

MAGNETOHIDRODINAMIK FLUIDA MIKROKUTUB TAK TUNAK PADA LAPISAN BATAS YANG MENGALIR MELALUI BOLA TERIRIS

Rita Ayu Ningtyas (1214201205)

Dosen Pembimbing:

1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
NIP. 19650605 198903 1 002
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp
NIP. 19611115 198703 1 003

July 19, 2016

Studi mengenai lapisan batas

Penelitian tentang lapisan batas diarahkan untuk dapat mengurangi efek negatif yang ditimbulkan oleh aliran fluida yang melewati permukaan benda uji guna mengoptimalkan kinerjanya, ada beberapa penerapannya antara lain yaitu pada pesawat terbang, kereta api, kereta listrik, kapal selam, kapal laut, mobil, dsb (Pamungkas, 2009).

Pengendalian aliran dengan medan magnet

(Shercliff, 1979)

pengembangan dari bidang MHD diantaranya yaitu power generator dan akselerator magnetohidrodinamik, pendingin reaktor nuklir dan pertumbuhan kristal

Pengaruh MHD terhadap aliran fluida mikroktub

(Mohammad, 2014), Pada penelitian tersebut di jelaskan peningkatan nilai parameter magnetik menyebabkan lapisan batas juga akan semakin tebal. Dijelaskan juga peningkatan parameter magnetik mempengaruhi peningkatan kecepatan dan menurunnya temperatur.

**Penelitian ini mengkaji:
Pengaruh MHD pada lapisan batas dari aliran fluida mikroktub yang melalui bola teriris sebagai keadaan yang tak tunak**

- 1 Bagaimana model matematika pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melalui bola teriris?
- 2 Bagaimana penyelesaian model matematika pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melalui bola teriris menggunakan metode beda hingga dengan skema Keller-Box?
- 3 Bagaimana pengaruh magnetohidrodinamik dan besarnya sudut irisan bola pada lapisan batas fluida mikrokutub terhadap grafik kecepatan dan kecepatan mikrorotasi pada partikel fluida mikrokutub pada lapisan batas dengan adanya perubahan waktu?

- 1 Geometri benda pada penelitian yang diamati adalah bola teriris, dengan pola pengirisan datar dengan sudut irisan $0^\circ < \theta_s < 90^\circ$, sudut irisan diukur dari sumbu vertikal bola dengan irisan msing-masing sebesar θ_s ke arah kanan dan θ_s kiri sumbu vertikal.
- 2 Posisi teriris menghadap ke aliran fluida.
- 3 Aliran fluida mikrokutub yang melewati bola teriris merupakan aliran laminer yang bergerak teratur mengikuti lintasan yang sejajar.
- 4 Penelitian ini difokuskan pada aliran lapisan batas yang berada disekitar titik stagnasi.
- 5 Penyelesaian numerik menggunakan metode beda hingga dengan skema Keller-*Box*.

- 1 Fluida yang digunakan adalah fluida mikrokutub yang bersifat tak mampu-mampat (*incompressible*).
- 2 Bola teriris yang diamati terletak pada aliran bebas tanpa ada halangan didekat permukaan bola.
- 3 Aliran fluida yang melalui bola teriris adalah aliran dari arah yang sama.
- 4 Tidak ada induksi medan magnet yang terjadi pada aliran fluida dan bola teriris.
- 5 Tidak ada tegangan listrik pada aliran fluida sehingga pada bola teriris medan listriknya sama dengan nol.
- 6 Aliran fluida mikrokutub yang melewati bola teriris merupakan aliran fluida dua dimensi.

Tujuan Penelitian

- 1 Mengonstruksi model matematika pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melewati bola teriris
- 2 Mendapatkan penyelesaian model matematika pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melewati bola teriris menggunakan metode beda hingga dengan skema Keller-*Box*.
- 3 Mengamati pengaruh magnetohidrodinamik dan besarnya sudut irisan bola pada lapisan batas fluida mikrokutub terhadap grafik kecepatan dan kecepatan mikrorotasi partikel fluida mikrokutub pada lapisan batas dengan adanya perubahan waktu.

1 Bidang keilmuan

Diharapkan penelitian ini dapat memberikan kontribusi positif bagi pengembangan ilmu matematika terapan, dapat digunakan sebagai referensi bagi penelitian selanjutnya

2 Masyarakat luas

Diharapkan penelitian ini dapat dimanfaatkan bagi perkembangan teknologi dan industri contohnya dibidang pengeboran minyak.

