



TESIS - SM 142501

**ALIRAN FLUIDA MIKROKUTUB TAK TUNAK
MAGNETOHIDRODINAMIK PADA LAPISAN BATAS YANG
MELEWATI BOLA TERIRIS**

RITA AYU NINGTYAS
NRP 1214 201 205

DOSEN PEMBIMBING
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016



TESIS - SM 142501

**UNSTEADY MICROPOLAR FLUID FLOW
MAGNETOHYDRODYNAMICS IN BOUNDARY LAYER
PAST A SLICED SPHERE**

RITA AYU NINGTYAS
NRP 1214 201 205

SUPERVISOR

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Dr. Chairul Imron, MI.Komp

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTEMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCE
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :

Rita Ayu Ningtyas
NRP 1214 201 205

Tanggal Ujian : 19 Juli 2016
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh:

1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
NIP 19650605 198903 1 002

(Pembimbing I)

2. Dr. Chairul Imron, M.I. Komp
NIP 19611115 198703 1 003

(Pembimbing II)

3. Dr. Didik Khusnul, M.Si
NIP 19730930 199702 1 001

(Penguji)

4. Dr. Hariyanto, M.Si
NIP 19530414 198203 1 002

(Penguji)

5. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP 19660414 199102 2 001

(Penguji)



Direktur Program Pascasarjana,

Prof. Dr. Djauhar Manfaat, M.Sc, Ph.D
NIP. 19601202 198701 1 001

ALIRAN FLUIDA MIKROKUTUB TAK TUNAK MAGNETOHIDRODINAMIK PADA LAPISAN BATAS YANG MELEWATI BOLA TERIRIS

Nama Mahasiswa : Rita Ayu Ningtyas
NRP : 1214201205
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

ABSTRAK

Magnetohidrodinamik (MHD) merupakan studi mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan arus listrik di bawah medan magnet. Saat Aliran fluida melewati bola teriris akan terbentuk lapisan batas. Lapisan batas adalah lapisan yang terbentuk di permukaan benda ketika fluida mengalir melewati benda tersebut yang disebabkan karena gesekan permukaan dan faktor viskositas fluida. Penelitian ini difokuskan pada titik stagnasi $= 0^\circ$. Dengan mengasumsikan fluida mikrokutub merupakan fluida yang tak mampu mampat dan tidak ada tegangan listrik pada aliran fluida. Maka dikonstruksi model matematika dari aliran fluida mikrokutub tak tunak magnetohidrodinamik pada lapisan batas yang melewati bola teriris. Kemudian dengan mensubstitusikan variabel-variabel tak berdimensi persamaan diubah kedalam bentuk persamaan nondimensional. Kemudian diperkenalkan fungsi arus yang merepresentasikan kecepatan, Persamaan similaritas yang berbentuk persamaan diferensial nonlinear. Sistem persamaan yang diperoleh diselesaikan secara numerik dengan metode Keller-Box. Hasil simulasi menunjukkan semakin besar parameter magnetik maka profil kecepatan semakin meningkat. Semakin besar parameter magnetik maka profil mikrorotasi akan semakin menurun pada $n = 0$ dan semakin meningkat pada $n = 0.5$. Semakin besar sudut irisan maka profil kecepatan akan semakin meningkat. Semakin besar sudut irisan maka profil mikrorotasi semakin kecil pada $n = 0$ dan semakin besar saat $n = 0.5$.

Kata kunci: fluida mikrokutub, lapisan batas, magnetohidrodinamik, bola teriris

UNSTEADY MICROPOLAR FLUID FLOW MAGNETOHYDRODYNAMICS ON BOUNDARY LAYER PAST A SLICED SPHERE

Name : Rita Ayu Ningtyas
NRP : 1214201205
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

