TESIS SF-185401

BINTANG BOSON NEWTONIAN STATIK STASIONER SIMETRI BOLA

SYAH REZA MBOLOSI
NRP 01111750010012

Dosen Pembimbing
Dr. rer. nat. Bintoro Anang Subagyo

Program Magister
Bidang Keahlian Fisika Teori
Departemen Fisika
Fakultas Sains Dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2020

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

TESIS SF-185401

BINTANG BOSON NEWTONIAN STATIK STASIONER SIMETRI BOLA

SYAH REZA MBOLOSI
NRP 01111750010012

Dosen Pembimbing
Dr. rer. nat. Bintoro Anang Subagyo

Program Magister
Bidang Keahlian Fisika Teori
Departemen Fisika
Fakultas Sains Dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2020

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

TESIS - SF185401

NEWTONIAN STATIC STATIONER SPHERICALLY SYMMETRIC BOSON STAR

SYAH REZA MBOLOSI
NRP 01111750010012

Advisor
Dr. rer. nat. Bintoro Anang Subagyo

Magister Programme
Theoritical Physics
Department of Physics
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2020

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

LEMBAR PENGESAHAN TESIS

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :

SYAH REZA MBOLOSI

NRP. 01111750010012

Tanggal Ujian : 29 Januari 2020

Periode Wisuda : Maret 2020

Disetujui oleh :

Pembimbing :

1. **Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo** ....
   NIP. 19790719 200501 1 015

Penguji :

1. **Agus Purwanto, D.Sc.** ....
   NIP. 19640811 199002 1 001

2. **Dr. Lila Yuwana, M.Si** ....
   NIP. 19750908 200003 1 001

Kepala Departemen Fisika
Fakultas Sains

Drs.Gatut Yudoyono, MT
NIP. 19640616 198903 1 004

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BINTANG BOSON NEWTONIAN STATIK STASIONER SIMETRI BOLA

Nama	:	Syah Reza Mbolosi
NRP	:	01111750010012
Pembimbing	:	Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

ABSTRAK

Bintang boson merupakan objek matematis yang muncul ketika medan skalar kompleks terkopel dengan gravitasi. Limit medan lemah sistem Einstein-Klein-Gordon akan tereduksi menjadi sistem Poisson-Schrodinger. Sistem ini terdiri atas dua persamaan yaitu persamaan poisson yang menggambarkan potensial gravitasi Newton dan persamaan Schrodinger yang menggambarkan medan skalar. Tesis ini bertujuan untuk mendapatkan solusi bintang boson Newtonian dalam limit medan lemah serta limit kopling besar beserta parameter-parameter fisisnya. Dengan menggunakan pendekatan tersebut maka akan diapatkan parameter-parameter fisis bintang boson Newtonian. Dalam tesis ini didapatkan bahwa massa maksimum bintang boson Newtonian beberapa kali lebih besar dibandingkan pendekatan relativistic. Model bintang boson Newtonian dalam 4 dimensi dapat pula diperluas dalam D dimensi.

Kata Kunci: Bintang Boson Newtonian, Medan Skalar Kompleks, Limit Medan Lemah, Limit Kopling Besar

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

NEWTONIAN STATIC STATIONER SPHERICALLY SYMMETRIC BOSON STAR

Name	:	Syah Reza Mbolosi
NRP	:	01111750010012
Advisor	:	Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

ABSTRACT

Bintang boson merupakan objek matematis yang muncul ketika medan skalar kompleks terkopel dengan gravitasi. Limit medan lemah sistem Einstein-Klein-Gordon akan tereduksi menjadi sistem Poisson-Schrodinger. Sistem ini terdiri atas dua persamaan yaitu persamaan poisson yang menggambarkan potensial gravitasi Newton dan persamaan Schrodinger yang menggambarkan medan skalar. Tesis ini bertujuan untuk mendapatkan solusi bintang boson Newtonian dalam limit medan lemah serta limit kopling besar beserta parameter-parameter fisisnya. Dengan menggunakan pendekatan tersebut maka akan diapatkan parameter-parameter fisis bintang boson Newtonian. Dalam tesis ini didapatkan bahwa massa maksimum bintang boson Newtonian beberapa kali lebih besar dibandingkan pendekatan relativistic. Model bintang boson Newtonian dalam 4 dimensi dapat pula diperluas dalam D dimensi.

Keywords: Newtonian Boson Star, Complex Scalar Field, Weak Field Limit, Large Coupling Limit

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena dengan rahmat dan petunjuknyalah penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Tidak lupa pula sholawat serta salam senantiasa dicurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Tesis ini penulis susun untuk memenuhi persyaratan menyelesaikan pendidikan Pascasarjana Departemen Fisika ITS. Tesis dengan judul :

"BINTANG BOSON NEWTONIAN STATIK STASIONER SIMETRI BOLA"

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pihak-pihak yang membantu penyusunan laporan Tesis dan proses penelitiannya.

1. Kedua orang tua penulis beserta saudara, dan seluruh keluarga yang telah memberikan dukungan, nasihat, doa, serta banyak hal lain.
2. Bapak Prof. Dr. rer. nat. Bintoro Anang Subagyo selaku dosen pembimbing yang telah memberi bimbingan dan arahan dalam proses penyusunan tesis ini hingga selesai.
3. Bapak Dr. Mashuri selaku dosen wali penulis yang telah membimbing dan memberi nasihat selama berkuliah di fisika ITS
4. Bapak Agus Purwanto, D.Sc. sebagai dosen penguji sekaligus sebagai dosen Fisika teori yang telah memberikan banyak nasihat, pelajaran selama menekuni bidang fisika teori.
5. Bapak Dr. Lila Yuwana sebagai dosen penguji yang telah memberi masukin dan saran pada saat sidang tesis.
6. Ketua Departemen Fisika ITS beserta dosen pengampu mata kuliah yang telah mengajarkan banyak ilmu dan pengalaman kepada penulis selama melakukan studi S2
7. Bapak Ibu karyawan tata usaha yang telah banyak membantu penulis terkait urusan dengan departemen.
8. Kepada Kasyfil Albar dan Doni Luthfi yang telah banyak membantu serta memberikan masukin kepada penulis terkait pengerjaan tesis.
9. Kawan-kawan dan Dosen Laboratorium Fisika Teori atas bantuan dan cerita selama ini.
10. Segenap teman-teman Pascasarjana Tahun 2016, 2017, 2018 atas bantuannya selama ini
11. Kawan-kawan ITS Tv yang juga telah memberikan banyak bantuan selama penulis menjalani studi.

12. Seluruh pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan tesis ini. Penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya, semoga apa yang telah diberikan mendapatkan balasan yang lebih baik dari Allah SWT.

Penulis menyadari dalam penyusunan laporan ini masih terdapat kesalahan. Mohon kritik dan saran pembaca guna menyempurnakan laporan ini. Akhir kata semoga laporan Tesis ini bermanfaat bagi semua pihak. Amiin Ya Rabbal Alamiin.

Surabaya, 11 Februari 2020

Penuli

DAFTAR ISI

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bintang boson adalah jenis objek matematis dalam relativitas umum yang dihasilkan ketika medan skalar kompleks terkopel dengan gravitasi. walaupun dapat didefinisikan dengan singkat, namun dinamika bintang boson sangat tidak sederhana jika dipandang dari sudut pandang matematis. Bintang boson juga dapat dianggap sebagai analogi dari bintang fermion, yang merupakan jenis bintang yang kita kenal selama ini seperti matahari, bintang katai putih, dan bintang neutron. Bintang boson seringkali menunjukkan perilaku yang menarik yang layak untuk dipelajari lebih lanjut. Namun, bagaimanapun juga harus dicatat bahwa bintang boson adalah murni konstruksi matematis, sedangkan pertanyaan mengenai eksistensi fisisnya masih belum terjawab hingga kini. Tetapi, bahkan jika bintang boson tidak eksis di alam, maka akan tetap memberikan peranan penting sebagai model sederhana dari benda kompak [1].

Sebagai objek astronomi, bintang boson, jika memang benar ada, maka haruslah tersusun dari jenis partikel boson yang stabil. Salah satu yang diusulkan adalah *axion*, yang juga masih merupakan partikel hipotesis [15]. Selain itu, bintang boson juga telah diajukan sebagai salah satu kandidat penyusun materi gelap di alam semesta [14].

Hingga saat ini, masih belum ada tanda-tanda yang menunjukkan bukti keberadaan bintang boson. Namun jika jika jenis bintang ini ada, maka salah satu cara mendeteksinya adalah melalui gelombang gravitasi [16]. Dengan mendeteksi gelombang gravitasi dari pasangan bintang boson yang saling berotasi, maka diharapkan akan didapatkan bukti keberadaan bintang boson. Hal ini mirip seperti yang dilakukan ketika para ilmuwan mendeteksi gelombang gravitasi dari dua lubang hitam yang saling berotasi menggunakan LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*).

Asal mula teori mengenai bintang boson dapat ditelusuri hingga tahun 1950. Yaitu ketika fisikawan John Wheeler menkonstruksi objek mirip partikel dengan menggandengkan medan elektromagnetik dengan gravitasi. Dalam mengerjakannya, Wheeler berhasil menghasilkan solusi yang dia namakan *geons*. Sayangnya, solusi ini ternyata tidak stabil. Walaupun demikian, penelitian tersebut telah membentuk dasar untuk formulasi boson star yang dibuat oleh Kaup , dimana medan elektromagnetik diganti dengan medan skalar kompleks [17]. Ide Kaup telah mengalami banyak penambahan sejak pertama kali diusulkan, dan hasilnya adalah bermacam-macam bintang boson. Ada varian yang sangat banyak dari bintang boson, yang terentang dari bintang boson bermuatan, dimana medan kompleks digandengkan dengan medan elektromagnetik, hingga bintang boson Newtonian, dimana menggunakan gravitasi Newton dibandingkan relativitas umum. Beberapa bintang boson menunjukkan perilaku yang mirip dengan soliton, dimana dua bintang bososn yang bergerak saling berlawanan arah dapat bertabrakan, dan berinteraksi dengan cara yang non linear, dan kemudian mengembalikan bentuk awalnya setelah proses tumbukan [1]

Pada tahun 1986, colpi, shapiro dan wasserman [12] menunjukkan bahwa jika persamaan rapat lagrangian medan skalar ditambahkan suku potensial interaksi, lalu dengan memilih konstanta kopling yang sesuai, maka dapat diperoleh bintang boson dengan massa yang dapat diperbandingkan dengan bintang neutron. khususnya untuk kasus potensial dengan bentuk $\lambda|\phi|^4$, dan untuk nilai konstanta kopling tak berdimensi, $\Lambda = \lambda\hbar c/4\pi G m^2$, yang cukup, maka didapatkan bahwa solusi statisnya berubah signifikan jika dibandingkan dengan solusi bintang boson dengan $\lambda = 0$. seperti yang telah didemonstrasikan bahwa ketika $\Lambda \to \infty$ maka massa maksimum bintang boson akan mempunyai kebergantungan dengan skala yang sama pada massa partikel m, seperti pada bintang fermion. hasil ini membangkitkan kembali ketertarikan pada implikasi astrofisis dari bintang boson, termasuk kemungkinan bahwa bitang boson adalah penyusun, atau paling tidak bagian dari materi gelap di alam semesta. [3]

Namun untuk mendapatkan solusi bintang boson yang bersifat relativistik, terutama untuk solusi rotasi dan simetri aksial dibutuhkan proses komputasi yang sangat rumit. Sehingga, kiranya perlu juga untuk memeriksa perilaku bintang boson dalam limit medan lemah serta beberapa parameter-parameter fisisnya. Oleh karena itu dalam tesis ini akan dikaji bintang boson dengan pendekatan yang lebih sederhana, yaitu dengan meninjau bintang boson yang bersimetri bola, tidak berotasi, dan didekati dengan limit medan lemah. Kemudian akan didapatkan parameter-parameter fisis serta hubungan antara parameter-parameter tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam thesis ini adalah bagaimana perilaku dan parameter-parameter fisis bintang boson dalam limit medan lemah.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan dalam penelitian ini dibatasi pada bintang boson Newtonian dengan metode analitik menggunakan approksimasi limit medan lemah.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan solusi bintang boson dalam aproksimasi Newtonian menggunakan limit medan lemah
2. Menentukan parameter-parameter fisis bintang boson Newtonian dalam limit medan lemah

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB 2
TEORI MEDAN SKALAR

2.1 Medan Skalar

Lagrangian dari suatu sistem menggambarkan perubahan dari dinamika sistem tersebut. Dalam mekanika klasik, sistem partikel didefinisikan oleh sebuah koordinat umum sedangkan lagrangianya adalah fungsi differensial koordiant umum terhadap waktu. Rapat lagrangian medan skalar kompleks klasik diberikan oleh:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \Phi^*, \partial_\mu \Phi, \partial_\mu \Phi^*), \qquad (2.1)$$

dengan Φ^* merupakan kompleks konjugat dan

$$\partial_\mu \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}, \qquad (2.2)$$

turunan pertama medan skalar terhadap koordinat ∂x^μ. Aksi medan skalar adalah:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \qquad (2.3)$$

untuk memperoleh persamaan dinamika dari medan scalar, diterapkan prinsip variasi pada aksi *S*

$$\delta S = \int d^4x \delta\mathcal{L}, \qquad (2.4)$$

persamaan (2.4) dapat diselesaikan dengan menyelesaikan suku $\delta\mathcal{L}$ terlebih dahulu yaitu

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\partial_\mu\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)}\delta\partial_\mu\Phi^*, \qquad (2.5)$$

selanjutnya suku $\delta\partial_\mu\Phi$ dapat diuraikan menjadi:

$$\delta\partial_\mu\Phi - \partial_\mu(\Phi + \delta\Phi) - \partial_\mu\Phi = \partial_\mu\delta\Phi, \qquad (2.6)$$

hal yang sama juga diterapkan pada suku $\delta\partial_\mu\Phi^*$. Subtitusikan kembali ke persamaan (2.5), menjadi

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)}\partial_\mu\delta\Phi^*, \tag{2.7}$$

bagi suku ketiga dari persamaan (2.5) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu\delta\Phi = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi\right) - \left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\Phi\right)}\right)\delta\Phi, \tag{2.8}$$

subtitusikan kedua bentuk tersebut kembali ke persamaan (2.6) dan dengan penataan ulang, diperoleh:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = &\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right)\delta\Phi + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^*} - \partial_\mu\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}\right)}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)}\right)\delta\Phi^* \\ &+ \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi\right) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)}\delta\Phi^*\right),\end{aligned} \tag{2.9}$$

subtitusikan kembali bentuk $\delta\mathcal{L}$ ke persamaan (2.4) memberikan:

$$\begin{aligned}\delta S = &\int d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right)\delta\Phi \\ &+ \int d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^*} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)}\right)\delta\Phi^* \\ &+ \int d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi\right) + \int d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)}\delta\Phi^*\right),\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dua suku terakhir pada persamaan (2.7) merupakan teorema divergensi Gauss dalam 4 dimensi dan dapat diganti menjadi integral permukaan. Akan tetapi, karena $\delta\Phi$ bernilai nol pada permukaan. maka didapatkan dua suku tearakhir bernilai nol.

