TUGAS AKHIR – KM184801

PEMBUKTIAN SIFAT NON-HAUSDORFF DARI GRUP LIE $GL(n, \mathbb{C})$ BERTINDAK PADA $M(n, \mathbb{C})$

RIF'AN AMROZI
06111640000088

Dosen Pembimbing
Prof. Dr. Subiono, M.S.

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

TUGAS AKHIR – KM184801

PEMBUKTIAN SIFAT NON-HAUSDORFF DARI GRUP LIE $\boldsymbol{GL(n,\mathbb{C})}$ BERTINDAK PADA $\boldsymbol{M(n,\mathbb{C})}$

RIF'AN AMROZI
06111640000088

Dosen Pembimbing
Prof. Dr. Subiono, M.S.

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

FINAL PROJECT – KM184801

ON PROVING NON-HAUSDROFF PROPERTY FOR LIE GROUP $GL(n, \mathbb{C})$ ACTING ON $M(n, \mathbb{C})$

RIF'AN AMROZI
06111640000088

Supervisor
Prof. Dr. Subiono, M.S.

Department of Mathematics
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

PEMBUKTIAN SIFAT NON-HAUSDORFF DARI GRUP LIE $GL(n, \mathbb{C})$ BERTINDAK PADA $M(n, \mathbb{C})$

ON PROVING NON-HAUSDROFF PROPERTY FOR LIE GROUP $GL(n, \mathbb{C})$ ACTING ON $M(n, \mathbb{C})$

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
RIF'AN AMROZI
NRP. 06111640000088

Menyetujui,
Dosen Pembimbing

Prof. Dr. Subiono, M.S.
NIP. 19570411 198403 1 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS

Subchan, S.Si., M.Sc., Ph.D.
NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, Januari 2020

Halaman ini sengaja dikosongkan.

PEMBUKTIAN SIFAT NON-HAUSDORFF DARI GRUP LIE $GL(n, \mathbb{C})$ BERTINDAK PADA $M(n, \mathbb{C})$

Nama	:	Rif'an Amrozi
NRP	:	06111640000088
Departemen	:	Matematika FSAD ITS
Dosen Pembimbing	:	Prof. Dr. Subiono, M.S.

Abstrak

Pada penelitian ini dibahas grup Lie General Linear $GL(n, \mathbb{C})$ bertindak secara konjugasi pada manifold $M(n, \mathbb{C})$. Himpunan semua orbit dari tindakan grup Lie tersebut dideskripsikan melalui bentuk kanonik Jordan yang merupakan ruang kuasi. Telah diduga jika X dan Y adalah matriks-matriks di $M(n, \mathbb{C})$ dengan nilai-nilai eigen yang sama tetapi memiliki bentuk kanonik Jordan yang berbeda, maka irisan dari persekitaran orbit dari Y dan persekitaran orbit dari X tidak kosong. Namun, pembuktian lengkap dari dugaan tersebut belum ada. Pada paper ini, diberikan pembuktian formal dugaan tersebut dengan perturbasi matriks, yaitu ruang kuasi yang berbentuk kanonik Jordan tersebut adalah suatu ruang non-Hausdorff.

Kata Kunci : Bentuk Kanonik Jordan, $GL(n, \mathbb{C})$, Grup Lie, Hausdorff, Perturbasi Matriks.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

ON PROVING NON-HAUSDROFF PROPERTY FOR LIE GROUP $GL(n, \mathbb{C})$ ACTING ON $M(n, \mathbb{C})$

Name	:	Rif'an Amrozi
NRP	:	06111640000088
Department	:	Mathematics FSDA-ITS
Supervisors	:	Prof. Dr. Subiono, M.S.

Abstract

In this research, we discuss the action General Linear Lie Group $GL(n, \mathbb{C})$ on manifold $M(n, \mathbb{C})$. The set of all orbits of this action is described through the Jordan canonical form which is a quasi-space. Already guessed if X and Y are matrices in $M(n, \mathbb{C})$ with the same eigenvalues having different Jordan canonical form, then the intersection of the neighborhood of X and the neighborhood of Y is not empty set. However, complete proof of that hypothesis does not exist yet. In this final project, we provide proof that is thought to be related to the perturbation matrix, so that the quasi-space described through Jordan canonical form is a non-Hausdorff space.

Key Word: $GL(n, \mathbb{C})$, Hausdorff, Jordan Canonical Form, Lie group, Matrix Perturbation,

Halaman ini sengaja dikosongkan.

KATA PENGANTAR

Dengan rahmat Allah SWT, puji syukur Alhamdulillah penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

Pembuktian Sifat non-Hausdorff dari Grup Lie $GL(n,\mathbb{C})$ Bertindak pada $M(n,\mathbb{C})$

Tugas Akhir ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 1 (S-1) Program Sarjana Departemen Matematika Fakultas Sains dan Analitika Data (FSAD) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penyusunan Tugas Akhir ini tidak lepas dari bimbingan, bantuan, dan dukungan moral dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-sebesarnya kepada:

1. Ibu (Dewi Imroana), Bapak (Imam Syukurun Khalim), Kakak (Haidhar Ali Firdaus), dan Adik (Naila Khoirun Nisa) yang memberikan dukungan, doa, dan motivasi sehingga penulis bisa terus belajar dan menyelesaikan Studi Sarjana S-1.

2. Keluarga besar penulis dan Pon-Pes Zawiyah Al-Muhajirin yang memberikan dukungan, doa, dan motivasi sehingga penulis bisa terus belajar.

3. Prof. Dr. Ir. Mochamad Ashari, M.Eng. selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

4. Subchan, S.Si., M.Sc., Ph.D. selaku Kepala Departemen Matematika ITS.

5. Dr. Darmaji, S.Si., M.T. dan Bu Dian Winda, S.Si., M.Si. selaku Dosen Wali.

6. Prof. Dr. Subiono, M.S. selaku Dosen Pembimbing.

7. Dosen Penguji: Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.;Dr. Imam Mukhlash, S.Si, M.T.; Soleha, S.Si, M.Si.

8. Dosen Computer Science Community: Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, M.T. ; Dr. Budi Setiyono, S.Si, M.T. ; M. Luthfi Shahab S.Si., M.Si.

9. Orang terdekat penulis: Alfian Rizal Habibi, Yusuf Mahdi Zein, dan Abdul Gofur, yang selalu ada mendengarkan saat penulis sedang dalam kondisi kurang baik.

10. Teman-teman klub olimpiade: Firman, Hafidh, Alvin, Yusuf, Zuhair, Hengky, Yoyo, Mas Sie, Mas Ryan, Mas Dimaz dll yang menghibur penulis bersama-sama dalam diskusi kematematika-an.

11. Teman-teman CSC: Rifky, Oziq, Nanda, Afandi yang gigih membangun bersama CSC.

12. Seluruh Staf dan teman-teman di Asrama ITS.

13. Teman-teman S-1 Matematika ITS angkatan 2016.

Semoga Allah SWT selalu memberikan rahmat dan hidayah-Nya, dan membalas dengan sebaik-baik balasan kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan Tugas Akhir ini, aamiin.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih belum sempurna, oleh sebab itu kritik dan saran membangun sangat diharapkan untuk perbaikan kedepannya. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat untuk kehidupan dan dapat menambah wawasan pengetahuan ilmu matematika. Aamiin.

Surabaya, 30 Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR SIMBOL

$\in$	Elemen
$\notin$	Bukan Elemen
$\exists$	Ada
$\forall$	Untuk Setiap
$\sim$	Berelasi
$\Rightarrow$	Maka
$\neq$	Tidak Sama Dengan
$\approx$	Mendekati Penaksiran
$[0]_{n\times n}$	Matriks berukuran $n \times n$ dengan seluruh entrinya 0 (matriks nol)
I	Matriks persegi dengan entri-entri diagonal utamanya 1 selainnya 0 (matriks identitas)
$\text{Ker}(A)$	Himpunan seluruh vektor yang dipetakan oleh transformasi/matriks A ke vektor nol (Kernel A)
$\text{span } V$	Koleksi seluruh kombinasi linear himpunan V
$\det(A)$	Determinan matriks A
$\cup$	Gabungan
$\cap$	Irisan
$\subset$	Subhimpunan Sejati
$\subseteq$	Subhimpunan
$\varnothing$	Himpunan Kosong
G^c	Komplemen dari Himpunan G
$\mathbb{N}$	Himpunan Bilangan Asli
$\mathbb{R}$	Himpunan Bilangan Real
$\mathbb{R}^*$	Himpunan Bilangan Real tanpa bilangan 0
$\mathbb{C}$	Himpunan Bilangan Kompleks

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang penulisan tugas akhir ini. Berdasarkan latar belakang tersebut diperoleh beberapa rumusan masalah yang diangkat, batasan masalah, tujuan, serta manfaat penulisan tugas akhir ini. Tidak hanya itu, pada bab ini dijelaskan tentang sistematika penulisan tugas akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner. Seiring perkembangan ilmu matematika, didefinisikan himpunan tak kosong dengan satu operasi dilengkapi dengan syarat tertutup dan asosiatif yaitu monoid. Monoid adalah bentuk lebih umum dari yang biasa disebut grup. Grup adalah monoid yang dilengkapi dengan syarat himpunan tersebut harus memiliki identitas dan setiap elemennya harus memiliki invers. Sekarang pembahasan dan aplikasi grup semakin meluas hingga ke cabang analisis. Dengan latar belakang manifold yang diferensiabel dan beberapa sifat tambahan lain, grup berkembang menjadi grup Lie.

Dalam beberapa *paper* pada tahun 1874 sampai 1884, matematikawan Norwegia Sophus Lie menginisiasi pembahasan mengenai grup Lie dan aljabar Lie ini. Pada hasil penelitiannya yang pertama memang hanya mendapat sedikit perhatian, mungkin karena pada saat itu dia menulis dalam lingkup Norwegia. Pada tahun 1886, Lie menjadi profesor di Leipzig, Jerman, dan teorinya mendapat perhatian tinggi, khususnya setelah publikasi dari 3 volume yang berjudul "Theorie der Transformationsruppen" yang ia tulis berkolaborasi dengan asistennya Friedrich Engel. Pembahasan utama dari teori grup, topologi, dan aljabar linear membuat teori grup Lie dan aljabar Lie menjadi kaya akan kontribusinya pada matematika. Grup klasik seperti General Linear dan Special Linear groups terhadap $\mathbb{R}$ dan terhadap $\mathbb{C}$, grup orthogonal, unitary groups, dan sympletic groups semuanya adalah contoh dari grup Lie [1].

Manifold pada grup Lie tidak terlepas dari eksistensi sifat Hausdorff. Suatu ruang topologi S adalah Haussdorff jika diberikan dua buah titik yang berbeda misalkan x, y di dalam S, ada himpunan terbuka U, V yang saling disjoin sedemikian hingga $x \in U$ dan $y \in V$. Sehingga secara makna sifat Hausdorff dapat dipandang sebagai ketunggalan limit pada suatu ruang topologi.

Pembahasan grup dapat diperluas sampai grup kuasi, begitu juga dengan grup Lie. Misal $G = GL(n, \mathbb{C})$ dan manifold $M = M(n, \mathbb{C})$, orbit di dalam M/G dengan operasi konjugasi berbentuk kanonik Jordan. Misalkan X dan Y adalah matriks-matriks di $M(n, \mathbb{C})$ dengan nilai-nilai eigen yang sama tetapi memiliki bentuk kanonik Jordan yang berbeda, irisan persekitaran orbit dari Y dan persekitaran orbit dari X tidak kosong, dengan kata lain M/G non-Hausdorff. Pada buku "Introduction to Lie Groups and Lie Algebras" [3] telah diklaim dugaan ini, namun belum disajikan dalam bukti formal yang jelas.

Grup General Linear pada tensor yang merupakan bentuk lebih umum dari $GL(n, \mathbb{C})$ juga masih menjadi objek yang masih terus diteliti, hal ini ditunjukan dengan adanya paper "General Linear Group Action on Tensors: A Candidate for Post-Quantum Cryptography" [8] yang juga membahas pada aplikasi tindakan grup general linear pada kriptografi. Tindakan grup yang diperoleh digunakan untuk membangun suatu skema untuk enkripsi *public-key*. Pada paper tersebut digunakan tindakan grup natural yang merepresentasikan pergantian basis, sedangkan dalam penelitian ini adalah konjugasi.

Seperti yang diketahui, bahwa sistem keamanan dan kriptografi menjadi penting pada era digital. Terakhir, selain dapat memberikan bukti formal tentang sifat non-Hausdorff dari ruang kuasi M/G diharapkan penelitian ini juga dapat memberikan manfaat tentang variasi enkripsi *public-key* pada bidang ilmu kriptografi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah disampaikan dan untuk menyelesaikan masalah yang telah dipaparkan pada bagian sebelumnya, dibuat rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengonstruksi grup Lie $GL(n, \mathbb{C})$ bertindak pada manifold $M(n, \mathbb{C})$ secara konjugasi.
2. Bagaimana mendekomposisi sebarang matriks persegi $A \in M(n, \mathbb{C})$ ke dalam bentuk kanonik Jordan.
3. Bagaimana mengonstruksi contoh matriks-matriks yang memiliki nilai-nilai eigen yang sama tapi memiliki bentuk kanonik Jordan yang berbeda.
4. Bagaimana membuktikan dengan perturbasi matriks antar persekitaran orbit kuasi grup Lie irisannya tidak kosong.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah domain entri-entri pada matriks adalah bilangan kompleks.

1.4 Tujuan

Tujuan umum penelitian ini adalah untuk membuktikan secara matematis bahwa untuk grup Lie $G = GL(n, \mathbb{C})$ dan manifold $M = M(n, \mathbb{C})$, ruang kuasi M/G bersifat non-Hausdorff. Sedangkan tujuan khusus dari penelitian ini adalah:

1. Mengkaji grup Lie yang bertindak secara konjugasi.
2. Menyajikan langkah-langkah formal dekomposisi Jordan suatu matriks persegi.
3. Mengkonstruksi contoh matriks-matriks yang memiliki nilai-nilai eigen yang sama namun memiliki bentuk kanonik Jordan yang berbeda.

4. Menentukan irisan antar persekitaran orbit kuasi grup Lie.

1.5 Manfaat

Secara umum manfaat dari tugas akhir ini adalah masyarakat memperoleh hal yang baru tentang teori grup, langkah-langkah dalam pembuktian yang telah dikerjakan juga dapat diimplementasikan dalam pembuktian untuk masalah grup atau grup Lie yang berbeda, dan diharapkan dapat menjadi rujukan untuk penelitian kedepannya. Sedangkan secara khusus dapat dibagi menjadi beberapa poin:

1. Pengetahuan pada grup Lie dapat diaplikasikan pada kriptografi dan teori-teori di fisika terutama *General Relativity*.

2. Memberikan informasi tentang sifat Hausdorff pada grup kuasi Lie.

3. Matriks yang menjadi elemen objek pembahasan dapat diaplikasikan pada permasalahan era digital sekarang.

1.6 Sistematika Penulisan

Pada tugas akhirnya terdiri dari lima bab yaitu; Pendahuluan, Tinjauan Pustaka, Metode Penelitian, Analisis dan Pembahasan, dan Penutup. Berikut adalah deskripsi mengenai masing-masing bab pada tugas akhir ini sebagai berikut :

1. BAB I. PENDAHULUAN
   Pada bab ini dijelakan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat dari penulisan tugas akhir serta sistematika penulisan.

2. BAB II. TINJAUAN PUSTAKA
   Pada bab ini berisi tentang beberapa bahan materi yang mendukung dan berkaitan tentang penulisan tugas akhir, seperti

riwayat penelitian terdahulu, grup, manifold termasuk didalamnya ruang topologi, *continuity, separability, countability*, dan manifold topologi, bentuk kanonik Jordan termasuk didalamnya polinomial karakteristik, beberapa hal yang berhubungan dengan eigen, dan grup Lie.

