Desain dan Analisis Algoritma Penyelesaian Permasalahan Penugasan Bersyarat dengan Representasi Bipartite Graph

Muhammad Izzuddin, Arya Yudhi Wijaya, Rully Soelaiman
Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknologi Informasi, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: rully@is.its.ac.id

***Abstrak*—Permasalahan dalam penelitian ini adalah permasalahan penugasan bersyarat dimana terdapat beberapa pekerjaan dan beberapa orang pekerja. Setiap pekerjaan harus dilakukan oleh semua orang yang ada serta setiap orang memiliki waktu yang dibutuhkan tersendiri dalam menyelesaikan pekerjaan tersebut. Setiap orang hanya dapat mengerjakan sebuah pekerjaan dan sebuah pekerjaan hanya dapat dikerjakan oleh satu orang dalam satu waktu. Pekerjaan yang dimaksud juga bersifat independen dalam artian dapat dilakukan kapanpun oleh setiap orang. Semua orang juga dapat berhenti kapanpun untuk melakukan sebuah pekerjaan tersebut.**

Penelitian ini akan mengimplementasikan metode pencarian maximum-size matching pada sebuah bipartite graph yang mengacu pada permasalahan penugasan bersyarat. Dalam penelitan ini dibahas algoritma Hopcroft-Karp untuk menyelesaikan permasalahan penugasan bersyarat tersebut dengan menggunakan bahasa pemrograman C++.

Dari serangkaian proses penelitian yang telah dilakukan, didapatkan kesimpulan bahwa algoritma yang dirancang sesuai dengan permasalahan ini dipengaruhi secara kuadratik baik oleh jumlah pekerjaan ataupun pekerjanya.

Kata Kunci*—*Algoritma Hopcroft-Karp, Graf Bipartite, Masalah Penugasan Bersyarat, Perfect Matching, Teori Graf.

I. PENDAHULUAN

Dalam teori graf, permasalahan penugasan bersyarat membahas bagaimana menemukan susunan pemberian tugas atau pekerjaan pada pekerja agar sebuah pekerjaan tersebut dapat dilakukan dengan seoptimal mingkin dengan beberapa konstrain permasalahan yang ada. Pemasalahan penugasan bersyarat yang diangkat dalam penelitian ini diambil dari persoalan SPOJ Klasik 6819 yang berjudul Yet Another Assignment Problem dengan kode soal ASSIGN5. Permasalahan tersebut akan diselesakan dengan pendekatan pencarian *Maximum-size Matching* pada sebuah *birpartite graph*.

Pada permasalahan Yet Another Assignment Problem, terdapat beberapa pekerjaan dan beberapa orang pekerja yang akan mengerjakan pekerjaan tersebut. Setiap pekerjaan harus dilakukan oleh semua orang yang ada serta setiap orang memiliki waktu yang dibutuhkan tersendiri dalam menyelesaikan pekerjaan tersebut. Setiap orang hanya dapat mengerjakan sebuah pekerjaan dan sebuah pekerjaan hanya dapat dikerjakan oleh satu orang dalam satu waktu. Pekerjaan yang dimaksud juga bersifat independen dalam artian dapat dilakukan kapanpun oleh setiap orang. Semua orang juga dapat berhenti kapanpun untuk melakukan sebuah pekerjaan tersebut.

Diberikan m pekerjaan dan n pekerja, serta m baris kelompok bilangan. Setiap baris i berisi n buah bilangan dimana bilangan ke j-nya adalah A_{ij} yang berarti teman ke-j harus melakukan pekerjaan i selama A_{ij} menit. Diminta untuk mencari waktu minimal yang diperlukan untuk melakukan semua pekerjaan tersebut beserta susunan penugasan pada menit pertama yang mungkin terjadi.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Bipartite Graph

Bipartite graph merupakan graf spesial yang *vertex*-nya dapat dibagi menjadi dua himpunan *vertex* X dan Y dimana pada setiap himpunan *vertex*-nya, tidak ada *vertex* yang saling bertetangga. Dalam kasus khusus, *bipartite graph* dapat membentuk sebuah *complete bipartite graph*. *Complete bipartite graph* adalah sebuah *bipartite graph* dimana tiap *vertex* pada satu himpunan, bersinggungan dengan semua *vertex* pada himpunan yang lainnya.