Agar aksi S stasioner, maka variasi aksi δS harus bernilai nol

$$\delta S = 0, \tag{2.11}$$

dari persamaan (2.7), supaya variasi aksi δS bernilai nol, maka suku yang di dalam kurung harus bernilai nol karena variasi medan $\delta\Phi$ di dalam volume tidak bernilai nol. Dengan demikian dipenuhi oleh

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = 0, \quad (2.12)$$

dan untuk kompleks konjugatnya

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} = 0, \quad (2.13)$$

2.2 Teorema Noether

Dalam teori medan, jika rapat lagrangian suatu medan simetri terhadap transformasi global U(1), akan terdapat kuantitas yang kekal dalam medan tersebut. Hal ini pertama kali dikemukakan oleh matematikawan Jerman yaitu Emmy Noether. Pengetahuan akan suatu kuantitas yang kekal sangat penting terutama dalam kasus yang rapat lagrangiannya tidak dapat ditentukan. Dalam kasus ini rapat lagrangian ditentukan secara terbalik dari kuantitas yang kekal tersebut.

Untuk menurunkan teorema Noether, pertama-tama ditinjau terlebih dahulu transformasi dari sistem koordinat

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu \to \delta x^\mu, \quad (2.14)$$

transformasi sistem koordinat tersebut mengakibatkan persamaan medan juga bertransformasi:

$$\Phi(x) \to \Phi'(x') = \Phi(x) \to \delta\Phi(x), \quad (2.15)$$

perubahan aksi akibat transformasi tersebut ialah:

$$\begin{aligned} \delta S &= S' - S \quad (2.16)\\ &= \int_{\Omega'} d^D x' \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') - \int_{\Omega'} d^D x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi), \end{aligned}$$

dengan Ω' merupakan transformasi dari Ω dibawah transformasi sistem koordinat.

Pada integral pertama, indeks x' merupakan sebuah indeks *dummy*, jadi dapat diganti dengan x dan persamaan tersebut menjadi:

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^D x \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') - \int_{\Omega'} d^D x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi),$$
$$= \int_{\Omega'} d^D x \left[\mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)\right] + \int_{\Omega' - \Omega} d^D x \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi'), \quad (2.17)$$

suku terakhir merupakan integral melalui perubahan volume yang sangat kecil $\Omega' - \Omega$. Dengan menggunakan teorema Gauss dan menggantikan suku Φ' dengan Φ, maka suku terakhir tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\int_{\Omega' - \Omega} d^D x \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') = \int_{\Omega} d^D \partial_\lambda \left(\delta x^\lambda \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi')\right), \quad (2.18)$$

sampai disini harus didefinisikan variasi untuk nilai x yang tetap dan hanya merubah fungsi itu sendiri. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ yang bertransformasi menjadi $f'(x)$. Hal yang diperhatikan ialah penggunaan tanda aksen (') menyatakan fungsi setelah bertransformasi, bukan menyatakan sebuah turunan. Transformasi diatas dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} f(x) &= f'(x) - f(x) \\ &= [f'(x') - f(x)] - [f'(x') - f'(x)] \\ &= \delta f(x) - \partial_\mu f(x) \delta x^\mu, \end{aligned} \quad (2.19)$$

dimana $\tilde{\delta}$ merupakan simbol variasi dengan menjaga x tetap.

Identitas pada persamaan (2.19) membuat integran pada persamaan (2.17) dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana

$$\mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \tilde{\delta} \mathcal{L}, \quad (2.20)$$

dengan menggunakan identitas pada persamaan Euler-Lagrange, maka persamaan ini dapat dituliskan menjadi

$$\tilde{\delta} \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \tilde{\delta} \Phi \right), \quad (2.21)$$

kemudian dengan mensubtitusikan kembali persamaan ini dan persamaan (2.18) ke persamaan (2.17), maka diperoleh

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega} d^D \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \tilde{\delta}\Phi \right) - \int_{\Omega} d^D \partial_\lambda \left(\delta x^\lambda \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') \right) \\ &= \int_{\Omega} d^D \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \tilde{\delta}\Phi + \mathcal{L}\delta x^\mu \right),\end{aligned} \tag{2.22}$$

selanjutnya suku $\tilde{\delta}\Phi$ dijabarkan dengan persamaan (2.19), sehingga memberikan

$$\tilde{\delta}\Phi = \delta\Phi - \partial_\upsilon \Phi \delta x^\upsilon, \tag{2.23}$$

selanjutnya subtitusikan kembali ke persamaan (2.22), diperoleh

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega} d^D \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} (\delta\Phi - \partial_\upsilon \Phi \delta x^\upsilon) + \mathcal{L}\delta x^\mu \right) \\ &= \int_{\Omega} d^D \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\upsilon \Phi \delta x^\upsilon + \mathcal{L}\delta x^\mu \right) \\ &= \int_{\Omega} d^D \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\upsilon \Phi \delta x^\upsilon + g^{\mu\upsilon} \mathcal{L}\delta x_\upsilon \right),\end{aligned} \tag{2.24}$$

penulisan ini melanggar aturan konvensi Einstein. Sehingga persamaan ini dituliskan dengan bentuk yang lain yaitu

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega} d^D \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\upsilon \Phi + g^{\mu\upsilon} \mathcal{L} \right) \delta x_\upsilon \right) \\ &= \int_{\Omega} d^D \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi - T^{\mu\upsilon} \delta x_\upsilon \right),\end{aligned} \tag{2.25}$$

dengan $T^{\mu\upsilon}$

$$T^{\mu\upsilon} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\upsilon\Phi + g^{\mu\upsilon}\mathcal{L}\right), \tag{2.26}$$

adalah tensor energi momentum dari medan skalar. Sekarang dapat didefinisikan sebuah arus yaitu

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi + T^{\mu\upsilon}\delta x_\upsilon \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi + K^\mu, \end{aligned} \tag{2.27}$$

sehingga variasi aksi δS dapat dituliskan menjadi lebih sederhana yaitu

$$\delta S = \int_\Omega d^D\partial_\mu j^\mu, \tag{2.28}$$

hasil ini memberikan bahwa bila suatu teori simetri terhadap transformasi ($\delta S = 0$), maka aka nada suatu kuantitas yang kekal. Ruas kanan persamaan menjadi

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{2.29}$$

sehingga rapat arus j^μ harus konstan (kekal) untuk memenuhi kasus diatas. Hasil ini yang disebut sebagai teorema Noether dan arus yang kekal dalam kasus ini disebut arus Noether.

Untuk medan skalar kompleks, rapat arus Noether dapat dihitung dengan memvariasi medannya, $\delta\Phi$. Sehingga rapat arusnya

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)}\delta\Phi^*, \tag{2.30}$$

Untuk mendapatkan total muatan, komponen waktu rapat arus diintegrasi terhadap keseluruhan ruang

$$Q = \int j^0 dV, \tag{2.31}$$

2.3 Metrik Ruang-Waktu

Metrik ruang-waktu yang digunakan dalam pembahasan di sini adalah metrik dengan konfigurasi simetrik bola. Untuk 4 dimensi, digunakan koordinat $\{t, r, \theta, \varphi\}$ dan elemen garisnya dituliskan sebagai

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \tag{2.32}$$

Selanjutnya untuk mempermudah penulisan digunakan koordinat umum dari $\{t, r, \theta, \varphi\}$ menjadi $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, sehingga elemen garis ruang-waktu pada persamaan 2.23 dapat disederhanakan menjadi

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.33}$$

dengan

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Pada ruang waktu 5 dimensi, akan diperkenalkan satu koordinat baru yaitu φ_2, sehingga sistem koordinat terdiri dari $\{t, r, \theta, \varphi_1, \varphi_2\}$. Bila dituliskan dalam koordinat umum menjadi $\{x^0, x^1, x^2, x^3, x^4\}$. Elemen garis dari ruang-waktu 5 dimensi ini ialah

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \cos\theta^2 \, d\varphi_2^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi_1^2, \tag{2.35}$$

dari elemen garis ini, maka dapat diperoleh tensor metrik ruang-waktunya ialah

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \cos\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

selanjutnya didefinisikan g adalah determinan dari tensor metrik $g_{\mu\nu}$, yaitu

$$g = det(g_{\mu\nu}), \tag{2.37}$$

variasi dari $\sqrt{-g}$ adalah

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{d\sqrt{-g}}{dg}\delta g \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g, \end{aligned} \tag{2.38}$$

Untuk mencari variasi dari $\sqrt{-g}$ maka variasi dari determinan tensor metrik δg harus diketahui. Untuk menghitung $\sqrt{-g}$, langkah pertama ialah dengan menggunakan identitas dari logaritma sebuah matrik, yaitu

$$\ln\big(det(A)\big) = tr\big(ln(A)\big), \tag{2.39}$$

dengan A merupakan matrik persegi dan tidak berupa matrik *singular*. Jika diambil turunan pada persamaan 2.39, maka diperoleh

$$\frac{\delta\big(det(A)\big)}{det(A)} = tr(A^{-1} \times \delta A), \tag{2.40}$$

dengan menggunakan persamaan ini, nilai dari $\sqrt{-g}$ dapat dihitung dengan mengganti matrik A dengan tensor metrik $g_{\mu\nu}$ disubtitusikan, maka diperoleh

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \tag{2.41}$$

$$= \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu},$$

bila tensor metrik dikalikan dengan inversnya, maka

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = I, \tag{2.42}$$

dengan *I* merupakan sebuah matrik identitas. Jika diambil variasinya

$$\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta I = 0, \tag{2.43}$$

ruas kiri dapat diuraikan menjadi

$$\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = 0, \tag{2.44}$$

bawa kembali hasil ini ke persamaan 2.43 diperoleh

$$\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = 0, \tag{2.45}$$

atau

$$\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.46}$$

dari persamaan ini dan persamaan 2.46 didapatkan

$$\delta g = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.47}$$

subtitusikan persamaan ini ke persamaan 2.41 diperoleh

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.48}$$

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB 3
BINTANG BOSON DALAM 4 DAN 5 DIMENSI

Dalam bab ini akan dikonstruksi kembali bintang boson statik stasioner dalam 4 dan 5 dimensi dengan pendekatan yang bersifat relativistik. Bentuk potensial yang akan digunakan adalah $U(|\phi|) = m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4$. Kemudian akan ditunjukkan bentuk eksplisit lagrangiannya serta komponen-komponen tensor energi momentumnya.

3.1 Bintang Boson Statik Stasioner Simetri Bola Berdimensi 4

Rapat lagrangian bagi bintang boson yang terkopel dengan gravitasi Einstein diberikan oleh

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{3.1}$$

dengan $\lambda|\phi|^4$ merupakan potensial interaksi, sedangkan R adalah scalar Ricci. Dan konstanta $m, \lambda > 0$. Suku medan skalar $|\partial\phi|^2$ dapat juga dituliskan dengan

$$|\partial\Phi|^2 = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi\right), \tag{3.2}$$

Aksi Einstein Hilbert dapat dituliskan sebagai

$$s = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{3.3}$$

Ditinjau bintang boson bersimetri bola dan tak berotasi, sehingga ansatz yang digunakan adalah

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = \phi(t, r)\exp(i\omega t), \tag{3.4}$$

dimana kompleks konjugatnya

$$\Phi^*(t, r, \theta, \varphi) = \phi(t, r)\exp-(i\omega t), \tag{3.5}$$

kemudian dengan mensubtitusikan ansatz diatas kedalam persamaan rapat lagrangian, maka akan didapatkan bentuk eksplisit lagrangian

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{3.6}$$

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + \omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 - \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{3.7}$$

karena ϕ merupakan fungsi dari ω dan r saja, maka suku-suku yang merupakan turunan ϕ terhadap ω dan r lenyap. Sehingga bentuk eksplisit rapat lagrangiannya menjadi

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + \omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{3.8}$$

selanjutnya dicari komponen-komponen tensor energi momentumnya dengan menggunakan persamaan

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{3.9}$$

dengan mensubtitusikan ansatz dan komponen tensor metriknya maka akan didapatkan bentuk tensor energi momentumnya

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\Phi^*\partial_\beta\Phi + \partial_\beta\Phi^*\partial_\alpha\Phi\right) + U(|\Phi|)\right] + \left(\partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi + \partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi\right), \tag{3.10}$$

dengan menggunakan persamaan diatas kita dapat mengetahui komponen tensor energi momentum yang tidak nol, yaitu:

$$T_{00} = \omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 - U(|\phi|), \tag{3.11}$$

$$T_{11} = \omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 - U(|\phi|), \tag{3.12}$$

$$T_{22} = r^2\big(\omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - U(|\phi|)\big), \tag{3.13}$$

$$T_{33} = r^2\sin^2\theta\,\big(\omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - U(|\phi|)\big), \tag{3.14}$$

dimana $U(|\phi|) = m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4$.

3.2 Bintang Boson Statik Stasioner Simetri Bola Berdimensi 5

Bintang boson dapat dibangun dari medan skalar yang memiliki rapat lagrangian

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{3.15}$$

Dimana $\lambda|\phi|^4$ merupakan potensial interaksi.

