TUGAS AKHIR– KM184801

DIMENSI METRIK LOKAL PADA AMALGAMASI GRAF LENGKAP DENGAN GRAF RODA DAN GRAF KINCIR

SEAGEL LEVIN
NRP 06111540000113

Dosen Pembimbing :
Dr. Darmaji, S.Si, MT

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

FINAL PROJECT– KM184801

LOCAL METRIC DIMENSION ON AMALGAMATION COMPLETE GRAPH WITH WHEEL GRAPH AND WINDMILL GRAPH

SEAGEL LEVIN
NRP 06111540000113

Supervisor :
Dr. Darmaji, S.Si, MT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

DIMENSI METRIK LOKAL PADA AMALGAMASI GRAF LENGKAP DENGAN GRAF RODA DAN GRAF KINCIR
LOCAL METRIC DIMENSION ON AMALGAMATION COMPLETE GRAPH WITH WHEEL GRAPH AND WINDMILL GRAPH

TUGAS AKHIR
Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi analisis
Program Studi S1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh
SEAGEL LEVIN
NRP:06111540000113

Menyetujui
Dosen Pembimbing

Dr. Darmaji, S.Si, MT
NIP. 1969105 199412 1 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS

Subchan, Ph.D
NIP. 19700831 199702 1 001

Surabaya, Agustus 2020

DIMENSI METRIK LOKAL PADA AMALGAMASI GRAF LENGKAP DENGAN GRAF RODA DAN GRAF KINCIR

Nama : **Seagel Levin**
NRP : **06111540000113**
Departemen : **Matematika FSAD - ITS**
Pembimbing : **Dr. Darmaji, S.Si, MT**

ABSTRAK

Diberikan graf terhubung G dengan himpunan simpul $V(G)$, dan simpul $u, v \in V(G)$. Jarak antara u dan v, dinotasikan $d(u, v)$, didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G. Jika $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ himpunan terurut dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap $v \in V(G)$ berbeda, maka W dikatakan sebagai himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan banyak anggota minimum disebut dimensi metrik dan dinotasikan $\dim(G)$. Apabila representasi untuk setiap dua simpul yang bertetangga di $V(G)$ berbeda terhadap W, maka W dikatakan sebagai himpunan pembeda lokal dari G. Himpunan pembeda lokal dari G dengan banyak anggota minimum disebut dimensi metrik lokal dari G yang dinotasikan dengan $dim_l(G)$. Pada penelitian ini diperoleh dimensi metrik lokal dari graf hasil operasi amalgamasi pada graf lengkap dengan graf roda dan graf kincir.

Kata kunci: *Dimensi Metrik, Dimensi Metrik Lokal, Amalgamasi Graf*

LOCAL METRIC DIMENSION ON AMALGAMATION COMPLETE GRAPH WITH WHEEL GRAPH AND WINDMILL GRAPH

Name : Seagel Levin
NRP : 06111540000113
Department : Matematika FASD - ITS
Supervisor : Dr. Darmaji, S.Si, MT

ABSTRACT

Given connected graph G with a set of vertices $V\ (G)$, and vertices $u, v \in V\ (G)$. The distance between u and v, denoted $d\ (u, v)$, is defined as the shortest path length from u to v on G. If $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ the ordered set of vertices in a connected graph G, $W \subseteq V(G)$ and $v \in V\ (G)$, then the representation of v with respect to W is $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots,\ d(v, w_k))$ for each $v \in V\ (G)$ is different, then W is said to be the resolving set of G. The resolving set with minimum element is called the metric dimension and is denoted $dim(G)$. If the representation for any of the two neighboring vertices in $V\ (G)$ is different, then W is said to be the local resolving set of G. The minimum cardinality of local resolving set of G is called the local metric dimension of G which is denoted by $dim_l(G)$. In this research we find the local metric dimension of amalgamation graph on complete graph with wheel and windmill graph.

Keyword: *Metric Dimension, Local Metric Dimension, Amalgamation*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarokatuh

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik dan hidayah – Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"**DIMENSI METRIK LOKAL PADA AMALGAMASI GRAF LENGKAP DENGAN GRAF RODA DAN GRAF KINCIR**" sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Subchan, Ph.D sebagai Kepala Departemen Matematika FSAD ITS
2. Bapak Dr. Darmaji, S.Si, MT sebagai dosen pembimbing, yang telah memberikan bimbingan dan pengarahan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
3. Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si, ibu Dr. Rinurwati, M.Si, ibu Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si, dan ibu Sunarsini, S.Si, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik, saran dan masukan yang membangun dalam menyelesaikan Tugas Akhir.
4. Keluarga besar penulis yang telah banyak mendukung dan memberikan semangat dalam menjalani masa perkuliahan.
5. Semua pihak yang telah memberikan dukungan dan ilmu kepada penulis dalam masa perkuliahan hingga penyelesian Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan. Akhirnya penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarokatuh

Surabaya,   Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

TUGAS AKHIR– KM184801 i
FINAL PROJECT– KM184801 iii
LEMBAR PENGESAHAN.... **Error! Bookmark not defined.**
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii
DAFTAR GAMBAR xvi
DAFTAR TABEL... xviii
DAFTAR SIMBOL xxii
BAB 1 PENDAHULUAN.. 1
1.1.Latar Belakang.. 1
1.2.Rumusan Masalah... 3
1.3.Batasan Masalah 3
1.4.Tujuan 3
1.5.Manfaat 3
1.6.Sistematika Penulisan.. 4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5
2.1 Terminologi Dasar Graf.. 5
2.1.1 Definisi Graf.. 5
2.1.2 Isomorfisme Pada Graf 7
2.1.3 Graf Sikel 7
2.1.4 Graf Lengkap 8

2.1.5 Graf Bintang..9
2.1.6 Graf Roda..9
2.1.6 Graf Kincir 10
2.1.7 Graf Persahabatan...11
2.1.8 Amalgamasi 12
2.2 Dimensi Metrik 15
2.3 Dimensi Metrik Lokal 18
BAB III METODE PENELITIAN 21
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN 23
4.1 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Graf Lengkap Dan Graf Roda..23
4.1.1 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Pusat Graf Roda Dan Graf Lengkap......................................23
4.1.2 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Tepi Graf Roda Dan Graf Lengkap..34
4.2 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Graf Lengkap Dan Graf Kincir 46
4.2.1 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Pusat Graf Kincir Dan Graf Lengkap 47
4.2.2 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Tepi Graf Kincir Dan Graf Lengkap...57
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN................................69
5.1 Kesimpulan 69
5.2 Saran...70
DAFTAR PUSTAKA 71
BIODATA PENULIS 72

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf terhubung 6
Gambar 2.2 Contoh Dua Graf Yang Isomorfis 7
Gambar 2.3 Graf Sikel (C_6) 8
Gambar 2.4 Graf Lengkap (K_6) 8
Gambar 2.5 Graf Bintang (S_6) 9
Gambar 2.6 Graf Roda (W_7) 10
Gambar 2.7 Graf Kincir (W_2^3) 11
Gambar 2.8 Graf Persahabatan (W_2^3) 12
Gambar 2.9 Contoh Graf Hasil Amalgamasi 13
Gambar 2.10 $amal_p(W_2^3(c), K_6(a_6))$ 14
Gambar 2.11 $amal_t(W_2^3(v_2), K_6(a_6))$. 15
Gambar 2.12 Graf Bintang S_6 dengan $W = \{a, b, c, d\}$ 17
Gambar 2.13 Graf Bintang S_6 dengan $\mathrm{W} = \{\mathrm{a}\}$ 19
Gambar 4.1 $amal_p(K_n(a_n), W_m(b))$ 24
Gambar 4.2 $amal_p(K_3(a_3), W_6(b))$. 24
Gambar 4.3 $amal_p(K_n(a_n), W_m(b))$ 32
Gambar 4.4 $\mathrm{amal_t}(\mathrm{K_6}(\mathrm{a_6}), \mathrm{W_6}(\mathrm{b}))$ 34
Gambar 4.5 $\mathrm{amal_t}(\mathrm{K_n}(\mathrm{a_n}), \mathrm{W_m}(\mathrm{b_{m\text{-}1}}))$ 35
Gambar 4.6 $amal_t(K_3(a_3), W_6(b_2))$ 36
Gambar 4.7 $amal_t(K_n(a_n), W_m(b_{m-1}))$ 44
Gambar 4.8 $amal_t(K_6(a_6), W_6(b_5))$ 48
Gambar 4.9 $amal_p(K_n(a_n), W_2^m(c))$ 47
Gambar 4.10 $\mathrm{amal_p}(\mathrm{K_3}(\mathrm{a_3}), \mathrm{W_2^2}(\mathrm{c}))$ 48
Gambar 4.11 $amal_p(K_n(a_n), W_2^m(c))$ 55
Gambar 4.12 $amal_p(K_6(a_6), W_2^5(c))$ 57
Gambar 4.13 $amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))$ 58
Gambar 4.14 $amal_t(K_3(a_3), W_2^2(v_2))$ 58

Gambar 4.15 $\mathrm{amal}_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))$ 66
Gambar 4.16 $\mathrm{amal}_t(K_6(a_6), W_2^5(v_5))$ 68

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)\right), n = 3,\ m = 6,10,14$ 27
Tabel 4.2 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)\right), n = 4\ , m = 6,10,14$ 27
Tabel 4.3 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)\right), n = 5,\ m = 6,10,14$ 28
Tabel 4.4 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)\right), n = 3,4,5,\ m = 6$ 28
Tabel 4.5 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)\right), n = 3,4,5, m = 10$ 28
Tabel 4.6 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)\right), n = 3,4,5, m = 14$ 29
Tabel 4.7 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)\right), n = 3,4,5\ , m = 6, 10, 14$ 29
Tabel 4.8 $dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_n),W_m(b_m)\right)\right), n = 3,\ m = 6,10,14$ 39
Tabel 4.9 $\mathrm{dim_l}\left(\mathrm{amal_t}\left(\mathrm{K_3(a_n),W_m(b_m)}\right)\right), \mathrm{n} = 4,\ \mathrm{m} = 6,10,14$ 39
Tabel 4.10 $dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_n),W_m(b_m)\right)\right), n = 5, m = 6,10,14$ 39
Tabel 4.11 $dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_n),W_m(b_m)\right)\right), n = 3,4,5, m = 6$ 40

Tabel 4.12 $dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_n), W_m(b_m)\right)\right), n = 3,4,5, m = 10$ 40
Tabel 4.13 $dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_n), W_m(b_m)\right)\right), n = 3,4,5, m = 14$ 40
Tabel 4.14 $dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_n), W_m(b_m)\right)\right), n = 3,4,5, m = 6,10,14$ 41
Tabel 4.15 $dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 3, m = 6,10,14$ 50
Tabel 4.16 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 4, m = 2,3,4$ 50
Tabel 4.17 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 5, m = 2,3,44$ 50
Tabel 4.18 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 3,4,5, m = 2$ 51
Tabel 4.19 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 3,4,5, m = 3$ 51
Tabel 4.20 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 3,4,5, m = 4$ 51
Tabel 4.21 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 3,4,5, m = 2,3,4$ 52
Tabel 4.22 $\mathrm{dim_l}\left(\mathrm{amal_t}\left(\mathrm{K_n}(\mathrm{a_n}), \mathrm{W_2^m}(\mathrm{v_m})\right)\right), \mathrm{n} = 3,$ $\mathrm{m} = 2,3,4$ 61
Tabel 4.23 $\mathrm{dim_l}\left(\mathrm{amal_t}\left(\mathrm{K_n}(\mathrm{a_n}), \mathrm{W_2^m}(\mathrm{v_m})\right)\right), \mathrm{n} = 4,$ $\mathrm{m} = 2,3,4$ 61

Tabel 4.24 $\dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n = 5,$ $m = 2,3,4$ 61
Tabel 4.25 $\dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n = 3,4,5,$ $m = 2$ 62
Tabel 4.26 $\dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n = 3,4,5,$ $m = 3$ 62
Tabel 4.27 $\dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n = 3,4,5,$ $m = 4$ 62
Tabel 4.28 $\dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n = 3,4,5,$ $m = 2,3,4$ 63

DAFTAR SIMBOL

G	: Sebarang Graf
$V(G)$	: Simpul Pada Graf G
$E(G)$	: Sisi Pada Graf G
K_n	: Graf Lengkap dengan n titik
W_m	: Graf Roda dengan m simpul
W_2^m	: Graf Kincir dengan m bilah dan 2 simpul tiap bilah
$d(u,v)$	: Jarak u dan v di G
$r(u\|W)$	: Representasi simpul u terhadap W
$\dim(G)$	: Dimensi metrik graf G
$dim_l(G)$	: Dimensi metrik lokal graf G
$amal_p\big(K_n(u), W_m(v)\big)$	: Amalgmasai pusat antara graf lengkap dan graf roda
$amal_p\big(K_n(u), W_2^m(v)\big)$	: Amalgmasai pusat antara graf lengkap dan graf kincir
$amal_t\big(K_n(u), W_m(v)\big)$	: Amalgmasai tepi antara graf lengkap dan graf roda
$amal_t\big(K_n(u), W_2^m(v)\big)$	: Amalgmasai tepi antara graf lengkap dan graf roda

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Suatu graf G terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan tak kosong $V(G)$ yang unsur-unsurnya disebut simpul dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ yang unsur-unsurnya disebut sisi, sedemikian hingga setiap sisi e dalam $E(G)$ merupakan pasangan dari simpul-simpul di (G), yang dinotasikan $G = (V, E)$.[1]

Diberikan suatu himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan simpul v di $V(G)$, maka representasi dari simpul v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap simpul $v \in V(G)$ berbeda, maka dikatakan sebagai himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda tersebut dinamakan dimensi metrik dari G, yang dinotasikan $\dim(G)$. Apabila $r(v|W)$ untuk setiap dua simpul yang bertetangga di $V(G)$ dengan $v \in V(G)$ adalah berbeda, maka W dikatakan sebagai himpunan pembeda lokal dari G. Himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas minimum disebut dimensi metrik lokal dari G yang dinotasikan dengan $dim_l(G)$.[2]

Beberapa penelitian telah dilakukan untuk mendapatkan dimensi metrik. Chartdand dkk menunjukkan bahwa jika graf G merupakan graf lintasan (P_n), maka $\dim(G) = 1$, dan $\dim(G) = n - 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap (K_n).[3] Dimensi metrik lokal pertama kali dikenalkan oleh Okamoto dkk pada tahun 2010 pada jurnalnya yang berjudul "The Local Metric Dimension of a Graph".[2]

penelitian lain yang telah dilakukan mengenai dimensi metrik lokal dapat dijadikan sebagai referensi. Ruzika Rimadhany dan Darmaji melakukan penelitian dengan judul *Local Metric Dimension of Circulant Graph* $circ(n: 1,2, \ldots, (n+1)/2)$. Menemukan bahwa dimensi metrik lokal dari graf circulant $irc(n: 1,2, \ldots, (n+1)/2)$ sama dengan dimensi metrik lokal graf komplit (K_n).[4]

Elis Dyah Wulancar dan Tri Atmojo Kusmayadi dengan penelitiannya yang berjudul *dimensi metrik lokal pada graf musical dan graf stacked prism*. Dalam penelitiannya disimpulkan bahwa dimensi metrik lokal pada graf musical (MG_n) adalah $dim_l(MG_n) = 5$ jika $n = 3$, dan $dim_l(MG_n) = n$ jika $n > 3$. Pada penelitian yang sama disimpulkan juga dimensi metrik lokal pada graf stacked prism ($Y_{m,n}$), $dim_l\left(Y_{m,n}\right) = 1$ untuk m bilangan genap dan $dim_l\left(Y_{m,n}\right) = 2$ untuk m bilangan ganjil.[5]

Graf *musical* itu sendiri adalah graf dengan order 24 yang disusun berdasarkan tangga nada. Pada umumnya, graf *musical* MG_n ber-*order* $2n$ untuk $n \geq 3$. Graf musical terdiri dari *cycle* C_n^1 dengan himpunan simpul $V(C_n^1) = \{u1, u2, \ldots, un\}$ dan terhubung dengan sikel C_n^2 dengan himpunan simpul $V(C_n^2) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dimana C_n^1 adalah sikel pertama sedangkan C_n^2 adalah sikel kedua yang masing-masing berorder n.[6]

Graf *stacked prism* $Y_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dari hasil *cartesian product* pada graf sikel C_m dan graf lintasan P_n. Graf stacked prism $Y_{m,n}$ merupakan graf dengan m dan n simpul dan $m(2n - 1)$ sisi. [7] pada penelitian ini dilakukan penelitian untuk menemukan dimensi metrik lokal pada amalgamasi graf lengkap dengan graf roda dan graf kincir.

