TUGAS AKHIR - SM141501

METODE CRANK-NICOLSON UNTUK MENGHITUNG NILAI STOCK LOAN DENGAN TANGGAL JATUH TEMPO TERBATAS DAN DIVIDEN YANG DIKEMBALIKAN KEPADA BORROWER

ARIFATUL MASRUROH
NRP 1212100027

Dosen Pembimbing:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

FINAL PROJECT - SM141501

CRANK-NICOLSON METHOD FOR STOCK LOAN VALUATION WITH FINITE MATURITY AND DIVIDEN DELIVERED TO THE BORROWER

ARIFATUL MASRUROH
NRP 1212100027

Supervisors:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

LEMBAR PENGESAHAN

METODE CRANK-NICOLSON UNTUK MENGHITUNG NILAI *STOCK LOAN* DENGAN TANGGAL JATUH TEMPO TERBATAS DAN DIVIDEN YANG DIKEMBALIKAN KEPADA *BORROWER*

CRANK-NICOLSON METHOD FOR STOCK LOAN VALUATION WITH FINITE MATURITY AND DIVIDEN DELIVERED TO THE BORROWER

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
ARIFATUL MASRUROH
NRP. 1212100027

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc	Endah Rokhmati M.P., Ph.D
NIP. 19640624 198803 1 001	NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN
JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2016

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

METODE CRANK-NICOLSON UNTUK MENGHITUNG NILAI *STOCK LOAN* DENGAN TANGGAL JATUH TEMPO TERBATAS DAN DIVIDEN YANG DIKEMBALIKAN KEPADA *BORROWER*

Nama Mahasiswa	:	Arifatul Masruroh
NRP	:	1212100027
Jurusan	:	Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	:	1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
		2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

Abstrak

Stock loan adalah alternatif yang menarik bagi para investor untuk mendapatkan pinjaman atau keuntungan. Mekanisme stock loan menyerupai mekanisme dari American call option sehingga stock loan dapat dianggap sebagai American option dengan strike price yang bergantung pada waktu. Persamaan differensial stock loan dibentuk berdasarkan persamaan Black-Scholes.

Pada Tugas Akhir ini, dilakukan perhitungan nilai stock loan dengan dividen yang dikembalikan kepada borrower. Persamaan differensial dari stock loan didiskritkan menggunakan metode Crank-Nicolson. Hasil yang didapat dari perhitungan menggunakan metode Crank-Nicolson selanjutnya dibandingkan dengan hasil dari perhitungan metode pohon binomial dari penelitian sebelumnya. Berdasarkan nilai stock loan yang diperoleh didapat kesimpulan bahwa semakin tinggi nilai dari harga saham, nilai stock loan semakin tinggi. Berdasarkan hasil perbandingan didapat bahwa nilai stock loan yang dihasilkan dari metode Crank-Nicolson dengan pembagian 10.000 grid mendekati nilai dari hasil metode pohon binomial dengan selisih saat T=1 adalah 0,001873-0,098127, saat T=3 adalah 0,09903-

0,19903, saat T=5 adalah 0,025-0,075.

Kata-kunci: *Stock Loan, American Call Option, Metode Crank-Nicolson, Model Black-Scholes*

CRANK-NICOLSON METHOD FOR STOCK LOAN VALUATION WITH FINITE MATURITY AND DIVIDEN DELIVERED TO THE BORROWER

Name	:	Arifatul Masruroh
NRP	:	1212100027
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors	:	1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
		2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

Abstract

Stock loan is an interesting alternative for investor to get loans or profit. The stock loan mechanism resembles that of American call option, so that a stock loan can be considered as an American style option with time-dependent strike price. The partial differential equation of stock loan can be formed by Black-Scholes formula.

In this final project, valuation of stock loan with dividen delivered to the borrower is applied. Discretization of stock loan differential equation is applied by using Crank-Nicolson method. Then, we compare the result between Crank-Nicolson method and binomial tree method. Based on stock loan value which is obtained, it is concluded that as long as the stock price increases, the stock loan value also increases. Based on comparison, the result of valuation by Crank-Nicolson method with 10.000 grids is similar to the result of binomial tree, the difference when T=1 is 0,001873-0,098127, T=3 is 0,09903-0,19903, and T=5 is 0,025-0,075.

Keywords: *Stock Loan, American Call Option, Crank-Nicolson Method, Black-Scholes Formula*

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

DAFTAR ISI

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

DAFTAR GAMBAR

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

DAFTAR TABEL

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

Daftar Simbol

S	:	Harga saham
S_τ	:	Harga Saham saat waktu t
S_0	:	Harga saham saat $t = 0$
S_f	:	Harga saham optimal
S_{max}	:	Harga saham maksimal
X	:	Harga saham non-dimensional
X_τ	:	Harga Saham non-dimensional saat waktu t
X_0	:	Harga saham non-dimensional saat $t = 0$
X_f	:	Harga saham non-dimensional optimal
X_{max}	:	Harga saham non-dimensional maksimal
T	:	*Maturity date*/tanggal jatuh tempo
r	:	*Interest rate*
σ	:	Volatilitas
Π	:	Nilai portofolio
$d\Pi$	:	Perubahan nilai portofolio
V	:	Harga *option*
I_t	:	Total dividen yang dikembalikan kepada *borrower*
$d\tau$	:	Perubahan waktu
dX	:	Perubahan harga saham
δ	:	Dividen
$\bar{H}$	:	Nilai *stock loan*
$\bar{H}_{i,j}$	:	Nilai *stock loan* pada titik i,j
K	:	*Strike price*
q	:	Nilai pinjaman
γ	:	Bunga pinjaman
N	:	Pembagian grid pada sumbu τ
M	:	Pembagian grid pada sumbu X
j	:	Notasi perubahan untuk sumbu x
i	:	Notasi perubahan untuk sumbu τ
ΔX	:	Perubahan harga saham dalam grid
$\Delta\tau$	:	Perubahan waktu saham dalam grid

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan serta sistematika penulisan Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Seiring perkembangan zaman yang semakin modern, kegiatan investasi pun semakin berkembang, bukan hanya semakin banyak orang yang berinvestasi atau semakin banyak uang yang diinvestasikan. Namun juga semakin banyaknya alternatif instrumen keuangan yang dapat diinvestasikan oleh para investor, salah satunya adalah *derivatives*. *Derivative* adalah sebuah kontrak bilateral atau perjanjian penukaran pembayaran yang nilainya diturukan atau berasal dari *underlying asset* seperti saham (*stock*), obligasi, komoditi, dll. Saham (*stock*) sendiri adalah surat berharga dalam bentuk piagam atau sertifikat yang memberikan pemegangnya bukti atas hak-hak dan kewajiban menyangkut andil kepemilikan suatu perusahaan. Selain untuk diperjualbelikan, para pelaku usaha yang membutuhkan modal untuk perusahaannya bisa mengajukan pinjaman kepada bank atau perusahaan yang lain dengan menjaminkan *stock* yang dimilikinya, kegiatan ini dikenal dengan istilah *stock loans*. *Stock loans* (pinjaman saham) adalah alternatif yang menarik bagi investor untuk meningkatkan liquiditas dari *stock* tanpa menjual *stock* itu sendiri. Pemberi pinjaman (*lender*) menawarkan pinjaman dengan *stock* sebagai jaminannya dan peminjam (*borrower*) memberikan jaminan berupa *stock* kepada *lender* tanpa kehilangan kepemilikan terhadap *stock* tersebut[7]. Namun, *lender* berhak mengambil alih jaminan jika *borrower* gagal untuk membayar pinjaman, *borrower* dapat mengambil *stock* yang dijaminkan setiap saat atau pada saat jatuh tempo dengan membayar pinjaman dan akumulasi bunga pada tingkat bunga yang telah ditentukan. Sebaliknya, jika harga saham turun dibawah akumulasi pinjaman, maka *borrower* dapat meninggalkan hutangnya (*walk-away*) dan hanya akan kehilangan biaya premi saja.

Mekanisme *stock loans* menyerupai mekanisme *American call option*. Pada setiap saat selama kontrak berlangsung, *borrower* bisa dianggap sebagai pembeli *option* (*holder*) pada *call option*, sedangkan *lender* yang berkewajiban mengembalikan saham kepada *borrower* bisa dianggap sebagai penjual *option* (*writer*). Hak *borrower* untuk mengakhiri kontrak dengan membayar pinjaman dan akumulasi bunga yang telah ditentukan sebelumnya dianggap sebagai hak *early exercise call option*, dan saat harga saham turun *borrower* dapat menggunakan haknya untuk *walk-away* dan menyerahkan jaminannya kepada *lender*, keadaan ini mirip dengan kondisi saat option yang tidak di exercise dan hanya akan kehilangan biaya premi saja. Oleh karena itu, *stock loans* dapat dianggap sebagai model *American call option* dengan *time-dependent strike price*[7].

Pada penelitian terdahulu oleh Lu dan Putri [7]telah didapat *exit price* yang optimal dan nilai *stock loans* dengan tiga model pembagian dividen yang berbeda menggunakan metode transformasi Laplace. Persamaan differensial parsial (PDE) dari *stock loans* dibentuk berdasarkan persamaan model Black-Scholes. Selanjutnya, dalam Tugas Akhir ini penulis akan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicolson yang merupakan rata-rata dari metode metode implisit dan eksplisit untuk mendapatkan nilai *stock loan* dengan tanggal jatuh tempo yang terbatas disertai adanya dividen yang dikembalikan kepada *borrower*. Selanjutnya hasil disimulasikan menggunakan MATLAB. Hasil dari perhitungan selanjutnya akan dibandingkan dengan hasil dari metode pohon binomial.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, disusun rumusan masalah yang akan dibahas dalam Tugas Akhir ini, yaitu:

1. Bagaimana valuasi dari nilai *stock loans* dengan tanggal jatuh tempo terbatas disertai dividen yang dikembalikan kepada *borrower* menggunakan metode Crank-Nicolson?