Suku medan skalar $|\partial\phi|^2$ dapat juga dituliskan dengan

$$|\partial\Phi|^2 = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\big(\partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi\big), \tag{3.16}$$

dimana bentuk aksinya adalah

$$s = \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{3.17}$$

Ditinjau bintang boson bersimetri bola dan tak berotasi, sehingga ansatz yang digunakan adalah

$$\Phi(t, r, \theta_1, \theta_2, \varphi) = \phi(t, r)\exp(i\omega t), \tag{3.18}$$

dimana kompleks konjugatnya

$$\Phi^*(t, r, \theta_1, \theta_2, \varphi) = \phi(t, r)\exp -(i\omega t), \tag{3.19}$$

kemudian dengan mensubtitusikan ansatz diatas kedalam persamaan rapat lagrangian, maka akan didapatkan bentuk eksplisit lagrangian

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{3.20}$$

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + \omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\partial_{\theta_1}\phi\right)^2 - \frac{1}{r^2 sin^2\theta_1}\left(\partial_{\theta_2}\phi\right)^2 - \frac{1}{r^2 cos^2\theta}\partial_\varphi\phi - m^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4\right], \tag{3.21}$$

karena ϕ merupakan fungsi dari ω dan r saja, maka suku-suku yang merupakan turunan ϕ terhadap ω dan r lenyap. Sehingga bentuk eksplisit rapat lagrangiannya menjadi

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + \omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{3.22}$$

Selanjutnya dicari komponen-komponen tensor energi momentumnya dengan menggunakan persamaan

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{3.23}$$

dengan mensubtitusikan ansatz dan komponen tensor metriknya maka akan didapatkan bentuk tensor energi momentumnya

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\Phi^*\partial_\beta\Phi + \partial_\beta\Phi^*\partial_\alpha\Phi\right) + U(|\Phi|)\right] + \left(\partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi + \partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi\right), \tag{3.24}$$

dengan menggunakan persamaan diatas kita dapat mengetahui komponen tensor energi momentum yang tidak nol, yaitu:

$$T_{00} = \omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 - U(|\phi|), \tag{3.25}$$

$$T_{11} = \omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 - U(|\phi|), \tag{3.26}$$

$$T_{22} = r^2\big(\omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - U(|\phi|)\big), \tag{3.27}$$

$$T_{33} = r^2 \sin^2\theta \left(\omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - U(|\phi|)\right), \tag{3.28}$$

$$T_{44} = r^2 \cos^2\theta \left(\omega^2\Phi^2 - (\partial_r\Phi)^2 + U(|\Phi|)\right), \tag{3.29}$$

dimana $U(|\phi|) = m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4$.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB 4

LIMIT MEDAN LEMAH

Dalam bagian ini akan ditinjau limit medan lemah dalam sistem Einstein-Klein-Gordon (EKG) dari teori bintang boson. Dengan melakukan pendekatan limit medan lemah maka sistem EKG akan dapat direduksi menjadi persamaan Poisson-Schrodinger, dimana akan terdapat dua persamaan yaitu, persamaan Poisson yang menggambarkan gravitasi Newton dan persamaan Schrodinger yang menggambarkan medan skalar. Kedua persamaan inilah yang merepresentasikan bintang boson Newtonian.

Tinjau sebuah sistem boson boson skalar yang memiliki gravitasi dan interaksi diri serta bermassa *m* yang diatur oleh persamaan aksi medan berikut:

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} \\
&\int d^4x\sqrt{-g}\left[\int d^4x\sqrt{-g}\ \frac{1}{16\pi G}R\,|\partial\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{1}{2}\tilde{\lambda}|\phi|^4\right],
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

dimana $d^4x = dt\ d^3x$, *G* adalah konstanta gravitasi Newton, *R* adalah skalar Ricci, $\tilde{\lambda}$ adalah konstanta kopling skalar tak berdimensi, dan $|\partial\phi|^2 \equiv g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi\right)^*(\partial_\nu\phi)$.

Dengan prinsip variasi yang diterapkan pada aksi dalam persamaan (4.1), maka akan didapatkan persamaan medan Einstein yaitu:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{4.2}$$

dimana tensor energi momentum sistem tersebut diberikan oleh:

$$T_{\mu\nu} = \left[\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi + \partial_\nu\phi^*\partial_\mu\phi - g_{\mu\nu}|\partial\phi|^2 - g_{\mu\nu}m^2|\partial\phi|^2\right] - g_{\mu\nu}\frac{1}{2}\lambda|\phi|^4, \tag{4.3}$$

persamaan gerak untuk medan skalar kompleks ϕ diberikan oleh:

$$\Box\phi - m^2\phi - \lambda|\phi|^2\phi = 0, \tag{4.4}$$

dimana $\Box\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right)$ merupakan operator d'Alembertian.

Limit Newtonian dapat diperoleh dengan mengasumsikan bahwa metrik ruang-waktu berada dalam pendekatan medan lemah, yang dapat dituliskan sebagai:

$$g_{00} \approx -(1 + 2\mathrm{V}), \tag{4.5}$$

dan

$$\sqrt{-g} = 1, \tag{4.6}$$

dengan Φ adalah potensial gravitasi Newton.

Dengan mengasumsikan lebih jauh bahwa medan skalar kompleks memiliki kebergantungan terhadap waktu yang bersifat harmonik, yang dinyatakan dalam persamaan:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2m}}\psi(\boldsymbol{r}, t)e^{-imt}, \tag{4.7}$$

akan diperoleh memperoleh persamaan (non-linear) Schrödinger (lampiran B.2):

$$i\dot{\psi} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + m\phi\psi + \frac{\tilde{\lambda}}{4m^2}|\psi|^2\psi, \tag{4.8}$$

seperti limit Newtonian pada persamaan (4.4), dimana ∇^2 merupakan Laplacian dalam ruang datar dan dot menyatakan turunan terhadap waktu. Dalam limit ini, persamaan Einstein akan tereduksi menjadi persamaan Poisson

$$\nabla^2\mathrm{V} = 4\pi Gm|\psi|^2, \tag{4.9}$$

Dengan menggunakan pendekatan Newtonian (Lampiran B) terhadap Lagrangian dan Hamiltonian, didapatkan:

$$S \cong \int dt\, d^3\boldsymbol{r} \left[-\frac{1}{8\pi G}(\nabla\phi)^2 + i\psi^*\dot{\psi} - \frac{1}{2m}|\nabla\psi|^2 - m\mathrm{V}|\psi|^2 - \frac{1}{8}\frac{\lambda}{m^2}|\psi|^4\right], \quad (4.10)$$

dimana $(\nabla\phi)^2 \equiv \nabla\mathrm{V}.\nabla\mathrm{V}$ dan symbol ≅ mengindikasikan bahwa ada suku permukaan yang diabaikan. Oleh karenanya, Hamiltonian sistem dapat dinyatakan menjadi:

$$\widehat{H}(\psi, \Phi) = \int d^3\boldsymbol{r}\boldsymbol{\mathcal{H}} = \int d^3\boldsymbol{r} \left[\frac{1}{8\pi G}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2m}|\nabla\psi|^2 + m\mathrm{V}|\psi|^2 - \frac{1}{8}\frac{\lambda}{m^2}|\psi|^4\right], \quad (4.11)$$

disisi lain, jumlah partikel Newtonian dinyatakan oleh

$$\widehat{N} \equiv \int d^3\boldsymbol{r}\, |\psi|^2, \quad (4.12)$$

sebagai tambahan, dibutuhkan juga kondisi $\widehat{N} = N$, yaitu , kondisi dimana di dalam sistem terdapat N buah boson skalar. Selanjutnya ditinjau $\delta\{\widehat{H} - \mu(\widehat{N} - N)\} = 0$ yang merupakan persamaan untuk medan skalar dalam pendekatan medan rata-rata, dimana μ merupakan pengali Lagrange

Sekarang telah diperoleh dua persamaan yg terkopel untuk medan gravitasi stasioner dan medan materi yaitu:

$$\nabla^2\mathrm{V} = 4\pi G m|\psi|^2, \quad (4.13)$$

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + m\phi\psi + \frac{\tilde{\lambda}}{4m^2}|\psi|^2\psi = \mu\psi, \quad (4.14)$$

oleh karena itu, sistem akan tereduksi menjadi limit Newtonian pada sistem Schrödinger-Poisson.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB 5
SOLUSI STATIK STASIONER SIMETRI BOLA

Dalam bab ini akan diturunkan solusi statik stasioner dalam simetri bola dari bintang boson dengan menggunakan pendekatan limit medan lemah serta limit kopling besar. Dalam limit kopling besar, nilai konstanta kopling tak berdimensi Λ akan dianggap sangat besar. Agar mempermudah perhitungan, maka akan dilakukan juga proses *rescalling* terhadap beberapa kuantitas. Dengan pendekatan-pendekatan tadi maka di akhir akan didapatkan persamaan diferensial linier yang akan dipecahkan untuk mendapatkan parameter-parameter fisis bintang boson yaitu densitas ternormalisasi, potensial gravitasi, massa, dan massa maksimum.

5.1 Solusi Statis Stasioner Simetri Bola Dalam 4 dimensi

Dalam sub bab ini akan ditinjau limit kopling besar, dimana diasumsikan untuk kasus $\Lambda \gg 1$, dimana

$$\Lambda = \frac{\lambda}{8\pi G m^2}, \tag{5.1}$$

sebagai tambahan, diperkenalkan kuantitas-kuantitas berikut

$$r_* = \frac{m}{\sqrt{\Lambda}} r, \tag{5.2}$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{4\pi G\Lambda}{m}}\psi, \tag{5.3}$$

$$\mu_* = \frac{\mu}{m}, \tag{5.4}$$

seperangkat persamaan tersebut dapat direduksi kedalam bentuk:

$$\nabla^2 V = |\Psi|^2, \tag{5.5}$$

$$-\frac{1}{2\Lambda}\nabla_*^2\Psi + V\Psi + \frac{1}{2}|\Psi|^2\Psi = \mu_*\Psi, \tag{5.6}$$

dimana ∇_*^2 adalah Laplacian yang diskalakan dalam suku koordinat r_*

Dalam limit $\Lambda \to \infty$, persamaan (5.6) dapat direduksi lebih jauh menjadi:

$$V\Psi + \frac{1}{2}|\Psi|^2\Psi = \mu_*\Psi, \tag{5.7}$$

interpretasi lebih jauh dapat dilakukan terhadap persamaan (5.7) dengan cara sebagai berikut. Dalam wilayah diluar bintang boson, solusinya adalah $\Psi \equiv 0$. Dalam wilayah didalam bintang boson , yaitu, dalam daerah $|\Psi| > 0$, solusinya akan dinyatakan dalam persamaan

$$V = \mu_* - \frac{1}{2}\rho, \tag{5.8}$$

dimana fungsi densitas ternormalisasi didefinisikan oleh

$$\rho \equiv |\Psi|^2, \tag{5.9}$$

perlu dicatat bahwa μ_* mengindikasikan bahwa nilai potensial gravitasi pada permukaan bintang boson, dimana $\rho = 0$. Jika relasi (5.8) disubtitusikan kedalam persamaan poisson (5.5), maka akan diperoleh persamaan diferensial linier

$$\nabla_*^2\rho + 2\rho \equiv 0, \tag{5.10}$$

yang mana valid dalam daerah di dalam bintang boson, sementara $\rho = 0$ diluar bintang boson. Akibat persamaan (4.12), solusi persamaan linier (5.10) haruslah dinormalisasi menjadi

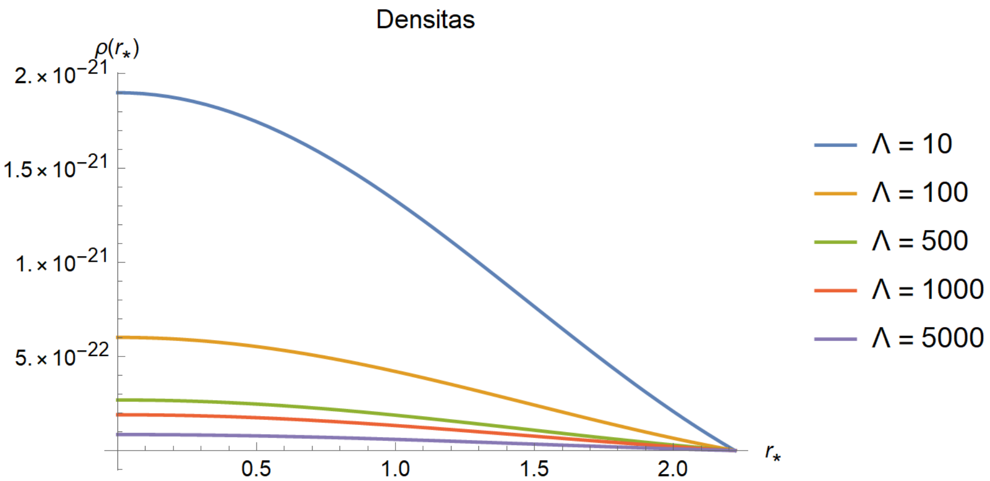
$$N \equiv \frac{\sqrt{\Lambda}}{4\pi G m^2} \int d^3 \boldsymbol{r}_* \rho(\boldsymbol{r}_*) \,, \tag{5.11}$$

selanjutnya, ditinjau solusi simetri bola dari sistem. Kemudian, persamaan (5.10) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\frac{1}{r_*} \frac{d^2}{dr_*^2} (r_* \rho) + 2\rho = 0, \tag{5.12}$$

dimana $r_* = \sqrt{\boldsymbol{r}_* . \boldsymbol{r}_*}$. solusi ternormalisasi untuk $\rho(\boldsymbol{r}_*)$ secara analitik dapat dituliskan menjadi

$$\rho(r_*) = \begin{cases} \frac{4\pi G m^2}{\sqrt{\Lambda}} \frac{N}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{\sin\sqrt{2} r_*}{\sqrt{2} r_*} & (r_* < \pi/\sqrt{2}) \\ 0 & (r_* > \pi/\sqrt{2}) \end{cases}, \tag{5.13}$$