1.2. Rumusan Masalah

Masalah yang diteliti dalam tugas akhir ini adalah: Bagaimana mendapatkan dimensi metrik lokal dari amalgamasi graf lengkap dengan graf roda dan graf kincir?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian tugas akhir ini adalah:

1. Graf yang diamalgamasi adalah graf lengkap (K_n) dengan Graf Roda (W_m), dan Graf Kincir (W_2^m).
2. Operasi amalgamasi pada graf hanya menggabungkan satu simpul dari masing-masing graf, yaitu satu simpul sebarang pada graf lengkap dengan satu simpul pusat atau satu simpul tepi pada graf roda dan graf kincir

1.4. Tujuan

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini, yaitu:
Mendapatkan dimensi metrik lokal pada amalgamasi graf lengkap dengan graf roda dan graf kincir.

1.5. Manfaat

Manfaat dari penulisan tugas akhir ini, yaitu sebagai acuan penelitian selanjutnya tentang teori graf, khususnya dimensi metrik lokal.

1.6. Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu :

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan Tugas Akhir.
2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Pada bab ini dijelaskan teori dasar yang mendukung penulisan Tugas Akhir, yaitu definisi graf, isomorfisme pada graf, graf lengkap, graf roda, graf kincir, amagamasi, dimensi metrik dan dimensi metrik lokal
3. BAB III METODE PENELITIAN
   Bab ini menjelaskan tentang tahapan-tahapan dan metode yang digunakan disertai penjelasan dalam tiap tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.
4. BAB IV PEMBAHASAN
   Bab ini membahas tentang teorema dan pembuktian dari dimensi metrik lokal pada amalgamasi pusat dan amalgamasi tepi graf lengkap dengan dengan graf roda dan graf kincir
5. BAB V PENUTUP
   Bab ini menjelaskan kesimpulan akhir yang diperoleh dari pembahasan dan saran untuk pengembangan penelitian

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

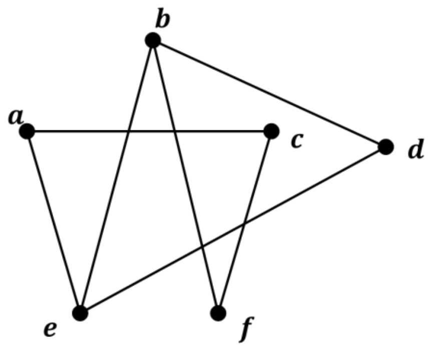
2.1 Terminologi Dasar Graf

Pada subbab ini akan dijelaskan tentang istilah dasar pada graf yang berisi definisi dan operasi graf.

2.1.1 Definisi Graf

Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan tak kosong $V(G)$ yang unsur-unsurnya disebut simpul dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ yang unsur-unsurnya disebut sisi. Setiap sisi e dalam $E(G)$ merupakan pasangan dari simpul-simpul di $V(G)$.[1]
Banyaknya simpul dari graf G disebut *order* graf G dan dinotasikan $|G|$. Banyaknya sisi dari graf G disebut *size* graf G dan dinotasikan $||G||$. Apabila dua simpul terhubung oleh satu sisi maka disebut simpul yang bertetangga. Sedangkan sisi yang bertetangga adalah dua sisi yang memiliki salah satu simpul ujung yang sama.[10] Derajat $d_G(v)$ pada simpul v di graf G adalah jumlah sisi di G yang terhubung dengan simpul v.[8]

Sebuah graf $G = (V, E)$ dikatakan terhubung jika untuk sebarang dua simpul yang berbeda di graf G terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Pada graf G, sebuah jalan dari simpul awal, v_0, menuju simpul akhir atau simpul tujuan, v_k, adalah sebuah barisan tak kosong, $W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_i, v_i, \dots, e_k, v_k$, yang suku-sukunya bergantian antara simpul dan sisi sedemikian hingga $1 \leq i \leq k$, ujung dari e_i adalah v_{i-1} dan v_i, dinotasikan $endpts(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$. Panjang sebuah jalan adalah banyaknya sisi dalam jalan tersebut. Jalan yang semua sisinya berlainan disebut jalur (*trail*). Suatu jalur yang tidak mengalami pengulangan simpul disebut lintasan. Suatu lintasan dikatakan memiliki panjang , jika lintasan tersebut memuat n buah sisi yang dilewati dari suatu simpul awal, v_0 , ke simpul akhir, v_k , di dalam suatu graf. Jarak antara simpul dan didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari u ke v dan dinotasikan dengan $d(u,v)$. Diameter dari suatu graf $G = (V,E)$ didefinisikan sebagai nilai $max_{u,v \in V(G)}\{d(u,v)\}$ atau jarak terjauh dari sebarang dua simpul di $V(G)$ dan dinotasikan dengan $diam(G)$. [6] Gambar 2.1 memberikan gambaran graf terhubung, dengan jarak antara simpul a ke simpul f adalah $(a,f) = 2$. Diameter $G = (V,E)$adalah tiga yaitu jarak antara simpul c ke simpul d.

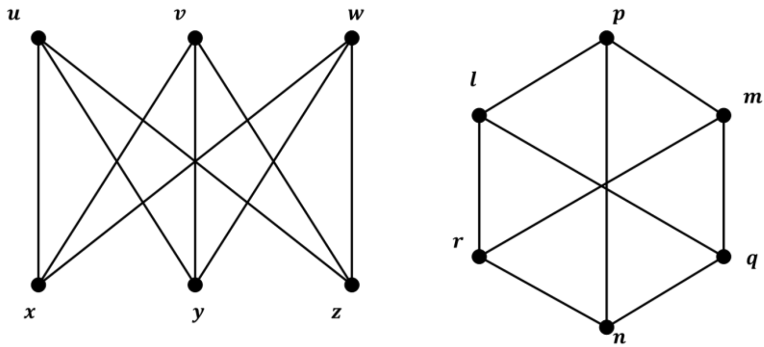


Gambar 2.1 Graf Terhubung. [8]

Graf G dengan tiga himpunan terurut $(V(G), E(G), \psi_G)$ yang terdiri dari himpunan simpul tak kosong $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, dan fungsi ψ_G yang berhubungan dengan sisi dari pasangan simpul tak berurut pada graf G. Jika e adalah sisi dan u dan v adalah simpul di graf G yang sedemikian rupa sehingga $\psi_G(e) = uv$, maka e dikatakan join dari u dan v.[8]

2.1.2 Isomorfisme Pada Graf

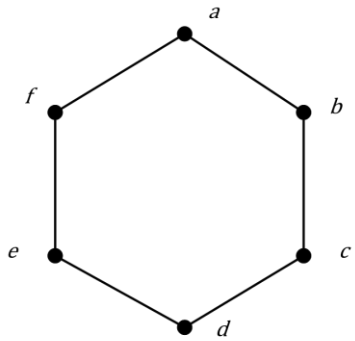
Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis jika simpul G_1 dan G_2 berkorespondensi satu-satu sehingga jumlah sisi yang berlekatan dengan dua simpul di G_1 sama dengan jumlah sisi yang berlekatan dengan simpul di G_2. Dua graf pada gambar 2.3 adalah isomorfis karena berkorespondensi satu-satu $u \leftrightarrow l,\ \ v \leftrightarrow m,\ w \leftrightarrow n, x \leftrightarrow p, y \leftrightarrow q, z \leftrightarrow r$.[9]



Gambar 2.2 Contoh Dua Graf Yang Isomorfis

2.1.3 Graf Sikel

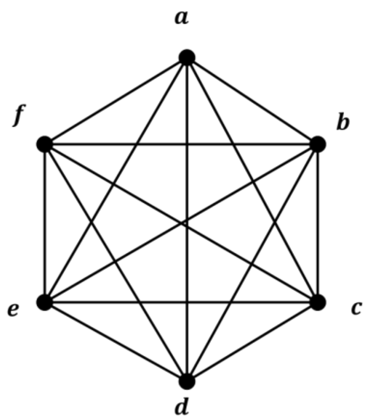
Untuk $n \geq 3$, Graf Sikel merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf sikel dengan n simpul dilambangkan dengan C_n.[10] Gambar 2.3 merupakan contoh dari Graf sikel.



Gambar 2.3 Graf Sikel (C_6).

2.1.4 Graf Lengkap

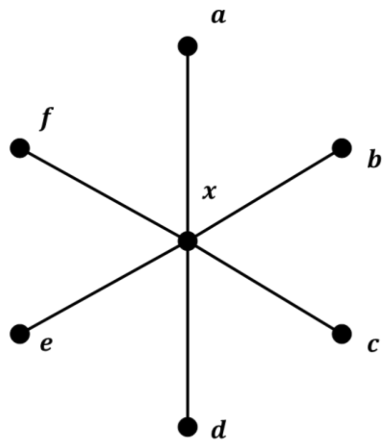
Graf lengkap K_n merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya terhubung ke setiap simpul yang lain. Graf lengkap dengan n buah simpul dinotasikan dengan K_n . Setiap simpul K_n berderajat $n-1$. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.[11] Contoh graf lengkap dengan enam simpul direpresentasikan oleh gambar 2.4.



Gambar 2.4 Graf Lengkap (K_6).

2.1.5 Graf Bintang

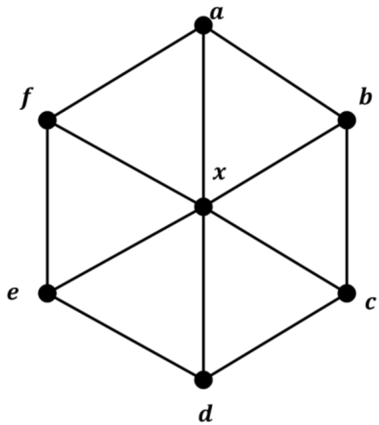
Graf Bintang S_n dengan order n adalah graf dengan n simpul dengan satu simpul berderajat $n-1$ dan simpul lain memiliki derajat satu.[12] Gambar 2.5 merupakan contoh dari Graf Roda.



Gambar 2.5 Graf Bintang (S_7)

2.1.6 Graf Roda

*G*raf Roda W_m adalah graf hasil join $K_1 + C_{n-1}$ dimana K_1 adalah graf lengkap dengan satu simpul dan C_{n-1} adalah graf sikel dengan $n-1$ simpul. Sisi pada graf ini ada dua jenis, yaitu sisi dalam yang merupakan jari-jari dan sisi luar. Sedangkan simpulnya juga ada dua jenis, yaitu simpul pusat dan simpul tepi. [13] Simpul pusat graf roda (W_m) adalah simpul yang bertetangga dengan simpul lain di graf W_m , sedangkan simpul tepi graf roda adalah simpul lain pada graf roda yang bukan merupakan simpul pusat. Gambar 2.6 merupakan contoh dari Graf Roda.

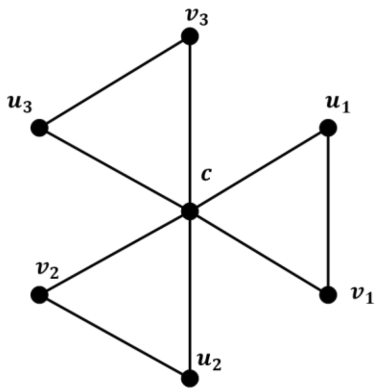


Gambar 2.6 Graf Roda (W_7).

pada Gambar 2.6 simpul pusat graf W_7 adalah simpul x, sedangkan simpul tepi graf W_7 adalah a, b, c, d, e, f.

2.1.7 Graf Kincir

Graf kincir dinotasikan dengan W_2^m adalah graf yang dibangun dengan menghubungkan semua simpul mK_2 dengan sebuah simpul yang disebut simpul pusat c. Graf mK_2 adalah graf lengkap K_2 yang diduplikat sebanyak m. Secara matematis graf Kincir $W_2^m \cong K_1 + mK_2$. Simpul pusat dalam graf Kincir diberi nama c, sedangkan u_i dan v_i untuk dua simpul luar di bilah i dimana $1 \leq i \leq m$.[13]. Graf kincir (W_2^m) isomorfis dengan graf persahabatan (F_n) dengan $n = m$. Gambar 2.7 berikut ini adalah contoh Graf Kincir.

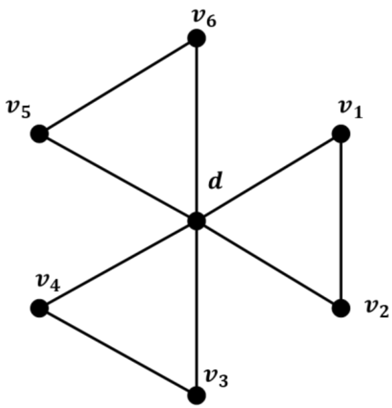


Gambar 2.7 Graf Kincir (W_2^3).

pada Gambar 2.7 simpul pusat graf W_2^3 adalah simpul c, sedangkan simpul tepi graf W_2^3 adalah $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3,$ dan v_3.