ABSTRACT

Magnetohydrodynamics (MHD) is a study about the movement of fluid flow that can conduct electricity and be affected by magnetic field. When the fluid flow past a sliced sphere will formed boundary layer. Boundary layer is a layer that is formed close to surface of sliced sphere when fluid past the sliced sphere caused by the friction factor and the viscosity of the fluid. This research focus on stagnation point $x = 0^\circ$. The assumption of micropolar fluid are incompressible fluid and there is no electrical voltage in the fluid flow. So we construction governing equations of unsteady micropolar fluid flow magnetohydrodynamics on boundary layer past a sliced sphere. Than, with substituted non dimension variables, governing equations transformed to non dimension governing equations. Then, the stream functions are introduced to connect a function that can represent velocities. Similarity variables are used to deduce the dimensionless governing equations into a system of nonlinear partial differential equations. These equations are solved numerically by using finite difference numerical method with Keller-Box. Simulation result show that we increasing magnetic parameter, velocity profil increase. With increasing magnetic parameter , microrotation profil decreases at $n = 0$ and increase at $n = 0.5$. With increasing sliced angle, velocity profile will increase. With increasing sliced angle, microrotation profile decreases at $n = 0$ and increase at $n = 0.5$.

Keywords: micropolar fluid, boundary layer, magnetohydrodynamics, sliced sphere

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR SIMBOL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Penelitian	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Fluida	6
2.2.1 Fluida Newtonian	6
2.2.2 Fluida Non Newtonian	6
2.3 Tipe Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu	7
2.4 Aliran Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>)	7
2.4.1 Aliran Laminer	8
2.4.2 Aliran Transisi	8
2.4.3 Aliran Turbulen	8
2.5 Magnetohidrodinamik (MHD)	8
2.6 Aliran Bebas Bola	10
2.7 Metode Keller- <i>Box</i>	12
BAB III METODA PENELITIAN	15
3.1 Tahapan Penelitian	15
3.2 Tempat Penelitian	17
BAB IV MODEL MATEMATIKA	19
4.1 Persamaan Pembangun Model Matematika	20
4.1.1 Persamaan Kontinuitas	20
4.1.2 Persamaan Momentum Linier	23
4.1.3 Persamaan Momentum Angular	27

4.1.4	Penurunan Persamaan Pembangun Model	29
4.1.5	Transformasi Variabel Tak Berdimensi	32
4.1.6	Pendekatan Lapisan Batas	34
4.1.7	Fungsi Arus (<i>Stream Function</i>).....	36
4.1.8	Persamaan Similaritas	37
BAB V	PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA	41
5.1	Penyelesaian Numerik Model	41
5.1.1	Persamaan Orde Pertama	41
5.1.2	Diskritisasi Model	42
5.1.3	Linierisasi Model	47
5.1.4	Teknik Eliminasi Blok	55
5.2	Hasil Simulasi Numerik	60
5.2.1	Pengaruh Variasi Sudut irisan Terhadap Profil Kecepatan ..	61
5.2.2	Pengaruh Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Kecepatan	64
5.2.3	Pengaruh Variasi Parameter Bahan Terhadap Profil Kecepatan	66
5.2.4	Pengaruh Variasi Sudut irisan Terhadap Profil Mikrorotasi .	67
5.2.5	Pengaruh Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Mikrorotasi	70
BAB VI	KESIMPULAN DAN SARAN	73
6.1	Kesimpulan	73
6.2	Saran	74
DAFTAR PUSTAKA		75

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Bola Teriris Dilalui Aliran Fluida Mikrokutub	2
Gambar 2.1	Spesimen Uji Silinder Teriris Tipe D. (a). Sudut Pengirisan 53° , dan (b). Sudut Pengirisan 65°	6
Gambar 2.2	Posisi Dari Aliran Seragam dan Penampang Tiga Dimensi	10
Gambar 2.3	Skema Aliran Fluida <i>Incompressible</i> Yang Melewati Bola Pejal	11
Gambar 2.4	Stensil Skema Keller-Box	13
Gambar 4.1	Model Fisika Dan Koordinat Saat Fluida Mikrokutub Melewati Bola Teriris	20
Gambar 4.2	Aliran fluida masuk dan keluar kontrol volume	22
Gambar 4.3	Gaya-gaya Permukaan Yang Bekerja Pada Elemen Fluida	25
Gambar 5.1	Stensil Beda Hingga	42
Gambar 5.2	Profil kecepatan dengan variasi sudut iris saat $M = 1, K = 1, n = 0$	61
Gambar 5.3	Profil kecepatan dengan variasi sudut iris saat $M = 1, K = 1, n = 0.5$	62
Gambar 5.4	Profil kecepatan dengan variasi sudut iris saat $M = 1, K = 0, n = 0$	63
Gambar 5.5	Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik saat $K = 1, n = 0$	64
Gambar 5.6	Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik saat $K = 1, n = 0.5$	65
Gambar 5.7	Profil kecepatan dengan variasi parameter bahan saat $M = 1, n = 0$	66
Gambar 5.8	Profil kecepatan dengan variasi parameter bahan saat $M = 1, n = 0.5$	67
Gambar 5.9	Profil Mikrorotasi dengan variasi sudut iris saat $M = 1, K = 1, n = 0$	68
Gambar 5.10	Profil Mikrorotasi dengan variasi sudut iris saat $M = 1, K = 1, n = 0.5$	69
Gambar 5.11	Profil mikrorotasi dengan variasi parameter magnetik saat $K = 1, n = 0$	70
Gambar 5.12	Profil mikrorotasi dengan variasi parameter magnetik saat $K = 1, n = 0.5$	71
Gambar 6.1	Sistem Koordinat Bola	82