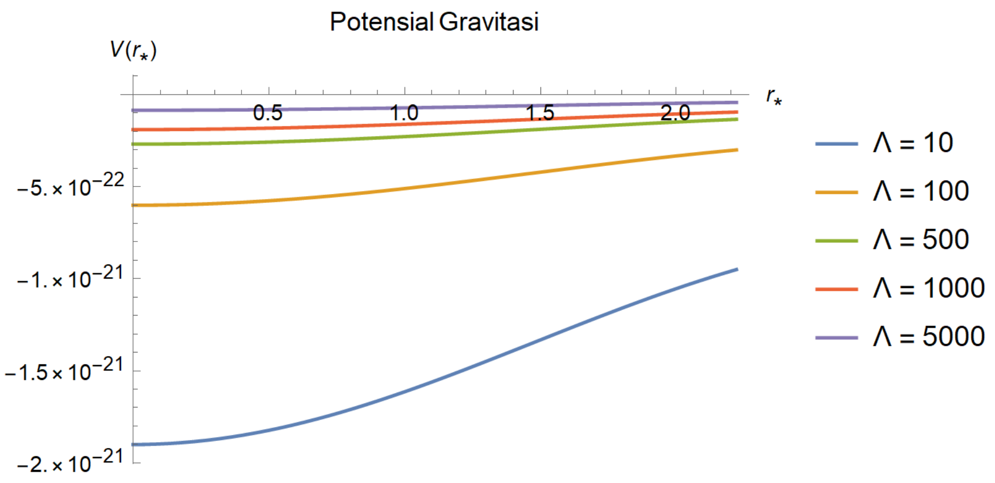


Gambar 5.1 Plot densitas ternormalisasi bintang boson terhadap jarak r_* untuk daerah $r_* < \pi/\sqrt{2}$ dengan variasi Λ yang berbeda

Dari persamaan (5.13) dan gambar 5.1 terlihat bahwa densitas bintang boson berbanding terbalik dengan konstanta kopling Λ. Dimana untuk jarak r_* yang sama, semakin besar nilai konstanta kopling Λ maka nilai densitas $\rho(r_*)$ akan semakin kecil. Sebaliknya jika nilai konstanta kopling Λ semakin kecil maka nilai densitas $\rho(r_*)$ akan semakin besar.

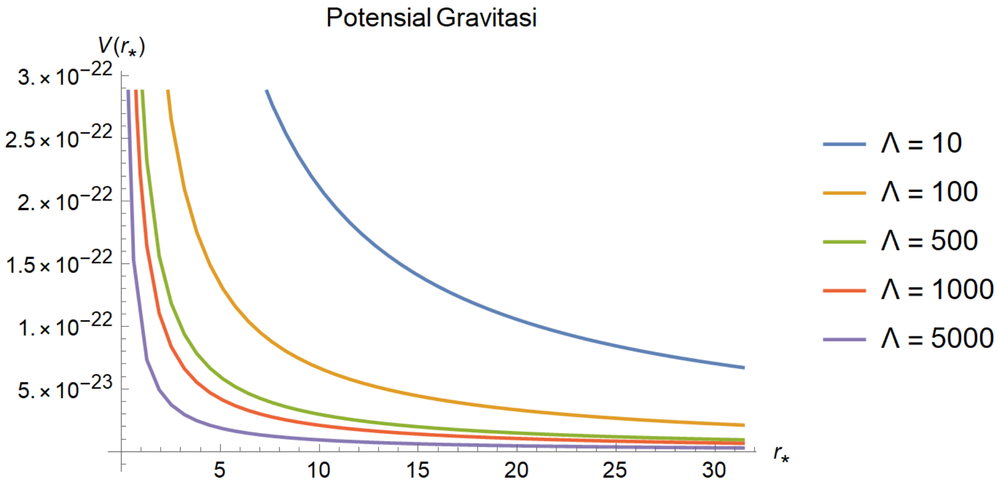
solusi untuk potensial gravitasi $V(r_*)$ dapat didapatkan melalui persamaan (5.12) untuk $r_* < \pi/\sqrt{2}$. Kita harus memilih nilai μ_* sehingga $V(r_*)$ cocok dengan potensial Newton pada $r_* > \pi/\sqrt{2}$. Oleh karena itu kita mendapatkan

$$V(r_*) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{Gm^2N}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{2\pi Gm^2}{\sqrt{\Lambda}}\frac{N}{\sqrt{2}\pi^2}\frac{\sin\sqrt{2}r_*}{\sqrt{2}r_*} & \left(r_* < \pi/\sqrt{2}\right) \\ -\frac{Gm^2N}{\sqrt{\Lambda}} & \left(r_* > \pi/\sqrt{2}\right) \end{cases}, \tag{5.14}$$



Gambar 5.2 Plot potensial gravitasi ternormalisasi bintang boson terhadap jarak r_* untuk daerah $r_* < \pi/\sqrt{2}$ dengan variasi Λ yang berbeda

dari persamaan (5.14) dan gambar 5.1 terlihat bahwa potensial gravitasi bintang boson berbanding terbalik dengan konstanta kopling Λ. Dimana untuk jarak r_* yang sama, semakin besar nilai konstanta kopling Λ maka nilai potensial gravitasi $V(r_*)$ akan semakin kecil. Sebaliknya jika nilai konstanta kopling Λ semakin kecil maka nilai potensial gravitasi $V(r_*)$ akan semakin besar.



Gambar 5.1 Plot potensial gravitasi ternormalisasi bintang boson terhadap jarak r_* untuk daerah $r_* > \pi/\sqrt{2}$ dengan variasi Λ yang berbeda

5.2 Massa dan Massa Maksimum Bintang Boson Dalam Dimensi 4

Energi Newtonian E dari sistem dalam limit kopling besar dapat dinyatakan dari persamaan (4.11) sebagai

$$E = \frac{\sqrt{\Lambda}}{2\pi G m^2} \int d^3 r_* \left[-\frac{1}{2\Lambda} (\nabla_* \mathrm{V})^2 + \mathrm{V} |\Psi|^2 + \frac{1}{4} |\Psi|^4 \right], \tag{5.15}$$

dengan mensubtitusikan solusi dari persamaan (5.14) dan (5.8) kedalam persamaan (5.15) maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt{\Lambda}}{2\pi G m^2} \int d^3 r_* \left[\frac{1}{2} \rho \mathrm{V} - \frac{1}{4} \rho^2 \right] \\ &= \frac{\sqrt{\Lambda}}{2\pi G m^2} \int d^3 r_* \left[\frac{1}{2} \mu_* \rho \right] \\ &= \frac{1}{2} N m \mu_* \\ &= \frac{1}{2} N \mu, \end{aligned} \tag{5.16}$$

massa bintang boson diberikan oleh

$$M = Nm + E, \tag{5.17}$$

setelah mensubtitusi solusi (5.14) kedalam (5.16), didapatkan bahwa massa bintang boson bersimetri bola menjadi

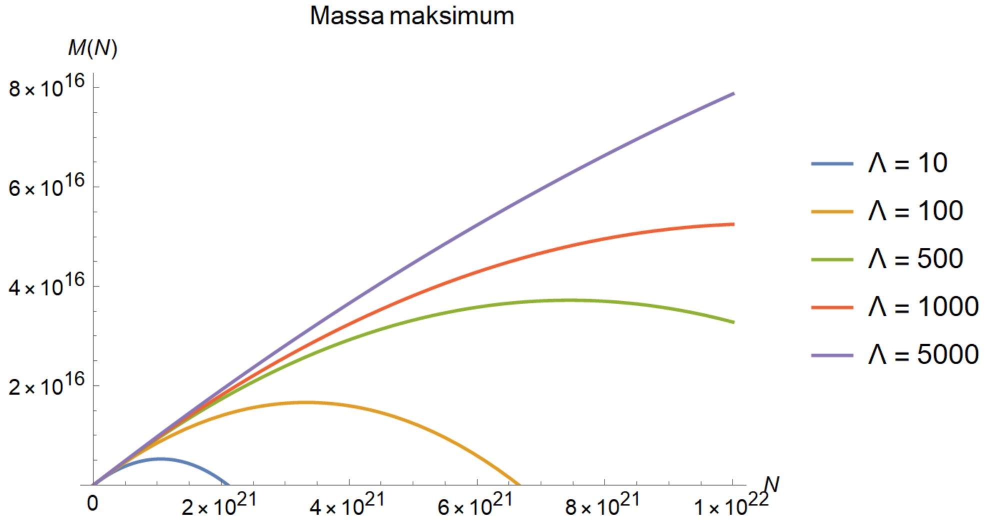
$$M(N) = mN - \frac{Gm^2}{\sqrt{2}\pi\sqrt{\Lambda}}N^2, \tag{5.18}$$

secara kebetulan, jika nilai *N* divariasikan, maka nilai *M* maksimum akan terjadi pada

$$N = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\Lambda}}{Gm^2}, \tag{5.19}$$

dan nilai *M* maksimum adalah

$$M_{max} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\Lambda}}{Gm}, \tag{5.20}$$



Gambar 5.1 Plot massa maksimum bintang boson terhadap jumlah partikel dengan variasi Λ yang berbeda

yang seharusnya menjadi massa tipikal dari bintang boson dalam limit kopling besar. Nilai massa ini beberapa kali lebih besar dibandingkan hasil yang diperoleh dengan pendekatan relativitas umum. Hal ini mirip dengan kasus yang telah diketahui baik untuk bintang boson Newtonian dan bintang boson relativistik tanpa interaski diri. Kita tidak perlu meninjau bintang boson dengan massa maksimum, khususnya untuk menjelaskan rotasi galaksi yang disebabkan oleh boson star raksasa yang berlokasi di pusat galaksi.

5.3 Solusi Statis Stasioner Simetri Bola dalam D-1 dimensi

Dalam ruang waktu dimensi-D, kita menggunakan bentuk yang sama dari rapat lagrangian $\mathcal{L}$ dan rapat Hamiltonian $\mathcal{H}$ dalam dimensi 4. Kemudian bentuk persamaan gerak untuk ρ tidak berubah. Laplacian dalam sistem koordinat bola yang berdimensi ruang D-1 menjadi

$$\nabla_*^2 = \frac{1}{r_*^{D-2}} \frac{d}{dr_*} r_*^{\mathrm{D}-2} \frac{d}{dr_*}, \tag{5.21}$$

Untuk bintang boson berdimensi D, jumlah partikel dinyatakan dalam persamaan berikut

$$N \equiv \frac{(\sqrt{\Lambda})^{D-3}}{4\pi G m^{D-2}} \int d^{D-1}\boldsymbol{r}_* \rho(\boldsymbol{r}_*) , \tag{5.22}$$

dengan menyelesaikan persamaan diferensial untuk dimensi D maka didapatkan solusi untuk densitas ternormalisasi dan potensial gravitasi pada daerah $r_* < q/\sqrt{2}$

$$\rho(r_*) = \frac{4\pi G m^{D-2}}{A_{D-1}(\sqrt{\Lambda})^{D-3}} \frac{2^{\frac{D-1}{2}} N}{q^{\frac{D-1}{2}} J_{\frac{D-1}{2}}(q)} \frac{J_{\frac{D-3}{2}}(\sqrt{2}r_*)}{(\sqrt{2}r_*)^{\frac{D-3}{2}}}, \tag{5.23}$$

sedangkan untuk potensial gravitasinya untuk daerah $r_* < q/\sqrt{2}$

$$\mathrm{V}(\mathrm{r}_*) = \frac{4\pi G m^{D-2}}{A_{D-1}(\sqrt{\Lambda})^{D-3}} \frac{2^{\frac{D-3}{2}}}{(D-3)q^{D-3}} - \frac{2\pi G m^{D-2}}{A_{D-1}(\sqrt{\Lambda})^{D-3}} \frac{2^{\frac{D-1}{2}} N}{q^{\frac{D-1}{2}} J_{\frac{D-1}{2}}(q)} \frac{J_{\frac{D-3}{2}}(\sqrt{2}r_*)}{(\sqrt{2}r_*)^{\frac{D-3}{2}}}, \tag{5.24}$$

dan untuk daerah $r_* > q/\sqrt{2}$

$$\mathrm{V}(\mathrm{r}_*) = \frac{4\pi G m^{D-2}}{A_{D-1}(\sqrt{\Lambda})^{D-3}} \frac{1}{(D-3)r_*^{D-3}}, \tag{5.25}$$

dimana $A_{D-1} = \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}$, $J_n(z)$ adalah fungsi Bessel jenis pertama, dan q adalah nol tidak trivial pertama dari $J_{\frac{D-3}{2}}(x)$, yaitu, $J_{\frac{D-3}{2}}(q) = 0$. Seperti dalam kasus *D=4*, kita telah memilih nilai μ_* sehingga $\mathrm{V}(\mathrm{r}_*)$ sesuai denga potensial gravitasi pada ruang hampa diluar bintang.

Energi Newtonian memiliki bentuk yang sama pada empat dimensi

$$E = \frac{1}{2} N\mu, \tag{5.26}$$

selanjutnya, massa dari bintang boson simetri bola diberikan oleh

$$M(N) = mN - \frac{4\pi G m^{D-1}}{2A_{D-1}(\sqrt{\Lambda})^{D-3}} \frac{2^{\frac{D-3}{2}}}{(D-3)q^{D-3}} N^2, \tag{5.27}$$

massa maksimum terjadi ketika N bernilai

$$N = \frac{A_{D-1}\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}}{4\pi G m^{D-2}} \frac{(D-3)q^{D-3}}{2^{\frac{D-3}{2}}}, \tag{5.28}$$

sehingga massa maksimumnya adalah

$$M_{max} = \frac{A_{D-1}\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}}{4\pi G m^{D-3}} \frac{(D-3)q^{D-3}}{2^{\frac{D-1}{2}}}, \tag{5.29}$$

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB 6
PENUTUP

6.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan, telah diturunkan fitur-fitur Bintang boson melalui pendekatan Newtonian atau pendekatan medan lemah. Dari hasil yang telah diperoleh maka dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu

1. Massa maksimum bintang boson yang didapatkan melalui pendekatan Newtonian memiliki nilai yang beberapa kali lebih besar dibanding hasil yang menggunakan relativitas umum.
2. Untuk solusi statis stasioner dengan simetri bola, solusi untuk mendapatkan densitas dan potensial gravitasi untuk dimensi yang lebih tinggi dapat diperoleh dengan memodifikasi persamaan yang digunakan untuk dimensi 4

6.2 Saran

Terdapat beberapa hal yang belum dikaji lebih jauh yang terkait dengan topik dalam thesis ini, oleh karena itu diberika beberapa saran untuk penelitian selanjutnya:

1. Dengan cara yang sama namun dengan bentuk potensial yang berbeda, misalnya dengan menggunakan bentuk potensial $m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4$, dapat juga dikonstruksi bintang boson Newtonian serta didapatkan parameter-parameter fisisnya.
2. Bintang boson Newtonian ini juga dapat dibangun pada ruang waktu latar belakang AdS dalam empat dan lima dimensi.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR PUSTAKA

[1] Etter, P. 2017."*A Numerical Study of Solitonic Boson Stars in General Relativity*". New Jersey: Princenton University.