2. Bagaimana analisis hasil simulasi dari nilai *stock loans* dengan tanggal jatuh tempo terbatas disertai dividen yang dikembalikan kepada *borrower* menggunakan metode Crank-Nicolson?

3. Bagaimana perbandingan antara hasil perhitungan nilai *stock loans* dengan tanggal jatuh tempo terbatas disertai dividen yang dikembalikan kepada *borrower* menggunakan metode Crank-Nicolson dengan hasil perhitungan menggunakan metode pohon binomial?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini antara lain:

1. Hasil perhitungan metode pohon binomial berdasarkan referensi [16].

2. Tidak ada biaya pajak dan transaksi.

3. Simulasi menggunakan software MATLAB.

1.4 Tujuan

Tujuan yang akan dicapai dari penulisan Tugas Akhir ini antara lain:

1. Mendapatkan nilai *stock loans* dengan tanggal jatuh tempo terbatas disertai dividen yang dikembalikan kepada *borrower* menggunakan metode Crank-Nicolson.

2. Mendapatkan analisis hasil simulasi dari nilai *stock loans* dengan tanggal jatuh tempo terbatas disertai dividen yang dikembalikan kepada borrower menggunakan metode Crank-Nicolson.

3. Mengetahui perbandingan antara hasil perhitungan nilai *stock loans* dengan tanggal jatuh tempo terbatas disertai dividen yang dikembalikan kepada *borrower* menggunakan metode Crank-Nicolson dengan hasil perhitungan menggunakan metode pohon binomial.

1.5 Manfaat

Manfaat yang akan diperoleh dari Tugas Akhir ini antara lain:

1. Diperoleh suatu metode dalam mendapatkan nilai *stock loans* dengan tanggal jatuh tempo terbatas disertai dividen yang dikembalikan kepada *borrower* menggunakan metode Crank-Nicolson.

2. Diperoleh pengetahuan mengenai perbandingan antara hasil perhitungan nilai *stock loans* dengan tanggal jatuh tempo terbatas disertai dividen yang dikembalikan kepada borrower menggunakan metode Crank-Nicolson dengan hasil perhitungan menggunakan metode pohon binomial.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN
   Pada bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Pada Bab ini berisi tentang penelitian terdahulu, *option*, *stock loans*, model Black-Scholes dan metode Crank-Nicolson.

3. BAB III METODE PENELITIAN
   Pada bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur,analisis masalah yang mencakup penerapan dan perhitungan metode yang digunakan,serta perbandingan hasil dengan metode lain pada penelitian sebelumnya. Langkah terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan.

4. BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN
   Pada bab ini disajikan pendiskritan model Black-Scholes dengan dividen yang dikembalikan kepada *borrower* untuk menentukan nilai *stock loans* dan perbandingan hasil dengan metode pohon binomial.

5. BAB V PENUTUP
   Pada bab ini berisi mengenai kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai penelitian terdahulu dan teori-teori yang terkait dengan Tugas Akhir yaitu *option*, *stock loans*, persamaan differensial Black-Scholes, dan metode beda hingga Crank-Nicolson.

2.1 Penelitian Terdahulu

Metode pendekatan numerik yang sering digunakan untuk menghitung harga *American option* dapat dikelompokkan menjadi tiga yaitu metode Lattice (*Lattice method*), simulasi Monte Carlo (*Monte Carlo simulation*), dan metode beda hingga (*finite difference method*). Diantara ketiga metode tersebut metode beda hingga adalah metode yang paling populer dalam *financial engineering*[12]. Metode beda hingga adalah metode untuk mendapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial parsial, metode ini merupakan teknik yang sangat kuat dan fleksibel, oleh sebab itu metode ini banyak digunakan para peneliti pada penelitiannya [2]. Pengaplikasian metode beda hingga untuk menghitung harga American option yang pertama kali dapat ditemukan dalam paper hasil penelitian Brennan dan Schwartz[13]. Setelah itu banyak peneliti lain seperti Grasselli dan gomez yang menggunakan metode beda hingga dengan PSOR (*Projected Succesive Over Relaxation*) untuk valuasi *stock loans* dengan jatuh tempo terbatas pada pasar tak lengkap[11]. Sedangkan dalam kasus lain, Liyonita menggunakan salah satu jenis metode beda hingga yaitu metode Crank-Nicolson untuk menentukan harga European call option pada model

Heston[9].

Stock loans adalah alternatif yang menarik bagi investor untuk meningkatkan liquiditas dari *stock* tanpa menjual *stock* itu sendiri. Selain Brennan dan Schwartz[13], penelitian lain tentang *stock loans* telah dilakukan oleh Putri dan Lu [7], dalam penelitiannya Putri dan Lu melakukan evaluasi semi analitik dari *stock loans* standart dengan tanggal jatuh tempo yang terbatas (*finite maturity*) menggunakan metode transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsialnya. Putri dan Lu juga menyajikan rumusan *stock loans* dengan tiga model pembagian dividen yang berbeda, salah satunya dividen yang dikembalikan kepada *borrower*.

2.2 *Option*

Option adalah salah satu jenis instrumen investasi turunan dari suatu *underlying asset*. Istilah *option* sendiri adalah kontrak keuangan resmi yang memberi hak tetapi bukan kewajiban kepada pemegangnya (*holder*) untuk membeli atau menjual suatu aset pada harga yang telah ditentukan (*strike price*) dan pada atau hingga waktu yang telah ditentukan (*expiration/maturity date*) [1]. *Option* pertama kali diperdagangkan secara resmi melalui *Chicago Board Option Exchange* (CBOE) yang dibuka pada tanggal 26 April 1973 [6]. Dalam sistem perdagangannya, *option* digunakan untuk meminimalkan risiko dan sekaligus memaksimalkan keuntungan (*return*). *Option* yang lebih dikenal di pasar modal adalah *European option* dan *American option*. Pada dasarnya *European option* lebih mudah dianalisis, namun *American option* lebih menarik untuk diteliti bagi kalangan ilmuan, *American option* juga lebih sering diperdagangkan dari pada *European option*.

2.2.1 Tipe-tipe *Option*

Pada umumnya terdapat dua jenis *option* yang paling mendasar, antara lain[3]:

1. *Call option*
   Call option atau opsi beli adalah *option* yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk membeli suatu aset dalam jumlah tertentu, pada jangka waktu dan harga yang telah ditentukan sebelumnya.

2. *Put option*
   Put option atau opsi jual adalah *option* yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual suatu aset dalam jumlah tertentu, pada jangka waktu dan harga yang telah ditentukan sebelumnya.

Sedangkan menurut waktu eksekusinya (*exercise time*), *option* dibedakan menjadi:

1. *American option*
   Opsi tipe Amerika dapat dieksekusi setiap saat hingga *expiration/maturity date.*

2. *European option*
   Opsi tipe Eropa hanya dapat dieksekusi saat *expiration/maturity date* saja.

2.2.2 Istilah-istilah dalam *option*

Komponen komponen yang mendasari dalam penandatanganan kontrak *option* adalah[6] :

1. *Underlying Asset*
   *Underlying asset*atau yang disebut dengan asset yang mendasar, merupakan sekuritas sekuritas yang ada dalam perdagangan pasar *option.* Sekuritas-sekuritas tersebut harus diperdagangkan dalam pasar modal dan

dipilih oleh organisasi kliring sesuai dengan persyaratan tertentu.

2. Waktu Jatuh Tempo (*Maturity Date*)
   Option mempunyai jangka waktu hidup terbatas dan menjadi kadaluarsa pada tanggal jatuh tempo yang ditentukan oleh organisasi kliring.

3. *Strike Price*
   Strike price merupakan harga pembelian atau penjualan yang telah ditentukan mendasari jika *option* diexercise. Organisasi kliring menentukan *strike price* untuk semua *option* yang terdaftar dalam pasar *option.*

4. Premi
   Premi adalah harga yang dibayar untuk kontrak awalnya oleh pembeli *option* kepada penjual *option.*

5. *Intrinsic value*
   Intrinsic value adalah suatu nilai nyata dari premi sebuah *option* yang merupakan selisih antara *strike price* dan harga *underlying asset.*

6. *Time value*
   Time value adalah jumlah dimana harga *option* melebihi nilai intrinsiknya.

2.3 *American Call Option*

American Option adalah jenis *option* yang dapat dieksekusi setiap saat hingga *maturity date. American call option* adalah opsi tipe Amerika yang memberikan hak bukan kewajiban kepada pemegangnya untuk membeli suatu aset dalam jumlah tertentu dan pada tiap saat hingga jatuh tempo.