3. BAB III. METODOLOGI PENELITIAN
   Pada bab ini menjelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan penelitian atau tugas akhir mulai dari studi literatur sampai penarikan kesimpulan dan penulisan buku tugas akhir.

4. BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Pada bab ini dibahas mengenai penentuan sifat Hausdorff grup Lie kuasi yang terbentuk. Pembahasan dimulai dengan bagaimana bentuk elemen-elemen pada ruang kuasi grup Lie, lalu diberikan contoh langkah-langkah diagonalisasi blok-blok Jordan, kemudian diperkenalkan tentang perturbasi matriks. Terakhir, menentukan langkah-langkah perturbasi matriks yang memperlihatkan sifat non-Hausdorff.

5. BAB V. PENUTUP
   Pada bab ini dirumuskan kesimpulan dan saran dari hasil analisis dan pembahasan pada penelitian Tugas Akhir yang telah dilakukan.

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai pengertian grup, manifold, bentuk kanonik Jordan, dan terakhir grup Lie yang digunakan untuk mempermudah pembahasan dalam Tugas Akhir ini.

2.1 Grup

Pada bagian ini diberikan definisi, dan beberapa contoh dari grup. Pengertian grup diberikan oleh definisi berikut ini, yaitu:

Definisi 2.1.1 *Suatu himpunan tak-kosong G bersama operasi biner $*$ pada G dinamakan grup terhadap operasi biner $*$ bila memenuhi aksiomatik grup:*

1. *Tertutup, untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.*
2. *Asosiatif, untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.*
3. *Identitas, ada suatu elemen $e \in G$ sedemikian hingga untuk $a \in G$ berlaku $a * e = a = e * a$. Elemen e dinamakan elemen identitas di G.*
4. *Invers, untuk setiap $a \in G$ ada elemen $a^{-1} \in G$ yang memenuhi $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$. Elemen a^{-1} dinamakan invers dari elemen a.*

Contoh 2.1.1 $< \mathbb{Z}, + >$*, yaitu himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi biner penjumlahan merupakan suatu grup.*

Contoh 2.1.2 $< \mathbb{R}^*, \times >$*, yaitu himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ tanpa nol dengan operasi biner perkalian merupakan suatu grup.*

Objek utama dalam Tugas Akhir ini adalah himpunan matriks, sehingga untuk mempermudah penyampaian, pada bagian selanjutnya diperkenalkan grup dengan elemen-elemennya adalah matriks.

Contoh 2.1.3 *Misal $M(n, \mathbb{C})$ adalah himpunan matriks-matriks persegi berukuran $n \times n$ dengan domain entri-entrinya adalah bilangan kompleks $\mathbb{C}$, grup General Linear $GL(n, \mathbb{C})$ didefinisikan oleh*

$$GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M(n, \mathbb{C}) | \text{det}(A) \neq 0\}.$$

Sehingga dengan operasi biner yang didefinisikan oleh perkalian matriks, dapat ditunjukkan bahwa $GL(n, \mathbb{C})$ adalah grup.

Dalam Tugas Akhir ini $M(n, \mathbb{C})$ dan $\mathbb{C}^{n \times n}$ adalah notasi yang mempunyai arti sama.

Contoh 2.1.4 *Grup Linier Spesial $SL(2, \mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen-elemen di $\mathbb{R}$ yang determinannya sama dengan 1 atau -1. Sama seperti grup matriks dengan operasi perkalian matriks lainnya, grup ini bukanlah grup komutatif.*
Pada $SL(2, \mathbb{R})$ dengan operasi penjumlahan matriks tentu bukanlah suatu grup, hal ini bisa diamati bahwa operasi tersebut tidak mempertahankan karakteristik dari determinan matriks-matriksnya.

Contoh 2.1.5 *Grup Empat Klein V, Grup dengan operasi perkalian matriks yang elemen-elemennya dapat direpresentasikan oleh empat matriks di $SL(2, \mathbb{R})$, yaitu*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai tindakan grup, yaitu bagaimana suatu grup apabila dioperasikan ke suatu himpunan. Hal ini menjadi pembahasan yang penting karena dalam tugas akhir ini grup General Linear bertindak secara konjugasi pada suatu himpunan matriks.

2.2 Tindakan Grup

Pada bagian ini ditunjukkan bahwa suatu tindakan grup menentukan suatu relasi ekivalen pada grup. Dalam hal ini grup dipartisi menjadi klas-klas ekivalen yang dinamakan orbit.

Definisi 2.2.1 *Suatu tindakan grup G pada suatu himpunan takkosong X adalah suatu pemetaan $G \times X \longrightarrow X$ dengan sifat berikut:*

1. $e.x = x$ *untuk setiap* $x \in X$ *dan* e *adalah elemen netral di* G.
2. $g_1.(g_2.x) = (g_1.g_2).x$ *untuk setiap* $g_1, g_2 \in G$ *dan setiap* $x \in X$.

*Bila tindakan tersebut ada, maka dikatakan grup G bertindak pada X dan X adalah $G-$**set**.*

Contoh 2.2.1 *Misal $G = (\mathbb{R}, +)$ dan $X = \mathbb{R}^2$. Didefinisikan tindakan grup $G \times X \longrightarrow X$, yaitu $\forall a \in G$ dan $\forall (x, y) \in X$ berlaku*

$$a \circ (x, y) = (x + a, y).$$

Dapat diperiksa bahwa $\forall (x, y) \in X$ sifat tindakan grup telah terpenuhi:

1. *Untuk 0 elemen netral di G berlaku*

$$0 \circ (x, y) = (x + 0, y) = (x, y).$$

2. $\forall a, b \in G$ *berlaku*

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ (x, y)) =& a \circ (x + b, y) \\ =& (x + b + a, y) \\ =& (x + (b + a), y) \\ =& (b + a) \circ (x, y) \\ =& (a + b) \circ (x, y). \end{aligned}$$

Tindakan grup diatas dapat dipandang sebagai translasi atau pergeseran titik pada bidang $\mathbb{R}^2$. Secara umum, memang tindakan grup seperti memberikan suatu perilaku terhadap suatu himpunan.

Contoh 2.2.2 *Misal grup $G = \{e, g\}$ dan $X = \mathbb{C}$. Didefinisikan tindakan grup $G \times X \longrightarrow X$, yaitu $\forall(x + iy) \in \mathbb{C}$ berlaku:*

$$e.(x+iy) = (x+iy), \tag{2.1}$$

$$g.(x+iy) = (x-iy). \tag{2.2}$$

Dapat diamati $e \in G$ identitas dan $g \in G$ seperti operator konjugat pada bilangan kompleks. Dapat diperiksa sifat-sifat tindakan grup:

1. *Terpenuhi menurut persamaan (2.1).*
2. *Dapat dicoba seluruh kemungkinan kombinasi tindakan. Yaitu:*
   (a) $(e.e).(x+iy) = e.(x+iy) = e.(e.(x+iy))$.
   (b) $(e.g).(x+iy) = g.(x+iy) = (x-iy) = e.(x-iy) = e.(g.(x+iy))$.
   (c) $(g.e).(x+iy) = g.(x+iy) = g.(e.(x+iy))$.
   (d) $(g.g).(x+iy) = e.(x+iy) = (x+iy) = g.(x-iy) = g.(g.(x+iy))$.

Sehingga syarat tindakan grup terpenuhi

Berikut diberikan contoh tindakan grup sekaligus menunjukan eksistensi G-set untuk sebarang grup G.

Contoh 2.2.3 *Setiap subgrup H dari suatu grup G (termasuk G sendiri) bertindak pada G melalui konjugasi. Tindakan ini adalah $H \times G \to G$, dimana $(h, g) \to h\,g\,h^{-1}$ untuk setiap $h \in H$ dan setiap $g \in G$. Dapat diperiksa bahwa $\forall g \in G$ sifat tindakan grup telah terpenuhi:*

1. *Misal $e =$ elemen netral yang sama di H dan di G.*
   Sehingga $e.g = e\,g\,e^{-1} = g\,e^{-1} = g\,e = g$.

2. *$\forall h_1, h_2 \in H$ berlaku*

$$\begin{aligned} h_1.(h_2.g) &= h_1.(h_2\, g\, h_2^{-1}) \\ &= h_1 h_2\, g\, h_2^{-1} h_1^{-1} \\ &= (h_1 h_2) g (h_2^{-1} h_1^{-1}) \\ &= h_1 h_2\, g\, (h_1 h_2)^{-1} \\ &= (h_1\, h_2).g. \end{aligned}$$

Sehingga setiap sebarang grup G yang bertindak pada dirinya sendiri adalah G-set dengan tindakan konjugasi. Konjugasi adalah suatu tindakan yang sangat penting dan menjadi pembahasan utama dalam Tugas Akhir ini.

Teorema 2.2.1 *[1] Misalkan X adalah G-set untuk sebarang $x \in X$ didefinisikan himpunan*

$$G_x = \{g \in G | g.x = x\}. \tag{2.3}$$

Maka G_x adalah subgrup dari G.

Bukti: Cukup ditunjukan bahwa bila $g \in G_x$, maka $g^{-1} \in G$ dan bila $g_1, g_2 \in G_x$, maka $g_1 g_2 \in G_x$. Bila $g \in G_x$ maka $g.x = x$. Jadi

$$g^{-1}.x = g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = e.x = x.$$

Hal ini menunjukan bahwa $g^{-1} \in G_x$. Selanjutnya, bila $g_1, g_2 \in G_x$, maka

$$(g_1 g_2).x = g_1.(g_2.x) = g_1.x = x.$$

Jadi $g_1 g_2 \in G_x$.

■

Definisi 2.2.2 *[1] Grup G_x dinamakan **stabilizer** dari x dalam G. Subgrup G_x juga dinamakan subgrup **isotropy** dari G untuk elemen $x \in X$.*

Teorema 2.2.2 *[1] Misalkan G adalah suatu grup bertindak pada suatu himpunan tak kosong X. Relasi pada X didefinisikan oleh $a \sim b$ bila dan hanya bila $a = g.b$ untuk beberapa $g \in G$ dan $a, b \in X$. Maka relasi $(\sim)$ adalah relasi ekivalen.*

Bukti: Sifat refleksif, untuk sebarang $a \in X$, didapat $a = e.x$. Jadi $a \sim a$. Sifat simetri untuk sebarang $a, b \in X$. Bila $a \sim b$ maka dapat dipilih $g \in G$ yang memenuhi $a = g.b$. Jadi

$$g^{-1}.a = g^{-1}.(g.b) = (g^{-1}g).b = e.b = b.$$

Hal ini menunjukan bahwa $b \sim a$. Sifat transitif, untuk sebarang $a, b, c \in X$. Bila $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka dapat dipilih $g, h \in G$ yang memenuhi $a = g.b$ dan $b = h.c$. Didapat

$$a = g.b = g.(h.c) = (gh).c.$$

Jadi $a \sim c$.

■

Definisi 2.2.3 *[1] Diberikan grup G bertindak pada himpunan tak-kosong X. Maka himpunan klas ekivalen $O_a = \{b \in X | a \sim b\}$ dinamakan orbit dari a dalam X.*

Definisi 2.2.4 *[1] Bila G adalah suatu grup dan $a, b \in G$, maka a dan b berkonjugat dalam G bila ada suatu $g \in G$ yang memenuhi $b = gag^{-1}$ atau dengan kata lain bila a dan b adalah dalam orbit yang sama oleh tindakan G pada dirinya sendiri melalui konjugasi.* ***Klas konjugasi*** *dari suatu $a \in G$ yaitu $K_G(a) = \{gag^{-1} | g \in G\}$ adalah himpunan semua konjuget dari a dengan kata lain orbit dari a dalam tindakan tersebut. Ingat bahwa sentralisir dari $a \in G$*

$$C_G(a) = \{g \in G | ga = ag\} = \{g \in G | gag^{-1} = a\},$$

yaitu himpunan dari semua elemen yang komutatif dengan a atau secara ekivalen stabiliser dari a dalam tindakan tersebut. Bila *konteks grup G jelas yang dimaksud, maka indeks dihapus dan hanya ditulis $K(a)$ dan $C(a)$. Sedangkan jika G adalah suatu grup komutatif maka $G = C(a)$, dengan kata lain orbit dari a adalah $\{a\}$ (singleton dirinya sendiri).*

Secara sederhana grup Lie merupakan perluasan grup dengan memasukan unsur-unsur matematika analisis kedalamnya, sehingga untuk menunjang Tugas Akhir ini, pada subbab ini akan dibahas beberapa hal penting yang berkenaan dengan matematika analisis, khususnya yang berhubungan dengan grup Lie, yaitu manifold.

2.3 Manifold

Sebelum ke tujuan utama subbab ini, diberikan beberapa pembahasan pengantar tentang topologi. Secara sederhana topologi erat kaitannya dengan suatu struktur dari himpunan. Analoginya, jika himpunan adalah tubuh manusia, topologi adalah tulang-tulang penyusun tubuh manusia.

2.3.1 Ruang Topologi

Definisi 2.3.1 *Misal X suatu himpunan tak kosong. Himpunan τ, suatu koleksi subset dari X yang memenuhi:*

1. *$X \in \tau$.*
2. *$\varnothing \in \tau$.*
3. *Jika $\{G_a : a \in \mathbb{N}\}$ adalah sebarang koleksi dari himpunan di dalam τ , maka*

$$\cup \{G_a : a \in \mathbb{N}\} \in \tau. \tag{2.4}$$

4. *Jika G_1 dan G_2 adalah sebarang anggota τ, maka*

$$G_1 \cap G_2 \in \tau. \tag{2.5}$$

*disebut **topologi** untuk X. Himpunan X dengan topologi τ disebut dengan ruang topologi, dan dinotasikan dengan pasangan terurut (X, τ). Elemen dari τ disebut τ-**open** sets atau himpunan buka.*

Contoh 2.3.1 *[2] **(Indiscrete Topology)** Misalkan X adalah suatu himpunan tak kosong, koleksi $\tau = \{\varnothing, X\}$ adalah suatu topologi untuk X. Pasangan (X, τ) disebut indiscrete topological space.*

Contoh 2.3.2 *[2] **(Discrete Topology)** Misalkan X adalah suatu himpunan tak kosong dan D didefinisikan koleksi dari seluruh subset dari X, maka D adalah topologi untuk X. Dapat diperiksa D memenuhi aksioma topologi:*

1. $X \subseteq X \to X \in D$.
2. $\varnothing \subseteq X \to \varnothing \in D$.
3. *Jika $\{G_a : a \in \mathbb{N}\}$ adalah sebarang koleksi anggota D, maka $G_a \subseteq X$ untuk semua $a \in \mathbb{N}$ dan berakibat*
$$\cup \{G_a : a \in \mathbb{N}\} \subseteq X \in D.$$
4. *Jika G_1 dan G_2 adalah sebarang 2 anggota D, maka $G_1 \subseteq X$ dan $G_2 \subseteq X$ berakibat $G_1 \cap G_2 \subseteq X \in D$.*

Berikut disajikan contoh untuk himpunan diskrit.

Contoh 2.3.3 *Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$, dan misalkan τ suatu koleksi himpunan yang didefinisikan*

$$\tau = \{\{1, 2, 3\}, \varnothing, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1\}\}.$$

Dapat diperiksa bahwa τ adalah suatu topologi untuk X

1. $\{1, 2, 3\} = X \in \tau$.
2. $\varnothing \in \tau$.