[2] Balakrishna, J. 1999."*A Numerical Study of Boson Stars: Einstein Equations With A Matter Source*". Saint Louis, Missouri: Washington University.

[3] Mundim, B.C. 2018."*A Numerical Study of Boson Stars Binaries*". Vancouver: University of British Columbia.

[4] Lai, C.W. 2004."*A Numerical Study of Boson Stars*". Vancouver: University of British Columbia.

[5] Duarte, M.C.S. 2016."*Bosonic Stars: Skalar and Vector Field Self-Gravitating Configurations*". Lisbon: Instituto Superior Técnico.

[6] Brueckner, T.J. 1997."*Boson Stars Efficiently Nucleate Vacuum Phase Transitions*". Bozeman, Montana: Montana State University.

[7] Albar, K. 2018."*Model Q-Ball Dalam Ruang-Waktu (1+1) Dimensi*". Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[8] Anggara, D.L. 2019."*Q-Ball Berotasi Dalam Ruang-Waktu Berdimensi D=5*". Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[9] Volkov, Mikhail S., and Erik Wöhnert. 2002. "SpinningQ-Balls." *Physical Review D* 66 (8). doi:10.1103/physrevd.66.085003.

[10] Jetzer, P. 1992. "Boson Stars." *Physics Reports* 220 (4): 163–227. doi:10.1016/0370-1573(92)90123-h.

[11] Liebling, Steven L., and Carlos Palenzuela. 2012. "Dynamical Boson Stars." *Living Reviews in Relativity* 15 (1). doi:10.12942/lrr-2012-6.

[12] Colpi, Monica, Stuart L. Shapiro, and Ira Wasserman. 1986. “Boson Stars: Gravitational Equilibria of Self-Interacting Skalar Fields.” *Physical Review Letters* 57 (20): 2485–2488. doi:10.1103/physrevlett.57.2485.

[13] Kan, Nahomi, and Kiyoshi Shiraishi. 2016. “Analytical Approximation for Newtonian Boson Stars in Four and Five Dimensions.” *Physical Review D* 94 (10). doi:10.1103/physrevd.94.104042.

[14] Sharma, R., karmakar, S., and Mukherjee, S. 2008. “Boson Star and Dark Matter.”
arXiv:0812.3470 [gr-qc].

[15] Kolb, Edward W., and Igor I. Tkachev. 1993. “Axion Miniclusters and Bose Stars.” *Physical Review Letters* 71 (19): 3051–3054. doi:10.1103/physrevlett.71.3051.

[16] Palenzuela, C., L. Lehner, and S. L. Liebling. 2008. “Orbital Dynamics of Binary Boson Star Sistems.” *Physical Review D* 77 (4). doi:10.1103/physrevd.77.044036.

[17] Kaup, David J. 1968. “Klein-Gordon Geon.” *Physical Review* 172 (5): 1331–1342. doi:10.1103/physrev.172.1331.

[18]

Physical Review D 52 (10): 5724 5728. doi:10.1103/physrevd.52.5724.

LAMPIRAN A

A.1 Bintang Boson Statik Stasioner Simetri Bola Berdimensi 4

Bintang boson dapat dibangun dari medan skalar yang memiliki rapat lagrangian

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{A.1}$$

dimana $\lambda|\phi|^4$ merupakan potensial interaksi.

Suku medan skalar $|\partial\phi|^2$ dapat juga dituliskan dengan

$$|\partial\Phi|^2 = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi\right), \tag{A.2}$$

dimana bentuk aksinya adalah

$$s = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{A.3}$$

Ditinjau bintang boson bersimetri bola dan tak berotasi, sehingga ansatz yang digunakan adalah

$$\Phi(t,r,\theta,\varphi) = \phi(t,r)\exp(i\omega t), \tag{A.4}$$

dimana kompleks konjugatnya

$$\Phi^*(t,r,\theta,\varphi) = \phi(t,r)\exp-(i\omega t), \tag{A.5}$$

kemudian dengan mensubtitusikan ansatz diatas kedalam persamaan rapat lagrangian, maka akan didapatkan bentuk eksplisit lagrangian

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right] \tag{A.6}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi\right) - m^2|\Phi|^2\right. \\
&\qquad\left. + \lambda|\Phi|^4\right], \\
&= \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R - \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0\Phi^*\partial_0\Phi + \partial_0\Phi^*\partial_0\Phi)\right. \\
&\qquad - \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1\Phi^*\partial_1\Phi + \partial_1\Phi^*\partial_1\Phi) \\
&\qquad - \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2\Phi^*\partial_2\Phi + \partial_2\Phi^*\partial_2\Phi) \\
&\qquad \left.- \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3\Phi^*\partial_3\Phi + \partial_3\Phi^*\partial_3\Phi) - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \\
&= \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R\right. \\
&\qquad - \frac{1}{2}(1)\left[\left(-i\omega\phi e^{-i\omega t}\right)\left(i\omega\phi e^{i\omega t}\right)\right. \\
&\qquad \left.+ \left(-i\omega\phi e^{-i\omega t}\right)\left(i\omega\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\
&\qquad - \frac{1}{2}(1)\left[\partial_r\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_r\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right. \\
&\qquad \left.+ \partial_r\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_r\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\partial_\theta\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\theta\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right. \\
&\qquad \left.+ \partial_\theta\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\theta\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\right)\left[\partial_\varphi\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\varphi\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right. \\
&\qquad \left.\left.+ \partial_\varphi\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\varphi\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = \sqrt{-g}&\left[\frac{1}{16\pi G}R + \omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 - \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2\right. \\
&\left. - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right],
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

karena ϕ merupakan fungsi dari ω dan r saja, maka suku-suku yang merupakan turunan ϕ terhadap ω dan r lenyap. Sehingga bentuk eksplisit rapat lagrangiannya menjadi

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + \omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \quad \text{(A.8)}$$

selanjutnya dicari komponen-komponen tensor energi momentumnya dengan menggunakan persamaan

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad \text{(A.9)}$$

dengan mensubtitusikan ansatz dan komponen tensor metriknya maka akan didapatkan bentuk tensor energi momentumnya

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = &-g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\Phi^*\partial_\beta\Phi + \partial_\beta\Phi^*\partial_\alpha\Phi\right) + U(|\Phi|)\right] \\ &+ \left(\partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi\right), \end{aligned} \quad \text{(A.10)}$$

metrik yang digunakan berbentuk

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \quad \text{(A.11)}$$

sehingga elemen tensor metriknya adalah

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad \text{(A.12)}$$

dimana inversnya adalah

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

agar mempermudah perhitungan, maka akan dicari terlebih dahulu bentuk ekspansi dari suku-suku yang ada dalam kurung siku [ ].

$$[\ ] = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi + \partial_\beta \Phi^* \partial_\alpha \Phi\right) + U(|\Phi|), \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} [\ ] = {} & \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi + \partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi) + \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 \Phi^* \partial_1 \Phi + \partial_1 \Phi^* \partial_1 \Phi) \\ & + \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 \Phi^* \partial_2 \Phi + \partial_2 \Phi^* \partial_2 \Phi) \\ & + \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 \Phi^* \partial_3 \Phi + \partial_3 \Phi^* \partial_3 \Phi) + U(|\Phi|), \end{aligned} \tag{A.15}$$

kemudian subtitusikan ansatz pada persamaan (A.4) dan (A.5), sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} [\ ] = {} & \frac{1}{2}(-1)\left[\left(-i\omega\phi e^{-i\omega t}\right)\left(i\omega\phi e^{i\omega t}\right) + \left(-i\omega\phi e^{-i\omega t}\right)\left(i\omega\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\ & + \frac{1}{2}(1)\left[\partial_r\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_r\left(\phi e^{i\omega t}\right) + \partial_r\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_r\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\partial_\theta\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\theta\left(\phi e^{i\omega t}\right) + \partial_\theta\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\theta\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\right)\left[\partial_\varphi\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\varphi\left(\phi e^{i\omega t}\right) + \partial_\varphi\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\varphi\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\ & + U(|\Phi|), \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$[\ ] = -\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 + U(|\Phi|),$$

selanjutnya dapat dihitung komponen-komponen tidak nol dari tensor energi momentumnya

$$\begin{aligned} T_{00} = -g_{00}\Big[& -\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 \\ & + U(|\Phi|)\Big] + (\partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi + \partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi) \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(-1)\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + U(|\Phi|)\right] + 2\omega^2\phi^2,\\
T_{00} &= \omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 + U(|\Phi|),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= -g_{11}\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + U(|\Phi|)\right] + (\partial_1\Phi^*\partial_1\Phi + \partial_1\Phi^*\partial_1\Phi),\\
&= -1\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + U(|\Phi|)\right] + 2(\partial_r\phi)^2,\\
T_{11} &= \omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 - \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 + U(|\Phi|),
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{22} &= -g_{22}\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + U(|\Phi|)\right] + (\partial_2\Phi^*\partial_2\Phi + \partial_2\Phi^*\partial_2\Phi)\\
&= -r^2\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + U(|\Phi|)\right] + 2(\partial_\theta\phi)^2\\
T_{22} &= r^2\omega^2\phi^2 - r^2(\partial_r\phi)^2 + (\partial_\theta\phi)^2 - \frac{1}{sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 + U(|\Phi|),
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{33} &= -g_{33}\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + U(|\Phi|)\right] + (\partial_3\Phi^*\partial_3\Phi + \partial_3\Phi^*\partial_3\Phi)\\
&= -r^2 sin^2\theta\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + U(|\Phi|)\right] + 2\left(\partial_\varphi\phi\right)^2
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

$$T_{33} = r^2\omega^2\phi^2 sin^2\theta - r^2(\partial_r\phi)^2 sin^2\theta + (\partial_\theta\phi)^2 sin^2\theta - \left(\partial_\varphi\phi\right)^2 + U(|\Phi|),$$

A.2 Bintang Boson Statik Stasioner Simetri Bola Berdimensi 5

Bintang boson dapat dibangun dari medan skalar yang memiliki rapat lagrangian

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{A.21}$$

dimana $\lambda|\phi|^4$ merupakan potensial interaksi.

Suku medan skalar $|\partial\phi|^2$ dapat juga dituliskan dengan

$$|\partial\Phi|^2 = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi\right), \tag{A.22}$$

dimana bentuk aksinya adalah

$$s = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{A.23}$$

ditinjau bintang boson bersimetri bola dan tak berotasi, sehingga ansatz yang digunakan adalah

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi_1, \varphi_2) = \phi(t, r)\exp(i\omega t), \tag{A.24}$$

dimana kompleks konjugatnya

$$\Phi^*(t, r, \theta, \varphi_1, \varphi_2) = \phi(t, r)\exp -(i\omega t), \tag{A.25}$$

kemudian dengan mensubtitusikan ansatz diatas kedalam persamaan rapat lagrangian, maka akan didapatkan bentuk eksplisit lagrangian

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \tag{A.26}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + |\partial\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right] \\
&= \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi\right) - m^2|\Phi|^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \lambda|\Phi|^4\right], \\
&= \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R - \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0\Phi^*\partial_0\Phi + \partial_0\Phi^*\partial_0\Phi) \right. \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1\Phi^*\partial_1\Phi + \partial_1\Phi^*\partial_1\Phi) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2\Phi^*\partial_2\Phi + \partial_2\Phi^*\partial_2\Phi) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3\Phi^*\partial_3\Phi + \partial_3\Phi^*\partial_3\Phi) \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{2}g^{44}(\partial_4\Phi^*\partial_4\Phi + \partial_4\Phi^*\partial_4\Phi) - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \\
&= \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R \right. \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}(1)\left[\left(-i\omega\phi e^{-i\omega t}\right)\left(i\omega\phi e^{i\omega t}\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(-i\omega\phi e^{-i\omega t}\right)\left(i\omega\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}(1)\left[\partial_r\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_r\left(\phi e^{i\omega t}\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \partial_r\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_r\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\partial_\theta\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\theta\left(\phi e^{i\omega t}\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \partial_\theta\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\theta\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\right)\left[\partial_{\varphi_1}\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_{\varphi_1}\left(\phi e^{i\omega t}\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \partial_{\varphi_1}\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_{\varphi_1}\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2 cos^2\theta}\right)\left[\partial_{\varphi_2}\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_{\varphi_2}\left(\phi e^{i\omega t}\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \left. + \partial_{\varphi_2}\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_{\varphi_2}\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right],
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

$$
\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + \omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2(\partial_\theta\phi)^2 \right.
$$

$$
- \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2 - \frac{1}{r^2 cos^2\theta}\partial_{\varphi_2}\phi - m^2|\Phi|^2 \qquad \text{(A.28)}
$$

$$
\left. + \lambda|\Phi|^4\right],
$$

karena ϕ merupakan fungsi dari ω dan r saja, maka suku-suku yang merupakan turunan ϕ terhadap ω dan r lenyap. Sehingga bentuk eksplisit rapat lagrangiannya menjadi

$$
\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + \omega^2\phi^2 - (\partial_r\phi)^2 - m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4\right], \qquad \text{(A.29)}
$$

selanjutnya dicari komponen-komponen tensor energi momentumnya dengan menggunakan persamaan

$$
T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}, \qquad \text{(A.30)}
$$

dengan mensubtitusikan ansatz dan komponen tensor metriknya maka akan didapatkan bentuk tensor energi momentumnya

$$
T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\Phi^*\partial_\beta\Phi + \partial_\beta\Phi^*\partial_\alpha\Phi\right) + U(|\Phi|)\right]
$$

$$
+ \left(\partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi\right), \qquad \text{(A.31)}
$$

metrik yang digunakan berbentuk

$$
ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi_1^2 + r^2\cos\theta^2\, d\varphi_2^2, \qquad \text{(A.32)}
$$

sehingga elemen tensor metriknya adalah

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^2 \cos\theta^2 \end{pmatrix} \tag{A.33}$$

dimana inversnya adalah

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \cos\theta^2} \end{pmatrix} \tag{A.34}$$

agar mempermudah perhitungan, maka akan dicari terlebih dahulu bentuk ekspansi dari suku-suku yang ada dalam kurung siku [ ].