DAFTAR SIMBOL

ρ	Densitas fluida
\mathbf{u}	Komponen kecepatan fluida, dengan $\mathbf{u} = (u, v, 0)$
u	Komponen kecepatan fluida pada sumbu x
v	Komponen kecepatan fluida pada sumbu y
α	Sudut pengirisan bola
x	Sudut pengamatan pada bola teriris
y	Jarak daerah pengamatan terhadap permukaan bola teriris
a	Jari-jari bola teriris
U_∞	Kecepatan fluida pada aliran bebas
\bar{n}	Vektor normal terhadap elemen dA
F_{mag}	Gaya lorentz
J	Kerapatan arus
B	Gaya magnet
E	Medan listrik
B_0	Medan magnet
σ	Konduktivitas listrik
p	Tekanan
b	Induksi medan magnet
μ	Konstanta material
γ	Konstanta material
θ	Konstanta material
β	Konstanta material
ζ	Konstanta material
κ	Konstanta material
j	Mikro inersia fluida
Ω	Mikro inersia fluida
M	Parameter magnetik
N	Parameter mikrorotasi
K	Parameter bahan
t	waktu
\forall	Volume fluida
ν	Viskositas kinematis
Ψ	Fungsi alir

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, asumsi-asumsi, tujuan, dan manfaat pada penelitian ini. Berikut adalah uraian tiap subbab yang akan diuraikan secara rinci.

1.1 Latar Belakang

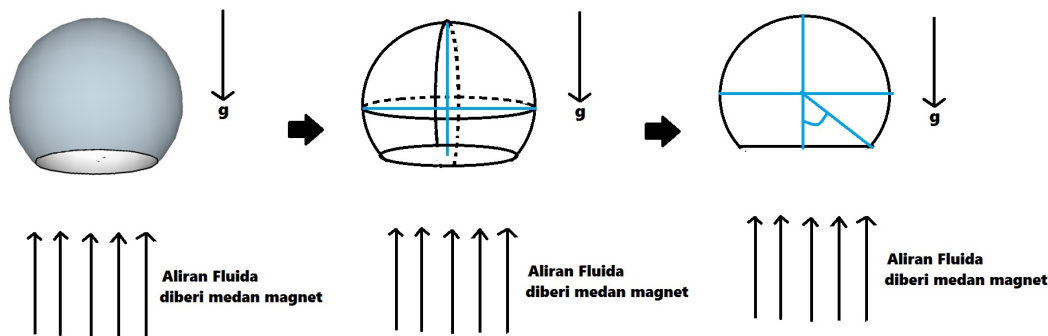
Perkembangan ilmu mekanika fluida dari waktu ke waktu semakin pesat. Ditengah perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, studi tentang lapisan batas adalah salah satu yang sangat bermanfaat untuk dikembangkan. Contoh Penerapannya adalah pada pengeboran minyak (Pamungkas, 2009).