2.3.1 Faktor-Faktor yang menentukan nilai dari *call option*

Faktor-Faktor yang menentukan nilai dari *call option* dalah sebagai berikut[6]:

a. Harga *Underlying Asset*
   Harga aset yang mendasarinya / *underlying asset* dijadikan patokan dalam menentukan harga *option*. Harga suatu *call option* akan semakin tinggi apabila harga *underlying asset*-nya juga semakin tinggi. Hal ini menunjukkan bahwa harga *underlying asset* berbanding lurus dengan harga *call option*.

b. *Moneyness*
   Moneyness merupakan perbedaan antara harga *underlying asset* saat ini dengan *strike price*. Suatu *call option* akan memiliki nilai apabila berada pada kondisi *in the money*. Sehingga harga *call option* tersebut semakin menurun apabila *strike price*-nya tinggi.

c. Volatilitas
   Volatilitas atas *underlying asset* adalah ukuran tingkat ketidakpastian pergerakan *underlying asset* tersebut dimasa datang. Jika volatilitas semakin meningkat maka akan semakin meningkat pula peluang *underlying asset* mengalami peningkatan atau malah penurunan. Semakin besar volatilitas (semakin bergerak naik turun) semakin tinggi nilai *call option*.

d. Jangka Waktu Jatuh Tempo
   Jangka waktu jatuh tempo mempengaruhi harga *option*. Semakin panjang *time to expiry*, maka semakin tinggi harga *call option*.

e. Tingkat Suku Bunga Bebas Risiko / *Risk Free Interest Rate*

Tingkat suku bunga bebas risiko / *Risk Free Interest Rate* juga mempengaruhi harga suatu *option.* Jika *interest rate* dalam perekonomian meningkat, maka akan mempengaruhi harapan kenaikan harga suatu *underlying asset.* Harga *call option* akan meningkat dengan adanya peningkatan *risk free interest rate.*

f. Dividen
Jika aset dasar *option* adalah saham, dividen dapat mempengaruhi nilai *option.* Dividen akan menurunkan harga *American call option.*

2.3.2 prinsip-prinsip dasar dari harga *call option*

Beberapa aturan dasar yang harus dipahami dalam penentuan harga *call option* adalah sebagai berikut:

a. Nilai minimum *call option*
Nilai minimum dari *call option* adalah nol karena *call option* memiliki kewajiban terbatas dimana pemegang *call option* hanya akan mengexercise opsinya ketika posisinya menguntungkan, jika tidak maka mereka akan membiarkan *option* tersebut kadaluarsa. oleh karena itu nilai dari *call option* tidak pernah negatif dan nilai minimumnya adalah nol.

$$V(S,t) \geqslant 0$$

b. Nilai maksimum dari *call option*
Nilai maksimum dari *call option* adalah ketika K bernilai nol, oleh karena itu nilai maksimumnya adalah S_0.

$$V(S,t) \leqslant S$$

c. Nilai *call option* saat jatuh tempo
Pada saat jatuh tempo, nilai dari sebuah *call option* adalah sama dengan nilai intrinsiknya.

$$V(S_T, T) = max(0, S_T - K)$$

2.4 Persamaan Diferensial Black-Scholes

Model *Black-Scholes* adalah model yang digunakan dalam menentukan harga *option* dan menyelesaikan persamaan *option*. Model ini pertama kali dikembangkan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973. Langkah-langkah pembentukan model Black-Scholes adalah sebagai berikut [3]:

Perubahan harga saham (S) saat t diasumsikan mengikuti gerak Geometrik Brownian, yaitu:

$$dS = rSdt + \sigma SdW_t. \tag{2.1}$$

Nilai portofolio (Π) didefinisikan dengan $\Pi = V - \Delta S$ dan setelah satu langkah perubahan portofolio maka nilai portofolio akan menjadi persamaan berikut:

$$d\Pi = dV - \Delta dS. \tag{2.2}$$

akan dicari $dV(S,t)$ yang merupakan perubahan dari $V(S,t)$ dengan mengaplikasikan Deret Taylor orde dua sehingga didapat persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} dV(S,t) &= \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}dSdt \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}dt^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dari definisi *quadratic variation* untuk gerak brownian didapat[17]:

$$dW_t^2 = dt \tag{2.4}$$

$$dW_t dt = 0 \tag{2.5}$$

$$dt^2 = 0. \tag{2.6}$$

dengan mensubtitusikan Persamaan 2.4 dan Persamaan 2.5 maka Persamaan 2.3 menjadi:

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial V}{\partial t} dt. \tag{2.7}$$

Substitusikan Persamaan (2.1) kedalam Persamaan (2.7) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} dV(S,t) &= \frac{\partial V}{\partial S}(rSdt + \sigma S dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(rSdt + \sigma S dW_t)^2 + \\ &\quad \frac{\partial V}{\partial t} dt \\ &= rSdt\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(r^2 S^2 dt^2 + \\ &\quad \sigma^2 S^2 dW_t{}^2 + 2rSdt\sigma S dW_t) + \frac{\partial V}{\partial t} dt \\ &= rSdt\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} r^2 S^2 dt^2 + \\ &\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dW_t{}^2 + rSdt\sigma S dW_t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \\ &\quad \frac{\partial V}{\partial t} dt. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dengan mensubsitusikan Persamaan (2.4) hingga (2.5) kedalam Persamaan (2.8) didapat Lemma Ito sebagai berikut:

$$\begin{aligned} dV(S,t) &= rSdt\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + 0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + 0 + \\ &\quad \frac{\partial V}{\partial t} dt \\ &= \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + \left(rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Lemma Ito pada Persamaan (2.9) digunakan untuk mengubah persamaan portofolio yang merupakan persamaan differensial stokastik menjadi persamaan differensial parsial berikut:

$$d\Pi = \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + \left(rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt - \Delta dS.$$

Untuk membuat portofolio investor minimal resikonya, maka faktor acak dari nilai portofolio tersebut harus ditiadakan dengan memilih $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ sehingga:

$$\begin{aligned}
d\Pi &= \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + \left(rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt - \\
&\quad \frac{\partial V}{\partial S}(rSdt + \sigma S dW_t) \\
&= \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + rS\frac{\partial V}{\partial S}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial V}{\partial t}dt - \\
&\quad rS\frac{\partial V}{\partial S}dt - \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dW_t \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial V}{\partial t}dt. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Di lain pihak, jika investor menginvestasikan dana di bank sebesar Π selama selang waktu dt dengan *risk-free interest rate* r maka investor akan mendapat return sebesar

$$d\Pi = r\Pi dt. \qquad (2.11)$$

Dengan menggunakan prinsip *no-arbitrage* dimana investor tidak ingin rugi dan mengharapkan pertumbuhan portofolio mereka tetap mendapat keuntungan tanpa melakukan apapun maka haruslah Persamaan (2.10) sama dengan Persamaan (2.11) sehingga:

$$
\begin{aligned}
d\Pi_{market} &= d\Pi_{bank} \\
d\Pi &= r\Pi dt \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt &= r(V - \Delta S)dt \\
\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt &= \left(rV - rS\frac{\partial V}{\partial S}\right) dt \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} &= 0 \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV &= 0.
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh persamaan Black-Scholes tanpa adanya dividen adalah sebagi berikut:

$$
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \qquad (2.12)
$$

2.5 *Stock Loan*

Stock loans adalah kegiatan pinjam meminjam antara *borrower*(peminjam) dan *lender*(pihak yang memiliki uang) dengan *stock* sebagai jaminannya. *Stock loans* merupakan alternatif yang biasa digunakan para pelaku dunia investasi untuk mendapatkan pinjaman atau keuntungan. Mekanisme dari *stock loan* menyerupai mekanisme *American call option.* Karena kemiripan mekanisme *stock loan* dan *American call option*, *stock loan* dapat dianggap sebagai *American option* dengan *strike price* yang bergantung pada waktu[7]. Jika dalam *American call option* dikenal istilah *holder* yakni orang yang membeli saham dan *writer* yakni orang yang menjual saham, maka di *stock loan* ada pihak yang mempunyai saham (*borrower*) dan pihak yang mempunyai uang (*lender*).

Borrower mengajukan pinjaman kepada *lender* (perusahaan pribadi atau bank) dengan menjaminkan saham (*stock*). *Borrower* tidak kehilangan hak kepemilikan dari *stock* tersebut, *lender* hanya berhak menyimpan *stock* yang dijaminkan saja. Namun, jika *borrower* gagal untuk melunasi pinjaman sampai batas waktu yang ditentukan maka *stock* yang dijaminkan akan diambil alih oleh *lender*. Pada setiap saat selama kontrak *stock loan*, jika harga saham naik maka *borrower* dapat membayar kembali pinjaman ditambah bunga untuk keluar dari kontrak. Jika harga saham turun, *borrower* dapat meninggalkan kewajibannya untuk membayar pinjaman (*walk away*) dan hanya kehilangan biaya premi saja[7].

Salah satu model pembagian dividen lain dari *stock* yang akan digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah model dividen yang dikembalikan kepada *borrower* [7]. Dividen yang dikembalikan kepada *borrower* disini bersifat kontinu selama interval waktu du. *Borrower* dibayar sejumlah $\delta S_0 e^{r(t-u)}$ selama batas waktu $0 < u < t < T$ sehingga *borrower* akan menerima pengembalian dalam jumlah total

$$I_t = \int_{u=0}^{u=t} \delta S_0 . e^{r(t-u)} du. \tag{2.13}$$

2.6 Metode Beda Hingga

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan diferensial yang memuat satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas. Salah satu cara untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik adalah dengan menggunakan metode beda hingga. Metode ini menggunakan pendekatan ekspansi Taylor di titik acuan (x).