- Anggriani (2015)

Pada penelitian ini dikaji mengenai karakteristik Aliran Lapisan Batas pada Fluida Micropolar Magnetohidrodinamik yang Melewati Bola Pejal, dengan berbagai parameter magnetik diperoleh profil kecepatan meningkat ketika parameter magnetik meningkat ,profil mikrorotasi meningkat dengan $n = 0$ dan profil mikrorotasi menurun dengan $n = 0.5$.

- Adhitya Nugroho (2007)

Penelitian terhadap karakteristik aliran yang melintasi silinder teriris tipe D menggunakan $Re = 53.000$ dan variasi sudut pengirisan 53° dan 65° diperoleh hasil dari titik stagnasi aliran dipercepat hingga mencapai kecepatan maksimum.

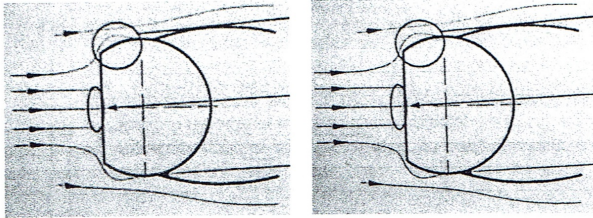


Figure: Spesimen uji silinder teriris tipe D. (a). Sudut pengirisan 53° , dan (b). Sudut pengirisan 65°

- 1 Fluida Newtonian adalah fluida yang memiliki kurva tegangan/regangan yang linier. Keunikan dari fluida Newtonian adalah fluida ini akan terus mengalir meskipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Hal ini disebabkan karena viskositas dari suatu fluida Newtonian tidak berubah ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Viskositas dari suatu fluida newton hanya bergantung pada temperatur dan tekanan.
- 2 Fluida non Newtonian adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini menyebabkan fluida non Newtonian tidak memiliki viskositas yang konstan (berkebalikan dengan fluida Newtonian) salah satu fluida yang memiliki karakter non Newtonian adalah fluida mikrokutub.

Fluida Mikrokutub

Teori mengenai fluida mikrokutub pertama kali diperkenalkan oleh Eringen (1965), yang kemudian telah menarik minat banyak peneliti untuk mengembangkan teori ini. Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikro. Fluida mikrokutub terdiri dari partikel kaku yang berorientasi secara acak dengan mikrorotasi mereka sendiri dan tergantung di media kental. Dalam fluida mikrokutub, partikel kaku terkandung dalam elemen volume kecil dapat memutar pusat elemen volume dijelaskan oleh vektor mikrorotasi (Satya Narayana dkk, 2013; Uddin dan Kumar, 2013; Widodo dkk. 2016). Fluida dalam kehidupan nyata yang dapat diklasifikasikan atau dipelajari sebagai fluida mikrokutub adalah cairan koloid, cairan pembuluh darah pada manusia atau hewan, suspensi polimer dan lumpur (Abdel-Rahman, 2009; Uddin dan Kumar, 2013).

Tipe Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu

Tipe aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu:(Widodo, 2012)

- 1 Aliran Tunak (*Steady Flow*) Aliran tunak yaitu kecepatan aliran fluida tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

- 2 Aliran Tak Tunak (*Unsteady Flow*) Aliran tak tunak yaitu kecepatan aliran fluida yang dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tak tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Konsep lapisan batas pertama kali dikemukakan pada tahun 1904 oleh Ludwig Prandtl, seorang ahli aerodinamika Jerman. Lapisan batas adalah suatu lapisan yang terbentuk disekitar penampang yang dilalui oleh fluida tersebut, karena mengalami hambatan yang disebabkan oleh beberapa faktor seperti gesekan, dan efek viskositas.

Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia dengan viskositasnya secara garis besar terdiri dari tiga jenis aliran yaitu aliran laminar, aliran transisi, dan aliran turbulen (Widodo, 2015).

- 1 Aliran Laminar
- 2 Aliran Transisi
- 3 Aliran Turbulen

Bilangan Reynolds untuk suatu aliran dapat dihitung menggunakan rumus berikut:

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu} \quad (1)$$

Magnetohidrodinamik (MHD)

- MHD diperkenalkan dan dikembangkan oleh Hannes Alfven seorang fisikawan yang mendapatkan nobel dalam fisika pada tahun 1970.
- Magnetohydrodynamics (MHD) (dinamika fluida magneto atau *hydromagnetics*) adalah studi mengenai dinamika fluida konduksi listrik.
- Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit.
- Bentuk ideal persamaan MHD terdiri dari persamaan fluida (yakni: persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi) dan persamaan Maxwell.