2.1.8 Graf Persahabatan

Graf Persahabatan F_n untuk $n \geq 2$ adalah graf yang didapat dengan cara menghapus $n/2$ sisi pada bagian sikel graf roda. Graf Pertemanan hanya bisa didapatkan dari graf roda dengan n genap, banyak simpul graf persahabatan adalah $2n + 1$ sedangkan banyak sisinya adalah $3n$.[10] Gambar 2.8 berikut ini adalah contoh Graf Persahabatan.



Gambar 2.8 Graf Persahabatan (F_3)

2.1.8 Amalgamasi

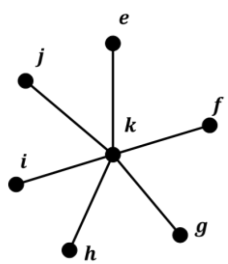
Dalam membentuk sebuah graf baru, salah satu cara yang dapat dilakukan yaitu dengan menggunakan operasi amalgamasi. Amalgamasi simpul dari pasangan simpul graf (G, u) bersama (H, v) adalah graf yang diperoleh dengan menghimpitkan simpul dan menjadi satu simpul . Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi amalgamasi adalah " $*$ " (apabila hanya diambil satu simpul dari masing-masing graf) atau " $*_2$" (apabila diambil dua simpul dari masing –masing graf). Selanjutnya, diberikan graf dan sebagaimana pada Gambar 2.8, jika dilakukan amalgamasi dari simpul dan , maka operasi amalgamasi dinotasikan dengan

$$(G_n, a) * (H_m, b) = (R, x),$$

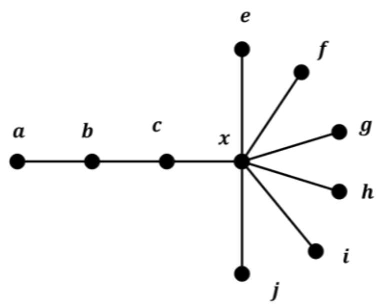
Dimana R adalah graf baru yang terbentuk, sedangkan x adalah anggota himpunan simpul dari graf yang diperoleh dari hasil amalgamasi simpul.

G :

H :



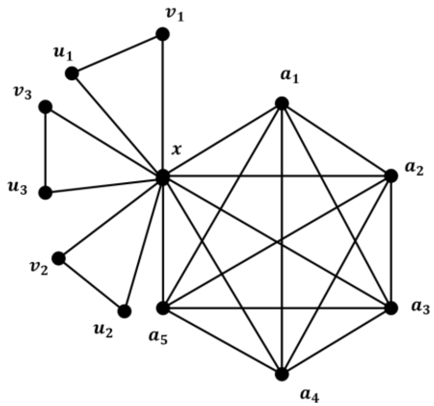
$(R, x) = amal(G(d), H(k))$:



Gambar 2.9 Contoh Graf Hasil Amalgamasi.[14]

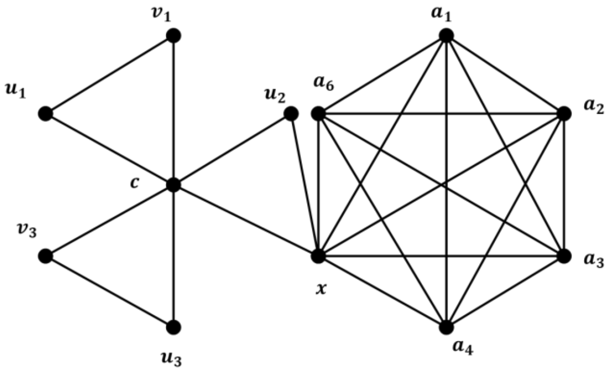
Dalam pengerjaan tugas akhir ini akan digunakan dua jenis amalgamasi,yaitu amalgamasi pusat dan amalgamasi tepi. Misalkan K_n adalah graf lengkap, sedangkan W_m dan W_2^m masing-masing adalah graf roda dan kincir

a. Amalgamasi pusat dari K_n & W_m atau K_n & W_2^m adalah operasi pada graf dengan menghimpitkan sebarang simpul di K_n dengan simpul pusat di W_m atau W_2^m. Simpul Pusat graf roda W_m, $m \geq 5$ adalah simpul pada graf roda yang bertetangga dengan semua simpul lain di W_m. Simpul Pusat graf kincir W_2^m, $m \geq 2$ adalah simpul di graf kincir yang bertetangga dengan semua simpul lain di W_2^m. Amalgamasi pusat pada sebarang graf K_n dan W_m atau W_2^m dinotasikan dengan $amal_p(\, K_n(v), W_m(u))$. Contoh dari graf hasil amalgamasi pusat adalah sebagai berikut.



Gambar 2.10 $Amal_p(\, K_6(a_6), W_2^3(c))$.

b. Amalgamasi tepi dari K_n & W_m atau K_n & W_2^m adalah operasi pada graf dengan menghimpitkan sebarang simpul di K_n dengan simpul tepi di W_m atau W_2^m .Simpul tepi graf roda W_m, $m \geq 5$ adalah simpul di graf roda yang berderajat tiga. Simpul tepi graf kincir W_2^m, $m \geq 2$ adalah simpul pada graf kincir yang berderajat dua. Amalgamasi tepi pada sebarang graf K_n dan W_m atau W_2^m dinotasikan dengan $Amal_t(\, K_n(v), W_m(u))$. Contoh dari graf hasil amalgamasi tepi adalah sebagai berikut.



Gambar 2.11 $amal_t(\, K_6(a_5), W_2^3(v_2))$.

2.2 Dimensi Metrik

Diberikan suatu graf terhubung G, misalkan u dan v simpul - simpul pada G. Jarak antara dua simpul u dan v didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G dan dinotasikan dengan $d(u, v)$. Jika diberikan suatu himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan simpul v di $V(G)$ maka representasi dari simpul v terhadap W adalah:

$$r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\big).$$

Jika representasi dari simpul-simpul $v \in V(G)$ terhadap W unik, maka W dikatakan sebagai himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum. Kardinalitas dari himpunan pembeda minimum disebut dimensi metrik dari G, dan dinotasikan $\dim(G)$. Dengan kata lain, dimensi metrik dari graf G adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda G.[4]

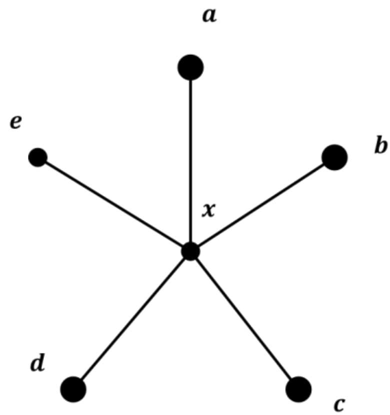
Lemma 2.1
Untuk setiap simpul u anggota himpunan pembeda W pasti memiliki representasi yang berbeda terhadap W.

Bukti:
Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan himpunan simpul $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ dan himpunan pembeda $W = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ jika dilakukan analisis jarak setiap simpul anggota pada himpunan pembeda diperoleh

$$r(u_1|W) = (0, p_2, p_3, \dots, p_n)$$
$$r(u_2|W) = (p_1, 0, p_3, \dots, p_n)$$
$$r(u_3|W) = (p_1, p_2, 0, \dots, p_n)$$

Seterusnya sampai pada $r(u_n|W) = (p_1, p_2, p_3, \dots, 0)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W.[15]

Sebagai contoh, misal G adalah graf S_6 seperti pada Gambar 2.11, akan dicari dimensi metrik dari graf S_6, sebelum itu dicari representasi simpul graf S_6 dengan beberapa jumlah anggota W untuk mencari himpunan pembeda.



Gambar 2.12 Graf Bintang (S_6) dengan $W = \{a, b, c, d\}$.

$W_1 = \{a\}$
$r(a|W_1) = (0);$
$r(b|W_1) = (2);$
$r(c|W_1) = (2);$
$r(d|W_1) = (2);$
$r(e|W_1) = (2);$
$r(x|W_6) = (1);$

$W_2 = \{a, b\}$
$r(a|W_2) = (0,2);$
$r(b|W_2) = (2,0);$
$r(c|W_2) = (2,2);$
$r(d|W_2) = (2,2);$
$r(e|W_2) = (2,2);$
$r(x|W_2) = (1,1);$

$W_3 = \{a, b, c\}$
$r(a|W_3) = (0,2,2);$
$r(b|W_3) = (2,0,2);$
$r(c|W_3) = (2,2,0);$
$r(d|W_3) = (2,2,2);$
$r(e|W_3) = (2,2,2);$
$r(x|W_3) = (1,1,1);$

$W_4 = \{a, b, c, d\}$
$r(a|W_4) = (0,2,2,2);$
$r(b|W_4) = (2,0,2,2);$
$r(c|W_4) = (2,2,0,2);$
$r(d|W_4) = (2,2,2,0);$
$r(e|W_4) = (2,2,2,2);$
$r(x|W_4) = (1,1,1,1);$

$W_5 = \{a,b,c,d,e\}$
$r(a|W_5) = (0,2,2,2,2);$
$r(b|W_5) = (2,0,2,2,2);$
$r(c|W_5) = (2,2,0,2,2);$
$r(d|W_5) = (2,2,2,0,2);$
$r(e|W_5) = (2,2,2,2,0);$
$r(x|W_5) = (1,1,1,1,1);$

$W_6 = \{a,b,c,d,e,x\}$
$r(a|W_6) = (0,2,2,2,2,1);$
$r(b|W_6) = (2,0,2,2,2,1);$
$r(c|W_6) = (2,2,0,2,2,1);$
$r(d|W_6) = (2,2,2,0,2,1);$
$r(e|W_6) = (2,2,2,2,0,1);$
$r(x|W_6) = (1,1,1,1,1,0);$

Dari penjabaran diatas didapatkan bahwa W_4, W_5, dan W_6 merupakan himpunan pembeda, karena representasi simpul graf S_6 terhadap W_4, W_5, dan W_6 berbeda. Dari ke tiga himpunan simpul yang merupakan himpunan pembeda, himpunan simpul yang memiliki kardinalitas terkecil adalah W_4 dengan $|W_4| = 4$, oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa $dim(W_6) = 4$

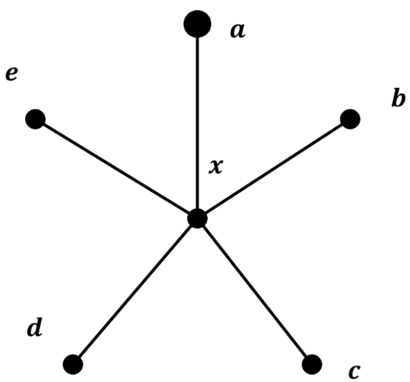
2.3 Dimensi Metrik Lokal

Dimensi metrik lokal merupakan pengembangan dimensi metrik dengan menambahkan syarat tertentu pada representasi dari simpul v terhadap W yang dinotasikan dengan $r(v|W)$. Pada penelitian ini dibahas salah satu syarat yang harus terpenuhi untuk $r(v|W)$. Apabila $r(v|W)$ untuk setiap dua simpul yang bertetangga di $V(G)$ dengan $v \in V(G)$ adalah berbeda, maka dikatakan sebagai himpunan pembeda lokal dari G. Himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas minimum disebut dimensi metrik lokal dari G yang dinotasikan dengan $dim_l(G)$.[2]

Sebagai contoh, dicari dimensi metrik lokal dari graf S_6, sebelum itu dicari representasi W pada graf S_6 dengan beberapa jumlah anggota W untuk mencari jumlah anggota W yang memenuhi sebagai himpunan pembeda lokal.

$W_1 = \{a\}$	$W_2 = \{a, b\}$
$r(a\|W_2) = (0);$	$r(a\|W_2) = (0,2);$
$r(b\|W_2) = (2);$	$r(b\|W_2) = (2,0);$
$r(c\|W_2) = (2);$	$r(c\|W_2) = (2,2);$
$r(d\|W_2) = (2);$	$r(d\|W_2) = (2,2);$
$r(e\|W_2) = (2);$	$r(e\|W_2) = (2,2);$
$r(x\|W_2) = (1);$	$r(x\|W_2) = (1,1);$

W_1 dan W_2 adalah himpunan pembeda lokal, karena walaupun ada simpul yang memiliki representasi yang sama terhadap W_1 dan W_2, namun tidak ada dari simpul-simpul tersebut yang bertetangga. Dari kedua himpunan simpul graf S_6 diatas yang memiliki anggota himpunan terkecil adalah W_1 dengan $|W_1| = 1$, oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa $dim_l(W_6) = 1$



Gambar 2.13 Graf Bintang (S_6) dengan $W = \{a\}$.

Teorema 2.2
Misal G adalah graf terhubung nontrivial berorder n, maka $dim_l(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$ dan $dim_l(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf bipartit.[2]

Teorema 2.3
Misal W_m adalah graf roda dengan m simpul, maka dimensi metrik lokal dari graf roda adalah $dim_l(W_m) = \frac{n-1}{4}, n > 5$.[16]

Graf persahabatan (F_n) dan graf kincir (W_2^m) bersifat isomorfis dengan $m = n$, oleh karena itu dimensi metrik lokal graf kincir akan sama dengan graf persahabatan.

Teorema 2.4
Misal F_n adalah graf persahabatan, maka untuk $n \geq 2$, $dim_l(F_n) = n$.[17]

Dari teorema diatas juga dapat diketeahui bahwa $dim_l(W_2^m) = m$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan tugas akhir. Kegiatan penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas: studi literatur, mendapatkan dimensi metrik lokal graf hasil amalgamasi pusat dan tepi dari graf lengkap dengan graf roda dan graf kincir, mencari pola dari data dimensi metrik lokal, merumuskan teorema dan pembuktian. dan terakhir penarikan kesimpulan dan saran.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dicari referensi yang berkaitan dengan dimensi metrik lokal pada amalgamasi graf terhubung. Referensi yang dicari meliputi dimensi metrik, dimensi metrik lokal, amalgamasi, dan lain sebagainya yang berhubungan dengan penelitian ini. Referensi – referensi yang dicari dapat diperoleh melalui jurnal – jurnal yang sesuai dengan topik tugas akhir ini.

Mendapatkan Dimensi Metrik Lokal Graf Hasil Amalgamasi Pusat dan Tepi Dari Graf Lengkap Dengan Graf Roda dan Graf Kincir

Setelah memperoleh informasi dari studi literatur, pada tahap ini dilakukan pencarian dimensi metrik lokal dari graf hasil operasi amalgamasi pusat dan amalgamasi tepi. Pada tahap ini akan dicari dimensi metrik lokal dari graf $Amal_p(K_n(a_n), W_2^m(c))$, $Amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))$, $Amal_p\ (K_n(a_n), W_m(b))$ dan $Amal_t(K_n(a_n), W_m(b_m))$.