3. *Setiap gabungan elemen topologi juga merupakan elemen topologi:*

   (a) $\{1,2,3\} \cup \varnothing = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (b) $\{1,2,3\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (c) $\{1,2,3\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (d) $\{1,2,3\} \cup \{1\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (e) $\varnothing \cup \{1,2\} = \{1,2\} \in \tau$.
   (f) $\varnothing \cup \{1,3\} = \{1,3\} \in \tau$.
   (g) $\varnothing \cup \{1\} = \{1\} \in \tau$.
   (h) $\{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (i) $\{1,2\} \cup \{1\} = \{1,2\} \in \tau$.
   (j) $\{1\} \cup \{1,3\} = \{1,3\} \in \tau$.
   (k) $\{1,2,3\} \cup \varnothing \cup \{1,2\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (l) $\{1,2,3\} \cup \varnothing \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (m) $\{1,2,3\} \cup \varnothing \cup \{1\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (n) $\{1,2,3\} \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (o) $\{1,2,3\} \cup \{1,2\} \cup \{1\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (p) $\{1,2,3\} \cup \{1\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (q) $\varnothing \cup \{1,2\} \cup \{1\} = \{1,2\} \in \tau$.
   (r) $\varnothing \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (s) $\varnothing \cup \{1\} \cup \{1,3\} = \{1,3\} \in \tau$.
   (t) $\{1,2\} \cup \{1\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (u) $\{1,2,3\} \cup \varnothing \cup \{1,2\} \cup \{1\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (v) $\{1,2,3\} \cup \varnothing \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (w) $\{1,2,3\} \cup \varnothing \cup \{1\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (x) $\{1,2,3\} \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} \cup \{1\} = \{1,2,3\} \in \tau$.
   (y) $\varnothing \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} \cup \{1\} = \{1,2,3\} \in \tau$.

(z) $\{1,2,3\} \cup \varnothing \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} \cup \{1\} = \{1,2,3\} \in \tau$.

4. *Setiap irisan berhingga elemen topologi juga merupakan elemen topologi:*

   (a) $\{1,2,3\} \cap \varnothing = \varnothing \in \tau$.
   (b) $\{1,2,3\} \cap \{1,2\} = \{1,2\} \in \tau$.
   (c) $\{1,2,3\} \cap \{1,3\} = \{1,3\} \in \tau$.
   (d) $\{1,2,3\} \cap \{1\} = \{1\} \in \tau$.
   (e) $\varnothing \cap \{1,2\} = \varnothing \in \tau$.
   (f) $\varnothing \cap \{1,3\} = \varnothing \in \tau$.
   (g) $\varnothing \cap \{1\} = \varnothing \in \tau$.
   (h) $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \in \tau$.
   (i) $\{1,2\} \cap \{1\} = \{1\} \in \tau$.
   (j) $\{1\} \cap \{1,3\} = \{1\} \in \tau$.
   (k) $\{1,2,3\} \cap \varnothing \cap \{1,2\} = \varnothing \in \tau$.
   (l) $\{1,2,3\} \cap \varnothing \cap \{1,3\} = \varnothing \in \tau$.
   (m) $\{1,2,3\} \cap \varnothing \cap \{1\} = \varnothing \in \tau$.
   (n) $\{1,2,3\} \cap \{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \in \tau$.
   (o) $\{1,2,3\} \cap \{1,2\} \cap \{1\} = \{1\} \in \tau$.
   (p) $\{1,2,3\} \cap \{1\} \cap \{1,3\} = \{1\} \in \tau$.
   (q) $\varnothing \cap \{1,2\} \cap \{1\} = \varnothing \in \tau$.
   (r) $\varnothing \cap \{1,2\} \cap \{1,3\} = \varnothing \in \tau$.
   (s) $\varnothing \cap \{1\} \cap \{1,3\} = \varnothing \in \tau$.
   (t) $\{1,2\} \cap \{1\} \cap \{1,3\} = \{1\} \in \tau$.
   (u) $\{1,2,3\} \cap \varnothing \cap \{1,2\} \cap \{1\} = \varnothing \in \tau$.
   (v) $\{1,2,3\} \cap \varnothing \cap \{1,2\} \cap \{1,3\} = \varnothing \in \tau$.
   (w) $\{1,2,3\} \cap \varnothing \cap \{1\} \cap \{1,3\} = \varnothing \in \tau$.
   (x) $\{1,2,3\} \cap \{1,2\} \cap \{1,3\} \cap \{1\} = \{1\} \in \tau$.

(y) $\varnothing \cap \{1,2\} \cap \{1,3\} \cap \{1\} = \varnothing \in \tau$.

(z) $\{1,2,3\} \cap \varnothing \cap \{1,2\} \cap \{1,3\} \cap \{1\} = \varnothing \in \tau$.

Contoh 2.3.4 *[2]* ***(Co-finite Topology)*** *Misalkan X adalah suatu himpunan tak kosong dan τ adalah koleksi himpunan yang terdiri dari $\varnothing, X$, dan seluruh subset dari X yang komplementnya berhingga (finite). Maka τ adalah suatu topologi untuk X karena memenuhi aksioma topologi:*

1. *Sebagaimana didefinisikan $\varnothing \in \tau$.*

2. *Sebagaimana didefinisikan $X \in \tau$.*

3. *Jika $\{G_a : a \in \mathbb{N}\}$ adalah sebarang koleksi anggota τ, maka berdasarkan definisi syarat keanggotaan G_a^c berhingga untuk semua $a \in \mathbb{N}$ dan berakibat (dengan hukum De-Morgan's)*

$$\cap\{G_a^c : a \in \mathbb{N}\} = (\cup\{G_a : a \in \mathbb{N}\})^c, \tag{2.6}$$

karena G_a^c berhingga sehingga $\cap\{G_a^c : a \in \mathbb{N}\}$ juga berhingga, dan $(\cup\{G_a : a \in \mathbb{N}\})^c$ berhingga, berakibat $\cup\{G_a : a \in \mathbb{N}\} \in \tau$.

4. *Jika G_1 dan G_2 adalah sebarang 2 anggota τ, maka G_1^c berhingga dan G_2^c berhingga. Dengan hukum De-Morgan*

$$G_1^c \cup G_2^c = (G_1 \cap G_2)^c, \tag{2.7}$$

karena gabungan himpunan berhingga juga berhingga, maka $G_1^c \cup G_2^c$ berhingga, dan berakibat $(G_1 \cap G_2)^c$ berhingga, sehingga $(G_1 \cap G_2) \in \tau$.

Selain disebut Co-finite Topology, topologi diatas juga disebut ***Finite Complement Topology****.*

Selanjutnya akan diberikan contoh topologi yang sering dipakai, topologi ini familiar dengan sifat bola buka pada pendefinisiannya di pembahasan cabang analisis.

Contoh 2.3.5 *[2] (**Usual Topology / Topologi Standar**) Misalkan R adalah himpunan seluruh bilangan real dan U adalah koleksi semua himpunan $G \subseteq R$ sedemikian hingga salah satu dari berikut pasti benar, $G = \varnothing$ atau jika $G \neq \varnothing$ maka setiap $x \in G$ ada suatu interval buka I, sedemikian hingga*

$$x \in I \subseteq G,$$

maka U memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. *Dari definisi, $\varnothing \in U$.*

2. *Untuk setiap $x \in R$ jika diperhatikan interval buka berikut $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ untuk sebarang bilangan real positif ε maka*

   $$x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq R.$$

   jadi $R \in U$. Perhatikan bahwa $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ekivalen dengan bola buka dengan jari-jari ε berpusat di x.

3. *Jika $\{G_a : a \in \mathbb{N}\}$ adalah sebarang koleksi subset dari R yang termuat di dalam U, maka sebagai urutan untuk membangun fakta bahwa*

   $$\cup\{G_a : a \in \mathbb{N}\} \in U.$$

   Misalkan x adalah sebarang titik di $\cup\{G_a : a \in \mathbb{N}\}$ sedemikian hingga x termuat di dalam G_a untuk setidaknya satu $a \in \mathbb{N}$. Sekarang misalkan $G_x \in U$ dan $x \in G_a$ oleh sebab itu ada suatu interval buka I sedemikian hingga

   $$x \in I \subseteq \cup\{G_a : a \in \mathbb{N}\},$$

   berakibat

   $$\cup\{G_a : a \in \mathbb{N}\} \in U.$$

4. *Jika G_1, G_2 adalah sebarang 2 buah anggota U, maka sebagai urutan untuk menunjukan bahwa $G_1 \cap G_2$ adalah juga anggota dari U, misalkan x adalah sebarang titik dari $G_1 \cap G_2$ yaitu $x \in G_1$ dan $x \in G_2$. Sekarang $G_1 \in U$ dan $x \in G_1 \Rightarrow \exists$ suatu interval buka I_1 sedemikian hingga*

$$x \in I_1 \subseteq G_1,$$

dan $G_2 \in U$ dan $x \in G_2 \Rightarrow \exists$ suatu interval buka I_2 sedemikian hingga

$$x \in I_2 \subseteq G_2,$$

berakibat, $x \in I_1 \cap I_2 \subseteq G_1 \cap G_2$. Tetapi irisan dari dua interval buka menjadi interval buka, berakibat untuk setiap $x \in G_1 \cap G_2 \exists$ suatu interval buka $I = I_1 \cap I_2$ sedemikian hingga $x \in I \subseteq G_1 \cap G_2$, sehingga

$$G_1 \cap G_2 \in U.$$

Maka U disebut topologi standar untuk R.

Pada bagian selanjutnya, dibahas mengenai hal-hal yang nantinya menjadi syarat dari Manifold dan juga beberapa sifat yang dapat ditentukan dari suatu ruang topologi.

2.3.2 *Continuity, Separability* dan *Countability*

Definisi 2.3.2 *[4] Misalkan k adalah bilangan bulat nonnegatif. Suatu fungsi bernilai real $f : U \to \mathbb{R}$ dikatakan bersifat C^k di $p \in U$ jika derivatif parsial*

$$\frac{\delta^j f}{\delta x^{i_1} ... \delta x^{i_j}}, \tag{2.8}$$

untuk semua order $j \leq k$ ada dan kontinu di p. Fungsi $f : U \to \mathbb{R}$ bersifat C^∞ di p jika fungsi tersebut C^k untuk semua $k \geq 0$; dengan *kata lain derivatif parsial* $\frac{\delta^j f}{\delta x^{i_1}...\delta x^{i_j}}$ *untuk semua order ada dan kontinu di* p. *Dengan cara yang sama dapat diperumum, yaitu suatu fungsi bernilai vektor* $f : U \to \mathbb{C}^m$ *dikatakan bersifat* C^k *di* p *jika semua komponen fungsi* $f^1, ..., f^m$ *bersifat* C^k *di* p. *Definisi yang sama juga digunakan untuk* C^∞. *Bentuk "*C^∞*" dan "smooth" adalah sinonim.*

Contoh 2.3.6 *Fungsi* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$ *adalah contoh fungsi bersifat* C^∞ *di seluruh domainnya. Dapat diperiksa bahwa turunan pertama fungsi ada, yaitu bernilai 1, sedangkan untuk turunan kedua dan seterusnya juga ada, yaitu bernilai 0.*

Contoh 2.3.7 *Didefinisikan fungsi sepotong-sepotong* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0. \\ x, & 0 \leq x. \end{cases} \tag{2.9}$$

Dapat diperiksa bahwa fungsi kontinu, sehingga f *bersifat* C^0, *namun jika diperhatikan di* $x = 0, f(x)$ *tidak dapat diturunkan, sehingga* $f(x)$ *tidak* C^1.

Selanjutnya, akan dibahas mengenai *separability* suatu ruang topologi berdasarkan *separation axiom*, semakin tinggi nilai T, suatu ruang topologi akan semakin bagus tingkat keterpisahannya.

Definisi 2.3.3 *[2] (*T_0***-Spaces : Kolmogorov Spaces****) Suatu ruang topologi* (X, τ) *disebut suatu ruang* T_0 *jika dan hanya jika untuk setiap pasang titik berbeda di* X *ada suatu* τ*-open set yang memuat tepat salah satu dari kedua titik tersebut.*
Sehingga, jika (X, τ) *adalah ruang* T_0 *maka untuk setiap 2 titik berbeda* x *dan* y, *kalau tidak antara ada himpunan buka* $G \in \tau$ *sedemikian hingga* $x \in G$ *dan* $y \notin X$ *atau ada himpunan buka* $H \in \tau$ *sedemikian hingga* $x \notin H$ *dan* $y \in H$.

Contoh 2.3.8 *Setiap himpunan dengan topologi diskrit (2.3.2) adalah ruang* T_0, *karena memuat koleksi seluruh himpunan yang terdiri dari 1 elemen tiap anggotanya (singleton).*

Contoh 2.3.9 *Misal X adalah interval buka $(0, 1)$, didefinisikan τ* ***Nested topology*** *untuk X, yaitu $\varnothing \in \tau$ dan $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$*

$$X_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \in \tau. \tag{2.10}$$

Akan ditunjukan bahwa (X, τ) bukan ruang T_0. Misalkan diambil 2 buah titik di X yaitu $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{3}{4}$. x_1 dan x_2 terletak pada himpunan buka yang sama yaitu $X_1 \in \tau$, dan tidak ada himpunan buka lain sedemikian hingga memuat x_1 saja ataupun x_2 saja. Sehingga (X, τ) bukan ruang T_0 atau bukan ruang Kolmogorov.

Definisi 2.3.4 *[2] (T_1-**Spaces : Fréchet Space**) Suatu ruang topologi (X, τ) disebut suatu ruang T_1 jika dan hanya jika untuk setiap dua pasang titik x dan y di X ada 2 himpunan buka, dimana salah satunya memuat x tetapi tidak memuat y, dan yang lainnya memuat y tetapi tidak memuat x.*
Sehingga, (X, τ) disebut ruang T_1 jika dan hanya jika untuk setiap dua buah titik berbeda x dan y di X ada dua buah himpunan buka G dan H sedemikian hingga, $x \in G$, tetapi $y \notin G$ dan $y \in H$, tetapi $x \notin H$.

Contoh 2.3.10 *Misal X adalah interval buka $(0, 1)$, didefinisikan τ Co-finite topologi sama seperti 2.3.4. Misal diambil sebarang dua buah titik x_1, x_2, dapat dipilih 2 buah himpunan buka X_1 yaitu $X \backslash \{x_1\}$ dan $X_2 \backslash \{x_2\}$, sehingga $x_1 \in X_2$ tetapi $x_1 \notin X_1$, sedangkan $x_2 \in X_1$ tetapi $x_2 \notin X_2$. Akibatnya (X, τ) merupakan ruang T_0 sekaligus T_1.*

Selanjutnya dibahas mengenai ruang Hausdorff, dimana sifat ini merupakan sifat yang nantinya akan diujikan ke hasil tindakan grup pada pembahasan Tugas Akhir ini. Selain itu, syarat penting ruang topologi menjadi manifold haruslah Hausdorff.

Definisi 2.3.5 *[2](T_2-**Spaces : Hausdorff Space**) Suatu ruang topologi (X, τ) dikatakan suatu ruang Hausdorff atau suatu ruang*

T_2 jika untuk setiap pasang titik berbeda x dan y di X, terdapat himpunan buka persekitaran atau τ-open neighbourhoods G dan H yang saling asing, dimana $x \in G$ dan $y \in H$. Jika (X, τ) ruang Hausdorff, τ disebut suatu topologi Hausdorff untuk X.