Suatu fungsi dari sauatu variabel bebas $f(x)$ didifferensialkan n kali didalam interval $[x_0 - h, x_0 + h]$ dimana h cukup kecil, dapat diuraikan dalam bentuk deret pangkat menurut Deret Taylor sebagai berikut[10]:

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+...+\\
&\quad \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+O(h^n). \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Sedangkan pada titik (x_0-h) diperoleh bentuk deret Taylor sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(x_0-h) &= f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2-...+\\
&\quad \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+O(h^n). \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Pendekatan untuk turunan pertama dilakukan dengan memotong suku-suku berorde lebih dari satu. Hal ini disebabkan untuk h yang cukup kecil, h^2 jauh kecil sehingga dapat diabaikan. Pendekatan turunan pertama dari Persamaan (2.14) adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)h+O(h^2)\\
f'(x_0) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-O(h^2)
\end{aligned}
$$

atau

$$
f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \qquad (2.16)
$$

Persamaan (2.16) dikenal sebagai pendekatan beda maju (*forward difference*), sedangkan Persamaan (2.17) dibawah ini dikenal sebagai pendekatan beda mundur (*backward difference*).

$$
\begin{aligned}
f(x_0-h) &= f(x_0)-f'(x_0)h+O(h^2)\\
f'(x_0) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+O(h^2)
\end{aligned}
$$

atau

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}. \tag{2.17}$$

Dengan mengurangkan Persamaan (2.15) ke Persamaan (2.16) diperoleh pendekatan turunan pertama yang lain yaitu pendekatan beda pusat atau beda tengah (center difference) pada Persamaan (2.18) berikut:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \tag{2.18}$$

Karena turunan kedua ditinjau dari deret Taylor hingga suku berorde dua, maka pemotongan dilakukan mulai suku-suku berorde tiga.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + O(h^3). \tag{2.19}$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - O(h^3). \tag{2.20}$$

Dengan menjumlahkan Persamaan (2.19) dan Persamaan (2.20) diperoleh pendekatan turunan kedua pada Persamaan (2.21) berikut:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}. \tag{2.21}$$

Nilai pendekatan untuk turunan ketiga, keempat dan seterusnya dapat dilakukan dengan cara yang sama.

Apabila sumbu x dibagi menjadi beberapa bagian interval Δx yang panjangnya sama, maka absis titik i dapat ditulis dalam bentuk $x_i = i(\Delta x)$ dengan $i = 1, 2, 3, ...$ sehingga pendekatan turunan pertama dan kedua di titik i menjadi:

a. Pendekatan beda maju

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}.$$

b. Pendekatan beda mundur

$$f'(x_i) \approx \frac{f_i - f_{i+1}}{\Delta x}.$$

c. Pendekatan beda pusat/tengah

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}.$$

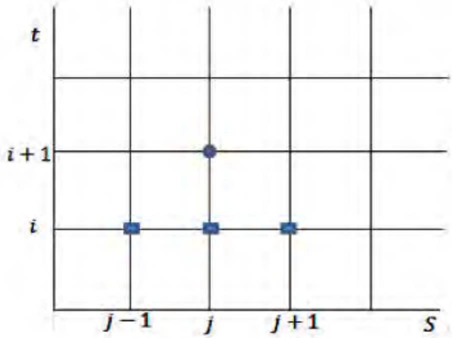
d. Pendekatan turunan kedua

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i - f_i}{(\Delta x)^2}.$$

2.6.1 Metode Beda Hingga Eksplisit

Pendekatan Beda hingga eksplisit digunakan untuk mencari penyelesaian fungsi $H(S,t)$ menggunakan pendekatan beda maju dan beda tengah pada titik interiornya. Titik i adalah indeks subskip untuk dimensi waktu sedangkan titik j adalah indeks subskrip untuk dimensi harga, seperti terlihat pada gambar berikut: Pendekatan turuan parsial pertama beda maju digunakan untuk mendapatkan $\frac{\partial H}{\partial t}$ dan beda pusat untuk mendapatkan $\frac{\partial H}{\partial S}$, sedangkan pendekatan turunan parsial kedua digunakan untuk mendapatkan $\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t} &\approx \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{\Delta t} \\
\frac{\partial H}{\partial S} &\approx \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2\Delta S} \\
\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} &\approx \frac{H_{i,j+1} - 2H_{i,j} + H_{i,j-1}}{(\Delta S)^2}
\end{aligned}$$

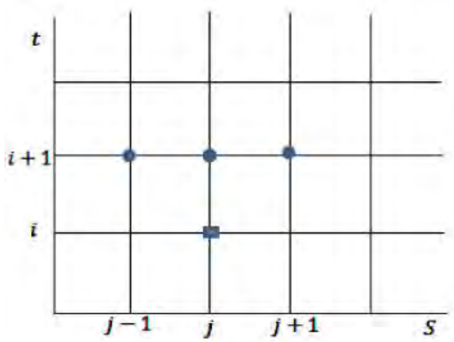


Gambar 2.1: Skema Eksplisit

2.6.2 Metode Beda Hingga Implisit

Pendekatan Beda hingga implisit digunakan untuk mencari penyelesaian fungsi $H(S,t)$ menggunakan pendekatan beda maju dan beda tengah pada titik interiornya. Indeks i adalah indeks subskip untuk dimensi waktu sedangkan Indeks j adalah indeks subskrip untuk dimensi harga. Titik di waktu ke i yang nilainya diketahui digunakan untuk mencari titik-titik waktu di waktu ke $i+1$ yang nilainya tidak diketahui seperti terlihat pada gambar berikut:

Pendekatan turuan parsial pertama beda mundur digunakan untuk mendapatkan $\dfrac{\partial H}{\partial t}$ dan beda pusat untuk mendapatkan $\dfrac{\partial H}{\partial S}$, sedangkan pendekatan turunan parsial



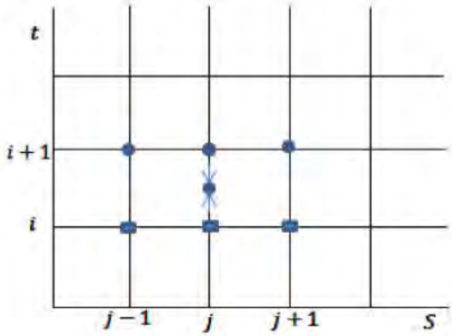
Gambar 2.2: Skema Implisit

kedua digunakan untuk mendapatkan $\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t} &\approx \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{\Delta t} \\
\frac{\partial H}{\partial S} &\approx \frac{H_{i+1,j+1} - H_{i+1,j-1}}{2\Delta S} \\
\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} &\approx \frac{H_{i+1,j+1} - 2H_{i+1,j} + H_{i+1,j-1}}{(\Delta S)^2}
\end{aligned}$$

2.6.3 Metode Beda Hingga Crank-Nicolson

Metode Crank-Nicolson merupakan pengembangan dari metode eksplisit dan metode implisit. Pada metode ini, pendekatan solusi $H(S,t)$ dihitung melalui titik (i,j) dan titik $(i+1,j)$, artinya pendekatan suku derivatif harga pada waktu ke $i+1$ merupakan rata-rata derifatif pada waktu ke i dan $i+1$ atau dengan kata lain metode Crank-Nicolson merupakan rata-rata dari metode eksplisit dan metode implisit seperti gambar berikut:



Gambar 2.3: Skema Crank-Nicolson

$$H_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{H_{i+1,j} + H_{i,j}}{2} \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{\Delta t} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial H}{\partial S} = \frac{1}{4\Delta S}(H_{i,j+1} - H_{i,j-1} + H_{i+1,j+1} - H_{i+1,j-1}) \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} = \frac{1}{2(\Delta S)^2}(H_{i,j+1} - 2H_{i,j} + H_{i,j-1} + H_{i+1,j+1} - 2H_{i+1,j} + H_{i+1,j-1}) \tag{2.25}$$

2.7 *Projected Succesive Overrelaxation (SOR)*

Kesulitan utama dalam penentuan harga *American option* adalah kondisi batas yang memungkinkan terjadinya *early exercise.* Untuk mengatasi kesulitan itu dapat dipilih metode iteratif untuk menyelesaikan sistem linear daripada metode langsung berdasarkan faktorisasi LU. Salah satu metode iteratif yang dapat digunakan adalah metode *Projected Succesive Overrelaxation (SOR)*, metode SOR merupakan variasi dari metode Gauss-Seidel untuk penyelesaian persamaan sistem linear.

Terdapat persamaan sistem linear sebagai berikut[15]:

$$Ax = b$$

metode SOR adalah teknik iteratif yang menyelesaikan sisi kiri dari persamaan x dan menggunakan nilai iterasi sebelumnya dari x pada sisi kanannya. Skema iteratif dimulai dari inisialisasi titik $x^{(0)}$:

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \Sigma_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \Sigma_{j=1}^{N} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ i &= 1, 2, ..., N \end{aligned}$$

k adalah iterasi dan ω adalah parameter overrelaxation, hingga kriteria konvergensi terpenuhi sehingga

$$||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| < \epsilon.$$

dengan ϵ adalah parameter toleransi.