3.3 Mencari Pola Dari Data Dimensi Metrik Lokal

Setelah mencari beberapa dimensi metrik lokal dari graf - graf hasil amalgamasi beberapa graf terhubung. Selanjutnya mencari pola dari dimensi metrik lokal dari amagamasi beberapa graf terhubung yang telah diperoleh.

3.4 Merumuskan Teorema Dan Pembuktian

Pada tahap ini akan dirumumuskan teorema dan pembuktian tentang dimensi metrik lokal dari graf hasil amalgamasi $amal_p(K_n(a_n), W_2^m(c))$, $amal_t\big(K_n(a_n)$, $W_2^m\ (v_m)\big)$, $amal_p(K_n(a_n)\ W_m(b))$ dan $amal_t(K_n(a_n)$, $W_m(b_m))$.

3.5 Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan dari penelitian yang dilakukan sebelumnya. Selanjutnya diberikan saran untuk perbaikan yang dapat dilakukan pada penelitian selanjutnya.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

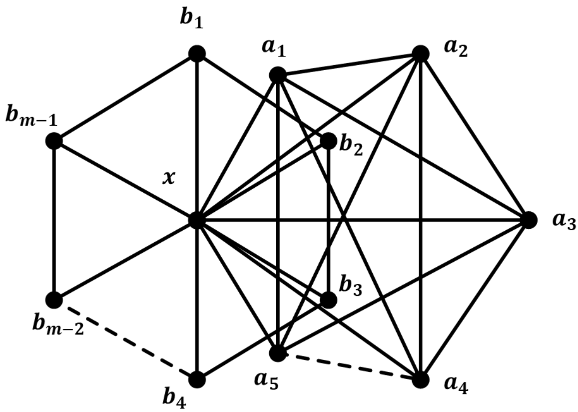
Pada bab ini dijelaskan hasil dan pembahasan mengenai dimensi metrik lokal graf hasil amalgamasi graf lengkap dengan graf roda dan graf kincir.

4.1 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Graf Lengkap dan Graf Roda

Pada sub bab ini akan dibahas dimensi metrik lokal graf hasil operasi amalgamasi graf lengkap dan graf roda. Nilai dimensi metrik lokal pada graf hasil amalgamasi graf lengkap dan graf roda tidak selalu sama, tergantung apakah simpul yang diamalgamasikan adalah simpul pusat atau simpul tepi pada graf roda, oleh karena itu akan dibahas satu persatu tentang amalgamasi pusat dan amalgamasi tepi pada graf lengkap dan graf roda.

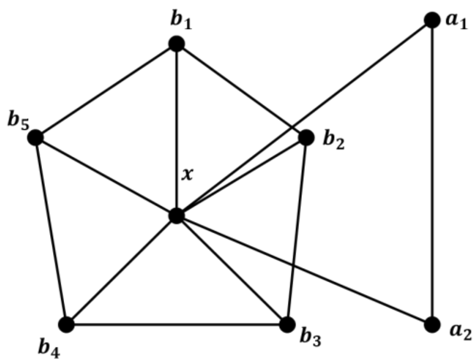
4.1.1 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Pusat Graf Lengkap Dan Graf Roda

Pada sub bab ini dibahas dimensi metrik lokal pada graf hasil operasi amalgamasi pusat graf lengkap K_n dan graf roda W_m dengan $n = 1,2,3,4,5$ dan $m = 6,10,14$. Dalam menentukan dimensi metrik lokal pada suatu graf, terlebih dahulu ditentukan batas atas dan batas bawah dimensi metrik lokalnya. Simpul pada graf roda berjumlah 6 ke atas dengan selisih empat karena dimensi metrik lokal graf roda adalah $\left\lceil\frac{m-1}{4}\right\rceil, m > 5$, oleh karena itu graf roda dengan jumlah simpul $m = 6,7,8,9$ memiliki dimensi metrik lokal yang sama, yaitu $dim_l(W_6) = dim_l(W_7) = dim_l(W_8) = dim_l(W_9) = 2$. Salah satu syarat untuk mendapatkan dimensi metrik lokal adalah representasi dari semua simpul pada graf amalgamasi pusat graf lengkap dan graf roda terhadap W harus membentuk himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas W yang minimum. Amalgamasi pusat graf lengkap dan graf roda dengan n dan m sebarang dapat dilihat pada Gambar 4.1 sebagai berikut.



Gambar 4.1 $amal_p(K_n(a_n), W_m(b))$

a. Dimensi metrik lokal dari graf amalgamasi pusat graf lengkap dan graf roda $amal_p(K_3(a_3), W_6(b))$.



Gambar 4.2 $amal_p(K_3(a_3), W_6(b))$

Untuk mendapatkan dimensi metrik lokal pada graf amalgamasi pusat graf lengkap dan graf roda $amal_p(K_3(a_3),\ W_6(b))$, akan dicari batas atas dan batas bawah dari dimensi metrik lokal graf $(amal_p(K_3(a_3), W_6(b)))$. Diketahui dimensi metrik lokal dari graf penyusun amalgamasi masing-masing adalah $dim_l(K_3) = 2$ dan $dim_l(W_3) = 2$. Simpul bersama adalah simpul yang di lekatkan pada dua graf pada operasi amalgamasi graf. Pada K_3 jika salah satu simpulnya menjadi simpul bersama, maka jumlah anggota W pada K_3 yang dapat menghasilkan himpunan pembeda lokal adalah satu. Misal $W = \{a_1, b_1, b_4\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $amal_p(K_3(a_3), W_6(b))$ memenuhi syarat himpunan pembeda lokal yaitu setiap dua simpul yang bertetangga memiliki representasi yang berbeda terhadap W. Menurut Lemma 2.1 simpul elemen W memiliki representasi yang berbeda karena masing-masing simpul memiliki nilai ‘0’ pada representasinya dan masing-masing anggota W memiliki posisi ‘0’ yang berbeda. Berikut adalah representasi simpul graf $amal_p(K_3(a_3), W_6(b))$ terhadap W.

$r(a_1|W) = (0,2,2)$ $\qquad$ $r(b_2|W) = (2,1,2)$

$r(a_2|W) = (1,2,2)$ $\qquad$ $r(b_3|W) = (2,2,1)$

$r(x|W) = (1,1,1)$ $\qquad$ $r(b_4|W) = (2,2,0)$

$r(b_1|W) = (2,0,2)$ $\qquad$ $r(b_5|W) = (2,1,1)$

Terlihat bahwa semua representasi terhadap W berbeda, jadi $W = \{a_1, b_1, b_4\}$ adalah himpunan pembeda lokal dengan $|W| = 3$. Akan tetapi W belum tentu merupakan kardinalitas minimum. Oleh karena itu batas atas dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_p\left(K_3(a_3), W_6(b)\right)\right) \leq 3$.

Untuk mendapatkan batas bawah, akan ditunjukkan bahwa W dengan $|W| \geq 3$ adalah himpunan pembeda. Misal $|W| = 2$, W pasti bukan merupakan himpunan pembeda lokal karena terdapat dua atau lebih simpul yang bertetangga mempunyai representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $= \{a_1, b_1\}$, terdapat representasi yang sama pada simpul yang bertetangga, yaitu $r(b_3|W) = r(b_4|W) = (2,2)$. Oleh karena itu, himpunan simpul pada graf $amal_p\left(K_3(a_3), W_6(b)\right)$ dengan $|W| = 2$ bukan merupakan himpunan pembeda. Jika himpunan pembeda graf $amal_p\left(K_3(a_3), W_6(b)\right)$ dengan kardinalitas terkecil adalah $W = 3$, maka batas bawah dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_p\left(K_3(a_3), W_6(b)\right)\right) \geq 3$.

Diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi metrik lokal adalah $3 \leq dim_l\left(amal_p\left(K_3(a_3), W_6(b)\right)\right) \leq 3$, maka dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_p\left(K_3(a_3), W_6(b)\right)\right) = 3$.

Graf W_m dengan $m = 7,8,9$ memiliki dimensi metrik lokal yang sama dengan W_6, yaitu $dim_l(W_m) = 2$, hal itu juga berlaku untuk seterusnya, maka dari itu juga dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik lokal dari graf amalgamasi pusat antara graf lengkap (K_3) dengan graf roda (W_m) adalah $dim_l\left(amal_p\left(K_3(a_3), W_6(b)\right)\right) = 3$.

b. Dimensi metrik lokal dari graf amalgamasi pusat graf lengkap dan graf roda $amal_p\ (K_n(a_n), W_m(b))$.

Tanpa mengurangi keumuman serta langkah yang sama dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_m(b)\right)\right)$ dengan $n > 3$ dan $m = 4k + 2, k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ Didapatkan hasil seperti pada tabel-tabel berikut

Tabel 4.1 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_m(b)\right)\right), n = 3, m = 6,10,14.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_p\left(K_n(a_n), W_m(b)\right)$
3	6	2	2	3
3	10	2	3	4
3	14	2	4	5

Tabel 4.2 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_m(b)\right)\right), n = 4, m = 6,10,14.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_p\left(K_n(a_n), W_m(b)\right)$
4	6	3	2	4
4	10	3	3	5
4	14	3	4	6

Tabel 4.3 $dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)\right), n = 5, m = 6,10,14.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)$
5	6	4	2	5
5	10	4	3	6
5	14	4	4	7

Tabel 4.4 $dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)\right), n = 3,4,5, m = 6.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)$
3	6	2	2	3
4	6	3	2	4
5	6	4	2	5

Tabel 4.5 $dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)\right), n = 3,4,5, m = 10.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)$
3	10	2	3	4
4	10	3	3	5
5	10	4	3	6

Tabel 4.6 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)\right), n = 3,4,5, m = 14.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)$
3	14	2	4	5
4	14	3	4	6
5	14	4	4	7

Tabel 4.7 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)\right), n = 3,4,5, m = 6,10,14.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)$
3	6	2	2	3
4	10	3	3	5
5	14	4	4	7

Teorema 4.1

Jika amalgamasi pusat dari sebuah graf lengkap K_n dan graf roda W_m dinotasikan sebagai $amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)$, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$ dan, $m > 5$, $m \in \mathbb{Z}$, maka $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_m(b)\right)\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$.

Bukti:

Misalkan $amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)$ adalah graf dengan $n \geq 1$ dan > 5. Pertama akan dicari batas atas dari dimensi metrik lokal graf $amal_p\left(K_n(a_n),W_m(b)\right)$. Simpul-simpul K_n yang menjadi elemen W adalah semua simpul pada K_n kecuali simpul bersama dan satu sebarang simpul K_n. Sedangkan simpul W_m yang merupakan elemen W adalah simpul tepi pada W_m berjumlah $\left\lceil\frac{m-1}{4}\right\rceil$ dengan syarat tidak ada 4 simpul tepi pada W_m yang bukan anggota W yang berurutan. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{a_1, a_2, \dots b_1, b_5, \dots)$. Maka representasi dari semua simpul graf $amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)$ adalah sebagai berikut

$$r(x|W) = (1,1,1, \dots,1,1,1, \dots);$$
$$r(a_1|W) = (0,1,1, \dots,2,2,2, \dots);$$
$$r(a_2|W) = (1,0,1, \dots,2,2,2, \dots);$$

•

•

•

$$r(b_1|W) = (2,2,2, \dots,0,2,2, \dots);$$
$$r(b_2|W) = (2,2,2, \dots 1,2,2, \dots);$$
$$r(b_3|W) = (2,2,2, \dots 2,2,2, \dots);$$

•

•

•

Semua simpul anggota $V(amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big))$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W dengan anggota himpunan W adalah $|W| = (n-2) + \left\lceil(\frac{(m-1)}{4})\right\rceil$, maka $dim_l\Big(amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)\Big) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$.

Selanjutnya akan di tunjukkan bahwa batas bawah dari dimensi metrik lokal graf $amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)$ adalah $dim_l\Big(amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)\Big) \geq ldim(K_n) + dim_l(W_m) -$

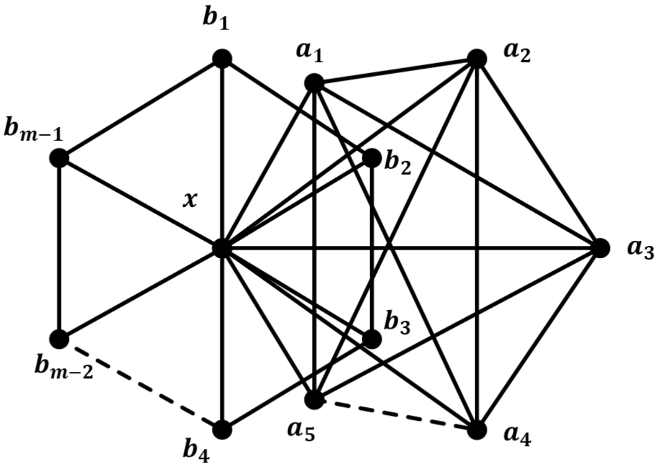
1. Di asumsikan W adalah himpunan pembeda lokal pada graf $amal_p \left(K_n(a_n), W_m(b)\right)$ dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$. Ada 2 kemungkinan yang mungkin terjadi untuk pemilihan simpul pada W.

(1) Jika simpul anggota $W \in V(K_n), |V(K_n)| < n - 2$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama dan bertetangga.tanpa mengurangi keumuman, diambil dua simpul a_1 dan a_2 dimana $a_1, a_2 \in V(K_n)$ dan $a_1, a_2 \notin W$, serta a_1 dan a_2 bukan merupakan simpul Bersama. Simpul bersama adalah simpul yang dilekatkan pada operasi amalgamasi graf . Maka

$$r(a_1|W) = r(a_2|W) = (1,1, \dots ,2,2,2, \dots).$$

(2) Jika simpul anggota $W \in V(W_m), |V(W_m)| < \frac{(m-1)}{4}$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama dan bertetangga. Misal $b_1, b_2 \in V(W_m)$ dan $b_1, b_2 \notin W$, serta x dan y bukan merupakan simpul bersama. Maka

$$r(b_1|W) = r(b_2|W) = (2,2, \dots ,1,1,1, \dots)$$



Gambar 4.3 $amal_p(K_n(a_n), W_m(b))$

Dari kemungkinan di atas dengan pemilihan simpul anggota W dimana setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama dan bertetangga, jadi W dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$ bukan merupakan himpunan pembeda lokal. Ini bertentangan dengan pernyataan bahwa W adalah himpunan pembeda lokal dari $amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)$. Karena telah ditunjukan bahwa $dim_l\Big(amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)\Big) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$ maka terbukti. □

Untuk kasus khusus yaitu $n = 2$, dimensi metrik lokal graf $amal_p\big(K_2(a_2), W_m(b)\big)$ adalah $dim_l(amal_p(K_2(a_2), W_m(b))) = dim_l(W_m)$, yang demikian dapat ditunjukkan dengan penjelasan berikut**,** misal a_1 merupakan satu-satunya simpul pada K_2 di $amal_p\big(K_2(a_2), W_m(b)\big)$ yang bukan simpul bersama, oleh karena itu a_1 hanya bertetangga dengan a_2. Jika a_1 hanya bertetangga dengan a_n, maka untuk sebarang W representasi simpul K_2 adalah $r(W|a_1) \neq r(W|a_2)$.