Ide dari pengendalian suatu aliran yang menggunakan medan magnet dan temperatur fluida pertama kali di usulkan pada tahun 1979 (Shercliff, 1979). Namun pada tahun tersebut teknologi belum memadai. Berdasarkan ide tersebut, yaitu arus listrik dalam logam cair dapat dihasilkan dengan membuat perubahan temperatur atau gradien temperatur. Oleh sebab itu, adanya medan magnet yang diluar membangun gaya-gaya dalam keseluruhan fluida. Sementara itu, telah diketahui bahwa fluida yang memiliki karakteristik magnetohidrodinamik (MHD) memiliki kemampuan mengendalikan separasi aliran, memanipulasi aliran fluida itu sendiri dan mengoptimumkan perpindahan panas dari fluida penghantar listrik viskos maupun jenis fluida mikrokutub. Sehingga dengan demikian aliran MHD adalah penelitian yang penting dalam aplikasi bidang teknik dan industri, pengembangan dari bidang MHD diantaranya yaitu power generator dan akselereator magneto-hidrodinamik, pendingin reaktor nuklir dan pertumbuhan kristal.

Pada fluida mengenal adanya viskositas atau kekentalan. Berdasarkan karakteristiknya fluida cair dibagi menjadi dua yaitu fluida Newtonian (fluida viskos) dan fluida non Newtonian, salah satu contoh dari fluida non Newtonian adalah fluida mikrokutub. Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikro yang terdiri dari partikel kaku yang berorientasi secara acak di media kental yang memiliki kemampuan mikrorotasi. Kecepatan aliran dan kecepatan mikrorotasi dari partikel saat fluida mikrokutub melewati permukaan benda sangat dipengaruhi oleh kepekatan fluida mikrokutub tersebut. Karena sifat unik dari fluida mikrokutub tersebut, maka hal ini menjadi menarik untuk di teliti. Saat ini mulai banyak dikembangkan penelitian mengenai pengaruh MHD pada fluida mikrokutub, salah satunya yaitu karakteristik aliran lapisan batas fluida mikrokutub yang melewati bola pejal, didapatkan hasil profil kecepatan meningkat ketika parameter magnetik meningkat, profil mikrorotasi meningkat dengan $n = 0$ dan profil mikrorotasi menurun saat $n = 0.5$ (Widodo dkk, 2015).

Banyak kasus pada MHD fluida mikrokutub pada lapisan batas diamati sebagai kasus keadaan tunak atau *steady-state*. Padahal pada lapisan batas perubahan waktu amat berperan signifikan. Sehingga pada penelitian ini akan

dikaji secara analitik dan secara numerik pengaruh medan magnet dan besarnya sudut irisan terhadap kecepatan dan kecepatan mikrorotasi pada lapisan batas dari aliran fluida mikrokutub yang melewati bola teriris sebagai keadaan yang tak tunak (*unsteady*).



Gambar 1.1: Bola Teriris Dilalui Aliran Fluida Mikrokutub

Berdasarkan ilustrasi Gambar 1.1 saat fluida melalui permukaan bola teriris diasumsikan aliran fluida berlawanan arah dengan gravitasi dan arah aliran fluida yang diberikan homogen atau diberikan aliran dari arah yang sama dengan kecepatan aliran bebasnya yaitu U_∞ .

Lapisan batas yang terbentuk disebabkan oleh adanya gesekan fluida dengan bola dan disebabkan oleh efek viskositas fluida. Dari lapisan batas yang terbentuk, maka di konstruksi model matematika yang dapat menggambarkan aliran fluida mikrokutub saat melewati bola teriris dengan pengaruh MHD berdasarkan asumsi-asumsi dan batasan masalah yang diberikan pada penelitian ini guna mendapatkan informasi bagaimana profil kecepatan fluida dan profil mikrorotasi partikel saat dekat dengan permukaan benda di titik stagnasi terendah yaitu $x = 0^\circ$. Titik stagnasi terendah adalah titik dimana lapisan batas berada paling dekat dengan permukaan benda. Selanjutnya model matematika pada daerah lapisan batas yang melalui bola teriris di transformasikan dalam bentuk non dimensi yang kemudian akan diselesaikan dengan metode numerik dengan skema *Keller-Box*. Diharapkan hasil simulasi numerik akhir yang diperoleh akan berupa kurva yang menggambarkan profil kecepatan fluida dan profil mikrorotasi partikel mikrokutub pada lapisan batas yang terbentuk akibat efek MHD dan irisan bola aliran fluida mikrokutub tak tunak.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan dari uraian latar belakang, maka di buat rumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana model matematika pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melewati bola teriris?
2. Bagaimana penyelesaian model matematika pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melewati bola teriris menggunakan metode beda hingga dengan skema *Keller-Box*?