Magnetohidrodinamik (MHD)

Berikut ini adalah persamaan dasar yang dibutuhkan untuk membuat bentuk ideal persamaan MHD:

Persamaan momentum:

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} \right) = -\nabla p + J \times B$$

Persamaan konservasi massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Persamaan konservasi energi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

Magnetohidrodinamik (MHD)

Persamaan Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \mu_0 J + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}\end{aligned}$$

dengan:

B = medan magnet

E = medan listrik

V = kecepatan massa plasma

J = kerapatan arus

ρ = massa jenis

p = tekanan plasma

t = waktu

μ_0 = permeabilitas ruang hampa ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$)

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana step size untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat penyelesaian persamaan diferensial parsial parabolik lebih efisien dan tepat. Penerapan metode Keller-Box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu.

Berikut adalah contoh mengubah persamaan diferensial orde dua menjadi orde satu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dengan mendefinisikan

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

sehingga bentuk persamaan orde kedua tersebut dapat dituliskan menjadi dua persamaan orde pertama sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

Skema Keller-Box

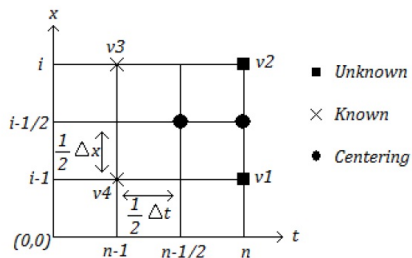


Figure: Stensil Skema Keller-Box

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu yaitu sebagai berikut

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} = v_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (2)$$

$$2 \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t_n} = \frac{\alpha(v_i^n - v_{i-1}^n)}{\Delta x_i} + \frac{\alpha(v_i^{n-1} - v_{i-1}^{n-1})}{\Delta x_i} \quad (3)$$

Karena menggunakan titik-titik pada step size setengah maka berlaku

$$u_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2}$$
$$v_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{v_i^n + v_i^{n-1}}{2}$$

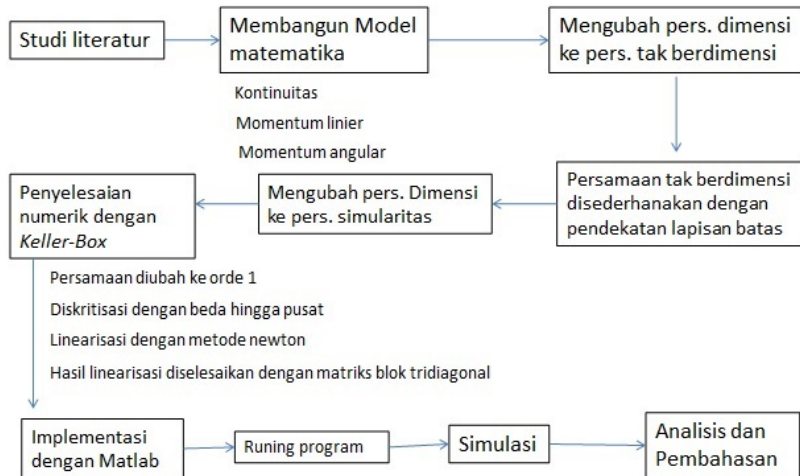
Selanjutnya disubstitusikan ke Persamaan (2) dan (2.11) didapatkan

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} = \frac{v_i^n + v_{i-1}^n}{2} \quad (4)$$

$$2 \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta t_n} = \alpha \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{\Delta x_i} + \alpha \frac{v_i^{n-1} - v_{i-1}^{n-1}}{\Delta x_i} + 2 \frac{u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{\Delta t_n} \quad (5)$$

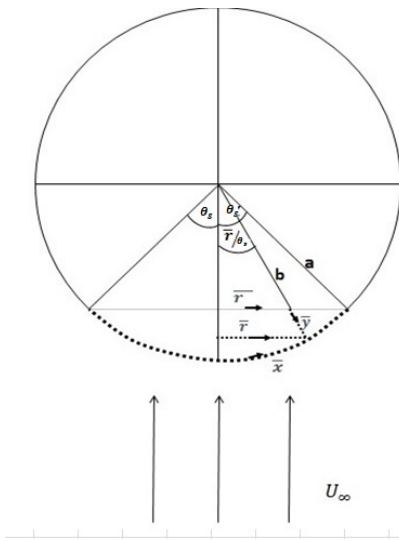
Berdasarkan hasil pada Persamaan (4) dan (2.13), selanjutnya dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks tridiagonal.