Untuk perhitungan menggunakan metode Crank-Nicolson untuk menentukan nilai *stock loan* dapat mengaplikasikan metode SOR dengan merubah kondisi batas dan inputan sesuai dengan persamaan stock loan dengan hasil pendiskritan menggunakan metode Crank-Nicolson. Sistem yang diselesaikan adalah sebagai berikut:

$$M_1 H_i = r_{i+1} \tag{2.26}$$

dengan sisi kanan adalah sebagai berikut:

$$r_i = M_2 H_{i+1} + \alpha_1 \begin{bmatrix} H_{i,0} + H_{i+1,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan mengenai langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas akhir. Dengan mengacu pada tujuan yang ada, mrtode penelitian yang diuraikan akan mempermudah atau memperjelas proses pengerjaan. Metode penelitian ini terdiri dari tiga tahap yaitu studi literatur, analisis masalah dan penarikan kesimpulan.

3.1 Studi Literatur

Pada langkah ini dilakukan pengumpulan dan penguraian teori-teori pendukung yang menunjang, yaitu mengenai *option*,*stock loan*, persamaan differensial Black-Scholes, dan metode Crank-Nicolson.

3.2 Analisis Masalah

Pada langkah ini dilakuakan analisis masalah yaitu penerapan metode yang digunakan dan perhitungan dengan parameter-parameter yang diketahui. Analisis permasalahan dalam penelitian ini meliputi:

1. Pembentukan persamaan differensial *Black-Scholes* untuk menghitung nilai *Stock Loan* dengan dividen yang dikembalikan kepada *borrower*.

2. Transformasi model persamaan dimensional menjadi suatu sistem non-dimensional.

3. Pendiskritan persamaan differensial dengan *dividen* yang dikembalikan kepada *borrower* menggunakan metode Crank-Nicolson.

4. Pemilihan parameter yang digunakan untuk menghitung nilai *stock loan* yang meliputi:

   a. Suku bunga atau *interest rate*. Suku bunga (r) yang digunakan adalah konstan dan nilainya sebesar 0.06.
   b. *Dividen* (δ) sebesar 0.03.
   c. Nilai volatilitas dari *underlaying asset* (σ) sebesar 0.4.
   d. Nilai pinjaman (q) sebesar 0.7.
   e. Bunga pinjaman (γ) sebesar 0.1.

5. Perhitungan nilai *stock loan* menggunakan hasil diskritisasi dari metode Crank-Nicolson dengan memasukkan parameter-parameter yang diketahui serta dengan memperhatikan syarat awal dan syarat batas dari *stock loan* untuk membentuk matriks tridiagonal yang merupakan matriks penyelesaian dari metode Crank-Nicolson.

6. Simulasi hasil diskritisasi dari metode Crank-Nicolson dengan metode iteratif *Projected Succesive Overrelaxation (PSOR)* dan *software* yang digunakan adalah Matlab.

7. Perbandingan hasil antara perhitungan menggunakan metode Crank-Nicolson dengan perhitungan menggunakan metode pohon binomial pada penelitian sebelumnya.

3.3 Penarikan Kesimpulan

Langkah terakhir dalam penelitian ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada langkah sebelumnya. Penarikan kesimpulan ini diperoleh dengan membandingkan hasil perhitungan metode Crank-Nicolson dan metode pohon binomial untuk menghitung nilai *stock loan* dengan *dividen* yang dikembalikan kepada *borrower*.

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dilakukan analisis hasil dan pembahasan mengenai langkah-langkah dalam perhitungan nilai *stock loan* dengan dividen yang dikembalikan kepada *borrower* pada model Black-Scholes menggunakan metode beda hingga Crank-Nicolson. Untuk menghitung nilai *stock loan* dapat digunakan model Black-Scholes pada *American call option* karena persamaan mekanisme antara keduanya. Penentuan nilai *stock loan* dapat dilakukan dengan menggunakan penyelesaian numerik yaitu metode beda hingga Crank-Nicolson yang merupakan pengembangan dari metode eksplisit dan implisit.

4.1 Pembentukan Persamaan Differensial Black-Scholes dengan Dividen yang dikembalikan kepada *Borrower*

Persamaan Black-Scholes yang digunakan untuk mencari nilai stock loan dengan dividen yang dikembalikan kepada *borrower* adalah persamaan Black-Scholes biasa (2.12) yang sudah dimodifikasi dengan adanya dividen yang dikembalikan kepada borrower. Pembentukan persamaan Black-Scholes dengan adanya dividen yang dikembalikan kepada *borrower* adalah sebagai berikut:

1. Dividen yang dikembalikan kepada *borrower* disini bersifat kontinu selama interval waktu du. *Borrower* dibayar sejumlah $\delta S_0 e^{r(t-u)}$ selama batas waktu $0 < u < t < T$ sehingga *borrower* akan menerima pengembalian

dalam jumlah total

$$I_t = \int_{u=0}^{u=t} \delta S_0 e^{r(t-u)} du \tag{4.1}$$

sehingga turunan pertama Persamaan (4.1) terhadap t,I dan S adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= \delta S(t) \\ \frac{\partial I}{\partial S} &= 0 \\ \frac{\partial I}{\partial I} &= 1. \end{aligned}$$

2. Nilai *stock loan* dapat dimisalkan sebagai $V(S, I_t, t)$ sedangkan $H(S,t) = V(S,I,t) - I$ adalah nilai *stock loan* diluar total dividen , maka $V(S,I,t) = H(S,t) + I$. Sehingga turunan pertama V terhadap t,I, S dan turunan kedua V terhadap S adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \delta S(t) && (4.2) \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial H}{\partial S} + \frac{\partial I}{\partial S} \\ &= \frac{\partial H}{\partial S} && (4.3) \\ \frac{\partial V}{\partial I} &= \frac{\partial H}{\partial I} + \frac{\partial I}{\partial I} \\ &= 1 && (4.4) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial I^2} &= 0. && (4.5) \end{aligned}$$

3. $dV(S,I,t)$ merupakan perubahan dari $V(S,I,t)$ didapat dengan menggunakan pendekatan deret Taylor dan pengaplikasian lemma Ito, sehingga didapat persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} dV(S,I,t) &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial I}dI + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \\ & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial I}dI^2. \qquad (4.6) \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan Persamaan (4.2) hingga Persamaan (4.5) kedalam Persamaan (4.6), sehingga didapat persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} dV(S,I,t) &= \frac{\partial H}{\partial t}dt + \delta S(t)dt + dI + \frac{\partial H}{\partial S}dS + \\ & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}dS^2 + 0. \qquad (4.7) \end{aligned}$$

Perubahan harga saham (S) saat t diasumsikan mengikuti gerak Geometric Brownian, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= (r-\delta)dt + \sigma dW(t) \qquad (4.8) \\ dS &= (r-\delta)Sdt + \sigma S dW(t) \qquad (4.9) \\ (dS)^2 &= \sigma^2 S^2 dt \qquad (4.10) \end{aligned}$$

karena $V(S,I_t,t) - I_t$ tidak bergantung pada I_t maka I_t dapat dianggap nol selama itu tidak berpengaruh pada $V(S,I,t) - I = H(S,t)$. Sehingga $I = 0$ dan $dI = 0$. Substitusikan dS dan dS^2 kedalam Persamaan (4.7) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} dV(S,I,t) &= \frac{\partial H}{\partial t}dt + \delta S(t)dt + \frac{\partial H}{\partial S}((r-\delta)dt + \\ &\quad \sigma S dW(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}dt + \delta S(t)dt + (r-\delta)\frac{\partial H}{\partial S}dt + \\ &\quad \sigma S\frac{\partial H}{\partial S}dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt. \quad (4.11) \end{aligned}$$

4. Nilai portofolio (Π) adalah $\Pi = V - \Delta S$, dan setelah satu langkah perbedaan portofolio dengan dibayarkannya dividen adalah:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \Delta dS - \delta S\Delta dt \\ &= dV - \Delta(r-\delta)Sdt + \sigma S dW(t) - \Delta\delta S dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

untuk menghilangkan faktor random dapat dimisalkan $\Delta = \frac{\partial H}{\partial S}$ sehingga

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial H}{\partial t}dt + \delta S(t)dt + (r-\delta)S\frac{\partial H}{\partial S}dt + \sigma S\frac{\partial H}{\partial S}dW(t) + \\ &\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt - (r-\delta)S\frac{\partial H}{\partial S}dt - \delta S\frac{\partial H}{\partial S}dt \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}dt + \delta S(t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt - \delta S\frac{\partial H}{\partial S}dt. \quad (4.13) \end{aligned}$$

5. Dengan *riskless netrality* nilai portofolio seharusnya sama dengan nilai dari tabungan di bank, seperti ditunjukkan persamaan berikut:

$$d\Pi_{market} = d\Pi_{bank} \quad (4.14)$$

dengan,

$$\begin{aligned} d\Pi_{bank} &= r\Pi dt \\ &= r(V - \Delta S)dt \\ &= r(H + I - \frac{\partial H}{\partial S}Sdt \\ &= rHdt - rS\frac{\partial H}{\partial S}dt + rIdt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Pi_{market} &= \frac{\partial H}{\partial t}dt + \delta Sdt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt \\ &\quad -\delta S\frac{\partial H}{\partial S}dt \end{aligned}$$

sehingga Persamaan (4.14) menjadi

$$\frac{\partial H}{\partial t} + (r-\delta)S\frac{\partial H}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} - rH + \delta S = 0 \quad (4.15)$$