B. Matching

Sebuah *matching* pada graf $G = (V, E)$ adalah sebuah himpunan *edge* $M \subseteq E$ dimana tidak ada *edge* yang saling bersentuhan di dalam M. Untuk setiap *matching* M pada graf $G = (V, E)$, kumpulan *edge* $e \in M$ dinamakan *matched edge*, sedangkan kumpulan *edge* $e \in E - M$ dinamakan *unmatched edge*. Sebuah *vertex* dikatakan *matched vertex* apabila *vertex* tersebut besinggungan dengan *matched edge* pula. Sebaliknya *unmatched vertex* adalah *vertex* yang tidak bersinggungan dengan *matched edge*. Tiap *matched vertex* v memiliki sebuah *mate* atau pasangan yang terletak pada *endpoint* dari *matched edge* yang bersinggungan dengan v. Sebuah *matching* dapat dikatakan sebagai *perfect matching* apabila semua *edge* pada *matching* M dalam graf $G = (V, E)$ mencakup setiap *vertex* dalam graf atau tiap *vertex* dalam V bersinggungan dengan tepat satu *edge* pada M. Kardinalitas dari *matching* M adalah banyaknya *edge* pada M dan biasa dinotasikan dengan $|M|$. *Maximum-size matching* adalah sebuah *matching* M pada graf

$G = (V, E)$ yang kardinalitasnya tidak dapat dinaikkan lagi atau memiliki $|M|$ terbesar.

Bipartite matching merupakan kasus *matching* khusus yang melibatkan struktur *bipartite graph* didalamnya. *Bipartite graph* $G = (X \cup Y, E)$ dapat memiliki sebuah *complete matching* dengan kardinalitas $\min\{|X|, |Y|\}$.

C. Algoritma Hopcroft-Karp

Algoritma *Hopcroft-Karp* adalah algoritma yang memerlukan *bipartite graph* sebagai masukannya dan menghasilkan *maximum-size matching* didalam graf tersebut sebagai keluarannya. Algoritma ini ditemukan John Hopcroft and Richard Karp pada tahun 1973.

Sebagian besar ide dasar dari algoritma ini hampir sama dengan teknik *inverting augmenting path* dalam mencari *maximum-size* matching, hanya saja algoritma ini mencari beberapa *augmenting path* sekaligus dalam sekali iterasi dengan meggunakan himpunan maksimal dari *augmenting path* terpendek.

Secara keseluruhan, algoritma ini berjalan pada sebuah graf $G = (X \cup Y, E)$, dimana $|V|$ adalah jumlah *vertex* yang berada pada $X \cup Y$ dan $|E|$ adalah jumlah *edge* pada graf, dengan kompleksitas $O(|V|\sqrt{|E|})$.

Dimisalkan terdapat sebuah graf $G = (X \cup Y, E)$ dan M adalah *matching* yang di dapat dari graf tersebut. Secara garis besar, algoritma ini berjalan sebagai berikut:

- Sebuah *breadth-first search* digunakan untuk membagi *vertex-vertex* menjadi beberapa *layer*. Sebuah *layer* dalam hal ini diartikan sebagai sebuah *level* dalam *tree*, dan setiap *level* dalam *tree* menunjukkan panjang augmented path yang dapat di bentuk. *Unmatched vertex* pada X digunakan sebagai *vertex* awal dari pencarian.
- Pada awal pencarian, hanya terdapat *unmatched edge* dikarenakan M masih merupakan himpunan kosong. Setelah itu, pada pencarian selanjutnya, melalui *unmatched vertex* pada X, pencarian path dilakukan dengan men-*treverse unmatched edge dan matched edge* secara bergantian. Pencarian akan berhenti pada sebuah layer-k dimana terdapat satu atau beberapa *unmatched vertex* pada Y tercapai.
- Setelah layer pada graf tersebut terbentuk, melalui *depth-first search*, sebuah himpunan maksimal dari *augmenting path* terpendek yang memiliki panjang k dapat dicari dengan awal *unmatched vertex* pada X dan berakhir pada *unmatched vertex* Y.
- Untuk setiap *augmenting path* yang ditemukan, semua *unmatched vertex* pada tersebut diubah menjadi *matched vertex* begitu pula sebaliknya.