Metoda Penelitian



Penelitian ini dilakukan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Model Fisika dan Koordinat Saat fluida melewati permukaan Bola teriris



1 Persamaan Kontinuitas

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

2 Persamaan Momentum Linier

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + (\mu + \kappa)\nabla^2 \mathbf{u} + \kappa(\nabla \times \mathbf{N}) - \sigma B_0^2 \mathbf{u} \quad (7)$$

3 Persamaan Momentum Angular

$$\rho j \frac{DN}{Dt} = \gamma \nabla^2 N + \kappa(-2N + \nabla \times \mathbf{u}) \quad (8)$$

Penurunan Persamaan Pembangun Model

1 Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

2 Persamaan Momentum Linier Sumbu-x

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{u}$$

3 Persamaan Momentum Linier Sumbu-y

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{v}$$

4 Persamaan Momentum Angular

$$\rho j \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

Transformasi Ke Persamaan Tak Berdimensi

$$x = \frac{\bar{x}}{a}$$

$$y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}$$

$$u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}$$

$$v = Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty}$$

$$t = \frac{U_\infty \bar{t}}{a}$$

$$p = \frac{\bar{p}}{\rho U_\infty^2}$$

$$b = \frac{\bar{b}}{a}$$

Transformasi Ke Persamaan Tak Berdimensi

1 Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

2 Persamaan momentum linier sumbu-x

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ & + K \frac{\partial N}{\partial y} - Mu \end{aligned} \quad (10)$$

3 Persamaan momentum linier sumbu-y

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1+K}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ & - \frac{K}{Re} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{M}{Re} v \end{aligned} \quad (11)$$

1 Persamaan momentum angular

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = (1 + K/2) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (12)$$

Dengan

$$M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty}$$

$$K = \frac{\kappa}{\mu}$$

$$N = Re^{-1/2} \frac{a \bar{N}}{U_\infty}$$

Pendekatan Lapisan Batas

1 Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

2 Persamaan Momentum Linier Sumbu-x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - Mu \quad (14)$$

3 Persamaan Momentum Linier Sumbu-y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

4 Persamaan Momentum Angular

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = (1 + K/2) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (16)$$

Fungsi Arus (*Stream Function*)

- Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (17)$$

- Persamaan Momentum Linier

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{du_e}{dx} \\ + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} + M \left(u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

- Persamaan Momentum Angular

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} = (1 + K/2) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

Persamaan Similaritas Untuk Waktu Kecil

$$(1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \lambda t \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{2} h + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \lambda t \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial h}{\partial t} + tK \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (21)$$

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \text{ pada saat } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1 \text{ pada saat } \eta \longrightarrow \infty$$

Persamaan Similaritas Untuk Waktu Besar

$$(1 + K) \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \lambda \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + K \frac{\partial H}{\partial Y} + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} \quad (22)$$

$$(1 + K/2) \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \lambda \left(F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + K \left(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \quad (23)$$

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, \text{ pada saat } Y = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, \text{ pada saat } Y \rightarrow \infty$$

Kondisi Awal f, f', f'', h, h'

$$f = \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}} \right) + 2\sqrt{\frac{(1+K(1-n))}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} - 1 \right)$$

$$f' = \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}} \right)$$

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

$$h = \frac{-n}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

$$h' = \frac{n\eta}{2(1+K(1-n))\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

Metode Keller-Box merupakan metode yang efisien untuk menyelesaikan persamaan lapisan batas yang berbentuk diferensial parsial parabolik. Tahapan-tahapan dalam penyelesaian numerik ini yaitu:

- 1 Persamaan (16), (17), (18) dan (19) dibentuk menjadi persamaan orde pertama
- 2 Dilakukan diskritisasi dengan menggunakan beda hingga pusat
- 3 Dilakukan linierisasi persamaan yang didapat dengan menggunakan metode Newton dan dibentuk dalam matriks vektor
- 4 Hasil linierisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

$$f' = u \quad (24)$$

$$u' = v \quad (25)$$

$$h' = q \quad (26)$$

$$(1 + K)v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3}{2\cos\theta_s}t[1 - u^2 + fv] + Kq + Mt(1 - u) = t\frac{\partial u}{\partial t} \quad (27)$$

$$(1 + K/2)q' + \frac{\eta}{2}q + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2\cos\theta_s}t(fq - hu) = t\frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + v) \quad (28)$$