$$[\ ] = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi + \partial_\beta \Phi^* \partial_\alpha \Phi\right) + U(|\Phi|), \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned} [\ ] = \ & \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi + \partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi) + \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 \Phi^* \partial_1 \Phi + \partial_1 \Phi^* \partial_1 \Phi) \\ & + \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 \Phi^* \partial_2 \Phi + \partial_2 \Phi^* \partial_2 \Phi) \\ & + \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 \Phi^* \partial_3 \Phi + \partial_3 \Phi^* \partial_3 \Phi) \\ & + \frac{1}{2} g^{44}(\partial_4 \Phi^* \partial_4 \Phi + \partial_4 \Phi^* \partial_4 \Phi) + U(|\Phi|), \end{aligned} \tag{A.36}$$

kemudian subtitusikan ansatz pada persamaan (A.24) dan (A.25), sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} [\ ] = \ & \frac{1}{2}(-1)\left[\left(-i\omega\phi e^{-i\omega t}\right)\left(i\omega\phi e^{i\omega t}\right) + \left(-i\omega\phi e^{-i\omega t}\right)\left(i\omega\phi e^{i\omega t}\right)\right] \\ & + \frac{1}{2}(1)\left[\partial_r\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_r\left(\phi e^{i\omega t}\right) + \partial_r\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_r\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right] \end{aligned} \tag{A.37}$$

$$+\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\partial_\theta\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\theta\left(\phi e^{i\omega t}\right)+\partial_\theta\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_\theta\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right]$$

$$+\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\right)\left[\partial_{\varphi_1}\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_{\varphi_1}\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right.$$

$$\left.+\ \partial_{\varphi_1}\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_{\varphi_1}\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right]$$

$$+\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2 cos^2\theta}\right)\left[\partial_{\varphi_2}\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_{\varphi_2}\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right.$$

$$\left.+\ \partial_{\varphi_2}\left(\phi e^{-i\omega t}\right)\partial_{\varphi_2}\left(\phi e^{i\omega t}\right)\right]$$

$$+\ U(|\Phi|),$$

$$[\ ] =\ -\omega^2\phi^2+(\partial_r\phi)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2$$

$$+\ \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2+U(|\Phi|),$$

Selanjutnya dapat dihitung komponen-komponen tidak nol dari tensor energi momentumnya

$$T_{00} =\ -(1)\left[-\omega^2\phi^2+(\partial_r\phi)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2\right.$$

$$\left.+\ \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2-U(|\Phi|)\right]$$

$$+\ (\partial_0\Phi^*\partial_0\Phi+\partial_0\Phi^*\partial_0\Phi)$$

$$=\ -(-1)\left[-\omega^2\phi^2+(\partial_r\phi)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2\right. \qquad \text{(A.38)}$$

$$\left.+\ \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2-U(|\Phi|)\right]+2\omega^2\phi^2$$

$$T_{00} =\ \omega^2\phi^2+(\partial_r\phi)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2$$

$$+\ \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2-U(|\Phi|),$$

$$T_{11} =\ -g_{11}\left[-\omega^2\phi^2+(\partial_r\phi)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2\right.$$

$$\left.+\ \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2-U(|\Phi|)\right] \qquad \text{(A.39)}$$

$$+\ (\partial_1\Phi^*\partial_1\Phi+\partial_1\Phi^*\partial_1\Phi)$$

$$= -1\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2 + \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2 - U(|\Phi|)\right] + 2(\partial_r\phi)^2$$

$$T_{11} = \omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 - \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2 - \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2 - U(|\Phi|),$$

$$\begin{aligned} T_{22} = & -g_{22}\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2 + \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2 - U(|\Phi|)\right] \\ & + (\partial_2\Phi^*\partial_2\Phi + \partial_2\Phi^*\partial_2\Phi) \\ = & -r^2\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2 + \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2 - U(|\Phi|)\right] + 2(\partial_\theta\phi)^2 \end{aligned} \tag{A.40}$$

$$T_{22} = r^2\omega^2\phi^2 - r^2(\partial_r\phi)^2 + (\partial_\theta\phi)^2 - \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2 - \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2 - U(|\Phi|),$$

$$\begin{aligned} T_{33} = & -g_{33}\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2 + \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2 - U(|\Phi|)\right] \\ & + (\partial_3\Phi^*\partial_3\Phi + \partial_3\Phi^*\partial_3\Phi) \\ = & -r^2 sin^2\theta\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2 + \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2 - U(|\Phi|)\right] + 2\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 \end{aligned} \tag{A.41}$$

$$T_{33} = r^2\omega^2\phi^2 sin^2\theta - r^2(\partial_r\phi)^2 sin^2\theta + \left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2 - \left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2\tan^2\theta - U(|\Phi|),$$

$$
\begin{aligned}
T_{44} =& -g_{44}\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2\right. \\
&\left. + \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2 - U(|\Phi|)\right] \\
&+ (\partial_3\Phi^*\partial_3\Phi + \partial_3\Phi^*\partial_3\Phi) \\
=& -r^2 sin^2\theta\left[-\omega^2\phi^2 + (\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2\right. \\
&\left. + \frac{1}{r^2 cos\theta}\left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2 - U(|\Phi|)\right] + 2\left(\partial_\varphi\phi\right)^2 \\
T_{44} =& \; r^2\omega^2\phi^2 sin^2\theta - r^2(\partial_r\phi)^2 sin^2\theta + \left(\partial_{\varphi_1}\phi\right)^2\cot^2\theta - \left(\partial_{\varphi_2}\phi\right)^2 \\
&- U(|\Phi|),
\end{aligned}
\tag{A.42}
$$

LAMPIRAN B

Dalam lampiran ini akan ditinjau limit medan lemah (Newtonian Limit) dari sistem Einstein-Klein-Gordon (EKG). Sistem Poisson-Schrodinger ini dapat menggambarkan bintang boson non relativistic.

Dua persamaan dalam sistem EKG adalah

$$G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \tag{B.1}$$

$$\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}\phi - m^2\phi = 0, \tag{B.2}$$

dimana κ adalah konstanta yang secara konvensi bernilai 8π dan $T_{\alpha\beta}$ adalah tensor energi momentum.

B.1 Limit Medan Lemah: Penurunan Sistem Poisson-Schrodinger Dari Sistem Einstein-Klein-Gordon

ditinjau sebuah ruang waktu yang mendekati datar sehingga metriknya dapat dituliskan sebagai

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{B.3}$$

Dimana

$$|h_{\alpha\beta}| = O(\epsilon) \ll 1, \tag{B.4}$$

Dan $\eta_{\alpha\beta}$ merupakan metrik datar dalam koordinat kartesian $\eta_{\alpha\beta}\eta = \text{diag}(-1,1,1,1)$. Ada dua jenis transformasi koordinat yang invarian terhadap bentuk diatas yaitu transformasi latar Lorentz dan transformasi gauge.

Transformasi gauge dapat dituliskan dalam bentuk

$$x^{\bar{\alpha}} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta}), \tag{B.5}$$

Dimana

$$\left|\xi^{\alpha}_{,\beta}\right| = O(\epsilon), \tag{B.6}$$

matriks Jacobian yang terasosiasi dengan (B.5) dapat dituliskan debagai

$$\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \xi^{\alpha}_{,\beta}, \tag{B.7}$$

dengan inversnya diberikan oleh

$$\Lambda^{\alpha}_{\bar{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \xi^{\alpha}_{,\beta} + O(\epsilon^2), \tag{B.8}$$

seperti yang diterapkan berikut

$$\begin{aligned} \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}\Lambda^{\beta}_{\bar{\gamma}} &= \left(\delta^{\alpha}_{\beta} + \xi^{\alpha}_{,\beta}\right)\left(\delta^{\beta}_{\gamma} + \xi^{\beta}_{,\gamma}\right) \\ &= \delta^{\alpha}_{\gamma} + \xi^{\alpha}_{,\gamma} - \xi^{\alpha}_{,\gamma} + \xi^{\alpha}_{,\beta}\xi^{\beta}_{,\gamma} \\ &= \delta^{\alpha}_{\gamma} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{B.9}$$

sekarang

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}g_{\mu\nu} \\ &= \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu} + \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}h_{\mu\nu} \\ &= \left(\delta^{\mu}_{\alpha} - \xi^{\mu}_{,\alpha}\right)\left(\delta^{\nu}_{\beta} + \xi^{\nu}_{,\beta}\right)\eta_{\mu\nu} + \left(\delta^{\mu}_{\alpha} - \xi^{\mu}_{,\alpha}\right)\left(\delta^{\nu}_{\beta} + \xi^{\nu}_{,\beta}\right)h_{\mu\nu} + O(\epsilon^2) \\ &= \eta_{\alpha\beta} - \xi^{\mu}_{,\alpha}\eta_{\mu\beta} - \xi^{\nu}_{,\beta}\eta_{\alpha\nu} + h_{\alpha\beta} + O(\epsilon^2) \\ &= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{B.10}$$

Atau

$$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + O(\epsilon^2), \tag{B.11}$$

dimana langkah terakhir diadopsi dari konvensi notasi yang mana bahwa kita dapat menaikkan dan menurunkan indeks menggunakan $\eta_{\alpha\beta}$. Yang mana, $h^{\alpha\beta}$

secara definisi adalah $\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}h_{\mu\nu}$. (perlu dicatat juga bahwa dengan menggunakan konvensi notasi yang sama dapat juga diperoleh $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + O(\epsilon^2)$. Dengan kata lain, untuk semua kuantitas dengan orde $O(\epsilon^2)$, menaikkan dan menurunkan indeks menggunakan η dibandingkan dengan g akan menuntun pada deviasi dari orde $O(\epsilon^2)$.)

secara definisi kita mempunyai

$$-R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}, \tag{B.12}$$

dimana

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(h_{\rho\nu,\mu} + h_{\mu\rho,\nu} - h_{\mu\nu,\rho}\right) + O(\epsilon^2), \tag{B.13}$$

perlu dicatat bahwa dalam hal ini digunakana koordinat kartesian (dan oleh karena itu turunan terhadap η lenyap), dan karena itu kita mengasumsikan bahwa turunan terhadap angka yang kecil juga bernilai kecil

$$h_{\alpha\beta,\gamma} = O(\epsilon), \tag{B.14}$$

(sehingga kita dapat menurunkan suku-suku seperti $h^{\alpha\beta}h_{\beta\gamma,\delta}$).

sekarang kita mempunyai

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\rho}\left(h_{\rho\mu,\beta\nu} + h_{\beta\rho,\mu\nu} - h_{\beta\mu,\rho\nu}\right) - (\mu \leftrightarrow \nu) + O(\epsilon^2), \tag{B.15}$$

suku kedua dalam tanda kurung diatas dihapus sehingga didapatkan

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu}\right) + O(\epsilon^2), \tag{B.16}$$

dan

$$R_{\beta\nu} = -\frac{1}{2}\left(h^{\mu}_{\nu,\beta\mu} - h^{\mu}_{\beta\nu,\alpha} - h^{\mu}_{\mu,\beta\nu} + h^{\mu}_{\beta\mu,\nu}\right) + O(\epsilon^2)$$
$$R_{\beta\nu} = -\frac{1}{2}\left(h^{\mu}_{\nu,\beta\mu} - h_{\beta\nu} - h_{,\beta\nu} + h^{\mu}_{\beta\mu,\nu}\right) + O(\epsilon^2), \qquad \text{(B.17)}$$

dan

$$R = \left(h^{\mu\nu}_{\mu\nu,} + h\right) + O(\epsilon^2), \qquad \text{(B.18)}$$

dimana kita definisikan $h \equiv h^{\mu}_{\mu}$ dan $\square h \equiv h^{\mu}_{,\mu}$

dengan mengkonstruksi tensor Einstein, kemudian kita dapatkan

$$R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}R = \frac{1}{2}\left(h^{\mu}_{\nu,\beta\mu} - h_{\beta\nu} - h_{,\beta\nu} + h^{\mu}_{\beta\mu,\nu} - \eta_{\beta\nu}h^{\gamma\delta}_{\gamma\delta,} + \eta_{\beta nu}\,\square h\right) + O(\epsilon^2), \qquad \text{(B.19)}$$

jika kita definisikan

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h, \qquad \text{(B.20)}$$

kemudian

$$\bar{h} = -h, \qquad \text{(B.21)}$$

dan

$$h^{\alpha\beta} \equiv \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h}, \qquad \text{(B.22)}$$

sekarang

$$G_{\beta\nu} = \frac{1}{2}\Big(\bar{h}^{\mu}_{\nu,\beta\mu} - \frac{1}{2}\bar{h}_{,\beta\nu} - \square\bar{h}_{,\beta\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}\square\bar{h} + \bar{h}_{,\beta\nu} + \bar{h}^{\mu}_{\beta\mu,\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}_{,\beta\nu}$$
$$- \eta_{\beta\nu}\bar{h}^{\gamma\delta}_{\gamma\delta,} + \frac{1}{2}\eta_{\beta u}\,\square\bar{h} - \eta_{\beta u}\,\square\bar{h}\Big) + O(\epsilon^2) \qquad \text{(B.23)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\Box\bar{h}_{,\beta\nu} + \bar{h}^{\mu}_{\nu,\beta\mu} + \bar{h}^{\mu}_{\beta\mu,\nu} - \eta_{\beta\nu}\bar{h}^{\gamma\delta}_{\gamma\delta,}\right) + O(\epsilon^2),$$