Untuk kasus lain, W_m dengan $m = 5$, dimensi metrik lokal graf $amal_p\big(K_n(a_n), W_5(b)\big)$. W_m memiliki dimensi metrik lokal $dim_l(W_5) = 2$, jadi dimensi metrik lokal untuk graf $amal_p\big(K_n(a_n), W_5(b)\big)$ adalah $dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_5(b)\big)\right) = dim_l(K_n) + 2 - 1 = dim_l(K_n) + 1$.

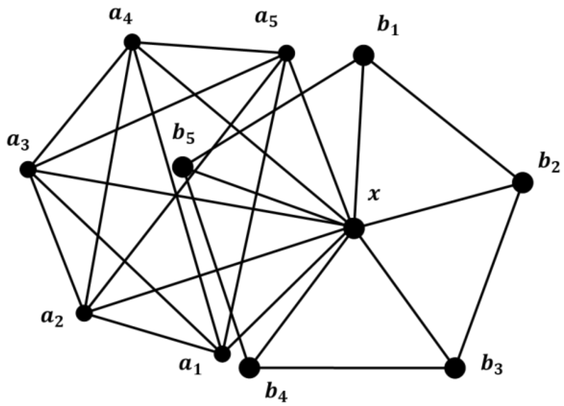
Contoh 4.1

dicari dimensi metrik lokal dari $amal_p\big(K_6(a_6), W_6(b)\big)$. Jika diketahui $dim_l(K_6) = 5$ dan $dim_l(W_6) = 2$, maka menurut teorema 4.1 dimensi metrik lokal dari $amal_p\big(K_6(a_6), W_6(b)\big)$ adalah

$$dim_l\left(amal_p\big(K_6(a_6), W_6(b)\big)\right) =$$
$$dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1 = 5 + 2 - 1$$
$$= 6$$

Sekarang akan diuji kebenarannya apakah benar nilai dimensi metrik lokal dari graf $amal_p\big(K_6(a_6), W_6(b)\big)$ bernilai demikian. Misal $W = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2)$, maka representasinya menjadi seperti berikut

$a_1 = (0,1,1,1,2,2)$ $\quad$ $b_1 = (2,2,2,2,0,1)$
$a_2 = (1,0,1,1,2,2)$ $\quad$ $b_2 = (2,2,2,2,1,0)$
$a_3 = (1,1,0,1,2,2)$ $\quad$ $b_3 = (2,2,2,2,2,1)$
$a_4 = (1,1,1,0,2,2)$ $\quad$ $b_4 = (2,2,2,2,2,2)$
$a_5 = (1,1,1,1,2,2)$ $\quad$ $b_5 = (2,2,2,2,1,2)$
$x = (1,1,1,1,1,1)$

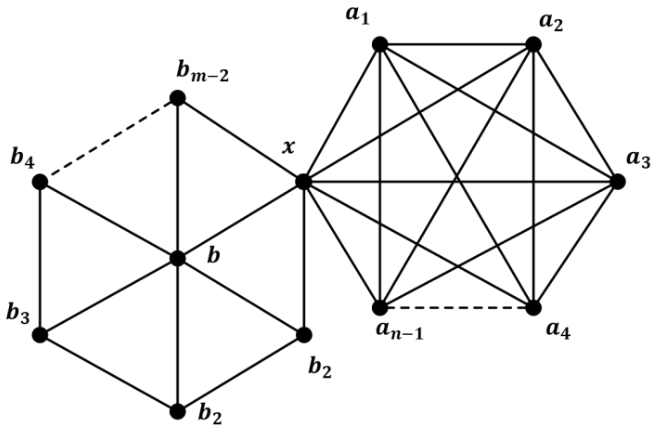


Gambar 4.4 $amal_p(K_6(a_6), W_6(b))$

Dari representasi diatas terlihat bahwa tidak ada simpul yang memiliki representasi yang sama dengan simpul lain yang bertetangga, oleh karena itu, dimensi metrik dari graf $amal_p\big(K_6(a_6), W_6(b)\big)$ adalah enam.

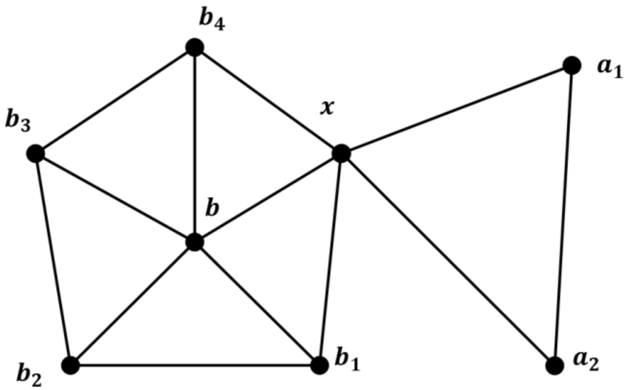
4.1.2 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Tepi Graf Lengkap Dan Graf Roda

Pada sub bab ini dibahas dimensi metrik lokal pada graf hasil operasi amalgamasi tepi graf lengkap K_n dan graf roda W_m dengan $n = 1,2,3,4,5$ dan $m = 6,10,14$. Dalam menentukan dimensi metrik lokal pada suatu graf, terlebih dahulu ditentukan batas atas dan batas bawah dimensi metrik lokal graf tersebut. Simpul pada Graf Roda berjumlah 6 ke atas dengan selisih empat karena dimensi metrik lokal graf roda adalah $\left\lceil \frac{m-1}{4} \right\rceil, m > 5$, oleh karena itu Graf roda dengan jumlah simpul $m = 6,7,8,9$ memiliki dimensi metrik lokal yang sama, yaitu $dim_l(W_6) = dim_l(W_7) = dim_l(W_8) = dim_l(W_9) = 2$. Salah satu syarat untuk mendapatkan dimensi metrik lokal adalah representasi dari semua simpul pada graf amalgamasi tepi graf lengkap dan graf roda terhadap W harus membentuk himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas W yang minimum. amalgamasi tepi graf lengkap dan graf roda dengan n dan m sebarang dapat dilihat pada Gambar 4.5 sebagai berikut.



Gambar 4.5 $amal_t(K_n(a_n), W_m(b_{m-1}))$

a. Dimensi metrik lokal dari graf amalgamasi tepi graf lengkap dan graf roda $amal_t(K_3(a_3), W_6(b_5))$.



Gambar 4.6 $amal_t(K_3(a_3), W_6(b_5))$

Akan dicari batas atas dan batas bawah dari dimensi metrik lokal graf $amal_p(K_3(a_3), W_6(b_5))$. Diketahui dimensi metrik lokal dari graf penyusun amalgamasi masing-masing adalah $dim_l(K_3) = 2$ dan $dim_l(W_3) = 2$. Simpul bersama adalah simpul yang di lekatkan pada masing-masing graf pada operasi amalgamasi graf. misalkan Pada K_3 jika salah satu simpulnya menjadi simpul bersama, maka jumlah anggota W pada K_3 yang dapat menghasilkan himpunan pembeda lokal adalah satu. Pada W_6 yang memiliki dimensi metrik lokal $dim_l(W_3) = 2$, dengan anggota $|W|$ nya adalah simpul simpul tepi pada graf W_6, jika salah satu simpul tepi nya merupakan simpul bersama, maka jumlah $W \subset V(W_6)$ yang dibutuhkan untuk membentuk himpunan pembeda lokal pada graf $amal_t(K_3(a_3),\ W_6(b_5))$ adalah satu. misalkan $W = \{a_1, b_1\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $amal_t(K_3(a_3), W_6(b_5))$ memenuhi syarat himpunan pembeda lokal yaitu setiap dua simpul yang bertetangga memiliki representasi yang berbeda terhadap W. Menurut Lemma 2.1 simpul elemen W memiliki representasi yang berbeda karena masing-masing simpul memiliki nilai ‘0’ pada representasinya dan masing-masing anggota W memiliki posisi ‘0’ yang berbeda. Berikut adalah representasi simpul graf $amal_t(K_3(a_3), W_6(b_5))$ terhadap W.

$r(a_1\|W) = (0,2)$	$r(b_2\|W) = (3,1)$
$r(a_2\|W) = (1,3)$	$r(b_3\|W) = (3,2)$
$r(x\|W) = (1,1)$	$r(b_4\|W) = (2,2)$
$r(b_1\|W) = (2,0)$	$r(b\|W) = (2,1)$

Terlihat bahwa semua representasi terhadap W berbeda, jadi $W = \{a_1, b_1\}$ adalah himpunan pembeda lokal dengan $|W| = 2$. Akan tetapi W belum tentu memiliki kardinalitas minimum. Oleh karena itu batas atas dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_t\big(K_3(a_3), W_6(b_5)\big)\right) \leq 2$.

Untuk mendapatkan batas bawah, akan ditunjukkan bahwa $|W| \geq 2$, misal $|W| = 1$, W pasti bukan merupakan himpunan pembeda lokal karena salah satu dari dua graf yang di-amalgamasi-kan membutuhkan setidaknya satu simpul yang merupakan anggota W, jika tidak, maka terdapat dua atau lebih simpul yang bertetangga mempunyai representasi yang sama terhadap W pada graf tersebut. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{a_1\}$, terdapat representasi yang sama pada simpul yang bertetangga, yaitu $r(b_2|W) = r(b_3|W) = (3)$. Oleh karena itu, himpunan simpul pada graf $amal_t\big(K_3(a_3),$

$W_6(b_5)\big)$ dengan $|W| = 1$ bukan merupakan himpunan pembeda. Jika himpunan pembeda graf $amal_t\big(K_3(a_3),$ $W_6(b_5)\big)$ dengan kardinalitas terkecil adalah $W = 2$, maka batas bawah dimensi metrik lokal $dim_l\Big(amal_t\big(K_3(a_3),$ $W_6(b_5)\big)\Big) \geq 2$.

Diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi metrik lokal adalah $2 \leq dim_l \Big(amal_t\big(K_3(a_3), W_6(b_5)\big)\Big) \leq 2$, maka dimensi metrik lokal $dim_l \Big(amal_t \big(K_3(a_3), W_6(b_5)\big)\Big) = 2$.

Graf W_m dengan $m = 7,8,9$ memiliki dimensi metrik lokal yang sama dengan W_6, yaitu $dim_l(W_m) = 2$, hal itu juga berlaku untuk seterusnya, maka dari itu juga dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik lokal dari graf amalgamasi tepi antara graf lengkap (K_3) dengan graf roda (W_m) adalah $dim_l\Big(amal_t\big(K_3(a_3), W_6(b_2)\big)\Big) = 2$.

b. Dimensi metrik lokal dari graf amalgamasi tepi graf lengkap dan graf roda $amal_t \; (K_n(a_n), W_m(b_{m-1}))$.

Tanpa mengurangi keumuman serta langkah yang sama dimensi metrik lokal $dim_l\Big(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\Big)$ dengan $n > 3$ dan $m = 4k + 2, k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

Didapatkan hasil seperti pada tabel-tabel berikut

Tabel 4.8 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)\right), n = 3, m = 6,10,14.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)$
3	6	2	2	2
3	10	2	3	3
3	14	2	4	4

Tabel 4.9 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)\right), n = 4, m = 6,10,14.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)$
4	6	3	2	3
4	10	3	3	4
4	14	3	4	5

Tabel 4.10 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)\right), n = 5, m = 6,10,14.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)$
5	6	4	2	4
5	10	4	3	5
5	14	4	4	6

Tabel 4.11

$dim_l\left(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\right), n = 3,4,5, m = 6.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)$
3	6	2	2	2
4	6	3	2	3
5	6	4	2	4

Tabel 4.12 $dim_l\left(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\right), n = 3,4,5, m = 10.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)$
3	10	2	3	3
4	10	3	3	4
5	10	4	3	5

Tabel 4.13 $dim_l\left(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\right), n = 3,4,5, m = 14.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)$
3	14	2	4	4
4	14	3	4	5
5	14	4	4	6

Tabel 4.14 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)\right), n = 3,4,5, m = 6,10,14.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)$
3	6	2	2	2
4	10	3	3	4
5	14	4	4	6

Teorema 4.2

Jika amalgamasi tepi dari sebuah graf lengkap K_n dan graf roda W_m dinotasikan sebagai $amal_t\left(K_n(a_n),\ W_m(b_m)\right), n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$, $m > 5$, dan $m \in \mathbb{Z}$, maka $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$.

Bukti:

Misalkan $amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)$ adalah graf dengan $n \geq 3$ dan > 5 . Pertama akan dicari batas atas dari dimensi metrik lokal graf $amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)$. simpul-simpul K_n yang menjadi elemen W adalah semua simpul pada K_n kecuali simpul bersama dan satu sebarang simpul K_n. Sedangkan simpul W_m yang merupakan elemen W adalah simpul tepi pada W_m berjumlah $\left\lceil\frac{m-1}{4}\right\rceil - 1$ dengan syarat tidak ada 4 simpul tepi pada W_m yang bukan anggota W dan juga bukan merupakan simpul bersama yang berurutan. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{a_1, a_2, \dots ,\ a_{n-2}, b_1, b_5, \dots).$ representasi dari semua simpul graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)$ adalah sebagai berikut

$$r(a_1|W) = (0,1,1, \dots ,2,3,3, \dots);$$

$$r(a_2|W) = (1,0,1, \dots ,2,3,3, \dots);$$

$$r(a_2|W) = (1,1,0, \dots ,2,3,3, \dots);$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$r(x|W) = (1,1,1, \dots ,1,2,2, \dots);$$

$$r(b_1|W) = (2,2,2, \dots ,0,2,2, \dots);$$

$$r(b_2|W) = (3,3,3, \dots 1,2,2, \dots);$$

$$r(b_3|W) = (3,3,3, \dots 2,2,2, \dots);$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$r(b|W) = (2,2,2, \dots ,1,1,1, \dots);$$

Semua simpul anggota $V\big(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\big)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W dengan $|W| = (n-2) + \left\lceil \frac{m-1}{4} \right\rceil - 1$, maka $dim_l\Big(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\Big) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2.$

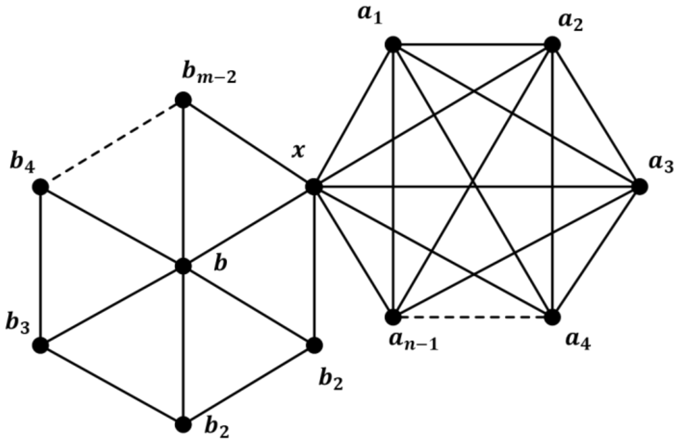
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa batas bawah dari dimensi metrik graf $amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)$ adalah $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)\right) \geq dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$. Di asumsikan W adalah himpunan pembeda lokal pada graf $amal_t\left(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\right)$ dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$. Ada 2 kemungkinan yang mungkin terjadi untuk pemilihan simpul pada W.