Sehingga persamaan differensial parsial dari *Stock loan* dengan dividen yang dikembalikan kepada *borrower* beserta syarat batasnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + (r-\delta)S\frac{\partial H}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} - rH + \delta S = 0 \\ H(S,T) = max(S - Ke^{\gamma t}, 0) \\ H(0,t) = 0. \\ H(S_f,t) = S_f - Ke^{\gamma t} \\ \frac{\partial H}{\partial S}(S_f,t) = 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

4.2 Transformasi Sistem Persamaan Differensial Parsial Menjadi Bentuk non-Dimensional

Persamaan differensial Parsial (4.16) harus dirubah menjadi persamaan differensial yang lebih sederhana dengan cara mentrasformasi system dimensional menjadi non-dimensional, tujuannya agar model mudah didiskritkan menggunakan metode Crank-Nicolson dengan mengaplikasikan perubahan variabel sebagai berikut :

$$\begin{aligned} S &= Xqe^{\gamma t} && (4.17)\\ t &= T - \frac{2\tau}{\sigma^2} && (4.18)\\ H(S,t) &= \bar{H}(X,\tau)qe^{\gamma t}. && (4.19) \end{aligned}$$

Berikut adalah turunan pertama dari Persamaan (4.19) terhadap t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(S,t)}{\partial t} &= \frac{\partial(\bar{H}(X,\tau)qe^{\gamma t})}{\partial t}\\ &= qe^{\gamma t}\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial t} + \frac{\partial(qe^{\gamma t})}{\partial t}(\bar{H}(X,\tau))\\ &= qe^{\gamma t}\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial t} + \gamma qe^{\gamma t}(\bar{H}(X,\tau))\\ &= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)\\ &\quad +\gamma qe^{\gamma t}(\bar{H}(X,\tau))\\ &= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S}{qe^{\gamma t}}\right) + \frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial \tau}\right.\\ &\quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right)\right) + \gamma qe^{\gamma t}(\bar{H}(X,\tau)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Se^{-\gamma t}}{q}\right)+\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial \tau}\right.\\
&\quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma^2 T}{2}-\frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right)+\gamma qe^{\gamma t}(\bar{H}(X,\tau))\\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial X}\left(\frac{-\gamma S}{qe^{\gamma t}}\right)+\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial \tau}\left(\frac{-\sigma^2}{2}\right)\right)\\
&\quad +\gamma qe^{\gamma t}(\bar{H}(X,\tau))\\
&= -\gamma S\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial X}-qe^{\gamma t}\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial \tau}\\
&\quad +\gamma qe^{\gamma t}(\bar{H}(X,\tau)). \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Berikut adalah turunan pertama dari Persamaan (4.19) terhadap S:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(S,t)}{\partial S} &= \frac{\partial(\bar{H}(X,\tau)qe^{\gamma t}}{\partial S}\\
&= qe^{\gamma t}\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial S}+\bar{H}(X,\tau)\frac{\partial qe^{\gamma t}}{\partial S}\\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S}+\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S}\right)+0\\
&= qe^{\gamma t}(\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{S}{qe^{\gamma t}}\right)+\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial \tau}\\
&\quad \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right))\\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial X}\frac{1}{qe^{\gamma t}}+\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial \tau}0\right)\\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(\bar{H}(X,\tau))}{\partial X}\frac{1}{qe^{\gamma t}}\right)\\
&= \frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial X}. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Berikut adalah turunan kedua dari Persamaan (4.19) terhadap S:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial X}\right)\frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial X}\right)\frac{\partial \tau}{\partial S} \\
&= \frac{\partial^2 \bar{H}(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{S}{qe^{\gamma t}}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial X}\right) \\
&\quad \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \bar{H}(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{1}{qe^{\gamma t}} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \bar{H}(X,\tau)}{\partial X}\right)0 \\
&= \frac{\partial^2 \bar{H}(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{1}{qe^{\gamma t}}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.17) sampai Persamaan(4.22) ke Persamaan (4.16) sehingga didapat persamaan differensial parsial *stock loan* yang lebih sederhana dengan kondisi awal dan kondisi batas sebagai berikut:

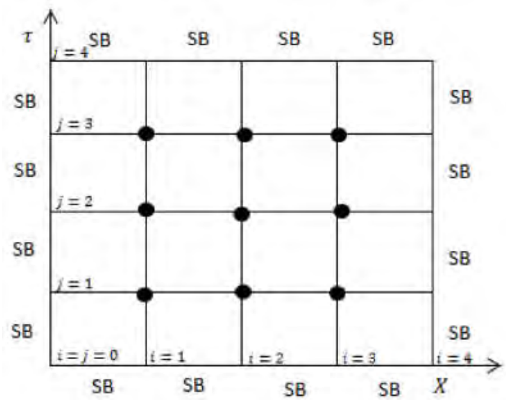
$$\begin{cases}
-\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \tau} + (\alpha-\beta)X\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial X} + X^2\dfrac{\partial^2 H}{\partial X^2} - \alpha\bar{H} + \beta X = 0 \\
\bar{H}(0,\tau) = 0 \\
\bar{H}(X,0) = max(X-1,0) \\
\bar{H}(X(\tau),\tau) = X(\tau) - 1 \\
\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial X}(X(\tau),t) = 1
\end{cases} \tag{4.23}$$

dimana $\alpha = \dfrac{2(r-\gamma)}{\sigma^2}$ dan $\beta = \dfrac{2\delta}{\sigma^2}$.

4.3 Pendiskritan Formula untuk *Stock Loan*

Persamaan differensial dimensional Black-Scholes untuk *stock loan* dengan dividen yang dikembalikan kepada *borrower* dinyatakan dalam Persamaan (4.23).

Persamaan Black-Scoles dapat dinyatakan dengan pembagian N grid dengan panjang interval $\Delta\tau = \dfrac{T}{N}$. Dengan T merupakan total waktu dari $N+1$ grid. Total waktu dapat ditulis menjadi $0, \Delta\tau, 2\Delta\tau, ..., T$. X merupakan harga tertinggi dari *option* ketika diexercise. X_{max} didefinisikan dengan $\Delta x = \dfrac{X_{max}}{M}$, kemudian dimasukkan kedalam grid $M+1$ sehingga menjadi $0, \Delta x, 2\Delta x, ..., X_{max}$. $(M+1)$ dan $(N+1)$ merupakan jumlah total grid harga saham (X) dan waktu (τ) yang akan digunakan untuk menentukan nilai dari *call option* pada waktu ke-T dan pada tingkat harga saham mencapai X_{max}. Pembagian grid persamaan Black-Scholes dapat dengan syarat batas dapat dilihat pada gambar berikut:

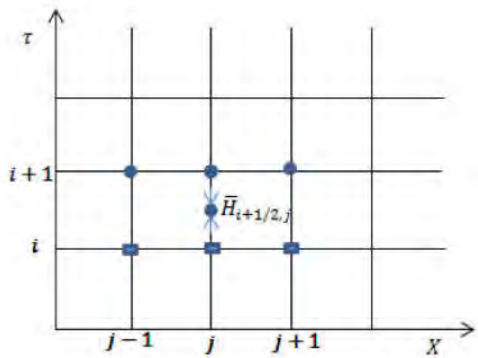


Gambar 4.1: Pembagian Grid dengan Syarat Batas

Koordinat titik (i, j) menghubungkan antar titik waktu $i\Delta\tau$ dan titik harga saham $j\Delta x$. Koordinat titik (i, j) dinotasikan $\bar{H}_{i,j}$.

4.4 Pendiskritan Persamaan Differensial Black-Scholes dengan Metode Crank-Nicolson

Pendiskritan persamaan differensial Black-Scholes dilakukan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicolson. Persamaan tersebut didiskritkan untuk memperoleh harga *American call option* melalui pembagian grid, yaitu pada titik $(i + \frac{1}{2}, j)$ dan titik $(i + \frac{1}{2}, j + 1)$ sebagai titik interior.seperti pada gambar berikut:



Gambar 4.2: Pembagian Grid Skema Crank-Nicolson pada $\bar{H}(X, \tau)$

Variabel yang akan digunakan dalam pendiskritan beda hingga Crank-Nicolson dinotasikan sebagai berikut:

$$\bar{H}(x, \tau) = \bar{H}(j\Delta x, i\Delta\tau) = \bar{H}_{i,j}$$

dengan $x = j\Delta x$ dan $\tau = i\Delta\tau$,sehingga Persamaan (4.23) menjadi:

$$-\frac{1}{\Delta\tau}(\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}) + (\alpha-\beta)x\frac{1}{4\Delta x}(\bar{H}_{i,j+1} -$$
$$\bar{H}_{i,j-1} + \bar{H}_{i+1,j+1} - \bar{H}_{i+1,j-1}) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{1}{2\Delta x^2}(\bar{H}_{i,j+1}$$
$$-2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i,j-1} + \bar{H}_{i+1,j+1}$$
$$-2\bar{H}_{i+1,j} + \bar{H}_{i+1,j-1}) - \frac{\alpha}{2}(\bar{H}_{i+1,j} + \bar{H}_{i,j}) + \beta x = 0$$

substitusi $x = j\Delta x$

$$-\frac{1}{\Delta\tau}(\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}) + (\alpha-\beta)\frac{j}{4}(\bar{H}_{i,j+1} - \bar{H}_{i,j-1}+$$
$$\bar{H}_{i+1,j+1} - \bar{H}_{i+1,j-1}) + \frac{j^2}{2}(\bar{H}_{i,j+1} - 2\bar{H}_{i,j})$$
$$+\bar{H}_{i,j-1} + \bar{H}_{i+1,j+1} - 2\bar{H}_{i+1,j} + \bar{H}_{i+1,j-1})$$
$$-\frac{\alpha}{2}(\bar{H}_{i+1,j} + \bar{H}_{i,j}) + \beta j\Delta x = 0$$

bagian yang mengandung variable yang sama dikumpulkan menjadi

$$(\frac{j^2}{2} - (\alpha-\beta)\frac{j}{4})\bar{H}_{i,j-1} + (\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{\alpha}{2} - j^2)\bar{H}_{i,j}+$$
$$(\frac{(\alpha-\beta)j}{4} + \frac{j^2}{2})\bar{H}_{i,j+1} = -(\frac{j^2}{2}-$$
$$\frac{(\alpha-\beta)j}{4})\bar{H}_{i+1,j-1} + (\frac{1}{\Delta\tau} - j^2 + \frac{\alpha}{2})\bar{H}_{i+1,j}$$
$$-(\frac{((\alpha-\beta)j}{4} + \frac{j^2}{2})\bar{H}_{i+1,j+1} - \beta j\Delta x = 0 \qquad (4.24)$$