Algoritma ini berakhir apabila pada proses pencarian *breadth-first search* tidak menemukan *augmented path* yang dapat dibentuk.

III. STRATEGI PENYELESAIAN

A. Menentukan waktu minimum penyelesaian semua pekerjaan (α)

Sesuai pada deskripsi masalah, dapat diketahui bahwa setiap orang harus mengerjakan semua pekerjaan yang ada sesuai dengan waktu penyelesainnya masing-masing dan setiap pekerjaan harus dikerjakan oleh semua orang dengan waktu penyelesaian masing-masing pula. Dimisalkan terdapat 2 buah pekerjaan (m) yang selanjutnya disebut dengan baris dan 3 orang pekerja (n) yang selanjutnya disebut dengan kolom.

	Pekerja 1	Pekerja 2	Pekerja 3
Pekerjaan 1	2	2	4
Pekerjaan 2	1	2	0

Gambar 1. Ilustrasi permasalahan.

Total waktu yang dibutuhkan bagi seseorang ke-i untuk melakukan semua pekerjaannya adalah penjumlahan setiap nilai pada kolom ke-i tersebut. Sedangkan total waktu yang dibutuhkan agar semua orang dapat menyelesaikan pekerjaan ke-j adalah penjumlahan semua nilai pada baris ke-j tersebut.

Melalui pernyataan tersebut, waktu minimum yang diperlukan untuk melakukan semua pekerjaan yang ada adalah jumlah waktu terbanyak yang dilakukan seseorang untuk menyelesaikan semua pekerjaannya atau waktu terbanyak yang dibutuhkan oleh sebuah pekerjaan agar diselesaikan oleh semua orang. Misal waktu minimum yang dibutuhkan untuk menyelesaikan semua pekerjaan adalah α, maka:

$$\alpha = Max(\sum_{i=0,j=0}^{m-1,n-1} A_{i,j}, \sum_{i=0,j=0}^{n-1,m-1} A_{j,i}) \quad (1)$$

Pernyataan α sebagai waktu optimal yang diperlukan untuk menyelesaikan semua pekerjaan dapat dibuktikan apabila mepertimbangkan dua kasus berikut:

- Terdapat baris yang memiliki jumlah yang maksimal. Apabila hal tersebut terjadi, maka baris tersebut harus di proses setidaknya sebanyak α kali. Karena hanya ada satu baris yang dipasangkan dengan satu kolom dalam satu waktu, tidak mungkin mendapkatkan waktu penyelesaian kurang dari α. Selanjutnya yang dilakukan adalah menunjukkan bahwa bisa didapatkan solusi optimal dengan tepat α satuan waktu.
- Terdapat kolom yang memiliki jumlah yang maksimal. Dikarenakan hanya satu orang yang dapat mengerjakan satu pekerjaan pada satu waktu serta pekerjaan dan pekerja tersebut dapat ditukar waktu pengerjaannya maka penyusunan dapat dilakukan dengan menukar saja posisi pekerjaan dan pekerjanya, kemudian mempertimbangkan kasus 1.

B. Melakukan proses expanding matrix

Proses *expanding matrix* dimulai dengan membentuk sebuah *matrix* awal yang berukuran $m * n$. Melalui *matrix*

awal tersebut terlebih dahulu dicari nilai α sesuai dengan persamaan yang dijelaskan sebelumnya.

Selanjutnya dibentuk sebuah *matrix* dengan ukuran $(n+m) * (m+n)$ dan mengisi $m * n$ *matrix* pertama dalam *matrix* baru tersebut sesuai dengan *matrix* awal. Kemudian mengisi semua baris dan kolom yang belum terisi dengan sebuah nilai sedemikian rupa sehingga setiap baris dan kolom memiliki jumlah tepat α.