Diskritisasi Model

dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga sesuai dengan Gambar (5.1), untuk Persamaan (24)-(26) menggunakan titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$ pada ruas P_1P_2 dengan menggunakan beda hingga pusat, sedangkan untuk bentuk tak linier pada persamaan (27) dan (28) digunakan titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$ pada segiempat $P_1P_2P_3P_4$ berikut.

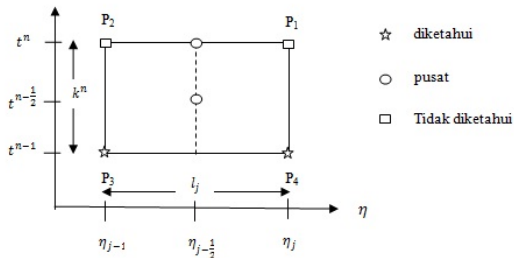


Figure: Stensil Beda Hingga

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{l_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j} (f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (29)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{l_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j} (u_j^n - u_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (v_j^n - v_{j-1}^n) \quad (30)$$

$$\frac{(h_j^n - h_{j-1}^n)}{l_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j} (h_j^n - h_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 & (1 + K) \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 \right. \\
 & \left. + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + K q_{j-\frac{1}{2}}^n + M t^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1 + K) \\
 & \left(\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^{n-1} \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 \right. \\
 & \left. + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + M t^{n-1} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1 + K/2) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \\
 & \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
 & - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1 + K/2) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{lj} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 & - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 & - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned} \tag{33}$$

Linearisasi Model

dengan menghilangkan orde tinggi pada $(\delta f_j^{(i)}, \delta u_j^{(i)}, \delta v_j^{(i)}, \delta h_j^{(i)}, \delta q_j^{(i)})$ didapatkan

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \quad (34)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \quad (35)$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j + \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_j \delta v_j + (a_2)_j \delta v_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + (a_5)_j \delta u_j \\ & + (a_6)_j \delta u_{j-1} + (a_7)_j \delta q_j + (a_8)_j \delta q_{j-1} = (r_4)_j \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta u_j \\ & + (b_6)_j \delta u_{j-1} + (b_7)_j \delta h_j + (b_8)_j \delta h_{j-1} + (b_9)_j \delta v_j + (b_{10})_j \delta v_{j-1} \\ & = (r_5)_j \end{aligned} \quad (38)$$

Linearisasi Model

$$(r_1)_j = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$(r_2)_j = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n)$$

$$(r_3)_j = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n + q_{j-1}^n)$$

$$(r_4)_j = -(1 + K) \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - Mt^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - (1 + K) \left(\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^{n-1} \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 (r_5)_j = & -(1 + K/2) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{lj} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \\
 & \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 & -(1 + K/2) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{lj} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^{n-1} \\
 & \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + t^{n-1} K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 & - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^{n-1}} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$(a_1)_j = \frac{(1+K)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_2)_j = -\frac{(1+K)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_3)_j = \frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_4)_j = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = -\frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{Mt^n}{2} - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(a_6)_j = (a_5)_j$$

$$(a_7)_j = \frac{1}{2}K$$

$$(a_8)_j = (a_7)_j$$

$$(b_1)_j = \frac{(1 + K/2)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_2)_j = -\frac{(1 + K/2)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_3)_j = \frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_4)_j = (b_3)_j$$

$$(b_5)_j = -\frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_6)_j = (b_5)_j$$

$$(b_7)_j = \frac{1}{4} - \frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - t^n K - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(b_8)_j = (b_7)_j$$

$$\begin{aligned}(b_9)_j &= -\frac{1}{2}t^n K \\(b_{10})_j &= (b_9)_j\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} j = 1 & : & [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\ j = 2 & : & [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\ j = 3 & : & [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3] \\ & \vdots & \vdots \\ j = N - 1 & : & [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] = [r_{N-1}] \\ j = N & : & [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] = [r_N] \end{array}$$

Teknik Eliminasi Blok

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [A_1] & [C_1] & & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ & & & & & & [B_N] & [A_N] \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{pmatrix}$$