jika kita menerapkan kondisi Lorentz gauge

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0, \tag{B.24}$$

kita akan mendapatkan

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\bar{h}_{\alpha\beta} + O(\epsilon^2), \tag{B.25}$$

dan karena itu

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = -2\kappa T_{\alpha\beta} + O(\epsilon^2), \tag{B.26}$$

eksistensi dari gauge Loretnz dapat ditunjukkan sebagai berikut. Dari persamaan (B.11) didapatkan

$$h^{\bar{\alpha}}_{\bar{\alpha}} = h - 2\xi^{\alpha}_{,\alpha} + O(\epsilon^2), \tag{B.27}$$

juga didapatkan

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \frac{1}{2}\eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}h^{\bar{\gamma}}_{\bar{\gamma}} \\ &= h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(h - 2\xi^{\gamma}_{,\gamma}\right) + O(\epsilon^2) \\ &= h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} - \eta_{\alpha\beta}\xi^{\gamma}_{,\gamma} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{B.28}$$

karena itu

$$\bar{h}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{}_{,\bar{\beta}} = \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\beta} - \xi^{\alpha} + O(\epsilon^2), \tag{B.29}$$

yang akan menuntun pada persamaan gelombang non-homogen

$$\Box\xi^{\alpha} = \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\beta}, \tag{B.30}$$

maka eksistensi solusi untuk (B.30) menyiratkan viabilitas dari kondisi Lorentz Gauge untuk sistem koordinat , untuk orde $O(\epsilon^2)$. (catat bahwa solusi tersebut memperbolehkan suku non-homogen. Sehingga gauge Lorentz pada faktanya merupakan sebuah kelas gauge)

karena kita menganggap bahwa potensial Newton $V \sim h_{00}$, maka kita asumsikan

$$|V| = O(\epsilon), \tag{B.31}$$

analisis dimensi menunjukkan $v^2 \sim \frac{GM}{r} = V \rightarrow |v| = O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$. Kita akan beranggapan bahwa $|T^{ij}| \sim v|T^{0i}| \sim v^2|T^{00}|$, atau $|T^{00}| \gg |T^{0i}| \gg |T^{ij}|$. Hal ini akan kurang lebih memberikan $|\bar{h}^{00}| \gg |\bar{h}^{0i}| \gg |\bar{h}^{ij}|$. Oleh karena itu kita mengasumsikan lebih jauh

$$\begin{gathered} \frac{T^{0i}}{T^{00}} = O\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right), \\ \frac{T^{ij}}{T^{00}} = O(\epsilon), \\ \frac{\bar{h}^{0i}}{\bar{h}^{00}} = O\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right), \\ \frac{\bar{h}^{ij}}{\bar{h}^{00}} = O(\epsilon), \end{gathered} \tag{B.32}$$

misalkan kita bisa mengabaikan seluruh komponen $h^{\mu\nu}$ kecuali h^{00}; kemudian dari (B.26) kita memiliki

$$\bar{h}^{00} = -2\kappa\rho + O(\epsilon^2), \tag{B.33}$$

dimana kita mendefinisikan $\rho \equiv T^{00}$. karena kita ingin mencari solusi stasioner kita memiliki

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = \nabla^2\bar{h}^{\alpha\beta} + O(\epsilon^2), \tag{B.34}$$

yang mana akan benar untuk perubahan medan gravitasi yang lambat seperti $\frac{h^{00}_{,00}}{h^{00}_{,ij}} = O(\epsilon^2)$. Sehingga kita memiliki

$$\nabla^2 \bar{h}^{00} = -2\kappa\rho + O(\epsilon^2), \tag{B.35}$$

dengan membandingkan dengan hokum gravitasi Newton

$$\nabla^2 V = \frac{\kappa}{2}\rho, \tag{B.36}$$

didapatkan

$$\bar{h}^{00} = -4V + O(\epsilon^2), \tag{B.37}$$

selain itu,

$$\begin{aligned} h = -\bar{h} &= -\eta_{00}\bar{h}^{00} + O(\epsilon^2) \\ &= \bar{h}^{00} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{B.38}$$

$$\begin{aligned} h^{00} &= \bar{h}^{00} + \frac{1}{2}\eta_{00} h O(\epsilon^2), \\ &= \bar{h}^{00} + \frac{1}{2}\bar{h}^{00} + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2}\bar{h}^{00} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{B.39}$$

dan

$$\begin{aligned} \eta_{00}h^{00} + \eta_{ii}h^{ii} &= h \\ -\frac{1}{2}\bar{h}^{00} + 3h^{11} &= \bar{h}^{00} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{B.40}$$

atau

$$h^{11} = h^{22} = h^{33} = \frac{1}{2}\bar{h}^{00} + O(\epsilon^2), \tag{B.41}$$

yakni

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = -2V + O(\epsilon^2), \tag{B.42}$$

atau

$$h_{\mu\nu} = -2\delta_{\mu\nu}V + O(\epsilon^2), \tag{B.43}$$

metriknya akan menjadi

$$ds^2 = -(1+2V)dt^2 + (1-2V)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + O(\epsilon^2)dx^\mu d^\nu, \tag{B.44}$$

gauge harmonic akan menunjukkan

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = h^{\mu\nu}_{,\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h_{,\nu} = 0 + O(\epsilon^2), \tag{B.45}$$

atau

$$-2\delta^{\mu\nu}V_{,\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left(-4V_{,\nu}\right) + O(\epsilon^2), \tag{B.46}$$

yaitu

$$V_{,0} = 0 + O(\epsilon^2), \tag{B.47}$$

yang mana konsisten dengan asusmi solusi stasioner. Dengan kata lain, kondisi gauge harmonic akan dipenuhi sepanjang solusinya bersifat stasioner. Juga perlu dicatat bahwa (B.14) menjadi

$$V_{,\alpha} = O(\epsilon), \tag{B.48}$$

selain itu,

$$\eta_{00}\bar{h}^{00} + \eta_{ii}\bar{h}^{ii} = \bar{h} = -\bar{h}^{00} + O(\epsilon^2), \tag{B.49}$$

yang menunjukkan

$$\bar{h}^{ii} = O(\epsilon^2), \tag{B.50}$$

dan membenarkan asumsi (B.32). (persamaan (B.32) dipenuhi untuk metrik diagonal (B.44), yang menunjukkan $\bar{h}^{0i} = O(\epsilon^2)$)

Untuk mengevaluasi ruas kanan persamaan Einstein kita tinjau tensor energi momentum

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\left(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi^* + \nabla_\nu\phi\nabla_\mu\phi^*\right) - g_{\mu\nu}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi^* + m^2|\phi|^2)\right], \tag{B.51}$$

perlu dicatat bahwa ∇ menyatakan operator turunan kovarian 4 dimensi. Karena $\phi \sim e^{i\omega t}$, maka kita memiliki $\phi_{,0} \sim \omega\phi \sim m\phi$, dimana kita sumsikan

$$\frac{\omega}{m} = 1 + O\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right), \tag{B.52}$$

sekarang

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{2}g^{00}\left[2g^{00}\phi^*_{,0}\phi_{,0} - \left(g^{\alpha\beta}\phi^*_{,\alpha}\phi_{,\beta} + m^2\phi^*\phi\right)\right] + O(|\epsilon\phi|^2) \\ &= \frac{1}{2}g^{00}\left[g^{00}\phi^*_{,0}\phi_{,0} - \sum_{i=1}^{3} g^{ii}\phi^*_{,i}\phi_{,i} + m^2\phi^*\phi\right] + O(|\epsilon\phi|^2) \end{aligned} \tag{B.53}$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg[(1-2V)^2\phi_{,0}^*\phi_{,0}$$

$$+ (1-2V)(1+2V)\sum_{i=1}^{3}\phi_{,i}^*\phi_{,i} + m^2(1-2V)\phi^*\phi\Bigg]$$

$$+ O(|\epsilon\phi|^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1-4V)\phi_{,0}^*\phi_{,0} + \sum_{i=1}^{3}\phi_{,i}^*\phi_{,i} + m^2(1-2V)\phi^*\phi\right] + O(|\epsilon\phi|^2),$$

dan

$$T^{11} = \frac{1}{2}g^{11}\left[2g^{11}\phi_{,1}^*\phi_{,1} - \left(g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}^*\phi_{,\beta} + m^2\phi^*\phi\right)\right] + O(|\epsilon\phi|^2)$$
$$T^{11} = \frac{1}{2}g^{11}\left[g^{11}\phi_{,1}^*\phi_{,1} - \sum_{\alpha=0,2,3} g^{\alpha\alpha}\phi_{,\alpha}^*\phi_{,\alpha} + m^2\phi^*\phi\right] + O(|\epsilon\phi|^2), \tag{B.54}$$

asumsi (), () dapat dipenuhi jika

$$\frac{\phi_{,i}}{m\phi} = O\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right), \tag{B.55}$$

atau $\frac{\phi_{,i}}{\phi_{,0}} = O\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right)$, karena $\phi_{,0} \sim m\phi$. Maka

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\omega^2 + m^2)\phi^*\phi + O(\epsilon^2)$$
$$T^{00} = m^2\phi^*\phi + O(\epsilon^2), \tag{B.56}$$

dan persamaan poisson akan menjadi

$$\nabla^2 V = \frac{\kappa}{2}m^2\phi^*\phi + O(\epsilon^2), \tag{B.57}$$

B.2 Persamaan Schrödinger

Persamaan Klein-Gordon dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\right)_{,\nu} - m^2\phi = 0, \tag{B.58}$$

sekarang

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} &= \sqrt{(1+2V)(1-2V)^3} + O(\epsilon^2) \\ &= 1 - 2V + O(\epsilon^2),\end{aligned} \tag{B.59}$$

persamaan Klein-Gordon akan menjadi:

$$\frac{1}{1-2V}\left[-\left(\frac{1-2V}{1+2V}\phi_{,0}\right)_{,0} + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1-2V}{1-2V}\phi_{,i}\right)_{,i}\right] - m^2\phi + O(\epsilon^2) = 0, \tag{B.60}$$

maka

$$-\frac{1-4V}{1-2V}\phi_{,00} + \frac{4V_{,0}\,\phi_{,0}}{1-2V} - (1+2V)\nabla^2\phi - m^2\phi + O(\epsilon^2) = 0, \tag{B.61}$$

atau

$$-(1-2V)\phi_{,00} + (1+2V)\nabla^2\phi - m^2\phi = O(\epsilon^2), \tag{B.62}$$

sekarang diperkenalkan fungsi

$$\phi(t,\mathbf{x}) \equiv \Phi(t,\mathbf{x})e^{-imt}, \tag{B.63}$$

dimana $\Phi(t,\mathbf{x})$ merupakan fungsi waktu. Sehingga

$$\begin{aligned}&\left[-(1-2V)\left(\Phi_{tt} - m^2\Phi - 2im\Phi_{,t}\right) + (1+2V)\nabla^2\Phi - m^2\Phi\right]e^{-imt} \\ &\qquad = O(\epsilon^2),\end{aligned} \tag{B.64}$$

atau

$$-(1-2V)\left(\Phi_{tt} - 2im\Phi_{,t}\right) + (1+2V)\nabla^2\Phi - 2m^2V\Phi = O(\epsilon^2), \tag{B.65}$$

selanjutnya kita asumsikan

$$\frac{\nabla^2\Phi}{m^2\Phi} = O(\epsilon), \tag{B.66}$$

$$\frac{\Phi_{,t}}{m\Phi} = O(\epsilon), \tag{B.67}$$

$$\frac{\Phi_{,tt}}{m^2\Phi} = O(\epsilon^2), \tag{B.68}$$

selanjutnya didapatkan

$$2im\Phi_{,t} + \nabla^2\Phi - 2m^2V\Phi = O(\epsilon^2), \tag{B.69}$$

atau

$$i\Phi_{,t} = -\frac{1}{2\mathrm{m}}\nabla^2\Phi - mV\Phi + O(\epsilon^2), \tag{B.70}$$

sekarang diasumsikan

$$\Phi(t, \mathbf{x}) \equiv \Phi_0(t, \mathbf{x})e^{-iEt}, \tag{B.71}$$

sehingga medan skalarnya menjadi

$$\phi = \Phi\mathrm{e}^{-imt} = \Phi_0 e^{-imt-iEt} \equiv \Phi_0 e^{-iEt}, \tag{B.72}$$

dimana $w = m + E$. Kemudian kita dapatkan

$$E\Phi_0 = -\frac{1}{2\mathrm{m}}\nabla^2\Phi_0 - mV\Phi_0 + O(\epsilon^2), \tag{B.73}$$

LAMPIRAN C

C.1 Potensial Gravitasi Pada 4 Dimensi

Telah didapatkan persamaan diferensial linier untuk solusi simetri bola seperti yang ditunjukkan pada persamaan (5.12)

$$\frac{1}{r_*}\frac{d^2}{dr_*^2}(r_*\rho) + 2\rho = 0, \tag{C.1}$$

untuk mempermudah proses penghitungan, persaman diatas dikespansikan sehingga didapatkan bentuk

$$\frac{d^2\rho}{dr_*^2} + \frac{2}{r_*}\frac{d\rho}{dr_*} + 2\rho = 0, \tag{C.2}$$

untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut pertama-tama digunakan persamaan Bessel yang berbebntuk

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-2a}{x}\frac{dy}{dx} + \left[(bcx^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2c}{x^2}\right]y = 0, \tag{C.3}$$

jika kita menyamakan dengan persamaan (C.3) maka akan didapatkan nilai-nilai konstanta

$$\begin{gathered} a = -\frac{1}{2} \\ b = \sqrt{2} \\ c = 1 \\ p = \frac{1}{2}, \end{gathered} \tag{C.4}$$

solusi persamaan Bessel diatas berbentuk

$$y = x^a z_p(bc^c), \tag{C.5}$$

subtitusi konstanta pada persamaan (C.4) kedalam solusi (C.5) sehingga didapatkan