2	2	4
1	2	0

(a)

2	2	4	0	0
1	2	0	0	5
5	0	0	3	0
0	4	0	4	0
0	0	4	1	3

(b)

Gambar 2. Proses expanding-matrix (a) Matrix awal (b) Matrix selelah mengalami proses expanding-matrix

C. Mencari maximum-size matching pada bipartite graph

Secara umum algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini berjalan sebagai berikut :

1. Membentuk *bipartite* graf $G = (X \cup Y, E)$ dengan X merupakan representasi dari kolom (pekerja) dan Y merupakan representasi dari baris (pekerjaan) dari *matrix* yang baru. Sebuah *edge* pada E menghubungkan *vertex* pada X dan Y apabila nilai $A_{i,j}$ pada matrix tersebut tidak 0.
2. Mencari *maximum matching* yang terdapat pada graf tersebut. Apabila sebuah kolom i memiliki pasangan dengan baris j, artinya pekerja ke-i mengerjakan pekerjaan ke-j dalam suatu waktu tersebut. Apabila $j > m$ maka pekerja tersebut tidak melakukan pekerjaan apapun di satuan waktu tertentu.
3. Setiap baris j dan kolom i yang berpasangan, kurangi nilai $A_{i,j}$ pada matrix tersebut sebanyak 1.
4. Ulangi setiap proses 1 – 3 hingga matrix tersebut menjadi *matrix* dengan semua isinya adalah 0.

Pada setiap proses yang terjadi, sebuah *perfect matching* terbentuk melalui graf tersebut. Dikarenakan *matrix* adalah sebuah *matrix* persegi dengan ukuran $(m+n) * (n+m)$, maka semua baris memiliki pasangan pada kolom, begitu pula dengan kolom yang seluruhnya memiliki pasangan pada baris.

Seperti yang dijelaskan sebelumnya, diketahui bahwa jumlah dari semua elemen *matrix* tersebut adalah $(m+n) * \alpha$ dan setiap kali proses jumlah dari *matrix* tersebut berkurang sebanyak $m+n$, maka total proses yang diperlukan untuk menjadikan *matrix* tersebut menjadi *matrix* 0 adalah tepat sebanyak α.

IV. UJI COBA DAN ANALISIS

A. Uji Coba Kebenaran

Uji coba kebenaran dilakukan dengan mengirimkan kode sumber program kedalam situs penilaian daring SPOJ dan melakukan perbandingan hasil keluaran dari sistem dengan permasalahan. Permasalahan yang diselesaikan yaitu *Yet Another Assignment Problem* dengan kode soal ASSIGN5.

17014913	2016-05-30 09:29:40	Yet Another Assignment Problem	accepted	0.08	64M	C++ 4.3.2

Gambar 3. Hasil Uji Coba pada Situs SPOJ

Kode sumber mendapat keluaran *Accepted* dari situs SPOJ. Hal ini berarti keluaran kode sumber telah sesuai dengan persoalan yang terdapat pada situs SPOJ. Waktu tercepat yang dibutuhkan program adalah 0.08 detik dan memori yang dibutuhkan adalah 64 MB.

Dilakukan pengujian sebanyak 20 kali pada situs penilaian daring SPOJ untuk melihat variasi waktu dan memori yang dibutuhkan program. Dari hasil uji coba sebanyak 20 kali, seluruh kode sumber program mendapat keluaran *Accepted* dengan waktu minimum sebesar 0.08 detik, waktu maksimum sebesar 0.12 detik dan waktu rata-rata sebesar 0.103 detik. Memori yang dibutuhkan program konstan sebesar 64 MB.

Tabel 1.
Hasil pengujian pada situs SPOJ sebanyak 20 kali

ID	RESULT	TIME	MEM
17014913	accepted	0.08	64M
17014912	accepted	0.10	64M
17014910	accepted	0.10	64M
17014909	accepted	0.09	64M
17014906	accepted	0.11	64M
17014903	accepted	0.11	64M
17014901	accepted	0.09	64M
17014899	accepted	0.10	64M
17014898	accepted	0.11	64M
17014896	accepted	0.12	64M
17014895	accepted	0.11	64M
17014893	accepted	0.09	64M
17014891	accepted	0.11	64M
17014890	accepted	0.10	64M
17014889	accepted	0.11	64M
17014886	accepted	0.12	64M
17014883	accepted	0.11	64M
17014882	accepted	0.10	64M
17014879	accepted	0.10	64M
17011446	accepted	0.10	64M