3. Bagaimana pengaruh magnetohidrodinamik dan besarnya sudut irisan bola pada lapisan batas fluida mikrokutub terhadap profil kecepatan dan profil mikrorotasi partikel fluida mikrokutub pada lapisan batas dengan adanya perubahan waktu?

1.3 Batasan Penelitian

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut.

1. Fluida yang digunakan adalah fluida mikrokutub yang bersifat tak mampu-mampat (*incompressible*).
2. Bola teriris yang diamati terletak pada aliran bebas tanpa ada halangan didekat permukaan bola.
3. Geometri benda pada penelitian yang diamati adalah bola teriris, dengan pola pengirisan datar dengan sudut irisan $0^\circ < \theta_s < 90^\circ$, sudut irisan diukur dari sumbu vertikal bola dengan irisan masing-masing sebesar θ_s ke arah kanan dan θ_s kiri sumbu vertikal.
4. Aliran fluida yang melalui bola teriris adalah aliran dari arah yang sama.
5. Posisi teriris menghadap ke aliran fluida.
6. Aliran fluida mikrokutub yang melewati bola teriris merupakan aliran laminar yang bergerak teratur mengikuti lintasan yang sejajar.
7. Penelitian ini difokuskan pada aliran lapisan batas yang berada disekitar titik stagnasi $x = 0^\circ$.
8. Tidak ada induksi medan magnet yang terjadi pada aliran fluida dan bola teriris.
9. Tidak ada tegangan listrik pada aliran fluida sehingga pada bola teriris medan listriknya sama dengan nol.
10. Aliran fluida mikrokutub yang melewati bola teriris merupakan aliran fluida dua dimensi.
11. Konveksi di abaikan.
12. Penyelesaian numerik menggunakan metode beda hingga dengan skema Keller-Box.

1.4 Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengonstruksi model matematika pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melewati bola teriris

2. Mendapatkan penyelesaian model matematika pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melewati bola teriris menggunakan metode beda hingga dengan skema Keller-Box.
3. Mengamati pengaruh magnetohidrodinamik dan besarnya sudut irisan bola pada lapisan batas fluida mikrokutub terhadap profil kecepatan dan profil mikrorotasi partikel fluida mikrokutub pada lapisan batas dengan adanya perubahan waktu.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bidang keilmuan

Diharapkan penelitian ini dapat memberikan kontribusi positif bagi pengembangan ilmu matematika terapan, dapat digunakan sebagai referensi bagi penelitian selanjutnya

2. Masyarakat luas

Diharapkan penelitian ini dapat dimanfaatkan bagi perkembangan teknologi dan industri contohnya dibidang pengeboran minyak.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Bab ini menjelaskan mengenai penelitian terdahulu dan teori yang digunakan dalam penelitian ini. Berikut adalah uraian dari penelitian-penelitian yang pernah dilakukan sebelumnya dan teori yang berkaitan dengan penyelesaian masalah dalam penelitian ini.

2.1 Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian terdahulu yang dikaji dalam penelitian ini diantaranya yaitu.

1. Widodo, Dkk (2015)

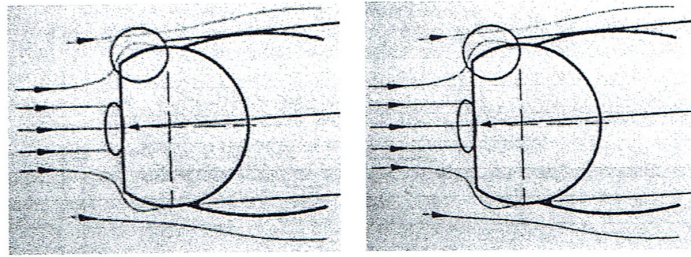
Pada penelitian ini dikaji mengenai karakteristik Aliran Lapisan Batas pada Fluida Mikrokutub Magnetohidrodinamik yang Melewati Bola Pejal, dengan berbagai parameter magnetik diperoleh profil kecepatan meningkat ketika parameter magnetik meningkat, profil mikrorotasi meningkat dengan $n = 0$ dan profil mikrorotasi menurun dengan $n = 0.5$.