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{r_*}} Z_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right), \tag{C.6}$$

solusi umum persamaan Bessel diberikan oleh

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\sqrt{r_*}}\left[AJ_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right) + BN_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right)\right] \\ \rho &= \frac{1}{\sqrt{r_*}} AJ_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right), \end{aligned} \tag{C.7}$$

untuk fungsi Bessel Sferis diketahui

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{(2n+1)}{2}}(x) = x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{x}\right)^n \left(\frac{Sinx}{x}\right), \tag{C.8}$$

selanjutnya subtitusikan nilai dari persamaan sebelumnya, maka didapatkan

$$j_0\left(\sqrt{2}r_*\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{2}r_*}} J_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right) = \left(\frac{Sin\sqrt{2}r_*}{\sqrt{2}r_*}\right), \tag{C.9}$$

sehingga didapatkan fungsi Bessel

$$J_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right) = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}r_*}{\pi}} \left(\frac{Sin\sqrt{2}r_*}{\sqrt{2}r_*}\right), \tag{C.10}$$

subtitusi nilai $J_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right)$ pada persamaan (C.7) sehingga didapatkan nilai ρ

$$\rho = A\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}}\left(\frac{Sin\sqrt{2}r_*}{\sqrt{2}r_*}\right), \tag{C.11}$$

pada permukaan bintang boson yang jari-jarinya r_0 maka $\rho = 0$, sehingga

$$0 = A\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}}\left(\frac{Sin\sqrt{2}r_0}{\sqrt{2}r_0}\right), \tag{C.12}$$

dari persamaan diatas dapat diketahui bahwa nilai $Sin\sqrt{2}r_0$ harus bernilai 0 sehingga

$$\begin{aligned} Sin\sqrt{2}r_0 &= 0 \\ \sqrt{2}r_0 &= n\pi \\ r_0 &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{C.13}$$

tinjau kembali persamaan untuk jumlah partikel secara Newtonian pada persamaan (5.11)

$$N \equiv \frac{\sqrt{\Lambda}}{4\pi G m^2}\int d^3\boldsymbol{r}_*\rho(\boldsymbol{r}_*)\,, \tag{C.14}$$

kemudian subtitusikan ρ pada persamaan (C.11) kedalam persamaan diatas sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} N &= \frac{\sqrt{\Lambda}}{4\pi G m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\pi r_*^2 d\boldsymbol{r}_*\, A\left[\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}}\left(\frac{Sin\sqrt{2}r_*}{\sqrt{2}r_*}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{\Lambda}}{G m^2}A\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\boldsymbol{r}_*\boldsymbol{r}_* Sin\sqrt{2}r_* \\ N &= \frac{\sqrt{\Lambda}}{G m^2}A\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi}}\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \tag{C.15}$$

sehingga didapatkan nilai konstanta A yaitu

$$A = \frac{Gm^2}{\sqrt{\Lambda}} \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} N}\,, \tag{C.16}$$

subtitusikan kembali ke persamaan (C.11) sehingga didapatkan densitas ternormalisasi untuk $r_* < \frac{\pi}{2}$

$$\rho(r_*) = \frac{4\pi Gm^2}{\sqrt{\Lambda}} \frac{N}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{\sin\sqrt{2}r_*}{\sqrt{2}r_*}, \tag{C.17}$$

diluar bintang boson nilai $\rho(r_*)$ adalah nol sehingga dapat dituliskan

$$\rho(r_*) = \begin{cases} -\frac{4\pi Gm^2}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{N}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{\sin\sqrt{2}r_*}{\sqrt{2}r_*} & \left(r_* < \pi/\sqrt{2}\right) \\ 0 & \left(r_* > \pi/\sqrt{2}\right) \end{cases}, \tag{C.18}$$

untuk mencari potensial gravitasi kita tinjau persamaan

$$\begin{gathered} \nabla_*^2 \mathrm{V} = |\Psi|^2 \\ \nabla_* . \left(\vec{\nabla}_* \mathrm{V}\right) = |\Psi|^2, \end{gathered} \tag{C.19}$$

dapat diselesaikan dengan persamaan poisson

$$\int_V d^3\boldsymbol{r}_* \nabla_* . \left(\vec{\nabla}_* V\right) = \int d^2 r_* \rho, \tag{C.20}$$

$$\oint_S ds\, \vec{\nabla}_* \mathrm{V} = \frac{4\pi Gm^2}{\sqrt{\Lambda}}, \tag{C.21}$$

$$\vec{\nabla}_* \mathrm{V} = \frac{Gm^2 N}{\sqrt{\Lambda} r_*^2}, \tag{C.22}$$

$$\mathrm{V} = \int_{\infty}^{r_*} \frac{Gm^2N}{\sqrt{\Lambda}r_*^2}dr_*, \tag{C.23}$$

$$\Phi = -\frac{Gm^2N}{\sqrt{\Lambda}r_*}, \tag{C.24}$$

persamaan diatas adalah potensial gravitasi untuk daerah $r_* > \pi/\sqrt{2}$

Selanjutnya kita tinjau kembali persamaan ()

$$\Phi = \mu_* - \frac{1}{2}\rho, \tag{C.25}$$

subtitusikan nilai ρ dan V untuk daerah $r_* = \pi/\sqrt{2}$ pada persamaan diatas.

$$-\frac{Gm^2N}{\sqrt{\Lambda}r_*} = \mu_* - 0, \tag{C.26}$$

sehingga didapatkan nilai dari μ_*

$$\mu_* = -\frac{Gm^2N}{\sqrt{\Lambda}\,\pi/\sqrt{2}}, \tag{C.27}$$

sehingga untuk daerah $r_* < \pi/\sqrt{2}$ potensial gravitasinya adalah

$$\mathrm{V}(r_*) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{Gm^2N}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{2\pi Gm^2}{\sqrt{\Lambda}}\frac{N}{\sqrt{2}\pi^2}\frac{\sin\sqrt{2}r_*}{\sqrt{2}r_*}, \tag{C.28}$$

atau dapat dituliskan

$$\mathrm{V}(r_*) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{Gm^2N}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{2\pi Gm^2}{\sqrt{\Lambda}}\frac{N}{\sqrt{2}\pi^2}\frac{\sin\sqrt{2}r_*}{\sqrt{2}r_*} & \left(r_* < \pi/\sqrt{2}\right) \\ -\frac{Gm^2N}{\sqrt{\Lambda}} & \left(r_* > \pi/\sqrt{2}\right) \end{cases}, \tag{C.29}$$

C.2 Massa Bintang Boson

untuk mencari massa bintang boson maka digunakan persamaan

$$M = Nm + E, \tag{C.30}$$

dimana dari persamaan () diketahui bahwa energi Newtonian adalah

$$E = \frac{1}{2} Nm\mu_{*}, \tag{C.31}$$

jika nilai dimasukkan ke dalam persamaan (5.16) maka akan didapatkan

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{Gm^3 N^2}{\sqrt{\Lambda}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{Gm^3}{\sqrt{2}\pi\sqrt{\Lambda}} N^2, \end{aligned} \tag{C.32}$$

sehingga jika disubtitusikan kedalam persamaan () maka akan didapatkan massa bintang bintang boson sebagai fungsi jumlah partikel

$$M(N) = mN - \frac{Gm^2}{\sqrt{2}\pi\sqrt{\Lambda}} N^2, \tag{C.33}$$

untuk mendapatkan massa maksimum maka persamaan () dicari nilai maksimumnya dengan menurunkannya terhadap *N*.

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dN} = \frac{d}{d}\left(mN - \frac{Gm^2}{\sqrt{2}\pi\sqrt{\Lambda}} N^2\right) &= 0 \\ m - \frac{Gm^2}{\sqrt{2}\pi\sqrt{\Lambda}} N &= 0 \\ \frac{1}{Nm}\left(\frac{2Gm^2}{\sqrt{2}\pi\sqrt{\Lambda}} N\right) &= (m)\frac{1}{Nm} \\ \frac{2Gm^2}{\sqrt{2}\pi\sqrt{\Lambda}} N &= \frac{1}{N} \end{aligned} \tag{C.34}$$

$$N=\frac{\sqrt{2}\pi\sqrt{\Lambda}}{2Gm^2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$N=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\Lambda}}{Gm^2},$$

C.3 Potensial Gravitasi Pada D-1 Dimensi

Dengan menggunakan persamaan Bessel , didapatkan

$$\rho=\frac{A}{r_*^{\frac{D-3}{2}}}J_{\frac{D-3}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right), \tag{C.35}$$

pada permukaan luar $r_*=r_0$ dan $\rho=0$, sehingga

$$0=\frac{A}{r_*^{\frac{D-3}{2}}}J_{\frac{D-3}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right), \tag{C.36}$$

maka $J_{\frac{D-3}{2}}(\sqrt{2}r_0)$ harus bernilai nol

$$\begin{aligned} J_{\frac{D-3}{2}}\left(\sqrt{2}r_0\right) &= 0\\ \left(\sqrt{2}r_0\right) &= q\\ r_0 &= \frac{q}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{C.37}$$

selanjutnya kita tinjau jumlah partikel

$$N=\frac{\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}}{4\pi Gm^{D-2}}\int_0^{\frac{q}{\sqrt{2}}} d^{D-1}r_*\frac{A}{r_*^{\frac{D-3}{2}}}J_{\frac{D-3}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right), \tag{C.38}$$

$$N=\frac{\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}}{4\pi Gm^{D-2}}A\int_0^{\frac{q}{\sqrt{2}}} S_{D-2}d^{D-2}r_*\frac{J_{\frac{D-3}{2}}\left(\sqrt{2}r_*\right)}{r_*^{\frac{D-3}{2}}}, \tag{C.39}$$

$$N = \frac{\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}}{4\pi G m^{D-2}} A \int_0^{\frac{q}{\sqrt{2}}} \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{D}-1}{2}\right)} r_*^{\frac{D-1}{2}} dr_* J_{\frac{D-3}{2}}\left(\sqrt{2} r_0\right), \tag{C.40}$$

$$N = \frac{\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3} A}{4\pi G m^{D-2}} \left(\sqrt{2}^{-\frac{D+1}{2}} q^{\frac{D-1}{2}} J_{\frac{D-1}{2}}(q)\right) \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{D}-1}{2}\right)}, \tag{C.41}$$

dimana didefinisikan A_{D-1}

$$A_{D-1} = \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{D}-1}{2}\right)}, \tag{C.42}$$

sehingga dapat diperoleh nilai konstanta A

$$A = \frac{4\pi G m^{D-2}}{A_{D-1}\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}} \frac{2^{\frac{D-1}{2}} N}{q^{\frac{D-1}{2}} J_{\frac{D-1}{2}}(q)} \frac{1}{\sqrt{2}^{\frac{D-3}{2}}}, \tag{C.43}$$

subtitusikan ke dalam persamaan (C.35) sehingga didapatkan nilai densitas ternormalisasi untuk daerah $r_* < q/\sqrt{2}$

$$\rho(r_*) = \frac{4\pi G m^{D-2}}{A_{D-1}\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}} \frac{2^{\frac{D-1}{2}} N}{q^{\frac{D-1}{2}} J_{\frac{D-1}{2}}(q)} \frac{J_{\frac{D-3}{2}}\left(\sqrt{2} r_*\right)}{\left(\sqrt{2} r_*\right)^{\frac{D-3}{2}}}, \tag{C.44}$$

untuk mencari potensial gravitasi digunakan cara yang sama seperti untuk 4 dimensi. Tinjau kembali persamaan Poisson

$$\nabla_*^2 \mathrm{V} = |\Psi|^2, \tag{C.45}$$

kemudian dicari solusinya dengan cara berikut

$$\int_V d^{D-1}\boldsymbol{r}_*\nabla_*.\left(\vec{\nabla}_*\mathrm{V}\right) = \int d^{D-1}r_*\rho, \tag{C.46}$$

$$\oint_s dS_{D-2}\vec{\nabla}_*\mathrm{V} = \frac{4\pi G m^{D-2}}{\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}} N, \tag{C.47}$$

$$\vec{\nabla}_*\mathrm{V}\frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{D}-1}{2}\right)} r_*^{D-2} = \frac{4\pi G m^{D-2}}{\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}} N, \tag{C.48}$$

maka didapatkan nilai potensial untuk $r_* > q/\sqrt{2}$

$$\mathrm{V}(\mathrm{r}_*) = \frac{4\pi G m^{D-2}}{A_{D-1}\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}} \frac{1}{(D-3) r_*^{D-3}}, \tag{C.49}$$

untuk daerah $r_* < q/\sqrt{2}$ atau di dalam bintang boson didapatkan potensial gravitasi

$$\mathrm{V}(\mathrm{r}_*) = \frac{4\pi G m^{D-2}}{A_{D-1}\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}} \frac{2^{\frac{D-3}{2}}}{(D-3) q^{D-3}} - \frac{2\pi G m^{D-2}}{A_{D-1}\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{D-3}} \frac{2^{\frac{D-1}{2}} N}{q^{\frac{D-1}{2}} J_{\frac{D-1}{2}}(q)} \frac{J_{\frac{D-3}{2}}\left(\sqrt{2} r_*\right)}{\left(\sqrt{2} r_*\right)^{\frac{D-3}{2}}}, \tag{C.50}$$

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BIODATA PENULIS

Penulis dilahirkan di Palopo, Sulawesi Selatan, 30 April 1992, merupakan anak pertama dari tiga bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu di SD Limbung Puteri Kabupaten Gowa, SMP Negeri 1 Bajeng Kabupaten Gowa, dan SMA Negeri 1 Bajeng Kabupaten Gowa. Penulis mengikuti diterima di Jurusan Fisika FMIPA ITS tahun 2011 dan menyelesaikan Pendidikan S1 tahun 2016. Tahun 2017 penulis melanjutkan studi S2 di tempat yang sama.

Di Jurusan Fisika Penulis mengambil bidang fisika teori. Penulis pernah aktif dalam Himpunan Mahasiswa Fisika ITS (HIMASIKA ITS) menjabat sebagai kepala departemen komunikasi dan informasi periode 2013-2014. Selain itu Penulis juga aktif sebagai kru di ITS Tv.