Contoh 2.3.11 *Pada Contoh 2.3.10, terlihat bahwa (X, τ) merupakan T_0 sekaligus T_1. Padahal apabila diambil sebarang dua buah titik x_1, x_2, setiap dipilih 2 buah himpunan buka misal X_1 dan X_2, sebanyak apapun (finite) titik diambil dari X untuk dijadikan X_1 dan X_2, irisan dari X_1 dan X_2 masih ada tak berhingga banyak bilangan, mengingat interval $(0, 1)$ merupakan himpunan uncountable. Sehingga (X, τ) bukan T_2.*

Selanjutnya akan dibahas tentang keterhitungan atau *countability* suatu ruang topologi. Secara singkat, terdapat 2 tingkatan: *first countable space* dan *second countable space*. Suatu ruang topologi jika *second countable space* maka pasti *first countable space*, sehingga secara tidak langsung tingkat keterhitungan *second countable space* lebih baik. Dalam Tugas Akhir ini, hanya dibahas mengenai *second countable space* agar materi yang disampaikan tidak terlalu bias. Sebelum itu, dijelaskan definisi dari basis. *second countable space* juga merupakan syarat dari suatu manifold.

Definisi 2.3.6 *[2] (**Basis untuk suatu topologi**) Misal (X, τ) suatu ruang topologi, maka koleksi $\mathfrak{B}$ dari subhimpunan dari X dikatakan membentuk suatu basis untuk topologi τ atau basis untuk sistem dari seluruh τ-open set G dari X jika setiap anggota dari $\mathfrak{B}$ adalah suatu τ-open set dan jika setiap τ-open set G dan setiap $x \in G$ ada beberapa B di $\mathfrak{B}$ sedemikian hingga $x \in B \subseteq G$.*

Jelas bahwa jika $\mathfrak{B}$ adalah suatu basis untuk τ maka setiap *super family* dari $\mathfrak{B}$ yang terdiri atas τ*-open sets* juga suatu basis untuk τ [2].

Perhatikan bahwa basis dalam konteks ini mirip dengan basis pada ruang vektor, yaitu basis adalah subhimpunan yang bebas linear dan membangun, hanya saja disini seolah-olah membangun saja.

Contoh 2.3.12 *Misalkan* $X = \{a, b, c, d\}$ *dan misalkan*

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\},$$

adalah topologi untuk X*. Maka koleksi*

$$\mathfrak{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\},$$

dari subhimpunan dari X *adalah basis untuk sistem dari* τ*-open subsets dari* X*. Karena setiap anggota dari* $\mathfrak{B}$ *adalah himpunan buka dan, jika diperhatikan setiap himpunan buka yang memuat* a*, maka* $\{a\}$ *adalah anggota dari* $\mathfrak{B}$ *yang memuat* a *dan termuat didalam himpunan ini. Dengan cara yang sama, jika diperhatikan setiap himpunan buka yang memuat* b*, maka* $\{b\}$ *adalah himpunan buka yang memuat* b *dan termuat didalam himpunan ini. Sama untuk* $\{c, d\}$*, yaitu anggota dari* $\mathfrak{B}$ *yang memuat* c *dan termuat didalam setiap himpunan buka yang memuat* c*. Dan juga* $\{c, d\}$ *adalah suatu anggota* $\mathfrak{B}$ *yang memuat* d *dan termuat didalam setiap himpunan buka yang memuat* d*.*

Definisi 2.3.7 *[2] (**Second Countable Space**) Suatu ruang topologi* (X, τ) *dikatakan memenuhi aksioma kedua dari keterhitungan second axiom of countability jika ada basis terhitung (countable base) untuk* τ*. Ruang topologi yang memenuhi aksioma ini disebut **second countable space**.*

Contoh 2.3.13 *Misalkan* $(X, \tau) = (0, 1)$ *dengan topologi standar, maka dengan memilih koleksi subhimpunan* $\mathfrak{B}$ *dari* X *yaitu seluruh himpunan persekitaran-*ε *dengan panjang bilangan rasional,* $\mathfrak{B}$ *adalah basis untuk topologi* τ*, dan karena bilangan rasional terhitung (countable), maka* (X, τ) *adalah second countable space.*

Setelah mendapatkan pengetahuan sebelumnya, berikutnya akan dibahas mengenai manifold, dimana syarat dari grup Lie haruslah suatu manifold.

2.3.3 Manifold Topologi

Definisi 2.3.8 *[4] Suatu ruang topologi M disebut locally Euclidean berdimensi n jika setiap titik p di M terdapat suatu persekitaran U sedemikian hingga ada suatu homeomorphism (pemetaan kontinu bijektif yang inversnya juga kontinu) ϕ dari U pada suatu open subset dari $\mathbb{R}^n$. Pasangan $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ disebut chart, U disebut coordinate neighborhood atau coordinate open set, dan ϕ disebut coordinate map atau coordinate system pada U. Chart (U, ϕ) dikatakan centered/berpusat pada $p \in U$ jika $\phi(p) = 0$.*

Diberikan contoh yang mendasar dan sederhana dengan tujuan agar pembahasan tidak terlalu bias. Mengingat juga $GL(n, \mathbb{C})$ tidak berbeda jauh dengan ruang $\mathbb{C}^{2n}$, akan diberikan pembahasan pada C^n.

Contoh 2.3.14 *$X = \mathbb{C}^n$ dengan topologi standar bola buka, pilih himpunan bukanya adalah X sendiri, karena dapat dibuat homeomorphism ϕ dari X ke open subset dari $\mathbb{R}^{2n}$ (yaitu seluruh $\mathbb{C}^n$ langsung dipetakan ke $\mathbb{R}^{2n}$), mengingat $\mathbb{R}^{2n}$ dan $\mathbb{C}^n$ isomorfik, maka X locally Euclidean.*

Definisi 2.3.9 *[4] Suatu* ***manifold topologi*** *adalah suatu Hausdorff, second countable, locally Euclidean space. Dikatakan berdimensi n, jika locally Euclidean berdimensi n.*

Contoh 2.3.15 *$X = \mathbb{R}^n$ dengan topologi standar adalah contoh mendasar dari suatu manifold topologi. Hal ini bisa diselidiki. X Hausdorff karena setiap 2 titik berbeda, pasti dapat dibuat 2 buah bola buka yang saling asing yang memuat masing-masing tapi tidak memuat keduanya sekaligus. X second countable karena dengan memilih basis X adalah koleksi bola buka dengan panjang bilangan rasional, mengingat bilangan rasional terhitung, maka X memiliki basis yang terhitung. X locally euclidean, dengan memetakan setiap himpunan buka ke dirinya sendiri, diperoleh fungsi tersebut bijektif, mengingat X adalah juga $\mathbb{R}^n$.*

Pada bagian selanjutnya akan dibahas bentuk kanonik Jordan, hal ini menjadi penting dikarenakan orbit-orbit dari hasil tindakan grup pada pembahasan Tugas Akhir ini berbentuk kanonik Jordan.

2.4 Bentuk Kanonik Jordan

Pada subbab ini dijelaskan definisi-definisi dan teorema terkait bentuk kanonik Jordan.

Perhatikan polinomial $f(t) = a_n t^n + ... + a_1 t + a_0$ atas lapangan K. Jika A adalah sebarang matriks persegi, maka didefinisikan

$$f(A) = a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 I, \tag{2.11}$$

dimana I adalah matriks identitas. Secara khusus, dapat dikatakan bahwa A adalah *solusi pembuat nol* dari $f(t)$ jika $f(A) = 0$, matriks nol [5].

2.4.1 Polinomial Karakteristik

Misalkan $A = [a_{i,j}]$ adalah matriks persegi berukuran $n \times n$. Matriks $M = A - tI_n$, dimana I_n adalah matriks identitas berukuran $n \times n$ dan t belum ditentukan *(indeterminate)*, yaitu matriks yang dapat diperoleh dengan mengurangkan t ke setiap elemen pada diagonal utama matriks A. Negatif dari M adalah matriks $tI_n - A$, dan determinannya

$$\triangle(t) = \det(tI_n - A), \tag{2.12}$$

yaitu polinomial dalam t berderajat n, disebut ***polinomial karakteristik*** dari A [5].

Teorema 2.4.1 *[5]* ***(Cayley-Hamilton)*** *Setiap matriks A adalah solusi pembuat nol dari polinomial karakteristiknya.*

Bukti: Misalkan A adalah sebarang matriks persegi berukuran $n \times n$ dan misalkan $\triangle(t)$ adalah polinomial karakteristiknya, misalkan

$$\triangle(t) = |tI - A| = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0.$$

Misalkan $B(t)$ melambangkan adjoin dari matriks $tI - A$ ditulis adj$(tI-A)$. Perhatikan bahwa matriks $tI-A$ adalah matriks dengan diagonal utamanya saja polinomial dalam t berderajat 1 sedang yang lainnya konstan. Sedangkan Matriks $B(t) = [p_{i,j}(t)]$ adalah transpos matriks kofaktor $tI-A$. Karena pada entri matriks kofaktor adalah determinan matriks berukuran $(n-1) \times (n-1)$ sehingga entrinya merupakan polinomial-polinomial t dengan derajat tidak melebihi $n-1$, ditulis

$$p_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i,j}^{(k)} t^k,$$

untuk setiap entri baris ke-i kolom ke-j, dan $a_{i,j}^{(k)}$ adalah suatu konstanta ke-k hasil ekspansi determinan setiap entri matriks kofaktor. Dari itu setiap koefisien dikelompokan menurut pangkat t, lalu bentuk matriks setiap kelompoknya. Jadi dapat ditulis

$$B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + \ldots + B_1 t + B_0,$$

dimana $B_i, \forall i = 0, 1, \ldots, n-1$, adalah suatu matriks persegi berukuran $n \times n$ yang bebas dari t. Menurut sifat fundamental adjoin $(tI - A)B(t) = |tI - A|I$, yaitu misalkan $(tI - A) = [s_{i,j}]$ karena adjoin adalah transpos dari matriks kofaktor, kolom ke-j dari $B(t)$ adalah transpos dari kofaktor-kofaktor baris ke-j dari $(tI - A)$, yaitu

$$(B_{j,1}, B_{j,2}, \ldots, B_{j,n}).$$

Sehingga entri i, j pada $(tI - A)B(t) = [c_{i,j}]$ adalah

$$c_{i,j} = s_{i,1}B_{j,1} + s_{i,2}B_{j,2} + \ldots + s_{i,n}B_{j,n}. \tag{2.13}$$

Menurut ekspansi Laplace, jika $i = j$ maka tidak lain $c_{i,j}$ adalah determinan $(tI - A)$. Misalkan $i \neq j$, bentuk Persamaan (2.13) sama seperti menghitung determinan matriks yang memiliki 2 baris

yang identik, sehingga $c_{i,j} = 0$.
Selanjutnya, perhatikan 2 persamaan berikut

$$\begin{gathered}(tI - A)B(t) = (tI - A)(B_{n-1}t^{n-1} + \ldots + B_1 t + B_0),\\ |tI - A|I = (t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0)I.\end{gathered}$$

Dengan menghilangkan tanda kurung dan menyamakan pangkat-pangkat dari t yang bersesuaian menghasilkan

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I,\\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= a_{n-1}I,\\ &\vdots\\ B_0 - AB_1 &= a_1 I,\\ -AB_0 &= a_0 I.\end{aligned}$$

Dengan mengalikan persamaan-persamaan diatas dengan A^n, A^{n-1}, $\ldots$, A, I, menghasilkan

$$\begin{aligned} A^n B_{n-1} &= A^n I,\\ A^{n-1}B_{n-2} - A^n B_{n-1} &= a_{n-1}A^{n-1},\\ &\vdots\\ AB_0 - A^2 B_1 &= a_1 A,\\ -AB_0 &= a_0 I.\end{aligned}$$

Dengan menambahkan persamaan-persamaan matriks di atas akan menghasilkan matriks 0 pada ruas kiri dan $\triangle(A)$ pada ruas kanan, yaitu:

$$\begin{aligned}[0]_{n\times n} =& A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I\\ =& \triangle(A).\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\triangle(A) = [0]_{n\times n}$, yaitu Teorema Cayley-Hamilton.

$\blacksquare$

2.4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.4.1 *[5] Misalkan A adalah sebarang matriks persegi $\in M(n, \mathbb{C})$. Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ disebut sebagai* ***nilai eigen*** *dari A jika terdapat vektor (kolom) bukan-nol v sedemikian rupa sehingga*

$$Av = \lambda v. \tag{2.14}$$

Sebarang vektor yang memenuhi hubungan ini disebut sebagai ***vektor eigen*** *dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Himpunan E_λ yang terdiri dari semua vektor eigen yang bersesuaian dengan λ disebut ruang eigen dari λ.*

Contoh 2.4.1 *Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$, sehingga untuk mendapatkan nilai eigen, dikonstruksi persamaan (2.14)*

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} -9+\lambda & -7 \\ 6 & 4+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

karena vektor v bukanlah vektor nol, sehingga haruslah determinan matriks $\lambda I - A$ sama dengan 0.

$$\begin{aligned} \left| \begin{bmatrix} -9+\lambda & -7 \\ 6 & 4+\lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 &= 0 \\ \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga 2 dan 3 adalah nilai eigen dari matriks A.

Untuk $\lambda = 2$,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -9+2 & -7 \\ 6 & 4+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Didapat $E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix} | \forall s \in \mathbb{C} \right\}$.

Untuk $\lambda = 3$,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -9+3 & -7 \\ 6 & 4+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Didapat $E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ -\frac{6}{7}s \end{bmatrix} | \forall s \in \mathbb{C} \right\}$.

2.4.3 Polinomial Minimum

Misalkan sebarang $A \in M(n, \mathbb{C})$. Didefinisikan himpunan $P(A) \subset \mathbb{C}[t]$ oleh

$$P(A) = \{ f(t) \in \mathbb{C}[t] \mid f(A) = [0]_{n \times n} \}.$$

Himpunan $P(A)$ tidak kosong, karena Teorema Cayley-Hamilton (2.4.1) menyatakan bahwa polinomial karakteristik $\triangle(t)$ dari A anggota $P(A)$. Suatu polinomial monik (polinomial dengan koefisien derajat tertingginya sama dengan 1) $m(t)$ disebut sebagai ***polinomial minimum*** dari matriks A jika $m(t)$ berderajat paling kecil dalam $P(A)$ [5].

Contoh 2.4.2 *Misal* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, *polinomial karakteristik dari* A *adalah*

$$\begin{aligned} \triangle(t) &= \det(tI - A) \\ &= (t+1)^3. \end{aligned}$$

Polinomial $(t+1)$ *bukanlah polinomial minimum dari matriks* A*, sebab* $(t+1) \notin P(A)$*, yaitu*

$$(A + I) \neq [0]_{n \times n}.$$

Sedangkan $(t+1)^2 \in P(A)$*, yaitu*

$$(A + I)^2 = [0]_{n \times n},$$

dan $(t+1)^2$ *berderajat 2 dimana 2 adalah derajat terkecil dalam* $P(A)$*. Jadi* $(t+1)^2$ *polinomial minimum dari matriks* A*. Dari Teorema Cayley-Hamilton (2.4.7), perlu diketahui salah satu anggota* $P(A)$ *yang lainnya yaitu* $(t+1)^2(t+1) = (t+1)^3 = \triangle(t)$*.*

Teorema berikut memberikan jaminan tentang eksistensi dan ketunggalan dari polinomial minimum.

Teorema 2.4.2 *[9] Diberikan* A *matriks persegi berukuran* $n \times n$*, maka ada dengan tunggal suatu polinomial monic* $m(t) \in \mathbb{C}[t]$ *dengan derajat terkecil yang memenuhi* $m(A) = [0]_{n \times n}$*.*

Bukti: Pandang himpunan $P(A)$ yang didefinisikan

$$P(A) = \{p(t) \in \mathbb{C}[t] \mid p(A) = [0]_{n \times n}\}.$$

Jelas bahwa $P(A)$ adalah ideal nontrivial di $\mathbb{C}[t]$. Karena $\mathbb{C}[t]$ adalah ring komutatif tanpa pembagi nol dan setiap ideal dibangun oleh satu elemen, maka ada secara tunggal polinomial monic $m(t)$

dimana $J = m\mathbb{C}[t] = \{m(t)f(t) \mid f(t) \in \mathbb{C}[t]\}$, yaitu J dibangun oleh $m(t)$. Berakibat jika $0 \neq p(t) \in P(A)$, maka derajat $p(t) \geqslant$ derajat $m(t)$.

