), (lambdaE(j) -
h*k3LE), (lambdaIA(j) - h*k3LIA), (lambdaIS(j) -
h*k3LIS), (lambdaQ(j) - h*k3LQ), (lambdaR(j) -
h*k3LR), (lambdaB(j) - h*k3LB));
    k4LIA = fLIA(t(j)+h, S(j-1), E(j-1), Ia(j-
1), Is(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u2(j-1), u3(j-
1), u4(j-1), (lambdaS(j) - h*k3LS), (lambdaE(j) -
h*k3LE), (lambdaIA(j) - h*k3LIA), (lambdaIS(j) -
h*k3LIS), (lambdaQ(j) - h*k3LQ), (lambdaR(j) -
h*k3LR), (lambdaB(j) - h*k3LB));
    k4LIS = fLIS(t(j)+h, S(j-1), E(j-1), Ia(j-
1), Is(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u2(j-1), u3(j-
1), u4(j-1), (lambdaS(j) - h*k3LS), (lambdaE(j) -
h*k3LE), (lambdaIA(j) - h*k3LIA), (lambdaIS(j) -
h*k3LIS), (lambdaQ(j) - h*k3LQ), (lambdaR(j) -
h*k3LR), (lambdaB(j) - h*k3LB));
    k4LQ = fLQ(t(j)+h, S(j-1), E(j-1), Ia(j-
1), Is(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u2(j-1), u3(j-
1), u4(j-1), (lambdaS(j) - h*k3LS), (lambdaE(j) -
h*k3LE), (lambdaIA(j) - h*k3LIA), (lambdaIS(j) -
h*k3LIS), (lambdaQ(j) - h*k3LQ), (lambdaR(j) -
h*k3LR), (lambdaB(j) - h*k3LB));
    k4LR = fLR(t(j)+h, S(j-1), E(j-1), Ia(j-
1), Is(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u2(j-1), u3(j-
1), u4(j-1), (lambdaS(j) - h*k3LS), (lambdaE(j) -
h*k3LE), (lambdaIA(j) - h*k3LIA), (lambdaIS(j) -
h*k3LIS), (lambdaQ(j) - h*k3LQ), (lambdaR(j) -
h*k3LR), (lambdaB(j) - h*k3LB));
    k4LB = fLB(t(j)+h, S(j-1), E(j-1), Ia(j-
1), Is(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u2(j-1), u3(j-
1), u4(j-1), (lambdaS(j) - h*k3LS), (lambdaE(j) -
h*k3LE), (lambdaIA(j) - h*k3LIA), (lambdaIS(j) -
h*k3LIS), (lambdaQ(j) - h*k3LQ), (lambdaR(j) -
h*k3LR), (lambdaB(j) - h*k3LB));

```

%nilai costate yang baru

```

    lambdaS(j-1) = lambdaS(j) -
(h/6)*(k1LS + 2*k2LS + 2*k3LS + k4LS);
    lambdaE(j-1) = lambdaE(j) -
(h/6)*(k1LE + 2*k2LE + 2*k3LE + k4LE);

```

```

        lambdaIA(j-1) = lambdaIA(j) -
(h/6) * (k1LIA + 2*k2LIA + 2*k3LIA + k4LIA);
        lambdaIS(j-1) = lambdaIS(j) -
(h/6) * (k1LIS + 2*k2LIS + 2*k3LIS + k4LIS);
        lambdaQ(j-1) = lambdaQ(j) -
(h/6) * (k1LQ + 2*k2LQ + 2*k3LQ + k4LQ);
        lambdaR(j-1) = lambdaR(j) -
(h/6) * (k1LR + 2*k2LR + 2*k3LR + k4LR);
        lambdaB(j-1) = lambdaB(j) -
(h/6) * (k1LB + 2*k2LB + 2*k3LB + k4LB);
        end

%representasi dari u dengan menggunakan nilai
baru
        temp21 = (1/C5) * (delta*lambdaIS.*Is-
delta*lambdaQ.*Is);%persamaan kendali 2
        u21 = max(u2min,min(temp21,u2max));
        u2 = 0.5*(u21 + oldu2);

        temp31 = (1/C6) * (psi*lambdaS.*S-
psi*lambdaE.*S);%persamaan kendali 3
        u31 = max(u3min,min(temp31,u3max));
        u3 = 0.5*(u31 + oldu3);

        temp41 = (1/C7) * (lambdaB.*B);%persamaan
kendali 4
        u41 = max(u4min,min(temp41,u4max));
        u4 = 0.5*(u41 + oldu4);