(1) Jika simpul anggota $W \in V(K_n), |V(K_n)| < n - 2$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama.tanpa mengurangi keumuman, diambil dua simpul a_1 dan a_2 dimana $a_1, a_2 \in V(K_n)$ dan $a_1, a_2 \notin W$, serta a_1 dan a_2 bukan merupakan simpul bersama.. Maka

$$r(a_1|W) = r(a_2|W) = (1,1,1 \dots, 3,3,3, \dots).$$

(2) Jika simpul anggota $W \in V(W_m), |V(W_m)| < \left\lceil \frac{m-1}{4} \right\rceil - 1$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, karena satu dari simpul tepi graf W_m merupakan simpul bersama. Misal $b_1, b_2 \in V(W_m)$ dan $b_1, b_2 \notin W$, serta b_1 dan b_2 bukan merupakan simpul bersama, maka

$$r(b_1|W) = r(b_2|W) = (3,3,3, \dots, 1,1,1, \dots)$$



Gambar 4.7 $amal_t(K_n(a_n), W_m(b_{m-1}))$

Dari kemungkinan di atas dengan pemilihan simpul anggota W dimana setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, jadi W dengan $|W| \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$ bukan merupakan himpunan pembeda lokal. Ini bertentangan dengan pernyataan bahwa W adalah himpunan pembeda lokal dari $amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)$. Karena telah ditunjukan bahwa $dim_l\Big(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\Big) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$ maka terbukti. □

Untuk kasus khusus yaitu $n = 2$, dimensi metrik lokal graf $amal_t\big(K_2(a_2), W_m(b_{m-1})\big)$ adalah $dim_l(amal_t\big(K_2(a_2), W_m(b_{m-1})\big)) = dim_l(W_m)$,yang demikian dapat ditunjukkan dengan penjelasan berikut**,** misal a_1, merupakan satu-satunya simpul pada K_2 di $amal_t\big(K_2(a_2), W_m(b_{m-1})\big)$ yang bukan simpul bersama, oleh karena itu a_1 hanya bertetangga dengan a_2. Jika a_1 hanya bertetangga dengan a_n, maka untuk sebarang W, representasi simpul K_2 adalah $r(W|a_1) \neq r(W|a_2)$.

Untuk kasus lain, W_m dengan $m = 5$, dimensi metrik lokal graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_5(b_4)\big)$. W_5 memiliki dimensi metrik lokal $dim_l(W_5) = 2$, jadi dimensi metrik lokal untuk graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_5(b_4)\big)$ adalah $dim_l\Big(amal_t\big(K_n(a_n), W_5(b_4)\big)\Big) = dim_l(K_n) + 2 - 2 = dim_l(K_n)$.

Contoh 4.2

dicari dimensi metrik lokal dari $amal_t\big(K_6(a_6),\ W_6(b_5)\big)$. Jika diketahui $dim_l(K_6) = 5$ dan $dim_l(W_6) = 2$, maka menurut teorema 4.2 dimensi metrik lokal dari $amal_t\big(K_6(a_6), W_6(b_5)\big)$ adalah

$$dim_l\Big(amal_t\big(K_6(a_6), W_6(b_5)\big)\Big) =$$

$$dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2 = 5 + 2 - 2$$

$$= 5$$

Sekarang akan diuji kebenarannya apakah benar nilai dimensi metrik dari graf $amal_t\big(K_6(a_6), W_6(b_5)\big)$ bernilai demikian. Misal $W = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1)$, maka representasinya menjadi seperti berikut

$a_1 = (0,1,1,1,2)$ $b_1 = (2,2,2,2,0)$

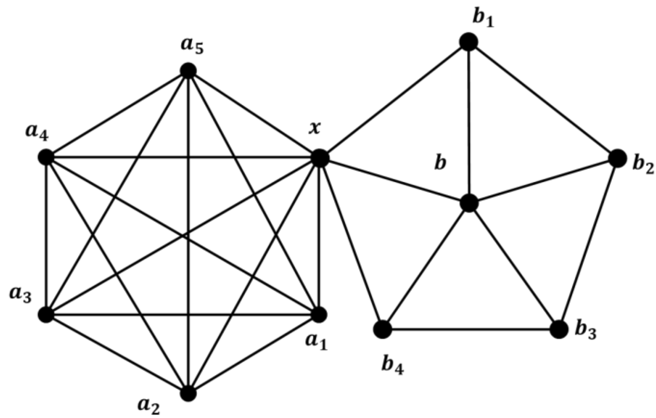
$a_2 = (1,0,1,1,2)$ $b_2 = (3,3,3,3,1)$

$a_3 = (1,1,0,1,2)$ $b_3 = (3,3,3,3,2)$

$a_4 = (1,1,1,0,2)$ $b_4 = (2,2,2,2,2)$

$a_5 = (1,1,1,1,2)$ $b = (2,2,2,2,1)$

$x = (1,1,1,1,1)$



Gambar 4.8 $amal_t(K_6(a_6), W_6(b_5))$

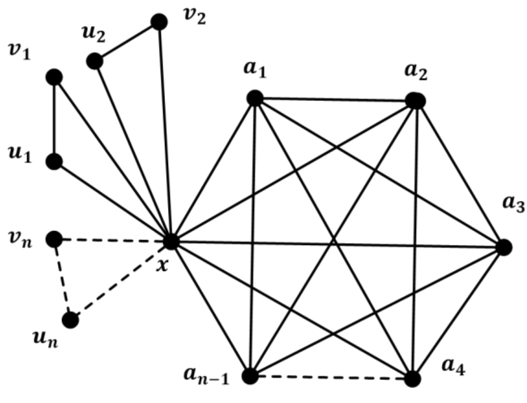
Dari representasi diatas terlihat bahwa tidak ada simpul yang memiliki representasi yang sama dengan simpul lain yang bertetangga, oleh karena itu, dimensi metrik dari graf $amal_t\big(K_6(a_6), W_6(b_5)\big)$ adalah 5.

4.2 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Graf Lengkap Dan Graf Kincir

Pada sub bab ini akan dibahas dimensi metrik lokal graf hasil operasi amalgamasi graf lengkap dan graf kincir. Nilai dimensi metrik lokal pada graf hasil amalgamasi graf lengkap dan graf kincir tidak selalu sama, tergantung apakah simpul yang diamalgamasikan adalah simpul pusat atau simpul tepi pada graf kincir, oleh karena itu akan dibahas satu persatu tentang amalgamasi pusat dan amalgamasi tepi pada graf lengkap dan graf kincir.

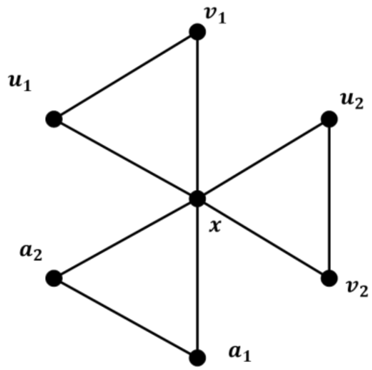
4.2.1 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Pusat Graf Lengkap Dan Graf Kincir

Pada sub bab ini akan dibahas dimensi metrik lokal pada graf hasil operasi amalgamasi pusat graf lengkap K_n dan graf kincir W_2^m dengan $n = 1,2,3,4,5$ dan $m \leq 2$. Dalam menentukan dimensi metrik lokal pada suatu graf, terlebih dahulu ditentukan batas atas dan batas bawah dimensi metrik lokal graf tersebut. Graf kincir W_2^m dengan $m \leq 2$ memiliki dimensi lokal $dim_l(W_2^m) = m$. Salah satu syarat untuk mendapatkan dimensi metrik lokal adalah representasi dari semua simpul pada graf amalgamasi pusat graf lengkap dan graf roda terhadap W harus membentuk himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas W yang minimum. Amalgamasi pusat graf lengkap dan graf roda dengan n dan m sebarang dapat dilihat pada Gambar 4.7 sebagai berikut.



Gambar 4.9 $amal_p(K_n(a_n), W_2^m(c))$

a. Dimensi metrik lokal dari graf amalgamasi pusat graf lengkap dan graf roda $amal_p(K_3(a_3), W_2^2(c))$



Gambar 4.10 $amal_p(K_3(a_3), W_2^2(c))$

Akan dicari batas atas dan batas bawah dari dimensi metrik lokal graf $amal_p(K_3(a_3),\ W_2^2(c))$. Diketahui dimensi metrik lokal dari graf penyusun amalgamasi masing-masing adalah $dim_l(K_3) = 2$ dan $dim_l(W_2^2) = 2$. Pada K_3 jika salah satu simpulnya menjadi simpul bersama, maka jumlah anggota W pada K_3 yang dapat menghasilkan himpunan pembeda lokal adalah satu. misal $W = \{a_1, u_1, u_2\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $amal_p(K_3(a_3), W_2^2(c))$ memenuhi syarat himpunan pembeda lokal yaitu setiap dua simpul yang bertetangga memiliki representasi yang berbeda terhadap W. Menurut Lemma 2.1 simpul elemen W memiliki representasi yang berbeda karena masing-masing simpul memiliki nilai '0' pada representasinya dan masing-masing anggota W memiliki posisi '0' yang berbeda. Berikut adalah representasi simpul graf $amal_p(K_3(a_3), W_2^2(c))$ terhadap W.

$r(u_1|W) = (0,2,2)$ $\quad$ $r(v_1|W) = (1,2,2)$

$r(u_2|W) = (2,0,2)$ $\quad$ $r(v_2|W) = (2,1,2)$

$r(a_1|W) = (2,2,0)$ $\quad$ $r(a_2|W) = (2,2,1)$

Terlihat bahwa semua representasi terhadap W berbeda, jadi $W = \{u_1, u_2, a_1\}$ adalah himpunan pembeda lokal dengan $|W| = 3$. Akan tetapi W belum tentu memiliki kardinalitas minimum. Oleh karena itu batas atas dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_p\left(K_3(a_3), W_2^2(c)\right)\right) \leq 3$.

Untuk mendapatkan batas bawah, akan ditunjukkan bahwa $|W| \geq 3$ adalah himpunan pembeda, misalkan $|W| = 2$ maka pasti bukan merupakan himpunan pembeda lokal karena terdapat simpul yang bertetangga mempunyai representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{u_1, u_2\}$, terdapat representasi yang sama pada simpul a_1 dan a_2, yaitu $r(a_1|W) = r(a_2|W) = (2,2)$, Oleh karena itu, himpunan simpul pada graf $amal_p\left(K_3(a_3), W_2^2(c)\right)$ dengan $|W| = 2$ bukan merupakan himpunan pembeda. Jika himpunan pembeda graf $amal_p\left(K_3(a_3), W_2^2(c)\right)$ dengan kardinalitas terkecil adalah $W = 3$, maka Oleh karena itu, batas bawah dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_p\left(K_3(a_3), W_2^2(c)\right)\right) \geq 3$.

Diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi metrik lokal adalah $3 \geq dim_l \left(amal_p\left(K_3(a_3)\, , W_2^2(c)\right)\right) \geq 3$, maka dimensi metrik lokal $dim_l \left(amal_p \left(K_3(a_3), W_2^2(c)\right)\right) = 3$.

b. Dimensi metrik lokal dari graf amalgamasi pusat graf lengkap dan graf kincir $amal_p \ (K_n(a_n), W_2^2(c))$.

Tabel 4.15 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 3, m = 2,3,4.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)$
3	2	2	2	3
3	3	2	3	4
3	4	2	4	5

Tabel 4.16 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 4, m = 2,3,4.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)$
4	2	3	2	4
4	3	3	3	5
4	4	3	4	6

Tabel 4.17 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 5, m = 2,3,4.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)$
5	2	4	2	5
5	3	4	3	6
5	4	4	4	7

Tabel 4.18 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 3,4,5, m = 2.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)$
3	2	2	2	3
4	2	3	2	4
5	2	4	2	5

Tabel 4.19 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 3,4,5, m = 3.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)$
3	3	2	3	4
4	3	3	3	5
5	3	4	3	6

Tabel 4.20 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 3,4,5,$ $m = 4$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)$
3	4	2	4	5
4	4	3	4	6
5	4	4	4	7

Tabel 4.21 $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right), n = 3,4,5,\ m = 2,3,4.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)$
3	2	2	2	3
4	3	3	3	5
5	4	4	4	7

Teorema 4.3

Jika amalgamasi pusat dari sebuah graf lengkap K_n dan graf roda W_2^m dinotasikan sebagai $amal_p\left(K_n(a_n),\ W_2^m(c)\right)$,$n \geq 3$ $n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, dan $m \in \mathbb{Z}$. maka $dim_l\left(amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 1.$

Bukti

Misalkan $amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)$ adalah graf dengan $n \geq 3$ dan $m > 2$. diketahui bahwa dimensi metrik lokal dari graf lengkap adalah $dim_l(K_n) = n - 1$ dan dimensi metrik dari graf roda adalah $dim_l(W_2^m) = m$. Pertama akan dicari batas atas dari dimensi metrik lokal graf $amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)$. Misalkan Simpul-simpul K_n yang menjadi elemen W adalah semua simpul pada K_n kecuali simpul bersama dan satu sebarang simpul K_n. Sedangkan simpul W_2^m yang merupakan elemen W adalah simpul tepi pada W_2^m berjumlah m dengan satu simpul tiap bilah pada W_2^m. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, u_1, u_2, \ldots u_m)$. representasi dari semua simpul graf $amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)$ adalah sebagai berikut

$$r(a_1|W) = (0,1,1,\ldots,2,2,2,\ldots);$$

$$r(a_2|W) = (1,0,1.\ldots,2,2,2,\ldots);$$

$$r(a_3|W) = (1,1,0,\ldots,2,2,2,\ldots);$$

•

•

•

$$r(u_1|W) = (2,2,2,\ldots,0,2,2,\ldots);$$

$$r(v_1|W) = (2,2,2,\ldots,1,2,2,\ldots);$$

$$r(u_2|W) = (2,2,2,\ldots,2,0,2,\ldots);$$

•

•

•

$$r(x|W) = (1,1,1,\ldots,1,1,1,\ldots);$$

Semua simpul anggota $V(amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big))$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W dengan $|W| = (n-2) + m$, maka $dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)\right) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 1$.