■

Teorema 2.4.3 *[5] Polinomial minimum $m(t)$ dari suatu operator linear atau matriks berukuran $n \times n$, misalkan A, membagi setiap polinomial di $P(A)$. Secara khusus, $m(t)$ membagi polinomial karakteristik $\triangle_A(t)$.*

Bukti: Misal $f(t)$ adalah sebarang polinomial dimana $f(A) = [0]_{n\times n}$. Dengan menggunakan algoritma pembagian, terdapat polinomial $q(t)$ dan $r(t)$, dimana $f(t) = m(t)q(t) + r(t)$ dan $r(t) = 0$, atau derajat $r(t) <$ derajat $m(t)$. Dengan menyubstitusi $t = A$ dalam persamaan ini, dan dengan menggunakan fakta $f(A) = [0]_{n\times n}$ dan $m(A) = [0]_{n\times n}$, diperoleh $r(A) = [0]_{n\times n}$. Jika $r(t) \neq 0$ maka $r(t)$ adalah polinomial dengan derajat lebih kecil dari $m(t)$ yang memiliki A sebagai solusi pembuat nolnya. Hal ini bertentangan dengan definisi polinomial minimum. Jadi $r(t) = 0$, maka $f(t) = m(t)q(t)$, dimana $m(t)$ membagi $f(t)$.

■

Definisi 2.4.2 *Suatu matriks persegi J disebut blok Jordan dengan nilai eigen λ jika berbentuk*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

yaitu bernilai λ pada entri diagonalnya, bernilai 1 pada superdiagonal-nya (terdiri dari entri-entri di atas entri diagonal) dan bernilai 0 pada entri-entri lainnya.

Teorema 2.4.4 *[5] Misalkan M adalah matriks diagonal blok dengan blok diagonal $A_1, A_2, \cdots, A_r$. Maka polinomial minimum dari M sama dengan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) polinomial-polinomial minimum dari blok-blok diagonal $A_i, \forall i = 1, 2, \cdots, r$.*

Bukti: Akan dibuktikan untuk kasus sederhana yang terdiri dari 2 blok. Teorema umum akan didapat dengan induksi matematika, mengingat setiap banyaknya blok yang lebih besar dapat dijadikan kedalam 2 blok. Misalkan $M = \begin{bmatrix} A & [0] \\ [0] & B \end{bmatrix}$, dimana A dan B adalah matriks persegi. Untuk kemudahan penulisan, pada bukti Teorema ini $[0]$ melambangkan matriks 0 dengan ukuran yang bersesuaian dengan konteksnya. Misalkan $g(t), h(t)$ berturut-turut polinomial minimum dari A, B. Akan ditunjukan bahwa polinomial minimum dari M, yaitu $m(t)$, merupakan KPK dari polinomial $g(t)$ dan $h(t)$.
Karena $m(t)$ polinomial minimum dari M,

$$m(M) = \begin{bmatrix} m(A) & [0] \\ [0] & m(B) \end{bmatrix} = [0],$$

sehingga $m(A) = [0]$ dan $m(B) = [0]$. Karena $g(t)$ polinomial minimum dari A maka $g(t)$ membagi $m(t)$. Dengan cara yang sama, $h(t)$ juga membagi $m(t)$. Jadi $m(t)$ kelipatan dari $g(t)$ dan $h(t)$. Sekarang misalkan $f(t)$ adalah kelipatan lain dari $g(t)$ dan $h(t)$, maka

$$f(M) = \begin{bmatrix} f(A) & [0] \\ [0] & f(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} = [0].$$

Tetapi $m(t)$ adalah polinomial minimum dari M, sehingga $m(t)$ membagi $f(t)$. Karena sama-sama juga harus terbagi oleh $g(t)$ dan $h(t)$, jadi $m(t)$ adalah kelipatan persekutuan terkecil dari $g(t)$ dan $h(t)$.

$\blacksquare$

Contoh 2.4.3 *Pandang matriks M*

$$M = \left[\begin{array}{cc:cc:c} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right] = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3),$$

dimana

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}.$$

Maka polinomial karakteristik M yaitu $\triangle(t)$ adalah hasilkali polinomial-polinomial karakteristik $\triangle_1(t)$, $\triangle_2(t)$, $\triangle_3(t)$ berturut-turut dari A_1, A_2, A_3. Dapat diperiksa bahwa

$$\begin{aligned} \triangle_1(t) &= (t-2)^2. \\ \triangle_2(t) &= (t-2)(t-7). \\ \triangle_3(t) &= (t-7). \end{aligned}$$

Jadi $\triangle(t) = (t-2)^3(t-7)^2$.
Polinomial minimum $m_1(t), m_2(t), m_3(t)$ dari blok-blok diagonal A_1, A_2, A_3 sama dengan polinomial karakteristik, yaitu

$$\begin{aligned} m_1(t) &= (t-2)^2. \\ m_2(t) &= (t-2)(t-7). \\ m_3(t) &= (t-7). \end{aligned}$$

Tetapi polinomial minimum dari M yaitu $m(t)$ sama dengan KPK dari $m_1(t), m_2(t), m_3(t)$. Jadi $m(t) = (t-2)^2(t-7)$.

Suatu matriks berukuran $n \times n$ dikatakan dapat didiagonalkan jika terdapat n vektor eigen yang membangun $\mathbb{C}^n$. Teorema berikut menyatakan hubungan penting antara polinomial minimum dengan diagonalisasi.

Teorema 2.4.5 *Jika suatu matriks $A_{n\times n}$ memiliki polinomial minimum $m(t)$ yang mempunyai faktor kembar, maka A tidak dapat didiagonalkan.*

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman, untuk suatu bilangan λ_i nilai eigen dari A, maka $m(t)$ berbentuk

$$m(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\cdots(t-\lambda_r)^{n_r},$$

dengan $i = 1, \ldots, r$ berlaku n_i tak semuanya 1. Andaikan A dapat didiagonalkan, maka berlaku $A = PDP^{-1}$ untuk suatu matriks diagonal D dan matriks non singular P. Padahal setiap matriks diagonal memiliki polinomial minimum yang semuanya tidak ada yang kembar, hal ini didasarkan dengan mengingat matriks diagonal adalah matriks diagonal blok dengan blok-bloknya berukuran 1×1, sehingga dengan Teorema (2.4.4) didapat bahwa polinomial minimum dari D, misal $m'(t)$, adalah KPK dari semua $(t-\lambda_i)$, dengan $i = 1, \ldots, r$ dan λ_i nilai eigen atau entri pada diagonal utama matriks D dan r banyaknya nilai eigen yang berbeda. Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned} m'(t) &= (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r) \\ &= t^r + a_1t^{r-1} + \cdots + a_r, \end{aligned}$$

untuk suatu bilangan $a_i, \forall i = 1, \cdots, r$. Berakibat

$$m'(D) = D^r + a_1D^{r-1} + \cdots + a_rI = [0]_{n\times n}.$$

Sehingga juga berlaku

$$\begin{aligned}
m'(A) &= m'(PDP^{-1}) \\
&= (PDP^{-1})^r + a_1(PDP^{-1})^{r-1} + \cdots + a_r I \\
&= PD^r P^{-1} + Pa_1 D^{r-1} P^{-1} + \cdots + a_r I \\
&= P(D^r + a_1 D^{r-1} + \cdots + a_r I)P^{-1} = P\,[0]_{n\times n} P^{-1} \\
&= P(m'(D))P^{-1} \\
&= P[0]_{n\times n} P^{-1} \\
&= [0]_{n\times n} P^{-1} \\
&= [0]_{n\times n}.
\end{aligned}$$

Padahal $m(t)$ polinomial minimum sedangkan derajat $m'(t)$ kurang dari derajat $m(t)$, kontradiksi dengan definisi bahwa $m(t)$ polinomial minimum. Sehingga teorema benar.

■

Contoh 2.4.4 *Diberikan 2 buah matriks yaitu*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Diperoleh polinomial karakteristik keduanya adalah

$$\begin{aligned}
p(\lambda_A) =& (\lambda_A - 1)^2(\lambda_A - 2), \\
p(\lambda_B) =& (\lambda_B - 1)^2(\lambda_B - 2).
\end{aligned}$$

Sehingga masing-masing matriks sama-sama memiliki nilai eigen 1 dengan multiplisitas aljabarnya 2 dan nilai eigen 2 dengan multiplisitas aljabarnya 1. Namun keduanya memiliki polinomial minimum yang berbeda, yaitu

$$\begin{aligned}
m(\lambda_A) =& (\lambda_A - 1)^2(\lambda_A - 2), \\
m(\lambda_B) =& (\lambda_B - 1)(\lambda_B - 2).
\end{aligned}$$

Padahal apabila ditinjau dari banyaknya vektor eigen untuk $\lambda = 1$, multiplisitas geometri matriks A adalah 1 sedangkan matriks B adalah 2. Maka A tidak dapat didiagonalkan sedangkan B dapat didiagonalkan.

Setelah mendapat pengetahuan dari definisi-definisi, sekarang dapat dibahas tentang bentuk kanonik Jordan melalui Teorema berikut.

Teorema 2.4.6 *[5] Misalkan $T : V \to V$ adalah operator linear atau matriks yang polinomial karakteristik dan polinomial minimumnya adalah*

$$\begin{aligned}\triangle(t) =& (t-\lambda_1)^{n_1}...(t-\lambda_r)^{n_r},\\ m(t) =& (t-\lambda_1)^{m_1}...(t-\lambda_r)^{m_r},\end{aligned}$$

dimana λ_i adalah skalar-skalar (nilai-nilai eigen dari matriks yang menjadi operator linear) yang berbeda. Maka T memiliki representasi matriks diagonal blok J dimana setiap entri diagonalnya adalah blok-blok Jordan $J_{i,j}$, yaitu $\forall j = 1, \cdots, r_i$ blok ke-j dari nilai eigen λ_i, dengan r_i banyaknya blok Jordan dengan nilai eigen λ_i. Untuk setiap $\lambda_i, J_{i,j}$ yang bersesuaian memiliki sifat berikut ini:

1. *Paling tidak terdapat satu $J_{i,j}$ berorde m_i; semua $J_{i,j}$ yang lainnya berorde $\leqslant m_i$.*

2. *Jumlah dari orde-orde $J_{i,j}$ adalah n_i.*

3. *Banyaknya $J_{i,j}$ sama dengan multiplisitas geometrik dari λ_i.*

4. *Banyaknya $J_{i,j}$ dari setiap orde yang mungkin ditentukan secara unik oleh T.*

Matriks J disebut bentuk kanonik Jordan dari matriks T.

Bukti: Operator Linear T dapat dikelompokan menjadi jumlahan langsung operator-operator $T_1, T_2, \ldots, T_r$; yaitu, $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_r$, dimana $(t-\lambda_i)^{m_i}$ adalah polinomial minimum dari T_i. Untuk kemudahan penulisan, pada bukti Teorema ini $[0]$ melambangkan matriks 0 dengan ukuran yang bersesuaian dengan konteksnya. Jadi secara khusus dapat ditulis,

$$
\begin{aligned}
(T_1-\lambda_1 I)^{m_1} &= [0],\\
(T_2-\lambda_2 I)^{m_2} &= [0],\\
&\vdots\\
(T_r-\lambda_r I)^{m_r} &= [0].
\end{aligned}
$$

Tetapkan $N_i = T_i - \lambda_i I$. Maka, untuk $i = 1, 2, \ldots, r$,

$$T_i = N_i + \lambda_i I, \text{ dimana } N_i^{m_i} = [0].$$

Yaitu, T_i adalah jumlah dari operator skalar $\lambda_i I$ dan operator nilpoten N_i, yang memiliki indeks m_i karena $(t-\lambda_i)_i^{m_i}$ adalah polinomial minimum dari T_i.

Sekarang pilih suatu basis sedemikian rupa sehingga sehingga N_i berada dalam bentuk kanonis. Dalam basis ini, $T_i = N_i + \lambda_i I$ direpresentasikan oleh matriks diagonal blok M_i yang entri-entri diagonalnya adalah matriks-matriks $J_{i,j}$. Jumlah langsung J dari matriks-matriks M_i berbentuk kanonis Jordan yang merupakan representasi matriks dari T. Terakhir, akan ditunjukan bahwa blok-blok $J_{i,j}$ memenuhi sifat yang diinginkan. Sifat (1) berasal dari fakta bahwa N_i berindeks m_i. Sifat (2) karena T dan J memiliki polinomial karakteristik yang sama. Sifat (3) karena nulitas dari $N_i = T_i - \lambda_i I$ sama dengan multiplisitas geometri nilai eigen λ_i. Sifat (4) berasal dari fakta bahwa T_i, dan juga N_i, ditentukan secara unik oleh T.

■

Contoh 2.4.5 *Misalkan suatu polinomial karakteristik dan polino-*

mial minimum dari suatu matriks T adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\triangle(t) &= (t-2)^4(t-5)^3,\\ m(t) &= (t-2)^2(t-5)^3.\end{aligned}$$

Dengan Teorema (2.4.6) maka dapat ditentukan bentuk kanonik Jordan dari T adalah salah satu dari matriks diagonal blok berikut ini:

$$T_1 = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\right),$$

$$T_2 = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\right).$$

Jika didefinisikan $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 5$, maka pada T_1 berlaku

$$J_{1,1} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \quad J_{1,2} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \; J_{2,1} = \begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

Sedangkan pada T_2 maka berlaku

$$\begin{aligned} J_{1,1} &= \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, & J_{1,2} &= \begin{bmatrix}2\end{bmatrix},\\ J_{1,3} &= \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}, & J_{2,1} &= \begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Matriks T_1 terjadi jika T memiliki dua vektor eigen bebas linear yang termasuk dalam nilai eigen 2. Sedangkan matriks T_2 terjadi jika T memiliki tiga vektor eigen bebas linear yang termasuk dalam nilai eigen 2.

Sehingga dari beberapa pembahasan sebelumnya secara sederhana menghasilkan teorema berikut.

Teorema 2.4.7 *[6]* ***(Dekomposisi Jordan)*** *Misal A suatu matriks dengan entri-entri bilangan kompleks. Maka ada suatu matriks invertible P sedemikian hingga*

$$P^{-1}AP = J_1 \oplus \cdots \oplus J_s,$$

dimana $\forall i = 1, \cdots, s$; J_i adalah blok Jordan ke-i dengan nilai eigen dari A pada diagonal, dengan s adalah banyaknya blok Jordan. Blok Jordan ditentukan secara unik oleh A.