Misalkan:

$$
\begin{aligned}
A_j &= \frac{j^2}{2} - \frac{(\alpha-\beta)j}{4} && (4.25)\\
B_j &= \frac{1}{\Delta\tau} - \frac{\alpha}{2} - j^2 && (4.26)\\
C_j &= \frac{(\alpha-\beta)j}{4} + \frac{j^2}{2} && (4.27)\\
D_j &= -\frac{j^2}{2} + \frac{(\alpha-\beta)j}{4} && (4.28)\\
E_j &= \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{\alpha}{2} + j^2 && (4.29)\\
F_j &= -\frac{(\alpha-\beta)j}{4} - \frac{j^2}{2} && (4.30)\\
G_j &= \beta.j.\Delta x && (4.31)
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan permisalan pada Persamaan (4.25) sampai Persamaan(4.31), maka Persamaan (4.24) dapat ditulis kembali dalam persamaan berikut:

$$
\begin{aligned}
A_j\bar{H}_{i,j-1} + B_j\bar{H}_{i,j} + C_j\bar{H}_{i,j+1} = \\
D_j\bar{H}_{i+1,j_1} + E_j\bar{H}_{i+1,j} + F_j\bar{H}_{i+1,j+1} - G_j \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Variabel i merupakan titik grid yang membagi t dengan interval [0,M] sebanyak M-1 vektor dan j merupakan titik grid yang membagi S dengan interval [0,N] sebanyak N vektor. Persamaan (4.32) menjadi:

$$
\begin{bmatrix}
B_1 & C_1 & 0 & 0 & ... & 0\\
A_2 & B_2 & C_2 & 0 & ... & 0\\
0 & A_3 & B_3 & C_3 & ... & 0\\
0 & 0 & A_4 & B_4 & ... & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & A_{M-1} & B_{M-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\bar{H}_{i,1}\\
\bar{H}_{i,2}\\
\bar{H}_{i,3}\\
\vdots\\
\bar{H}_{i,M_2}\\
\bar{H}_{i,M-1}
\end{bmatrix} =
$$

$$\begin{bmatrix} E_1 & F_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ D_2 & E_2 & F_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & D_3 & E_3 & F_3 & ... & 0 \\ 0 & 0 & D_4 & E_4 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{M-1} & E_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_{i+1,1} \\ \bar{H}_{i+1,2} \\ \bar{H}_{i+1,3} \\ \vdots \\ \bar{H}_{i+1,M_2} \\ \bar{H}_{i+1,M-1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -A_1\bar{H}_{i,0} + D_1\bar{H}_{i+1,0} - G_1 \\ -G_2 \\ -G_3 \\ \vdots \\ -G_{M-2} \\ -C_{M_1}\bar{H}_{i+1,N} + F_{M_1}\bar{H}_{i+1,N} - G_{M_1} \end{bmatrix}$$

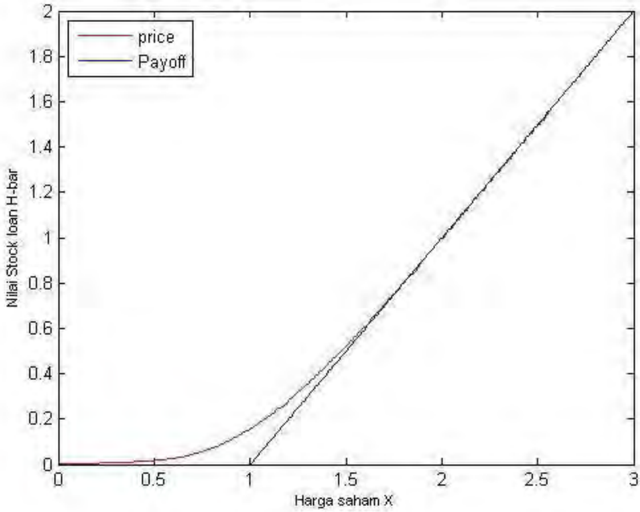
.

4.5 Analisis Hasil Simulasi

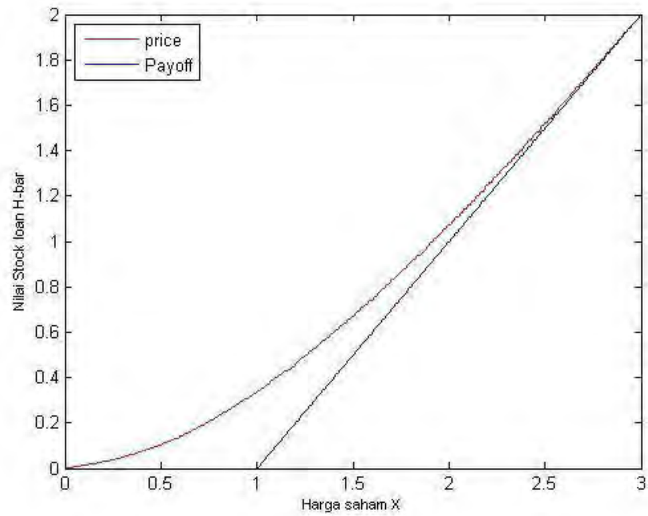
Pada subbab ini dibuat simulasi perhitungan nilai *stock loan* dengan metode Crank-Nicolson dan hasil perbandingan antara hasil perhitungan menggunakan metode Crank-Nicolson dan hasil perhitungan menggunakan metode pohon binomial.

4.5.1 Simulasi Nilai *Stock Loan* Menggunakan Metode Crank-Nicolson

Pada simulasi ini akan dimasukkan nilai-nilai parameter dari metode Crank-Nicolson. Nilai-nilai parameter yang digunakan adalah $\gamma = 0.1$, $r = 0.06$, $q = 0.7$, $\delta = 0.03$ dan $\sigma = 0.4$. Dari hasil yang didapatkan melalui nilai parameter tersebut dengan pembagian 1.000 grid saat $T = 1$ dan $T = 5$ didapatkan nilai dari *stock loan* pada Lampiran 1. Nilai *stock loan* ditunjukkan pada grafik berikut:



Gambar 4.3: Grafik Nilai Stock loan saat T=1



Gambar 4.4: Grafik Nilai Stock loan saat T=5

Berdasarkan Gambar 4.3 dan Gambar 4.4 dapat dilihat bahwa nilai *stock loan* mengalami kenaikan seiring dengan kenaikan harga saham, selain itu dapat dicari harga saham optimal yang merupakan titik perpotongan antara antara *payoff function* dan nilai stock loan dapat dicari melalui dua gambar diatas. Sehingga berdasarkan Gambar 4.3 dan Gambar 4.4 didapat Harga saham optimal saat $T = 1$ adalah 1,932 sedangkan saat $T = 5$ adalah 2,7.

4.5.2 Perbandingan Hasil Perhitungan Metode Crank-Nicolson dengan Hasil Perhitungan Pohon Binomial

Penelitian sebelumnya mengenai perhitungan nilai *stock loan* dengan dividen yang dikembalikan kepada *borrower* menggunakan metode pohon binomial telah dilakukan oleh

Dai dan Xu [16]. Selanjutnya hasil dari penelitian tersebut dibandingkan dengan hasil perhitungan menggunakan metode Crank-Nicolson sehingga diperoleh hasil dalam tabel berikut:

Tabel 4.1: Harga Saham Optimal Pada Crank-Nicolson dan Binomial

T	Metode Crank-Nicolson					Metode Binomial
	xf					xf
	N=1000	N=3000	N=5000	N=7000	N=10000	N=10000
1	1,932	1,851	1,78	1,717714	1,401873	1,4 - 1,5
3	2,505	2,2	1,9854	1,9	2,09903	1,9 - 2
5	2,7	2,3	2,1132	2,1	2,475	2,4 - 2,5

Pada Tabel 4.1 menunjukkan bahwa nilai *optimal exit price* baik dari hasil perhitungan menggunakan metode Crank-Nicolson ataupun menggunakan metode pohon binomial keduanya mengalami kenaikan disetiap pertambahan waktu (T). Hasil perhitungan nilai *stock loan* dengan menggunakan metode Crank-Nicolson mendekati hasil perhitungan menggunakan metode pohon binomial dengan pembagian 10000 grid. Selisih dari perhitungan metode Crank-Nicolson dengan metode pohon binomial saat T=1 adalah 0,001873-0,098127, saat T=3 adalah 0,09903-0,19903, saat T=5 adalah 0,025-0,075.