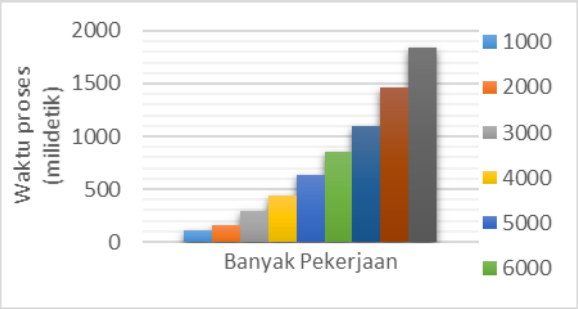
B. Uji Coba Efisiensi Waktu

Uji coba kinerja dilakukan dengan membuat data generator, untuk membangun contoh persoalan sesuai dengan batasan permasalahan. Kemudian dilakukan pembandingan kinerja program terhadap pertumbuhan jumlah pekerja dan pertumbuhan jumlah pekerjaan.

1) Pengaruh Banyaknya Pekerjaan Terhadap Waktu

Pada uji coba ini banyaknya pekerjaan dibuat bervariasi antara 1000 hingga 9000. Jumlah pekerja

ditetapkan sebanyak 1000. Waktu eksekusi program dicatat dalam satuan.



Gambar 4. Grafik Hasil Uji Coba Pengaruh Jumlah Pekerjaan Terhadap Waktu Eksekusi Program

Dapat dilihat bahwa grafik cenderung mendekati kurva kuadratik. Hal menunjukkan bahwa algoritma penyelesaian yang dipengaruhi secara kuadratik oleh jumlah pekerjaan.

2) Pengaruh Banyaknya Pekerja Terhadap Waktu

Pada uji coba ini banyaknya pekerjaan dibuat bervariasi antara 1000 hingga 9000. Jumlah pekerja ditetapkan sebanyak 1000. Waktu eksekusi program dicatat dalam satuan.

Gambar 5. Grafik Hasil Uji Coba Pengaruh Jumlah Pekerja Terhadap Waktu Eksekusi Program

Dapat dilihat bahwa grafik cenderung mendekati kurva kuadratik. Hal menunjukkan bahwa algoritma penyelesaian yang dipengaruhi secara kuadratik oleh jumlah pekerja.

V. KESIMPULAN

Dari hasil uji coba yang telah dilakukan terhadap implementasi penyelesaian permasalahan *Yet Another Assigment Problem* dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Permasalahan *Yet Another Assignment Problem* pada situs SPOJ dapat direpresentasikan sebagai sebuah *bipartite graph* serta Implementasi algoritma Hopcroft-Karp dapat menyelesaikan permasalahan *t*ersebut dengan benar.
2. Kompleksitas waktu yang dibutuhkan untuk seluruh proses sistem adalah $O((m+n)^2)$ pada m buah pekerjaan dan n orang pekerja sehingga algoritma ini dipengaruhi secara kuadratik baik oleh jumlah pekerja maupun jumlah pekerjaan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala karunia dan rahmat-Nya yang telah diberikan selama ini. Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada orang tua, saudara, keluarga, Bapak Arya Yudhi Wijaya dan Bapak Rully Soelaiman selaku pembimbing penulis dan semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu yang talah memberikan semangat serta motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] SPOJ, "The dilemma of Idli," March 2014. [Online]. Available: http://www.spoj.com/problems/WPC5G/.

[2] S. Halim and F. Halim, "Competitive Programming 3," Singapore, Lulu Publisher, 2013.

[3] D. Jungnickel, Graphs, Networks and Algorithms, 4th Edition ed., Berlin: Springer, 2012.

[4] SPOJ, "Yet Another Assignment Problem," June 2010. [Online]. Available: http://www.spoj.com/problems/ASSIGN5/.

[5] J. Bondy and U. Murty, Graph Theory, 3rd ed., Berlin: Springer, 2008.

[6] H. A. Taha, Operations Research: An Introduction, 8th Edition ed., Upper Saddle River: Prentice Hall, 2007.