%uji konvergensi
temp2 = del*sum(abs(u2)) - sum(abs(oldu2 - u2));
temp3 = del*sum(abs(u3)) - sum(abs(oldu3 - u3));
temp4 = del*sum(abs(u4)) - sum(abs(oldu4 - u4));
temp5 = del*sum(abs(S)) - sum(abs(olds - S));
temp6 = del*sum(abs(E)) - sum(abs(olde - E));
temp7 = del*sum(abs(Ia)) - sum(abs(oldea - Ia));
temp8 = del*sum(abs(Is)) - sum(abs(oldis - Is));
temp9 = del*sum(abs(Q)) - sum(abs(oldeq - Q));
temp10 = del*sum(abs(R)) - sum(abs(oldeR - R));
temp11 = del*sum(abs(B)) - sum(abs(oldeb - B));

```



```

temp12 = del*sum(abs(lambdaS)) -
sum(abs(olddlambdas - lambdaS));
temp13 = del*sum(abs(lambdaE)) -
sum(abs(olddlambdasE - lambdaE));
temp14 = del*sum(abs(lambdaIA)) -
sum(abs(olddlambdasIA - lambdaIA));
temp15 = del*sum(abs(lambdaIS)) -
sum(abs(olddlambdasIS - lambdaIS));
temp16 = del*sum(abs(lambdaQ)) -
sum(abs(olddlambdasQ - lambdaQ));
temp17 = del*sum(abs(lambdaR)) -
sum(abs(olddlambdasR - lambdaR));
temp18 = del*sum(abs(lambdaB)) -
sum(abs(olddlambdasB - lambdaB));

%grafik
figure(5); clf(5)
plot(t,S,'g','linewidth',1.5)
xlabel('Waktu (hari)')
ylabel('Populasi Susceptible')
hleg1 = legend('Kasus 2');
set(gca,'FontSize',11)

figure(6); clf(6)
plot(t,E,'g','linewidth',1.5)
xlabel('Waktu (hari)')
ylabel('Populasi Educated')
hleg1 = legend('Kasus 2');
set(gca,'FontSize',11)

figure(7); clf(7)
plot(t,Ia,'g','linewidth',1.5)
xlabel('Waktu (hari)')
ylabel('Populasi Infected Asymptomatic')
hleg1 = legend('Kasus 2');
set(gca,'FontSize',11)

figure(8); clf(8)
plot(t,Is,'g','linewidth',1.5)
xlabel('Waktu (hari)')
ylabel('Populasi Infected Symptomatic')

```

```
hleg1 = legend('Kasus 2');  
set(gca, 'FontSize', 11)
```

```
figure(9); clf(9)  
plot(t,Q,'g','linewidth',1.5)  
xlabel('Waktu (hari)')  
ylabel('Populasi Quarantined')  
hleg1 = legend('Kasus 2');  
set(gca, 'FontSize', 11)
```

```
figure(10); clf(10)  
plot(t,R,'g','linewidth',1.5)  
xlabel('Waktu (hari)')  
ylabel('Populasi Recovered')  
hleg1 = legend('Kasus 2');  
set(gca, 'FontSize', 11)
```

```
figure(11); clf(11)  
plot(t,B,'g','linewidth',1.5)  
xlabel('Waktu (hari)')  
ylabel('Populasi Bakteri')  
hleg1 = legend('Kasus 2');  
set(gca, 'FontSize', 11)
```

## BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Talitha Brillianty Atlanta dan dilahirkan di Kediri tanggal 20 Juli 1996. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara. Penulis bertempat tinggal di Ds. Setonopande Kec. Kota, Kota Kediri. Pendidikan formal yang telah ditempuh penulis yaitu TK Plus Ar-Rahman Kediri, SD Plus Rahmat Kediri, MTs Negeri 2 Kediri, dan SMA Negeri 1 Kediri. Saat ini, penulis sedang menempuh pendidikan S1 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan bidang minat Matematika Terapan.

Selama kuliah, pada tahun 2015-2016 penulis menjadi Staff Divisi Futsal Putri di UKM Sepak Bola ITS. Pada tahun 2016-2017 penulis menjadi Ketua Divisi Futsal Putri di UKM Sepak Bola ITS. Pada tahun 2016-2017 penulis menjadi Staff Ahli *Sport and Art Department* Himpunan Mahasiswa Matematika ITS. Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai laporan Tugas Akhir ini, dapat dikirimkan melalui email [atlantabrillianty115@gmail.com](mailto:atlantabrillianty115@gmail.com). Terima kasih.