Selanjutnya akan di tunjukkan bahwa batas bawah dari dimensi metrik graf $amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)$ adalah

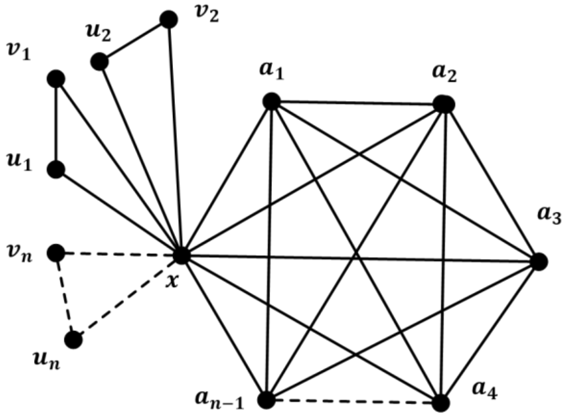
$dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)\right) \geq ldim(K_n) + dim_l(W_2^m)$ -1. Di asumsikan W adalah himpunan pembeda lokal pada graf $amal_p$ $\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)$ dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 1$. Ada 2 kemungkinan yang mungkin terjadi untuk pemilihan simpul pada W.

(1) Jika simpul anggota $W \in V(K_n) < n - 2$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama.tanpa mengurangi keumuman, diambil dua simpul a_1 dan a_2 dimana $a_1, a_2 \in V(K_n)$ dan $a_1, a_2 \notin W$, serta a_1 dan a_2 bukan merupakan simpul Bersama.. Maka

$$r(a_1|W) = r(a_2|W) = (1,1 \dots ,2,2,2).$$

(2) Jika simpul anggota $W \in V(W_2^m), |V(W_2^m)| < m - 1$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, karena satu dari simpul tepi graf W_2^m merupakan simpul bersama. Misal $u_1, v_1 \in V(W_m)$ dan $u_1, v_1 \notin W$, serta u_1 dan v_1 bukan merupakan simpul bersama. Maka

$$r(u_1|W) = r(v_2|W) = (2,2, \dots ,1,1,1)$$



Gambar 4.11 $amal_p(K_n(a_n), W_2^m(c))$

Dari kemungkinan di atas dengan pemilihan simpul anggota W dimana setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, jadi W dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$ bukan merupakan himpunan pembeda lokal. Ini bertentangan dengan pernyataan bahwa W adalah himpunan pembeda lokal dari $amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)$. Karena telah ditunjukan bahwa $dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)\right) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$ maka pembuktian teorema ini telah selesai. □

Untuk kasus khusus yaitu $n = 2$, dimensi metrik lokal graf $amal_p\big(K_2(a_2), W_2^m(c)\big)$ adalah $dim_l amal_p\big(K_2(a_2), W_2^m(c)\big)) = dim_l(W_2^m)$, yang demikian dapat ditunjukkan dengan penjelasan berikut, misal a_1, merupakan satu-satunya simpul pada K_2 di $amal_p\big(K_2(a_2), W_2^m(c)\big)$ yang bukan simpul bersama, oleh karena itu a_1 hanya bertetangga dengan a_2. Jika a_1 hanya bertetangga dengan a_n, maka untuk sebarang W, representasi simpul K_2 adalah $r(W|a_1) \neq r(W|a_2)$.

Untuk kasus lain, ketika W_2^m dengan $m = 1$, graf W_2^1 isomorfis dengan K_3, dengan kata lain graf W_2^1 tidak memiliki simpul pusat maupun simpul tepi, oleh karena itu dimensi metrik lokal dari $amal_p\left(K_n(a_n), W_2^1(c)\right)$ tidak dapat dicari.

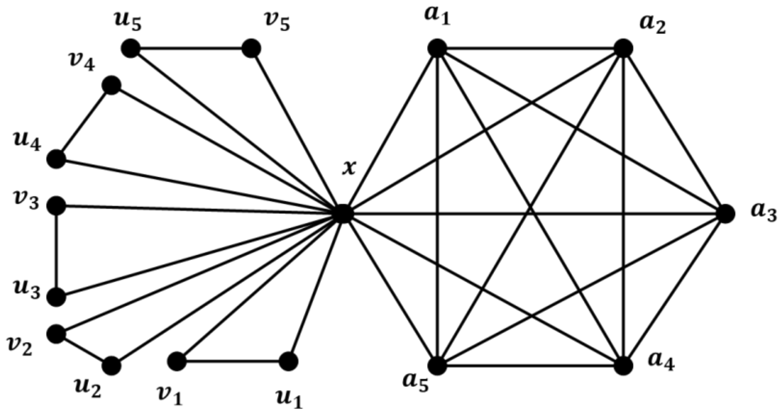
Contoh 4.3

Dicari dimensi metrik lokal dari $amal_p\left(K_6(a_6),\ W_2^5(c)\right)$. Jika diketahui $dim_l(K_6) = 5$ dan $dim_l(W_6) = 2$, maka menurut teorema 4.3 dimensi metrik lokal dari $amal_p\left(K_6(a_6), W_2^5(c)\right)$ adalah

$$dim_l\left(amal_p\left(K_6(a_6), W_2^5(c)\right)\right) =$$
$$dim_l(K_n) + dim_l(W_2^5) - 1 = 5 + 5 - 1$$
$$= 9$$

Sekarang akan diuji kebenarannya apakah benar nilai dimensi metrik dari graf $amal_p\left(K_6(a_6), W_2^5(c)\right)$ bernilai demikian. Misal $W = \{a_1, a_2, a_3, a_4, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, maka representasinya menjadi seperti berikut

$a_1 = (0,1,1,1,2,2,2,2,2)$ $\qquad$ $u_1 = (2,2,2,2,0,2,2,2,2)$
$a_2 = (1,0,1,1,2,2,2,2,2)$ $\qquad$ $u_2 = (2,2,2,2,2,0,2,2,2)$
$a_3 = (1,1,0,1,2,2,2,2,2)$ $\qquad$ $u_3 = (2,2,2,2,2,2,0,2,2)$
$a_4 = (1,1,1,0,2,2,2,2,2)$ $\qquad$ $u_4 = (2,2,2,2,2,2,2,0,2)$
$a_5 = (1,1,1,1,2,2,2,2,2)$ $\qquad$ $u_5 = (2,2,2,2,2,2,2,2,0)$
$v_1 = (2,2,2,2,1,2,2,2,2)$ $\qquad$ $v_4 = (2,2,2,2,2,2,2,1,2)$
$v_2 = (2,2,2,2,2,1,2,2,2)$ $\qquad$ $v_5 = (2,2,2,2,2,2,2,2,1)$
$v_3 = (2,2,2,2,2,2,1,2,2)$ $\qquad$ $x = (1,1,1,1,1,1,1,1,1)$

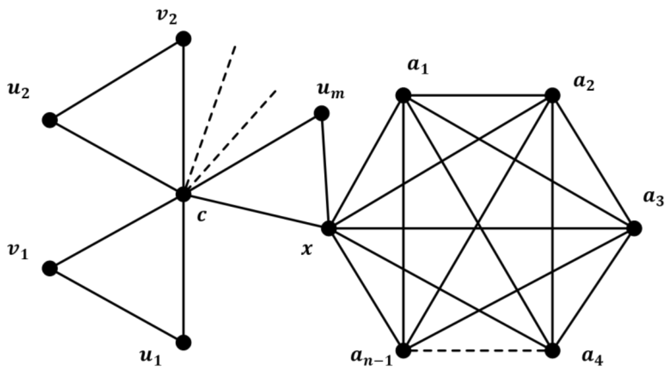


Gambar 4.12 $amal_p\left(K_6(a_6), W_2^5(c)\right)$

Dari representasi diatas terlihat bahwa tidak ada simpul yang memiliki representasi yang sama dengan simpul lain yang bertetangga, oleh karena itu, dimensi metrik dari graf $amal_p\left(K_6(a_6), W_2^5(c)\right)$ adalah sembilan.

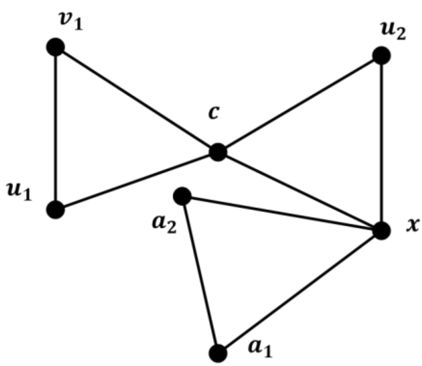
4.2.2 Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Tepi Graf Lengkap Dan Graf Kincir

Pada sub bab ini akan dibahas dimensi metrik lokal pada graf hasil operasi amalgamasi tepi graf lengkap K_n dan graf kincir W_2^m dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Dalam menentukan dimensi metrik lokal pada suatu graf, terlebih dahulu ditentukan batas atas dan batas bawah dimensi metrik lokal graf tersebut. Graf kincir W_2^m dengan $m \leq 2$ memiliki dimensi lokal $dim_l(W_2^m) = m$. Salah satu syarat untuk mendapatkan dimensi metrik lokal adalah representasi dari semua simpul pada graf amalgamasi pusat graf lengkap dan graf roda terhadap W harus membentuk himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas W yang minimum. Amalgamasi pusat graf lengkap dan graf roda dengan n dan m sebarang dapat dilihat pada Gambar 4.10 sebagai berikut.



Gambar 4.13 $amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))$

a. Dimensi metrik lokal dari graf amalgamasi tepi graf lengkap dan graf kincir $amal_t(K_3(a_3), W_2^2(v_2))$.



Gambar 4.14 $amal_t(K_3(a_3), W_2^2(v_2))$

Akan dicari batas atas dan batas bawah dari dimensi metrik lokal graf $amal_t(K_3(a_3), W_2^2(v_2)$.Diketahui dimensi metrik lokal dari graf penyusun amalgamasi masing-masing adalah $dim_l(K_3) = 2$ dan $dim_l(W_2^2) = 2$. Pada K_3 jika salah satu simpulnya menjadi simpul bersama, maka jumlah anggota W pada K_3 yang dapat menghasilkan himpunan pembeda lokal adalah satu. Pada W_6 yang memiliki dimensi metrik lokal $dim_l(W_2^2) = 2$, dengan anggota $|W|$ nya adalah simpul simpul tepi pada graf W_6, jika salah satu simpul tepi nya merupakan simpul bersama, maka jumlah $W \subset W_2^2$ yang dibutuhkan untuk membentuk himpunan pembeda lokal pada graf $amal_t(K_3(a_3),\ W_2^2(v_2))$ adalah '2'. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{u_1, a_1\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $amal_t(K_3(a_3), W_2^2(v_2))$ memenuhi syarat himpunan pembeda lokal yaitu setiap dua simpul yang bertetangga memiliki representasi yang berbeda terhadap W. Menurut Lemma 2.1 simpul elemen W memiliki representasi yang berbeda karena masing-masing simpul memiliki nilai '0' pada representasinya dan masing-masing anggota W memiliki posisi '0' yang berbeda. Berikut adalah representasi simpul graf $amal_t(K_3(a_3), W_2^2(v_2))$ terhadap W.

$r(u_1|W) = (0,3)$ $\quad$ $r(a_1|W) = (3,0)$

$r(v_1|W) = (1,3)$ $\quad$ $r(a_2|W) = (3,1)$

$r(u_2|W) = (2,2)$ $\quad$ $r(c|W) = (1,2)$

$r(x|W) = (2,1)$

Terlihat bahwa semua representasi terhadap W berbeda, jadi $W = \{u_1, a_1\}$ adalah himpunan pembeda lokal dengan $|W| = 2$. Akan tetapi W belum tentu memiliki kardinalitas yang minimum. Oleh karena itu batas atas dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_3), W_2^2(v_2)\right)\right) \leq 2$.

Untuk mendapatkan batas bawah, akan ditunjukkan bahwa $|W|$ kurang dari 2, misalkan $|W| = 1$ maka pasti bukan merupakan himpunan pembeda lokal karena salah satu dari dua graf yang di-amalgamasi-kan membutuhkan setidaknya satu simpul yang merupakan anggota W jika tidak maka terdapat simpul yang bertetangga mempunyai representasi yang sama pada graf tersebut. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{a_1\}$, terdapat representasi yang sama pada simpul yang bertetangga, yaitu $r(u_1|W) = r(u_v|W) = (3,3)$. Oleh karena itu himpunan simpul pada graf $amal_t\left(K_3(a_3), W_2^2(v_2)\right)$ dengan $|W| = 1$ bukan merupakan himpunan pembeda. Jika himpunan pembeda graf $amal_t\left(K_3(a_3), W_2^2(v_2)\right)$ dengan kardinalitas terkecil adalah $W = 2$, maka batas bawah dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_3), W_2^2(v_2)\right)\right) \geq 2$. Diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi metrik lokal adalah $2 \leq dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_3), W_2^2(v_2)\right)\right) \leq 2$, maka dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_t\left(K_3(a_3), W_2^2(v_2)\right)\right) = 2$.

b. dimensi metrik lokal dari graf amalgamasi tepi graf lengkap dan graf kincir $amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))$.

tanpa mengurangi keumuman serta langkah yang sama dimensi metrik lokal $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right)$ dengan $n > 3$ dan $m \geq 2$ Didapatkan hasil seperti pada tabel-tabel berikut:

Tabel 4.22 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n = 3,$
$m = 2,3,4.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)$
3	2	2	2	2
3	3	2	3	3
3	4	2	4	4

Tabel 4.23 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n = 4,$
$m = 2,3,4.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)$
4	2	3	2	3
4	3	3	3	4
4	4	3	4	5

Tabel 4.24 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n = 5,$
$m = 2,3,4.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)$
5	2	4	2	4
5	3	4	3	5
5	4	4	4	6

Tabel 4.25 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n = 3,4,5,$ $m = 2.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)$
3	2	2	2	2
4	2	3	2	3
5	2	4	2	4

Tabel 4.26 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n =$ $3,4,5, m = 3.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)$
3	3	2	3	3
4	3	3	3	4
5	3	4	3	5

Tabel 4.27 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n =$ $3,4,5, m = 4.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)$
3	4	2	4	4
4	4	3	4	5
5	4	4	4	6

Tabel 4.28 $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right), n = 3,4,5, m = 2,3,4.$

jumlah simpul		dimensi metrik lokal		
n	m	K_n	W_2^m	$amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)$
3	2	2	2	2
4	3	3	3	4
5	4	4	4	6

Teorema 4.4

Jika amalgamasi tepi dari sebuah graf lengkap K_n dan graf kincir W_2^m dinotasikan sebagai $amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right), n \geq 3, n \in \mathbb{Z}, m \geq 2,$ dan $m \in \mathbb{Z}$. maka $dim_l\left(amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2.$

Bukti:

Misalkan $amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)$ adalah graf dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ .diketahui bahwa dimensi metrik lokal dari graf lengkap adalah $dim_l(K_n) = n - 1$ dan dimensi metrik dari graf roda adalah $dim_l(W_2^m) = m$. Pertama akan dicari batas atas dari dimensi metrik lokal graf $amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)$. Misalkan Simpul-simpul K_n yang menjadi elemen W adalah semua simpul pada K_n kecuali simpul bersama dan satu sebarang simpul K_n. Sedangkan simpul W_2^m yang merupakan elemen W adalah simpul tepi pada W_2^m berjumlah $m - 1$ dengan 1 simpul pada tiap bilah, kecuali bilah dari simpul bersama . Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W =$

$\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}u_1, u_2, \dots u_{m-1})$. representasi dari semua simpul graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)$ adalah sebagai berikut

$$r(a_1|W) = (0,1,1, \dots, 3,3,3, \dots);$$

$$r(a_2|W) = (1,0,1. \dots, 3,3,3, \dots);$$

$$r(a_3|W) = (1,1,0, \dots, 3,3,3, \dots);$$

•

•

•

$$r(x|W) = (1,1,1, \dots, 2,2,2, \dots);$$

$$r(u_1|W) = (3,3,3, \dots, 0,2,2, \dots);$$

$$r(v_1|W) = (3,3,3, \dots, 1,2,2, \dots);$$

$$r(u_2|W) = (3,3,3, \dots, 2,0,2, \dots);$$

•

•

•

$$r(c|W) = (2,2,2, \dots, 1,1,1, \dots);$$

$$r(u_m|W) = (2,2,2, \dots, 2,2,2, \dots);$$

Semua simpul anggota $V(amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big))$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W dengan $|W| = (n - 2) + m - 1$, maka $dim_l\Big(amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)\Big) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2$.