Bukti: Pertama akan ditunjukan jika A dan B adalah $n \times n$ kompleks matriks, maka A dan B similar jika dan hanya jika $\lambda I - A$ dan $\lambda I - B$ memiliki bentuk kanonik Jordan yang sama. Ekivalen dengan ada matriks-λ (matriks dengan entri-entrinya dalam polinomial λ) yaitu $P(\lambda)$ dan $Q(\lambda)$ adalah 2 buah invertible matriks dengan entri-entri sedemikian hingga berlaku

$$P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda) = \lambda I - B.$$

Jika A dan B similar, maka ada matriks kompleks invertible P sedemikian hingga $PAP^{-1} = B$. Berakibat

$$P(\lambda I - A)P^{-1} = \lambda I - B. \tag{2.15}$$

Selanjutnya, misalkan $P(\lambda)$ dan $Q(\lambda)$ invertible matriks-λ sedemikian hingga berlaku

$$P(\lambda)(\lambda I - A) = (\lambda I - B)Q(\lambda).$$

Lalu tulis

$$P(\lambda) = (\lambda I - B)P'(\lambda) + P,$$
$$Q(\lambda) = Q'(\lambda)(\lambda I - A) + Q,$$

dimana $P'(\lambda), Q'(\lambda)$ adalah matriks-λ, dan P, Q adalah matriks konstan. Perhatikan persamaan (2.15), dengan memperhatikan derajat λ berakibat $P'(\lambda) - Q'(\lambda) = [0]_{n\times n}$. Hal tersebut diikuti dengan berlakunya $P = Q$, lalu $PA = BP$.
Sekarang tersisa menunjukan bahwa P invertible. Misal $R(\lambda)$ adalah invers dari $P(\lambda)$, yaitu $P(\lambda)Q(\lambda) = I$ matriks identitas. Tulis $R(\lambda) = (\lambda I - A)R'(\lambda) + R$, dimana R matriks konstan, dan suatu matriks $R'(\lambda)$. Dengan fakta $PA = BP, I = P(\lambda)R(\lambda)$ memberikan

$$I = (\lambda I - B)T(\lambda) + PR, \tag{2.16}$$

dimana

$$T(\lambda) = P'(\lambda)(\lambda I - A)R' + P'(\lambda)R + PR'(\lambda).$$

Dengan memperhatikan derajat kedua ruas pada (2.16), $T(\lambda)$ haruslah matriks nol. Sehingga, $I = PR$ yaitu P invertible. Dengan mengambil matriks $B = J$ telah diperoleh hal yang diminta.

■

Penggunaan tanda $\oplus$ yang menghubungkan suatu blok $J_i, \forall i = 1, \cdots, s$, merujuk pada bentuk matriks blok dengan blok-blok diagonalnya adalah secara berurutan $J_1, J_2, \cdots, J_s$ dan blok-blok lainnya adalah matriks nol. Dapat dipahami juga bahwa matriks diagonal juga merupakan bentuk Jordan dengan blok-blok diagonalnya berukuran 1. Berikut disajikan contoh mendekomposisi Jordan suatu matriks persegi berukuran 3×3.

Contoh 2.4.6 *Misal* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$*, didapat polinomial karakteristiknya* $p(\lambda) = (\lambda - 2)^3$*, sehingga nilai eigennya 2 dengan multiplisitas aljabarnya 3. Selanjutnya dicari vektor eigen dari* *ruang eigen* $\lambda = 2$ *atau* E_2

$$\begin{aligned} E_2 &= \operatorname{Ker}(A - 2I) \\ &= \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Sehingga eigen $\lambda = 2$ *memiliki multiplisitas geometri 2. Berikutnya akan dicari polinomial minimum. Misal* $p(\lambda) = (\lambda - 2)$ *adalah calon polinomial minimum, padahal*

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga $p(\lambda) = (\lambda - 2)$ *bukan polinomial minimum.*
Misal $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ *calon polinomial minimum, diperoleh*

$$(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ *benar polinomial minimum. Maka satu-satunya kemungkinan bentuk kanonik Jordan dari* A *adalah* $J = J(2)_{2\times 2} \oplus J(2)_{1\times 1}$, *dengan* $J(\lambda)_{n\times n}$ *blok Jordan dengan ukuran* $n \times n$ *dengan nilai eigen* λ. *Tanda* $\oplus$ *didefinisikan sama seperti pada Teorema Dekomposisi Jordan (2.4.7). Sehingga dapat* *ditulis*

$$
\begin{aligned}
J &= J(2)_{2\times 2} \oplus J(2)_{1\times 1} \\
&= \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, [2]\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Pada bab analisis dan pembahasan nanti, akan dibahas bagaimana mendapatkan matriks P yang membuat $P^{-1}AP$ bentuk Jordan.

Contoh 2.4.7 *Misal* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, *didapat polinomial karakteristiknya* $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, *sehingga nilai eigennya 1 dengan multiplisitas aljabarnya 3. Dapat diperiksa bahwa*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rank}(A - I) &= 1. \\
\operatorname{rank}(A - I)^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Sehingga seperti Contoh (2.4.6), bentuk kanonik Jordan dari matriks A setidaknya memiliki satu blok berukuran 2. Maka diperoleh bentuk kanonik Jordan A

$$
J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

2.5 Grup Lie

Definisi 2.5.1 *[4] Suatu* ***grup Lie*** *adalah suatu C^∞ manifold G yang memiliki struktur grup sedemikian hingga multiplication map*

$$
\mu : G \times G \to G, \tag{2.17}
$$

dan inverse map

$$
\mathrm{i} : G \to G, \mathrm{i}(x) = x^{-1}, \tag{2.18}
$$

keduanya bersifat C^∞.

Contoh 2.5.1 $(\mathbb{R}, +)$*, yaitu himpunan bilangan real dengan operasi biner penjumlahan.*

Contoh 2.5.2 $S_1 = (z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \times)$*, yaitu himpunan bilangan kompleks berjari-jari 1 dengan operasi perkalian. Biasa dikenal dengan root of unity.*

Contoh 2.5.3 *[3]* $SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^t = 1\}$*, atau dengan sudut pandang matriks*

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \middle| \; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}. \tag{2.19}$$

Selanjutnya akan diberikan pembahasan grup Lie pada himpunan yang menjadi objek utama dalam pembahasan tugas akhir ini, yaitu $GL(n, \mathbb{C})$.

$GL(n, \mathbb{C})$ dengan definisi pada 2.1.3, merupakan suatu subset buka dari $\mathbb{C}^{n\times n}$. Padahal $\mathbb{C}^{n\times n}$ isomorfik $\mathbb{R}^{2n^2}$, sehingga dapat didefinisikan topologi untuk $GL(n, \mathbb{C})$ topologi standar dengan interval buka ditentukan dengan

$$\{m \mid \|g - m\|_2 < \varepsilon, \forall m \in GL(n, \mathbb{C})\},$$

untuk suatu matriks $g \in GL(n, \mathbb{C})$ dan bilangan real positif ε. Karena entri (i, j) dari hasil kali 2 matriks A dan B dalam $GL(n, \mathbb{C})$,

$$(AB)_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \tag{2.20}$$

adalah suatu polinomial dalam koordinat A dan B, dan perkalian

$$\mu : GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C}), \tag{2.21}$$

adalah suatu pemetaan yang bersifat C^∞, sehingga $GL(n, \mathbb{C})$ adalah suatu manifold berdimensi $2n^2$ [4].

Perhatikan bahwa minor(i, j) dari suatu matriks A adalah determinan dari submatriks A yang diperoleh dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j pada A. Sehingga dengan aturan Cramer yang dikenal di Aljabar Linear, entri (i, j) dari A adalah

$$A_{ij}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.(-1)^{i+j}(\text{minor}(j, i) \text{ dari } A), \tag{2.22}$$

dimana merupakan fungsi C^{∞} dari a_{ij} mengingat $\det(A) \neq 0$. Sehingga, *inverse map* $\mathrm{i} : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$ juga C^{∞}. hal ini membuktikan bahwa $GL(n, \mathbb{C})$ adalah grup Lie [4].

Catatan : Pada Tugas Akhir ini norma yang digunakan adalah norma-dua ($\| \cdot \|_2$). Pernyataan berikut mendefinisikan tiga norma penting pada $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}
\Big\|(a_1, \cdots, a_n)\Big\|_{\infty} &= \max(|a_i|), \\
\Big\|(a_1, \cdots, a_n)\Big\|_{1} &= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|, \\
\Big\|(a_1, \cdots, a_n)\Big\|_{2} &= \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2},
\end{aligned}$$

dengan a_i adalah entri ke-i [5].

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan langkah-langkah pengerjaan tugas akhir tentang pembuktian sifat non-Hausdorff pada grup Lie $GL(n, \mathbb{C})$ bertindak pada manifold $M(n, \mathbb{C})$, yang secara singkat dibagi menjadi 7 tahapan:

1. **Studi literatur.**
   Pada tahap ini akan dicari referensi yang berkaitan dengan grup Lie. Referensi yang dicari meliputi cabang aljabar abstrak yaitu grup, koset, dan grup kuasi; cabang analisis yaitu: topologi, manifold, dan kekontinuan; dan cabang aljabar linear yaitu ruang eigen, vektor eigen dan dekomposisi Jordan. Referensi-referensi yang dicari dapat diperoleh melalui jurnal-jurnal ataupun buku-buku.

2. **Mengkaji tentang grup Lie.**
   Setelah mempelajari dan memahami referensi yang ada, pada tahap ini akan dikaji definisi dan beberapa teorema-teorema fundamental yang berkaitan dengan grup. Lalu akan dikaji definisi dan sifat-sifat manifold sebagai suatu ruang topologi, termasuk juga di dalamnya sifat kontinu suatu fungsi. Setelah mendapat pengetahuan yang dalam dari materi aljabar abstrak dan analisis tersebut, akan dikaji tentang grup Lie. Kemudian akan dibuktikan juga bahwa $GL(n, \mathbb{C})$ adalah grup Lie.

3. **Mengkaji grup kuasi pada grup Lie.**
   Pada tahap ini, mulai dikaji koset-koset dari suatu grup dan bagaimana grup kuasi terbentuk. Setelah memahami grup kuasi akan dikaji grup kuasi pada grup Lie beserta operasi yang digunakan. Pada penelitian ini operasi yang digunakan dalam menentukan orbit-orbit pada ruang kuasi adalah operasi konjugasi pada matriks.

4. **Menyusun langkah-langkah dalam mendapatkan bentuk kanonik Jordan.**
   Setelah memahami relasi ekivalen yang bersesuaian dengan operasi konjugasi, akan dibuktikan bentuk dari orbit-orbitnya adalah bentuk kanonik Jordan. Lalu, pada tahap ini akan dibahas generalisasi vektor eigen. Selanjutnya akan dihubungkan pengetahuan tentang generalisasi vektor eigen dan bagaimana langkah-langkah mendapatkan bentuk kanonik Jordan untuk sebarang matriks yang diberikan.

5. **Mengonstruksi contoh mendekomposisi Jordan suatu matriks.**
   Setelah mengetahui langkah-langkah dalam mendapatkan bentuk kanonik Jordan, akan dikonstruksi contoh-contoh mendekomposisi matriks. Dari matriks yang terbentuk akan ditunjukan bahwa matriks-matriks yang memiliki nilai-nilai eigen yang sama bisa jadi terdapat pada orbit yang berbeda.

6. **Menyajikan langkah-langkah perturbasi untuk membuktikan sifat non-Hausdorff ruang kuasi.**
   Pada tahap ini akan diberikan bukti bagaimana untuk suatu perubahan yang sangat kecil/perturbasi pada suatu orbit, sebarang bentuk kanonik Jordan dapat didiagonalkan. Selanjutnya akan dibuktikan sifat non-Hausdorff dari ruang kuasi yang dibahas.

7. **Penarikan kesimpulan.**
   Pada tahap yang terakhir, akan diberikan kesimpulan dari penelitian yang dilakukan yaitu sifat non-Hausdorff dari ruang kuasi terbukti secara formal. Selanjutnya, dilakukan pembukuan tugas akhir.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas hasil penelitian mengenai sifat Hausdorff hasil tindakan grup Lie. Pembahasan pada bagian (4.1) mengenai tindakan grup Lie $GL(n,\mathbb{C})$ pada $M(n,\mathbb{C})$ serta beberapa sifat-sifatnya. Selanjutnya pada bagian (4.2) dibahas dekomposisi Jordan yang lebih mendalam. Sedangkan pada bagian (4.3) dibahas langkah-langkah perturbasi matriks untuk menunjukan sifat non-Hausdorff himpunan orbit-orbit hasil tindakan grup Lie. Selain itu juga diberikan beberapa contoh untuk memudahkan pemahaman.

4.1 $GL(n,\mathbb{C})$ bertindak pada $M(n,\mathbb{C})$

Subhimpunan $G = GL(n,\mathbb{C})$ dari himpunan $M = M(n,\mathbb{C})$, yang didefinisikan sama seperti Contoh (2.1.3), bertindak secara konjugasi pada M. Tindakan ini adalah $G \times M \to M$, dimana $(g,m) \to g\,m\,g^{-1}$ untuk setiap $g \in G$ dan setiap $m \in M$. Seluruh sifat/aksioma definisi tindakan grup (2.2.1) telah dipenuhi, yaitu:

1. Untuk sebarang $m = [m_{i,j}] \in M$, dengan mengambil $e = I$ (matriks identitas berukuran $n \times n$), diperoleh

$$e.m = I.m = I[m_{i,j}]I^{-1} = I[m_{i,j}]I = [m_{i,j}] = m.$$

2. Untuk semua $g_1, g_2 \in G$ dan semua $m \in M$, berlaku

$$\begin{aligned} g_1.(g_2.m) &= g_1.(g_2\,m\,g_2^{-1}) \\ &= g_1 g_2\,m\,g_2^{-1} g_1^{-1} \\ &= (g_1 g_2) m (g_2^{-1} g_1^{-1}). \\ &= g_1 g_2\,m\,(g_1 g_2)^{-1} \\ &= (g_1.g_2).m \end{aligned}$$

Melalui tindakan ini, hasil tindakannya dapat dikelompokkan menjadi klas-klas ekivalen yang disebut dengan ruang kuasi grup Lie, berdasarkan jaminan Teorema (2.4.7) dengan mengambil matriks P

pada persamaan $P^{-1}AP$ sebagai matriks pada G, dan karena untuk setiap elemen $g \in G$ punya invers, maka orbit tindakannya adalah bentuk kanonik Jordan. Himpunan orbit-orbit tersebut selanjutnya dinotasikan dengan M/G.

Sebagai gambaran misal $m_1, m_2 \in M$ memiliki bentuk Jordan yang sama J. Berdasarkan Teorema dekomposisi Jordan (2.4.7), yaitu ada matriks invertible g_1 sedemikian hingga $m_1 = g_1^{-1} J\, g_1$, dan ada matriks invertible g_2 sedemikian hingga $m_2 = g_2^{-1} J\, g_2$. Tindakan konjugasi G pada M membuat matriks m_1 dan m_2 terletak pada orbit yang sama, yaitu klas konjugasi

$$K_G(J) = \{g\, J\, g^{-1} | g \in G\}, \tag{4.1}$$

yaitu dengan mengambil $g = g_1^{-1}$ untuk m_1 dan $g = g_2^{-1}$ untuk m_2 diperoleh

$$\begin{aligned} g_1^{-1} J g_1 &= (g_1^{-1}) J (g_1^{-1})^{-1} \in K_G(J), \\ g_2^{-1} J g_2 &= (g_2^{-1}) J (g_2^{-1})^{-1} \in K_G(J). \end{aligned}$$

4.2 Dekomposisi Jordan

Pada bagian ini dibahas mengenai dekomposisi Jordan lebih mendalam dari apa yang sudah dibahas pada bagian tinjauan pustaka. Berikut diberikan langkah-langkah dalam mendapatkan matriks $P \in GL(n, \mathbb{C})$ sedemikian hingga $J = P^{-1}AP, \forall A \in M(n, \mathbb{C})$ sebagaimana dijamin eksistensinya oleh Teorema dekomposisi Jordan.

1. Tentukan nilai-nilai eigen dari matriks A.

2. Tentukan vektor-vektor eigen yang bebas linear dari matriks A. Jika banyak vektor sama dengan ukuran matriks, maka proses selesai, bentuk matriks P sebagai kolom-kolom dari vektor-vektor tersebut, jika hal tersebut terjadi maka bentuk kanonik Jordan dari A adalah matriks diagonal. jika tidak, lanjut ke langkah selanjutnya.

3. Dapatkan bilangan terkecil $n \in \mathbb{N}$, sedemikian hingga banyaknya vektor-vektor pembangun Ker$(A - \lambda I)^n$, tidak bertambah lagi jika n ditambah 1. Vektor-vektor v_n yang memenuhi $(A - \lambda I)^n v_n = \bar{0}$ tetapi $(A - \lambda I)^{n-1} v_n \neq \bar{0}$ disebut vektor eigen tergeneralisir dengan rank n.