LAMPIRAN A
Lampiran 1

Tabel 1.1: Hasil Simulasi metode Crank-Nicolson saat T=1

T (*Year*)	Harga Saham (X)	Grid	Nilai *Stock Loan*
1	1	0	0
		50	0,0044
		100	0,0089
		150	0,0146
		200	0,0271
		250	0,0556
		300	0,1065
	2	350	0,1813
		400	0,2777
		450	0,3919
		500	0,5197
		550	0,6571
		600	0,8013
		650	0,95
	3	700	1,1000
		750	1,2500
		800	1,4000
		850	1,5470
		900	1,7000
		950	1,8500
		1000	2

Tabel 1.2: Hasil Simulasi metode Crank-Nicolson saat T=5

T ($Year$)	Harga Saham (x)	Grid	Nilai Stock Loan
5	1	0	0
		50	0,0213
		100	0,0473
		150	0,0827
		200	0,129
		250	0,1862
		300	0,2539
	2	350	0,3318
		400	0,4195
		450	0,5173
		500	0,6227
		550	0,7373
		600	0,8609
		650	0,9889
	3	700	1,1237
		750	1,2628
		800	1,4029
		850	1,5489
		900	1,7002
		950	1,8500
		1000	2

LAMPIRAN B
Source Code

Program untuk menghitung nilai *stock loan* dengan dividen yang dikembalikan kepada *borrower*

$clf;$
$clear;$
$clc;$

$Xmax = 3;$
$r = 0.06;$
$sigma = 0.4;$
$T = 5;$
$gamma = 0.1;$
$delta = 0.03;$
$omega = 1.5;$
$tol = 0.001;$
$t = (sigma^2) * T/2;$

$N = 300;$
$M = N;$
$vetj = 0 : N;$
$veti = 0 : M;$

$t_min = 0;$
$t_max = t;$

$X_min = 0;$
$X_max = Xmax;$

$dt = (t_max - t_min)/M;$
$dX = (X_max - X_min)/N;$

$t = t_min : dt : t_max;$
$X = X_min : dX : X_max;$

$C = zeros(N + 1, M + 1)';$
$C(:, 1) = max(X - 1, 0);$
$payoff = C(:, 1);$
$pastval = payoff(2 : N, 1)';$
$C(1, :) = 0;$
$boundval = C(1, :);$

$alfa = 2 * (r - gamma)/sigma^2;$
$beta = 2 * delta/sigma^2;$

$a = -dt/4 * (2 * vetj.^2 + (alfa - beta) * vetj);$
$b = -1 + ((vetj.^2) * dt) + (alfa * dt/2);$
$c = -(vetj.^2) * dt/(2) + ((alfa - beta) * vetj * dt)/(4);$
$d = dt/4 * (2 * vetj.^2 + (alfa - beta) * vetj);$
$e = -1 - (vetj.^2 * dt) - (alfa * dt/2);$
$f = (vetj.^2 * dt)/(2) - ((alfa - beta) * vetj * dt)/(4);$
$g = (beta * vetj * dX * dt)';$

$M1 = diag(c(3 : N), -1) + diag(b(2 : N)) + diag(a(2 : N - 1), 1);$
$M2 = diag(f(3 : N), -1) + diag(e(2 : N)) + diag(d(2 : N - 1), 1);$

$aux = zeros(N - 1, 1);$
$fori = 1 : 1 : M$
$aux(1) = a(2) * (boundval(1, i) + boundval(1, i + 1));$
$aux(end) = 2 * a(M) + payoff(end);$

$rhs = M1 * pastval' + aux - g(2:N);$
$oldval = pastval;$
$error = REALMAX;$
$whiletol < error$
$newval(1) = max(payoff(2), ...$
$oldval(1) + (omega/e(2)) * (...$
$rhs(1) - (e(2) * oldval(1) + d(2) * oldval(2))));$
$fork = 2 : N - 2$
$newval(k) = max(payoff(k + 1), ...$
$oldval(k) + (omega/e(k + 1)) * (...$
$rhs(k) - (f(k + 1) * newval(k - 1)) - ...$
$(e(k + 1) * oldval(k) + d(k + 1) * oldval(k + 1))));$
end
$newval(N - 1) = max(payoff(N), ...$
$oldval(N - 1) + (omega/e(N)) * (...$
$rhs(N - 1) - (f(N) * newval(N - 2)) - ...$
$(e(N) * oldval(N - 1))));$
$error = norm(newval - oldval);$
$oldval = newval;$
end
$pastval = newval;$

end
$newval = [boundval(1)newvalpayoff(end)];$
$jdown = floor(X/dX);$
$jup = ceil(X/dX);$
$ifjdown == jup$
$price = newval(1, jdown + 1);$
$else$
$price = newval(1, jdown + 1) + ...$
$(X - jdown * dX) * (newval(1, jup + 1)$
$- newval(1, jup + 1))'/dX;$
end

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Diperoleh rumus diskrit untuk menghitung nilai *stock loan* dengan dividen yang dikembalikan kepada *borrower* menggunakan metode Crank-Nicolson.

2. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa semakin tinggi harga saham (X) maka nilai *stock loan* semakin tinggi dan semakin besar jatuh tempo (T) maka nilai *stock loan* juga semakin besar.

3. Berdasarkan hasil perbandingan didapat bahwa nilai *stock loan* yang dihasilkan dari metode Crank-Nicolson dengan pembagian 10.000 grid mendekati nilai dari hasil metode pohon binomial dengan selisih saat T=1 adalah 0,001873-0,098127, saat T=3 adalah 0,09903-0,19903, saat T=5 adalah 0,025-0,075.

5.2 Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan perhitungan nilai *stock loan* dengan menggunakan metode *Alternating Direction Implicit (ADI).*

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

DAFTAR PUSTAKA

[1] Hull, J. C. (2002). **Option Future and Other Derivatives. Seventh Edition**. Prentice Hall, New Jersey.

[2] Willmot, P., Howison, S., Dewynne, J. (1995). **The Mathematics Financial Derivatives**. New York: Press Syndicate of the Cambridge University.

[3] Willmot, P. (2007). **Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance**. New York: John Wiley Sons.

[4] Recktenwald, G.W. (2011). **Finite-Difference Approximation to the Heat Equation**. Tesis. Portland State University.

[5] Fadugba, S.E.,dkk (2013). **Crank-Nicolson Method for Solving Parabolic Partial Differensial Equation**. IJA2M. Vol. 1, No.3, Hal. 8-23

[6] Bapepam (2003). **Perdagangan option di Pasar Modal Indonesia**.

[7] Lu, X., Putri, E.R.M. (2015). **Semi-Analitic Valuation of Stock Loan with Finite Maturity**. School of Mathematics and Applied Statistic, University of Wollongong, Australia.

[8] Furi'ah, Y.M. (2014). **Estimasi Harga *European Call Option*Disertai Dividen dan Variabel Volatilitas pada Model Black-Scholes dengan**

Metode Beda Hingga. Tugas Akhir, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[9] Lionita, S.I. (2015). **Aplikasi Metode Crank-Nicolson Untuk Menentukan Harga *European Call Option* pada Model Heston**. Tugas Akhir. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[10] Causon, D. M.,Mingham, C.G. (2010). **Introductory Finite Difference Methods for PDEs**. Manchester Metropolitan University.

[11] Grasselli M.R., Gomez C.(2010). **Stock Loan in incomplete markets**. Appl Math Finance 2010:1-19

[12] Tzyy, L.H.,Chic Y.T. (2006) **American Option Valuation: A Parsimoniuosly Numerical Approach**. Departement of Applied Mathematics, Feng Chia University, Taichung, Taiwan.

[13] Brennan, M., Schwartz E. (1978). **Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis**. Journal of Financial Quantitative Analysis,13:461-474.

[14] Jiang, L. (2005). **Mathematical Modeling and Method of Option Pricing**. JTongji University, China.

[15] Brandimarte, P.(2002), **Numerical Methods in Finance**. New york, United State of America.

[16] Dai, M., Xu Z.Q.(2010), **Optimal Redeeming Strategy Of Stock Loans With Finite Maturity**.Departement of Mathematics, National University of Singapoure. Mathematical Institute, Uneversity of Oxford.

[17] Affianti, I.R.(2015) **Prediksi Harga Saham Menggunakan *Geometric Brownian Motion***. Tugas Akhir, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

LAMPIRAN C
Biodata Penulis

Penulis bernama Arifatul Masruroh, yang biasanya dipanggil Ruroh. Penulis dilahirkan di Lamongan pada 02 November 1994. Penulis merupakan putri bungsu dari pasangan Arkomari dan Anik Sunariyah. penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Bahrul Ulum (1998-2000), MI Bahrul Ulum (2000-2006), SMP Negeri 2 Lamongan (2006-2009) dan SMA Negeri 2 Lamongan (2009-2012). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya pada tahun 2012 dengan NRP 1212100027. Di Jurusan Matematika penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selama Kuliah, penulis memiliki pengalaman berorganisasi di KM ITS sebagai staf Departemen Pengabdian Masyarakat HIMATIKA ITS (2013-2014) dan staf Departemen Sosial Masyarakat (2014-2015). Selain itu, penulis juga aktif dalam pelatihan kemahasiswaan, yaitu LKMM Pra-TD dan LKMM TD .

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: arifatul12@mhs.matematika.its.ac.id .