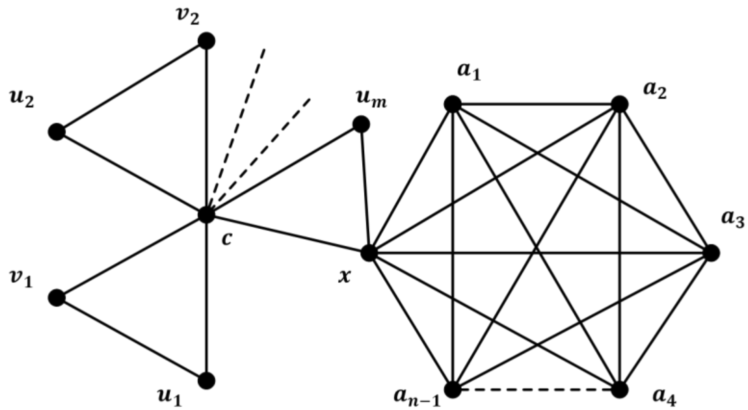
Selanjutnya akan di tunjukkan bahwa batas bawah dari dimensi metrik graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)$ adalah $dim_l\Big(amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)\Big) \geq ldim(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2$. Di asumsikan W adalah himpunan pembeda lokal pada graf $amal_t$ $\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)$ dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2$. Ada 2 kemungkinan yang mungkin terjadi untuk pemilihan simpul pada W.

a. Jika simpul anggota $W \in V(K_n), |V(K_n)| < n - 2$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama.tanpa mengurangi keumuman, diambil dua simpul a_1 dan a_2 dimana $a_1, a_2 \in V(K_n)$ dan $a_1, a_2 \notin W$, serta a_1 dan a_2 bukan merupakan simpul Bersama.. Maka

$$r(a_1|W) = r(a_2|W) = (1,1,1 \dots, 3,3,3).$$

b, Jika simpul anggota $W \in V(W_2^m), |V(W_2^m)| < m - 1$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, karena satu dari simpul tepi graf W_2^m merupakan simpul bersama. Misal $u_1, v_1 \in V(W_m)$ dan $u_1, v_1 \notin W$, serta u_1 dan v_1 bukan merupakan simpul bersama. Maka

$$r(u_1|W) = r(v_1|W) = (3,3,3, \dots, 2,2,2)$$



Gambar 4.15 $amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))$

Dari kemungkinan di atas dengan pemilihan simpul anggota W dimana setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, jadi W dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2$ bukan merupakan himpunan pembeda lokal. Ini bertentangan dengan pernyataan bahwa W adalah himpunan pembeda lokal dari $amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)$. Karena telah ditunjukan bahwa $dim_l\Big(amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)\Big) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m)$ -2 maka pembuktian teorema ini telah selesai. □

Untuk kasus khusus yaitu $n = 2$, dimensi metrik lokal graf $amal_t\big(K_2(a_2), W_2^m(v_m)\big)$ adalah $dim_l amal_t\big(K_2(a_2), W_2^m(v_m)\big)) = dim_l(W_2^m)$, yang demikian dapat ditunjukkan dengan penjelasan berikut, Misal a_1, merupakan satu-satunya simpul pada K_2 di $amal_t\big(K_2(a_2), W_2^m(v_m)\big)$ yang bukan simpul bersama, oleh karena itu a_1 hanya bertetangga dengan a_2. Jika a_1 hanya bertetangga dengan a_n, maka untuk sebarang W, representasi simpul K_2 adalah $r(W|a_1) \neq r(W|a_2)$.

Untuk kasus lain, ketika W_2^m dengan $m = 1$, graf W_2^1 isomprfis dengan K_3, dengan kata lain graf W_2^1 tidak memiliki simpul pusat maupun simpul tepi, oleh karena itu dimensi metrik lokal dari $amal_p\left(K_n(a_n), W_2^1(v_m)\right)$ tidak dapat cari.

Contoh 4.4

Dicari dimensi metrik lokal dari $amal_p\left(K_6(a_6),\ W_2^5(v_5)\right)$. Jika diketahui $dim_l(K_6) = 5$ dan $dim_l\left(W_2^5\right) = 5$, maka menurut teorema 4.4 dimensi metrik lokal dari $amal_p\left(K_6(a_6), W_2^5(v_5)\right)$ adalah

$$dim_l\left(amal_p\left(K_6(a_6), W_2^5(v_5)\right)\right) =$$
$$dim_l(K_n) + dim_l\left(W_2^5\right) - 2 = 5 + 5 - 2$$
$$= 8$$

Sekarang akan diuji kebenarannya apakah benar nilai dimensi metrik dari graf $amal_t\left(K_6(a_6), W_2^5(v_5)\right)$ bernilai demikian. Misal $W = \{a_1, a_2, a_3, a_4, u_1, u_2, u_3, u_4)$, maka representasinya menjadi seperti berikut

$a_1 = (0,1,1,1,,3,3,3,3)$ $u_1 = (3,3,3,3,0,2,2,2)$

$a_2 = (1,0,1,1,3,3,3,3)$ $u_2 = (3,3,3,3,2,0,2,2)$

$a_3 = (1,1,0,1,3,3,3,3)$ $u_3 = (3,3,3,3,2,2,0,2)$

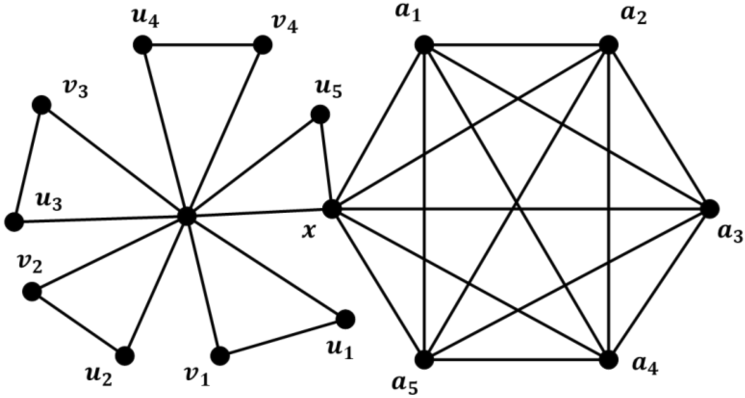
$a_4 = (1,1,1,0,3,3,3,3)$ $u_4 = (3,3,3,3,2,2,2,0)$

$a_5 = (1,1,1,1,3,3,3,3)$ $u_5 = (2,2,2,2,2,2,2,2)$

$v_1 = (3,3,3,3,1,2,2,2)$ $v_3 = (3,3,3,3,2,2,1,2)$

$v_2 = (3,3,3,3,2,1,2,2)$ $v_4 = (3,3,3,3,2,2,2,1)$

$$x = (1,1,1,1,2,2,2,2)$$



Gambar 4.16 $amal_t\left(K_6(a_6), W_2^5(v_5)\right)$

Dari representasi diatas terlihat bahwa tidak ada simpul yang memiliki representasi yang sama dengan simpul lain yang bertetangga, oleh karena itu, dimensi metrik dari graf $amal_t\left(K_6(a_6), W_2^5(v_5)\right)$ adalah delapan.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari Tugas Akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, simpulan yang dapat diambil dari hasil penelitian dan pembahasan adalah sebagai berikut:

1. Dimensi metrik lokal dari graf hasil amagamasi pusat dari graf lengkap K_n dan graf roda W_m dengan $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$ dan, $m > 5$, dan $m \in \mathbb{Z}$ adalah $dim_l\Big(amal_p\big(K_n(a_n), W_m(b)\big)\Big) = dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$.
2. Dimensi metrik lokal dari graf hasil amagamasi tepi dari graf lengkap K_n dan graf roda W_m dengan $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$ dan, $m > 5$, dan $m \in \mathbb{Z}$ adalah $dim_l\Big(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_m)\big)\Big) = dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$.
3. Dimensi metrik lokal dari graf hasil amalgamasi pusat dari graf lengkap K_n dan graf kincir W_2^m dengan ≥ 3 $n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, dan $m \in \mathbb{Z}$ adalah $dim_l\Big(amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)\Big) = dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 1$.
4. Dimensi metrik lokal dari graf hasil amalgamasi tepi dari graf lengkap K_n dan graf kincir W_2^m dengan ≥ 3 $n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, dan $m \in \mathbb{Z}$ adalah $dim_l\Big(amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)\Big) = dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2$.

5.2 Saran

Penelitian tugas akhir ini mengambil amalgamasi graf lengkap dengan graf roda dan graf kincir merupakan langkah awal untuk mendapatkan dimensi metrik lokal pada amalgamasi graf sebarang. Untuk penelitian selanjutnya dapat ditemukan dimensi metrik lokal dari amalgamasi graf kincir dengan graf roda, atau amalgamasi dari dua graf yang memiliki simpul pusat dan simpul tepi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ibrahim, N. (2013). *Pengantar Kombinatorika & Teori Graf*. Graf Ilmu, Yogyakarta.

[2] Okamoto, F. Phienzy, B. dan Zhang, P. (2010), "*The Local Metric Dimension of a Graph*". Matematica Bohemica, Vol. 135m No. 3, 239-255.

[3] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M., & Oellermann, O. (2000), "*Resolving in Graph and The Metric Dimension of a Graph*". Discrete Applied Mathematics (105), 99-113.

[4] Rimadhany, R., Darmaji. (2017). *Local Metric Dimension of Circulant graph* [Tesis]. Surabaya(ID): Intstitut Teknologi Sepuluh Nopember.

[5] Wulancar, D. W., Kusmayadi, T.A. (2018*). Dimensi Metrik Lokal Pada Graf Musical dan Graf Stacked Prism*. Journal of Mathematics and Mathematics Education Vol. 8, No. 1, 1-8.

[6] Knuth, D.E. (2008). *The Art of Computer Programming: Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions*, vol. 4. California, Addison-Wesley.

[7] Gallian, J. A. (2007). *Dynamic Survey DS6: Graph Labelling. Electronic Journal Combinatorics*, 3, 1-58.

[8] Gross, J., & Yellen, J. (2006). *Graph Theory and Its Aplications (second edition).* Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Graph, New York.

[9] Wilson, R. J. (1996). *Introduction To Graph Theory (Fourth Edition)*. Essex CM20 2JE, England

[10] Rahmawati, N., & Rahajeng, B. (2014). *Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir Dan Graf Persahabatan*. MATHunesa(Volume 3 No 3).

[11] Harris, John, M., Hirst, Jeffry, L., Mossinghoff, Michael, J.(2008). Combinatorics and Graph Theory (Second Edition). Springer Science Business Media, LLC.

[12] Harary, F. (1994).*Graph Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley.

[13] Irawan, C. (2010). *Dimensi Partisi Pada Graf Kincir* [Tugas Akhir]. Surabaya(ID): Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[14] Ardiyansah, R., & Darmaji. (2013). *Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf*. Jurnal Sains dan Seni POMITS Vol. 2, No. 1, 2.

[15] Permana, A. (2012). *Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu*. Jurnal Politeknik Pomits, I(1), 1-4.

[16] Ramirez, G. A. B. (2017). *On The Local Metric Dimension of Graphs* [Tesis]. Tarragona(ES): Universitat Rovira I Virgili.

[17] Cahyabudi, A. N, Kusmayadi, T. A. (2017). *On The Local Metric Dimension Of A Lollipop Graph, a Web Graph, And A Friendship Graph*. International Conference on Science and Applied Science 2017.

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama Seagel Levin, lahir di Jakarta pada tanggal 29 Juni 1997. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara, dari Bapak Nasrul dan Ibu Zulfiana Zulfan. Penulis berasal dari Kota DKI Jakarta, bertempat tinggal di Jl. Raya Kebon Jeruk RT/RW:001/013 Kelurahan Kebon Jeruk, Kecamatan Kebon Jeruk. Pendidikan formal yang pernah ditempuh yaitu SDN Kebon Jeruk 11 Pagi, SMP Negeri 111 Jakarta Barat, dan SMA Negeri 16 Kota Jakarta Barat. Kemudian penulis melanjutkan studi di Departemen Matematika ITS angkatan 2015 dengan NRP 06111540000113 dan selama kuliah penulis mengambil bidang analisis. Selama kuliah penulis aktif di UKM Merpati Putih ITS sebagai Ketua Divisi Diklat. Penulis juga pernah menjadi ketua pelaksana POMITS cabang olahraga pencak silat pada 2017. Penulis juga pernah mengikuti kejuaraan pencak silat tingkat nasional brawijaya terbuka dan meraih juara tiga. Dalam penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari kekurangan, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran mengenai penulisan Tugas Akhir ini yang dapat dikirimkan melalui e-mail ke *seagellevin@gmail.com.*