2. Mohammad (2014)

Pada penelitian yang dilakukan oleh Mohammad (2014), tentang aliran lapisan batas MHD tak tunak, telah dijelaskan beberapa permasalahan yang membahas mengenai aliran konveksi paksa maupun aliran konveksi campuran pada fluida kental dan fluida mikrokutub yang melewati bola. Pada penelitian tersebut diamati pengaruh adanya medan magnet terhadap grafik kecepatan, grafik temperatur dan *skin friction*. Pada penelitian tersebut dijelaskan peningkatan nilai parameter magnetik menyebabkan lapisan batas juga akan semakin tebal. Dijelaskan juga peningkatan parameter magnetik mempengaruhi peningkatan kecepatan dan menurunnya temperatur.

3. Adhitya Nugroho (2007)

Adhitya Nugroho (2007) melakukan penelitian terhadap karakteristik aliran yang melintasi silinder teriris tipe D, menggunakan bilangan Reynolds $Re = 53000$ dan dengan variasi sudut pengirisan $\theta_s = 53^\circ$, $\theta_s = 65^\circ$. Dari penelitiannya tersebut didapatkan hasil bahwa, pada sudut pengirisan $\theta_s = 53^\circ$ terjadi multi stagnasi di beberapa titik pada bidang irisan. Dari titik stagnasi, aliran dipercepat hingga mencapai kecepatan maksimum. Aliran fluida selanjutnya mengalami perlambatan akibat *separation bubble* pada daerah pemotongan sudut kontur silinder (*leading edge*). Sedangkan pada $\theta_s = 65^\circ$ juga terjadi multistagnasi karena adanya bidang iris yang tegak lurus dengan aliran. Dari titik stagnasi aliran dipercepat hingga pada tekanan minimumnya, kemudian pada sudut perpotongan kecepatan aliran semakin tinggi.



Gambar 2.1: Spesimen Uji Silinder Teriris Tipe D. (a). Sudut Pengirisan 53° , dan (b). Sudut Pengirisan 65°

2.2 Fluida

Terdapat tiga fase zat yang tersebar di alam, yaitu fase padat, gas dan cair. Karena fase gas dan cair tidak dapat mempertahankan bentuk tetap, maka keduanya mempunyai kemampuan untuk mengalir dengan demikian keduanya disebut sebagai fluida. Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun tegangan geser tersebut (Widodo, 2012). Pada fluida mengenal adanya viskositas atau kekentalan. Berdasarkan karakteristiknya fluida cair dibagi menjadi dua yaitu fluida Newtonian dan fluida non Newtonian.

2.2.1 Fluida Newtonian

Fluida Newtonian adalah fluida yang memiliki kurva tegangan/regangan yang linier. Keunikan dari fluida Newtonian adalah fluida ini akan terus mengalir meskipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Hal ini disebabkan karena viskositas dari suatu fluida Newtonian tidak berubah ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Viskositas dari suatu fluida newton hanya bergantung pada temperatur dan tekanan. Viskositas sendiri merupakan suatu konstanta yang menghubungkan besar tegangan geser dan gradien kecepatan pada persamaan.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

dengan

$$\tau = \text{Tegangan geser pada fluida } \left(\frac{N}{m^2}\right)$$

$$\mu = \text{Viskositas fluida } \left(\frac{N}{m^2} \cdot s\right)$$

$$\frac{du}{dy} = \text{Gradien kecepatan fluida } (s^{-1})$$

2.2.2 Fluida Non Newtonian

Fluida non Newtonian adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini menyebabkan fluida non Newtonian tidak memiliki viskositas yang konstan (berkebalikan dengan fluida Newtonian) salah satu fluida yang memiliki karakter non Newtonian adalah fluida mikrokutub.