4. Susun vektor-vektor rantai Jordan yang didapat menjadi kolom-kolom matriks P dengan urutan vektor dengan rank yang lebih besar terletak pada kanan vektor rank 1 kurangnya pada rantai Jordan yang sama. Misal x_m adalah vektor eigen tergeneralisir dengan rank m dengan nilai eigen λ. [7] Rantai Jordan yang dibangun oleh x_m adalah himpunan vektor-vektor bebas linear

   $$\{x_m, x_{m-1}, \cdots, x_1\},$$

   yang didapat melalui

   $$\begin{aligned} x_{m-1} =& (A - \lambda I)\, x_m, \\ x_{m-2} =& (A - \lambda I)^2\, x_m = (A - \lambda I) x_{m-1}, \\ &\vdots \\ x_1 =& (A - \lambda I)^{m-1} x_m = (A - \lambda I) x_2. \end{aligned}$$

Berikut disajikan contoh-contoh mendapatkan matriks P sedemikian hingga $J = P^{-1} A\, P$ untuk suatu matriks A dengan J bentuk kanonik Jordan dari A.

Contoh 4.2.1 *Perhatikan kembali Contoh (2.4.6), diberikan matriks*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari matriks P sedemikian hingga $P^{-1}AP$ bentuk kanonik Jordan. Berikut langkah-langkahnya:

1. *Dari Contoh (2.4.6), diperoleh seluruh nilai eigen dari matriks A adalah 2 dengan multiplisitas aljabarnya 3.*

2. *Dari Contoh (2.4.6), diperoleh vektor-vektor eigennya yaitu*

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}.$$

3. *Karena $(A - \lambda I)^2$ matriks nol, berarti 2 adalah n terkecil, disini dapat dipilih sebarang 1 vektor pembangun asalkan bebas linear dengan 2 vektor eigen di awal, vektor ini merupakan vektor eigen tergeneralisir, dalam pengerjaan ini dipilih*

$$x_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Lalu dicari rantai Jordannya

$$\begin{aligned} x_1 &= (A - 2I)x_2 \\ &= \begin{bmatrix}-1 & -3 & 1\\1 & 3 & -1\\2 & 6 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},$$

untuk rantai Jordan yang lain dapat dipilih sebarang vektor eigen di awal yang bebas linear dari rantai Jordan yang sudah terpilih. Karena untuk memenuhi tinggal 1 vektor lagi, vektor eigen ini sama halnya dengan vektor eigen tergeneralisir dengan rank 1. Diperoleh

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. *Sehingga diperoleh matriks P yaitu*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dapat diperiksa

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J. \end{aligned}$$

Contoh 4.2.2 *Misal* $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$.

1. *Dengan menghitung det($A - \lambda$), didapat polinomial karakteristiknya $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2$, sehingga nilai eigennya 3 dengan multiplisitas aljabarnya 2.*

2. *Selanjutnya dicari vektor eigen dari ruang eigen* $\lambda = 3$ *atau* E_3*, yaitu*

$$\begin{aligned} E_3 &= \operatorname{Ker}(A - 3I) \\ &= \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}\right) \\ &= \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

   Sehingga eigen $\lambda = 2$ *memiliki multiplisitas geometri 1, dengan vektor eigennya* $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

3. *Karena*

$$(A - 3I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   maka $n = 2$ *adalah* n *terkecil sedemikian hingga* $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^n$*, tidak bertambah lagi jika* n *ditambah 1. Akan dicari rantai Jordan* $\{x_1, x_2\}$*, dengan* x_1 *vektor eigen tergeneralisir dengan rank 1 dan* x_2 *vektor eigen tergeneralisir dengan rank 2. Karena* $(A - 3I)^2$ *matriks nol, dengan mudah dapat dipilih*

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Selanjutnya didapat

$$\begin{aligned} x_1 &= (A - 3I)\, x_2 \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. *Dari rantai Jordan yang terbentuk, matriks P dapat dikonstruksi menjadi*

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dapat diperiksa

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = J. \end{aligned}$$

Setelah mengetahui bentuk elemen-elemen M/G, berikutnya akan dibahas bagaimana mengambil persekitaran pada orbit-orbit M/G, kemudian akan diarahkan eksistensi irisannya untuk pembuktian sifat non-Hausdorff M/G dengan perturbasi matriks.

4.3 Perturbasi Matriks

Diberikan suatu matriks $A \in M(n, \mathbb{C})$, suatu matriks $A^* \in M(n, \mathbb{C})$ diperoleh dengan menambahkan entri-entrinya dengan suatu bilangan yang relatif kecil atau memberikan perubahan sedikit entri-entri pada matriks A, dalam hal ini artinya matriks A mengalami perturbasi sehingga menjadi matriks A^*.

Contoh 4.3.1 *Misal* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$*, diberikan* $\varepsilon = 0,05$*, sehingga untuk* $|A - A^*| < \varepsilon$ *dapat dipilih* $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} < \varepsilon$ *dimana* $\delta_1 = 0,01$ *dan* $\delta_2 = 0,02$*, berakibat* A^* *dapat ditentukan*

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{bmatrix} 3 - \delta_1 & -1 \\ 0 & 2 - \delta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2,99 & -1 \\ 0 & 1,98 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}|A - A^*| &= \left\| \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2,99 & -1 \\ 0 & 1,98 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{|0.01|^2 + |0|^2 + |0,02|^2 + |0|^2} \\ &\approx 0,02236 < 0,05 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Sekarang misalkan $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ adalah 2 matriks yang memiliki nilai-nilai eigen yang sama tapi memiliki bentuk kanonik Jordan berbeda, yaitu $A = [g_A]J_A[g_A]^{-1}$, $B = [g_B]J_B[g_B]^{-1}$ dengan $J_A \neq J_B$, untuk beberapa $[g_A], [g_B] \in GL(n, \mathbb{C})$, dan J_A dan J_B berturut-turut bentuk kanonik Jordan matriks A dan B. Karena A dan B memiliki bentuk Jordan yang berbeda, sehingga pada M/G, A dan B terletak pada orbit yang berbeda. Misalkan

$$\begin{aligned}J_A &= J_A(\lambda_1)_{n_1 \times n_1} \oplus J_A(\lambda_2)_{n_2 \times n_2} \oplus \cdots \oplus J_A(\lambda_s)_{n_s \times n_s} \\ &= \begin{bmatrix} J_A(\lambda_1)_{n_1 \times n_1} & [0]_{n_1 \times n_2} & \cdots & [0]_{n_1 \times n_s} \\ [0]_{n_2 \times n_1} & J_A(\lambda_2)_{n_2 \times n_2} & \cdots & [0]_{n_2 \times n_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{n_s \times n_1} & [0]_{n_s \times n_2} & \cdots & J_A(\lambda_s)_{n_s \times n_s} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

dengan $J_A(\lambda_i)_{n_i \times n_i}$, untuk $i = 1, 2, \cdots, s$, adalah blok-blok Jordan ke-i yang eigennya λ_i dengan ukuran blok $n_i \times n_i$ dan $[0]_{n_i \times n_j}$ adalah matriks nol dengan ukuran $n_i \times n_j$.

$$J_A(\lambda_i)_{n_i \times n_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang serupa dapat ditentukan juga J_B.

Selanjutnya, diberikan perturbasi ε pada kedua matriks J_A dan J_B, sehingga didapat matriks J_A^*

$$J_A^* = J_A^*(\lambda_1)_{n_1\times n_1} \oplus J_A^*(\lambda_2)_{n_2\times n_2} \oplus \cdots \oplus J_A^*(\lambda_s)_{n_s\times n_s},$$

yaitu setiap elemen pada diagonal utama matriks dikurangi δ_i, sehingga jika diperhatikan setiap blok ke-$j, \forall j = 1, 2, \cdots, s$, akan terlihat

$$J_A^*(\lambda_j)_{n_j\times n_j} = \begin{bmatrix} \lambda_j - \delta_{i_1} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j - \delta_{i_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_j - \delta_{i_{n_i}} \end{bmatrix},$$

dengan syarat $\delta_i, \forall i = 1, 2, ..., n$, menghasilkan nilai $(\lambda_j - \delta_i)$ yang seluruhnya berbeda dan memenuhi

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|^2} < \varepsilon.$$

Dengan cara yang serupa dapat ditentukan juga J_B^*.

$$J_B^* = J_B^*(\lambda_1)_{n_1\times n_1} \oplus J_B^*(\lambda_2)_{n_2\times n_2} \oplus \cdots \oplus J_B^*(\lambda_t)_{n_t\times n_t}.$$

Pada J_A^* dan J_B^*, karena setiap hasil $\lambda_j - \delta_i$ berbeda, setiap entri pada diagonal utama menjadi berbeda. Berdasarkan sifat di Aljabar Linear, suatu matriks yang nilai-nilai eigennya berbeda maka similar dengan matriks diagonal (ingat juga bahwa karena bentuk Jordan juga matriks berbentuk segitiga maka nilai-nilai eigennya adalah entri-entri pada diagonal utama), akibatnya J_A^* dan J_B^* sama-sama similar dengan matriks diagonal atau bentuk Jordan dengan ukuran tiap bloknya adalah satu. Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned}
J_A^* &= J_A^*(\lambda_1)_{n_1\times n_1} \oplus J_A^*(\lambda_2)_{n_2\times n_2} \oplus \cdots \oplus J_A^*(\lambda_s)_{n_s\times n_s} \\
&= P_A^{-1}(J(\lambda_1-\delta_1)_{1\times 1} \oplus J(\lambda_1-\delta_2)_{1\times 1} \oplus \cdots \\
&\quad \cdots \oplus J(\lambda_s-\delta_{n-1})_{1\times 1} \oplus J(\lambda_s-\delta_n)_{1\times 1})P_A \\
&\sim J(\lambda_1-\delta_1)_{1\times 1} \oplus J(\lambda_1-\delta_2)_{1\times 1} \oplus \cdots \oplus J(\lambda_s-\delta_n)_{1\times 1}.
\end{aligned}$$

Begitu juga dengan J_B^*

$$J_B^* \sim J(\lambda_1-\delta_1)_{1\times 1} \oplus J(\lambda_1-\delta_2)_{1\times 1} \oplus \cdots \oplus J(\lambda_t-\delta_n)_{1\times 1}.$$

Sehingga karena J_A^* dan J_B^* sama-sama ekivalen dengan matriks blok-blok Jordan berukuran satu-satu, maka J_A^* dan J_B^* ekivalen atau dapat ditulis

$$J_A^* \sim J_B^*.$$

Untuk menunjukan sifat non-Hausdorff ruang kuasi M/G hanya diperlukan suatu eksistensi irisan 2 persekitaran orbit berbeda agar bertentangan dengan definisi ruang Hausdorff (2.3.5). Pada penelitian ini irisan tersebut adalah bentuk diagonal. Keberagaman nilai-nilai eigen menjadi kunci agar suatu matriks dapat didiagonalkan, hal itulah menjadi alasan digunakan perturbasi hanya pada entri-entri diagonal utama.

Dari itu, ambil sebarang persekitaran pada 2 orbit berbeda matriks-matriks dengan nilai-nilai eigen yang sama tapi memiliki bentuk kanonik Jordan berbeda, yaitu himpunan buka pada topologi standar M/G dengan ukurannya ε. Himpunan buka tersebut mempunyai arti sama dengan perturbasi $\varepsilon > 0$. Padahal untuk setiap perturbasi $\varepsilon > 0$ memuat orbit matriks diagonal nilai-nilai eigen bersesuaian yang sama, dan matriks diagonal tersebutlah yang menjadi irisan setiap himpunan buka. Karena ketiadaan 2 buah himpunan buka yang saling asing tersebut, maka M/G bersifat non-Hausdorff.

Teorema berikut digunakan untuk mempermudah dalam mendapatkan matriks P dari suatu matriks A yang berbentuk khusus mirip blok Jordan sedemikian hingga $P^{-1}A\,P$ matriks diagonal. Teorema ini akan digunakan untuk mendapatkan matriks P pada contoh di bagian akhir.

Teorema 4.3.1 *Misalkan A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ yang memenuhi kondisi*

1. *Seluruh entri pada diagonal utama berbeda.*
2. *Seluruh entri pada super diagonal atas, yaitu entri-entri tepat 1 baris diatas diagonal utama, bernilai 1.*
3. *Seluruh entri selain pada diagonal utama dan super diagonal atas bernilai nol.*

yaitu A dapat ditulis menjadi

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}.$$

Jika J_A adalah bentuk kanonik Jordan dari A, maka matriks P, dengan sifat $P^{-1}AP = J_A$, dapat ditentukan oleh

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ 0 & a_2 - a_1 & \frac{1}{a_3 - a_1} & \cdots & \frac{1}{\prod_{i=2}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \cdots & \frac{1}{\prod_{i=3}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Bukti: Karena A matriks segitiga atas maka nilai-nilai eigennya terletak pada entri-entri diagonal utama, yaitu $a_i, \forall i = 1, 2, \cdots, n$. Sekarang akan dicari vektor-vektor eigennya, karena diketahui $\forall i = 1, 2, \cdots, n$ seluruh a_i berbeda, maka seluruh eigennya juga berbeda, berakibat untuk setiap ruang eigen E_{a_i} hanya dibangun 1 eigen vektor. Selanjutnya akan dicari masing-masing vektor eigennya.

$$
\begin{aligned}
E_{a_1} &= \text{Ker}(A - a_1 I) \\
&= \text{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n - a_1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{a_2} &= \operatorname{Ker}(A - a_2 I) \\
&= \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix}
a_1 - a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_3 - a_2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - a_2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n - a_2
\end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ a_2 - a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}. \\
E_{a_3} &= \operatorname{Ker}(A - a_3 I) \\
&= \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix}
a_1 - a_3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & a_2 - a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - a_3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n - a_3
\end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{a_3 - a_1} \\ 1 \\ a_3 - a_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}. \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{a_n} &= \mathrm{Ker}(A - a_n I) \\
&= \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} a_1 - a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - a_n & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ \frac{1}{\prod_{i=2}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ \frac{1}{\prod_{i=3}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ \vdots \\ 1 \\ a_n - a_{n-1} \end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh vektor-vektor eigennya

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 - a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{a_3 - a_1} \\ 1 \\ a_3 - a_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ \frac{1}{\prod_{i=2}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ \frac{1}{\prod_{i=3}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ \vdots \\ 1 \\ a_n - a_{n-1} \end{bmatrix}.
$$

Maka dapat dibentuk matriks P dengan kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen yang didapat.

$\blacksquare$

Berikut disajikan contoh-contoh dari uraian yang telah dibahas.