Pengaruh variasi sudut irisan terhadap profil kecepatan

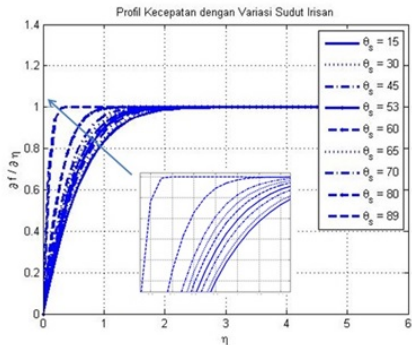
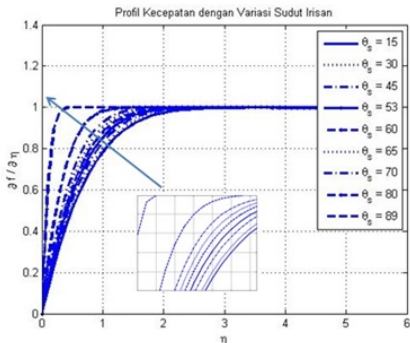


Figure: Profil kecepatan dengan variasi sudut irisan dengan $M = 1$, $K = 1$ pada konsentrasi pekat dan setengah pekat

Pengaruh variasi parameter magnetik terhadap profil kecepatan

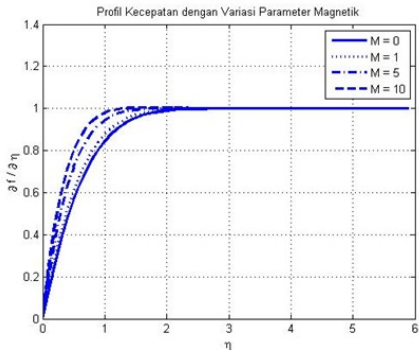
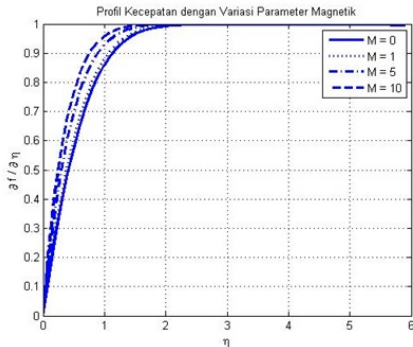


Figure: Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik dengan $\theta_s = 45^\circ$, $K = 1$ pada konsentrasi pekat dan setengah pekat

Pengaruh variasi parameter bahan terhadap profil kecepatan

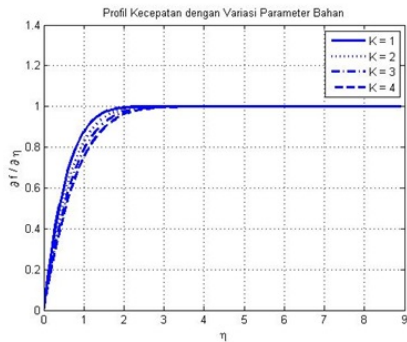
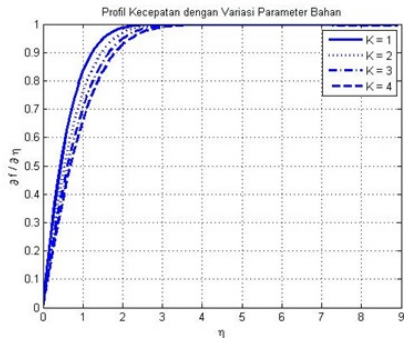


Figure: Profil kecepatan dengan variasi parameter Bahan dengan $\theta_s = 45^\circ$, $M = 1$ pada konsentrasi pekat dan setengah pekat

Pengaruh variasi sudut irisan terhadap profil mikrorotasi

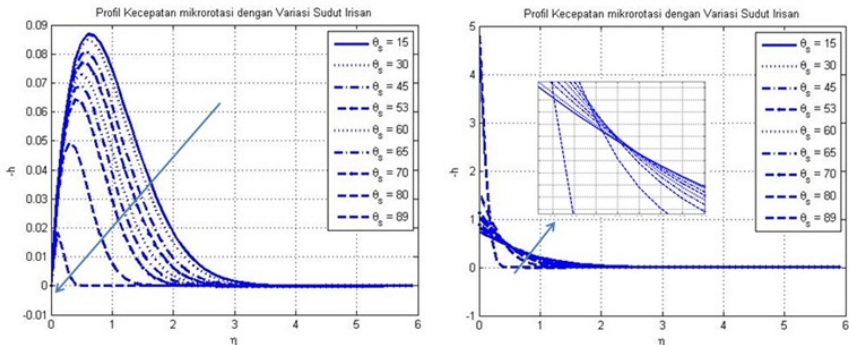


Figure: Profil mikrorotasi dengan variasi sudut irisan dengan $k = 1$, $M = 1$ pada konsentrasi pekat dan setengah pekat

Pengaruh variasi parameter magnetik terhadap profil mikrorotasi

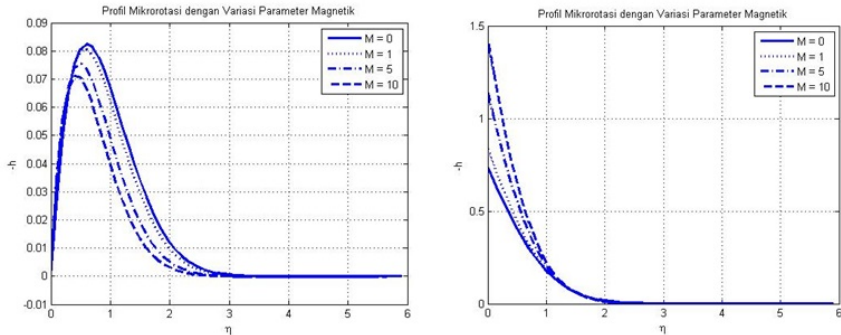


Figure: Profil mikrorotasi dengan variasi parameter magnetik dengan $k = 1$, $\theta_s = 45^\circ$ pada konsentrasi pekat dan setengah pekat

- Model matematika dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati bola teriris yang diperoleh dari hasil penurunan persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier dan persamaan momentum angular dengan proses mengubah persamaan menjadi persamaan yang non-dimensional kemudian melakukan pendekatan lapisan batas dan mengubah persamaan menjadi persamaan similaritas dengan waktu yang kecil dan waktu yang besar, diperoleh model matematika pada (20), (21) dan (22), (23).

- Model matematika pada lapisan batas magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melewati bola teriris diselesaikan dengan metode beda hingga Keller-box dengan 4 tahapan penyelesaian yaitu persamaan model diubah menjadi persamaan orde pertama, setelah itu dilakukan diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga pusat, kemudian dilakukan linearisasi persamaan dengan menggunakan metode newton dan dibentuk dalam matriks vektor dan langkah terakhir, hasil linearisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

Kesimpulan

Hasil simulasi numerik dengan menggunakan beberapa variasi parameter yaitu parameter magnetik, sudut irisan, parameter bahan dengan $n = 0.5$ dan $n = 0$ diperoleh hasil:

- Semakin meningkatnya besar sudut irisan maka kecepatan aliran fluida akan semakin meningkat untuk $n = 0$, kemudian untuk $n = 0.5$ semakin meningkatnya besar sudut irisan maka kecepatan aliran fluida juga akan semakin meningkat.
- Semakin meningkatnya parameter magnetik didapatkan bahwa kecepatan fluida yang dihasilkan semakin meningkat untuk $n = 0$, kemudian untuk $n = 0.5$ didapatkan bahwa kecepatan fluida yang dihasilkan juga semakin meningkat.
- Semakin meningkatnya parameter bahan maka kecepatan aliran fluida akan semakin menurun untuk $n = 0$, kemudian untuk $n = 0.5$ semakin meningkatnya parameter bahan maka kecepatan aliran fluida juga akan semakin menurun.

1. Semakin besar sudut irisan maka profil kecepatan aliran fluida akan semakin meningkat.
2. Semakin besar parameter magnetik didapatkan bahwa profil kecepatan fluida yang dihasilkan semakin meningkat.
3. Semakin besar parameter bahan maka profil kecepatan aliran fluida akan semakin menurun.
4. Semakin besar sudut irisan maka profil mikrorotasi akan semakin kecil untuk $n = 0$, kemudian untuk $n = 0.5$ semakin besar sudut irisan maka profil mikrorotasi semakin besar.
5. Semakin besar parameter magnetik profil mikrorotasi akan semakin kecil untuk $n = 0$, kemudian untuk $n = 0.5$ semakin besar parameter magnetik profil mikrorotasi akan semakin besar.