Contoh 4.3.2 *Pandang matriks $A \in M(3, \mathbb{C})$*

$$A = \begin{bmatrix} 5+2i & 1-i & 1-i \\ 3-3i & 7 & 3-3i \\ -4+4i & -4+4i & 7i \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari matriks P_A sedemikian hingga $P_A^{-1}AP_A$ bentuk kanonik Jordan. Berikut langkah-langkahnya:

1. *Dengan menghitung $|\lambda I - A|$, diperoleh polinomial karakteristiknya $\triangle(\lambda) = (\lambda - (4+3i))^3$ lalu didapat polinomial minimumnya $m(\lambda) = (\lambda - (4+3i))^2$, maka seluruh nilai eigen dari matriks A adalah $4+3i$ dengan multiplisitas aljabarnya 3, dan bentuk kanonik Jordan dari A bukan matriks diagonal.*

2. *Selanjutnya dicari vektor-vektor eigennya yaitu*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. *Karena $(A - \lambda I)^2$ matriks nol, berarti 2 adalah n terkecil, disini dapat dipilih sebarang 1 vektor pembangun asalkan bebas linear dengan 2 vektor eigen di awal, vektor ini merupakan vektor eigen tergeneralisir, dalam pengerjaan ini dipilih*

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

lalu dicari rantai Jordannya

$$\begin{aligned} x_1 &= (A-(4+3i)I)x_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1-i & 1-i & 1-i \\ 3-3i & 3-3i & 3-3i \\ -4+4i & -4+4i & -4+4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-i \\ 3-3i \\ -4+4i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1-i \\ 3-3i \\ -4+4i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

untuk rantai Jordan yang lain dapat dipilih sebarang vektor eigen di awal yang bebas linear dari rantai Jordan yang sudah terpilih. Karena untuk memenuhi tinggal 1 vektor lagi, vektor eigen ini sama halnya dengan vektor eigen tergeneralisir dengan rank 1. Diperoleh

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. *Sehingga dengan menyusun vektor-vektor eigen tergeneralisir sebagai kolom-kolom matriks P_A diperoleh*

$$P_A = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 3-3i & 0 & 1 \\ -4+4i & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

dan bentuk kanonik Jordan dari A, yaitu matriks $J_A = P_A^{-1}AP_A$

$$J_A = \begin{bmatrix} 4+3i & 1 & 0 \\ 0 & 4+3i & 0 \\ 0 & 0 & 4+3i \end{bmatrix}.$$

Sekarang pandang matriks $B \in M(3, \mathbb{C})$

$$B = \begin{bmatrix} 4+3i & -i & 1 \\ 0 & 4+3i & 1-3i \\ 0 & 0 & 4+3i \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari matriks P_B sedemikian hingga $P_B^{-1}BP_B$ bentuk kanonik Jordan. Berikut langkah-langkahnya:

1. *Dengan menghitung $|\lambda I - B|$, diperoleh polinomial karakteristiknya $\triangle(\lambda) = (\lambda - (4+3i))^3$ lalu didapat polinomial minimumnya $m(\lambda) = (\lambda - (4+3i))^3$, maka seluruh nilai eigen dari matriks B adalah $4+3i$ dengan multiplisitas aljabarnya 3, dan bentuk kanonik Jordan dari B bukan matriks diagonal.*

2. *Selanjutnya dicari vektor-vektor eigennya yaitu*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. *Karena $(B - \lambda I)^2$ bukan matriks nol, sedangkan $(B - \lambda I)^3$ matriks nol berarti 3 adalah n terkecil, disini dapat dipilih sebarang 1 vektor pembangun*

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lalu dicari rantai Jordannya

$$\begin{aligned} x_2 &= (B - (4+3i)I)x_3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1-3i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1-3i \\ 0 \end{bmatrix}, \\ x_1 &= (B - (4+3i)I)x_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1-3i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-3i \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3-i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3-i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1-3i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. *Sehingga dengan menyusun vektor-vektor eigen tergeneralisir sebagai kolom-kolom matriks P_B yaitu*

$$P_B = \begin{bmatrix} -3-i & 1 & 0 \\ 0 & 1-3i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dan bentuk kanonik Jordan dari B, yaitu matriks J_B

$$J_B = \begin{bmatrix} 4+3i & 1 & 0 \\ 0 & 4+3i & 1 \\ 0 & 0 & 4+3i \end{bmatrix}.$$

Maka A dan B adalah contoh dari matriks-matriks yang memiliki nilai-nilai eigen yang sama tapi memiliki bentuk kanonik Jordan yang berbeda. Berakibat jika $M = M(3, \mathbb{C})$ dan $G = GL(3, \mathbb{C})$, maka pada M/G, A dan B terletak pada orbit yang berbeda. Misal diambil $\varepsilon = 0,001$ dengan $\delta_i, \forall i = 1, 2, 3$ diberikan oleh

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0,001; \\ \delta_2 &= 0,002; \\ \delta_3 &= 0,0005; \end{aligned}$$

didapat

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} |\delta_i|^2} = 0,00000525 < 0,001 = \varepsilon.$$

Lalu perturbasi ε kedua matriks J_A dan J_B menjadi J_A^* dan J_B^*, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} J_A^* &= \begin{bmatrix} 4+3i-\delta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 4+3i-\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4+3i-\delta_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3,999+3i & 1 & 0 \\ 0 & 3,998+3i & 0 \\ 0 & 0 & 3,9995 \end{bmatrix} \\ &= P_{A^*} D_{A^*} P_{A^*}^{-1} \\ &\sim D_{A^*}. \end{aligned}$$

Dengan matriks diagonal D_{A^*} adalah

$$D_{A^*} = \begin{bmatrix} 3,999+3i & 0 & 0 \\ 0 & 3,998+3i & 0 \\ 0 & 0 & 3,9995+3i \end{bmatrix}.$$

Untuk mendapatkan matriks P_{A^*} dapat menggunakan Teorema (4.3.1). Perhatikan bahwa pada J_A^* terdapat 2 blok diagonal (misal didefinisikan matriks blok A_1 dan A_2) yang memenuhi kriteria teorema tersebut.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3,999+3i & 1 \\ 0 & 3,998+3i \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 3,9995+3i \end{bmatrix}.$$

Dengan Teorema (4.3.1) diperoleh matriks P_1 dan P_2 sedemikian hingga berlaku $P_1^{-1}A_1\,P_1$ dan $P_2^{-1}A_2\,P_2$ keduanya matriks diagonal.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (3,998+3i-(3,999+3i)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0,001 \end{bmatrix},$$
$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga dapat dibentuk matriks P_{A^*} dengan blok-blok diagonalnya adalah P_1 dan P_2.

$$\begin{aligned} P_{A^*} &= P_1 \oplus P_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Begitu juga untuk J_B^*, diperoleh:

$$\begin{aligned}
J_B^* &= \begin{bmatrix} 4+3i-\delta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 4+3i-\delta_2 & 1 \\ 0 & 0 & 4+3i-\delta_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3,999+3i & 1 & 0 \\ 0 & 3,998+3i & 1 \\ 0 & 0 & 3,9995+3i \end{bmatrix} \\
&= P_{B^*} D_{B^*} P_{B^*}^{-1} \\
&\sim D_{B^*}.
\end{aligned}$$

Dengan matriks diagonal D_{B^*} adalah

$$D_{B^*} = \begin{bmatrix} 3,999+3i & 0 & 0 \\ 0 & 3,998+3i & 0 \\ 0 & 0 & 3,9995+3i \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang sama seperti mendapatkan P_{A^*}, gunakan Teorema (4.3.1) lalu diperoleh P_{B^*}

$$P_{B^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{0,0005} \\ 0 & -0,001 & 1 \\ 0 & 0 & 0,0015 \end{bmatrix}.$$

Karena $D_{A^*} = D_{B^*}$ sehingga $J_A^* \sim J_B^*$. Maka dengan perturbasi ε, persekitaran A dan B sama-sama memuat orbit matriks diagonal, berakibat irisannya tidak kosong.

Contoh 4.3.3 *Misalkan*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Karena keduanya matriks segitiga atas, mudah diamati bahwa kedua matriks diatas sama-sama memiliki nilai-nilai eigen: 1 dengan multiplisitas aljabar 3, dan 2 dengan multiplisitas aljabar 2. Selanjutnya dicari dekomposisi Jordan keduanya. Kemudian dengan cara yang sama seperti pada bagian (4.2), diperoleh matriks P_A *adalah*

$$P_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 23 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -1 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Lalu didapat matriks P_A^{-1} *yaitu*

$$P_A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -46 \\ 0 & 2 & 3 & 8 & -33 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

sehingga berlaku

$$\begin{aligned} J_A &= P_A^{-1} A P_A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kemudian dengan cara yang sama juga seperti pada bagian (4.2), *diperoleh matriks P_B adalah*

$$P_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & \frac{45}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{15}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Lalu diperoleh matriks P_B^{-1} yaitu

$$P_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 45 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

sehingga berlaku

$$\begin{aligned} J_B &= P_B^{-1} B P_B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Maka A dan B adalah contoh dari matriks-matriks yang memiliki nilai-nilai eigen yang sama tapi memiliki bentuk kanonik Jordan yang berbeda. Berakibat jika $M = M(5, \mathbb{C})$ dan $G = GL(5, \mathbb{C})$, maka pada M/G, A dan B terletak pada orbit yang berbeda.

Misal diambil $\varepsilon = 0,001$ *dengan* $\delta_i, \forall i = 1, \cdots, 5$ *diberikan oleh*

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0,001; \\ \delta_2 &= 0,002; \\ \delta_3 &= 0,0005; \\ \delta_4 &= 0,0015; \\ \delta_5 &= 0,0025; \end{aligned}$$

didapat

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5} |\delta_i|^2} = 0,00001375 < 0,001 = \varepsilon.$$

Lalu perturbasi ε *kedua matriks* J_A *dan* J_B *menjadi* J_A^* *dan* J_B^**, sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} J_A^* &= \begin{bmatrix} 1-\delta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\delta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\delta_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\delta_5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,999 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,998 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9985 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,9975 \end{bmatrix} \\ &= P_{A^*} D_{A^*} P_{A^*}^{-1} \\ &\sim D_{A^*}. \end{aligned}$$

Dengan matriks diagonal D_{A^*} adalah

$$D_{A^*} = \begin{bmatrix} 0,999 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,998 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9985 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,9975 \end{bmatrix}.$$

Untuk mendapatkan matriks P_{A^*} dapat menggunakan Teorema (4.3.1). Perhatikan bahwa pada J_A^* terdapat 2 blok diagonal (misal didefinisikan matriks blok A_1 dan A_2) yang memenuhi kriteria teorema tersebut.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,999 & 1 & 0 \\ 0 & 0,998 & 1 \\ 0 & 0 & 0,9995 \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1,9985 & 1 \\ 0 & 1,9975 \end{bmatrix}.$$

Dengan Teorema (4.3.1) diperoleh matriks P_1 dan P_2 sedemikian hingga berlaku $P_1^{-1} A_1 P_1$ dan $P_2^{-1} A_2 P_2$ keduanya matriks diagonal.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{(0,9995-0,999)} \\ 0 & (0,998-0,999) & 1 \\ 0 & 0 & (0,9995-0,998) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{0,0005} \\ 0 & -0,001 & 1 \\ 0 & 0 & 0,0015 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (1,9975 - 1,9985) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0,001 \end{bmatrix}.$$

Sehingga dapat dibentuk matriks P_{A^*} dengan blok-blok diagonal-nya adalah P_1 dan P_2.

$$P_{A^*} = P_1 \oplus P_2$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{0,0005} & 0 & 0 \\ 0 & -0,001 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0015 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,001 \end{bmatrix}.$$

Begitu juga untuk J_B^*, diperoleh:

$$J_B^* = \begin{bmatrix} 1-\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\delta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\delta_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\delta_5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0,999 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,998 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9985 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,9975 \end{bmatrix}$$
$$= P_{B^*} D_{B^*} P_{B^*}^{-1}$$
$$\sim D_{B^*}.$$

Dengan matriks diagonal D_{B^*} adalah

$$D_{B^*} = \begin{bmatrix} 0,999 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,998 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9985 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,9975 \end{bmatrix}.$$

Sama seperti mendapatkan P_{A^*}, pada J_{A^*} didefinisikan 3 blok diagonal B_1, B_2, dan B_3 yaitu

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,999 \end{bmatrix},$$
$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,998 & 1 \\ 0 & 0,9995 \end{bmatrix},$$
$$B_3 = \begin{bmatrix} 1,9985 & 1 \\ 0 & 1,9975 \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang sama seperti mendapatkan P_{A^*}, gunakan Teorema (4.3.1) lalu diperoleh

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$
$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0,0015 \end{bmatrix},$$
$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0,001 \end{bmatrix},$$

dengan sifat Q_1, Q_2 dan Q_3 berturut-turut berlaku $Q_1^{-1} B_1 Q_1$, $Q_2^{-1} B_2 Q_2$ dan $Q_3^{-1} B_3 Q_3$ seluruhnya menghasilnya matriks diagonal. Sehingga didapat P_{B^*} dengan blok-blok diagonalnya Q_1, Q_2, dan Q_3.

$$
\begin{aligned}
P_{B^*} &= Q_1 \oplus Q_2 \oplus Q_3 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0015 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,001 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Karena $D_{A^*} = D_{B^*}$ *sehingga* $J_A^* \sim J_B^*$*. Maka dengan perturbasi* ε*, persekitaran* A *dan* B *sama-sama memuat orbit matriks diagonal, berakibat irisannya tidak kosong.*

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini akan dijelaskan kesimpulan dan saran dari pembahasan Tugas Akhir yang telah disampaikan. Dan juga diharapkan dari penelitian ini, dapat mendorong penelitian-penelitian selanjutnya yang berhubungan dengan grup Lie.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disampaikan, maka dapat disimpulkan hipotesis Kirilov pada bukunya [3], bahwa sifat non-Hausdorff ruang hasil tindakan grup Lie $GL(n, \mathbb{C})$ bertindak pada $M(n, \mathbb{C})$ adalah benar.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya, diharapkan juga dikaji bagaimana sifat T_0 dan T_1 pada ruang hasil tindakan grup Lie $GL(n, \mathbb{C})$ bertindak pada $M(n, \mathbb{C})$ secara konjugasi, atau bahkan T_2 namun untuk topologi yang berbeda dengan tindakan yang berbeda pula. Pengetahuan tentang sifat-sifat hasil tindakan grup yang didapat dapat diaplikasikan untuk variasi pembentuk *public-key* pada Kriptografi ataupun di ilmu fisika terutama *General Relativity*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Subiono. (2019). ”Aljabar: sebagai suatu Pondasi Matematika”. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[2] Raisinghania, M. D., Aggarwal, R. S. (1980). ”Topology For Post-Graduate Students of Indian Universities”. New Delhi.

[3] Kirilov, A. (2004). “Introduction to Lie Groups and Lie Algebras”. http://www.math.stonybrook.edu/ kirillov/. Diakses pada 16 Desember 2019 pukul 13:12 WIB.

[4] Tu, L. W. (2010). “An Introduction to Manifolds”. **Springer**.

[5] Lipschutz, S., Lipson, M. (2006). ”Aljabar Linear, Edisi Ketiga”. **Erlangga**.

[6] Zhang, F. (2011). ”Matrix Theory, Basic Results and Techniques, Second Edition”. **Springer**.

[7] Bronson, R. (1991). ”Matrix Methods, An Introduction, Second Edition”. **Academic Press, Inc.**

[8] Zhengfeng, J (2019). ”General Linear Group Action on Tensors: A Candidate for Post-Quantum Cryptography”. **arXiv prePrint**. Tersedia di: arXiv:1906.04330.

[9] Fuhrmann, P. A. (2012). ”A Polynomial Approach to Linear Algebra, Second Edition”. New York. **Springer**.

BIODATA PENULIS

Penulis lahir di Jember, 9 Maret 1998. Pendidikan penulis bermula di SDN Semboro 03, lalu SMPN 1 Semboro, dan SMAN 1 Jember. Setelah lulus SMA pada tahun 2016, penulis mengenyam kehidupan mahasiswa di Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data (FSAD) ITS melalui jalur SBMPTN. Selama proses perkuliahan, penulis menekuni bidang minat matematika murni (khususnya Analisis dan Aljabar). Selain berkuliah, penulis juga aktif mengikuti kegiatan olimpiade, seperti Fun Mathematics Competition, MagDay ITB, dan ONMIPA-PT. Dibalik kesibukan di dunia akademik, penulis juga mengikuti organisasi di kampus. Penulis pernah menjabat pada beberapa organisasi kampus seperti: Staff Tim Soal OMITS, dan pengurus Computer Science Community (CSC). Apabila ada pertanyaan dan saran, bisa menghubungi penulis via email: *rifanamrozimath@gmail.com* atau LINE: *rifan_amrozi*.