Teori mengenai fluida mikrokutub pertama kali diperkenalkan oleh Eringen (1965), yang kemudian telah menarik minat banyak peneliti untuk mengembangkan teori ini, salah satunya adalah meneliti kembali untuk memeriksa

efek mikrorotasi terhadap fluida. Fluida mikroktub adalah fluida dengan struktur mikro. Fluida mikroktub terdiri dari partikel kaku yang berorientasi secara acak dengan mikrorotasi mereka sendiri dan tergantung di media kental. Dalam fluida mikroktub, partikel kaku terkandung dalam elemen volume kecil dapat memutar pusat elemen volume dijelaskan oleh vektor mikrorotasi (Satya Narayana dkk, 2013; Uddin dan Kumar, 2013; Widodo dkk. 2016). Fluida dalam kehidupan nyata yang dapat diklasifikasikan atau dipelajari sebagai fluida mikroktub adalah cairan koloid, cairan pembuluh darah pada manusia atau hewan, suspensi polimer dan lumpur (Abdel-Rahman, 2009; Uddin dan Kumar, 2013).

Hal yang menarik dari fluida mikroktub adalah model mikroktubnya dapat disimpulkan ke dalam persamaan Navier-Stokes, yang biasanya digunakan pada fluida viskos. Hal ini karena fluida mikroktub bersifat seperti fluida viskos klasik yang sebagaimana menjauhi permukaan objeknya.

2.3 Tipe Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu

Tipe aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu:(Widodo, 2012)

1. Aliran Tunak (*Steady Flow*) Aliran tunak yaitu kecepatan aliran fluida tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Tak Tunak (*Unsteady Flow*) Aliran tak tunak yaitu kecepatan aliran fluida yang dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tak tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

2.4 Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Konsep lapisan batas pertama kali dikemukakan pada tahun 1904 oleh Ludwig Prandtl, seorang ahli aerodinamika Jerman. Sebelumnya analisa aliran fluida terbagi menjadi dua konsep dasar, yaitu aliran tanpa pengaruh gesekan yang dikemukakan oleh Leonhard Euler seorang ahli hidrodinamika pada tahun 1755. Analisa aliran tanpa gesekan dinyatakan dalam persamaan Euler. Dengan banyaknya kontradiksi pada hasil eksperimennya, persamaan Euler dijelaskan lebih rinci untuk kondisi aliran bergesekan oleh Navier pada tahun 1827, lalu oleh Stokes pada tahun 1845, yaitu persamaan Navier-Stokes.

Pengaruh gesekan akan menimbulkan lapisan batas dan akhirnya disebut sebagai lapisan batas (*Boundary layer*). Lapisan batas adalah suatu lapisan yang terbentuk disekitar penampang yang dilalui oleh fluida tersebut, karena mengalami hambatan yang disebabkan oleh beberapa faktor seperti gesekan, dan efek viskositas.

Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia

dengan viskositasnya secara garis besar terdiri dari tiga jenis aliran yaitu aliran laminar, aliran transisi, dan aliran turbulen (Widodo, 2015).

2.4.1 Aliran Laminer

Pada aliran laminar, partikel-partikel zat cair bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi apabila bilangan Reynolds kurang dari 500 ($Re < 500$) atau pada saat fluida bergerak dengan kecepatan kecil dan atau fluida memiliki viskositas (kekentalan) yang besar.

2.4.2 Aliran Transisi

Aliran transisi adalah adalah aliran yang terjadi antara aliran laminar dan turbulen. Terjadinya masa transisi antara aliran laminar dan turbulen karena adanya perubahan viskositas dan kecepatan yang menyebabkan daya redam terhadap gangguan akan berkurang hingga batas tertentu. Aliran transisi terjadi apabila bilangan Reynolds antara 500 sampai 12.500 ($500 < Re < 12.500$).

2.4.3 Aliran Turbulen

Aliran turbulen terjadi pada saat partikel-partikel zat cair bergerak secara acak atau tidak teratur. Aliran turbulen terjadi apabila bilangan Reynolds lebih dari 12.500 ($Re > 12.500$).

Bilangan Reynolds untuk suatu aliran dapat dihitung menggunakan rumus berikut:

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu} \quad (2.1)$$

dengan:

Re = bilangan Reynolds

U_{∞} = kecepatan pada aliran bebas ($\frac{m}{s}$)

a = panjang karakteristik

ν = viskositas kinematik

2.5 Magnetohidrodinamik (MHD)

Magnetohidrodinamik (MHD) (dinamika fluida magneto atau *hydro-magnetics*) adalah studi mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik (konduksi listrik) yang dipengaruhi oleh medan magnet. Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. Kata MHD berasal dari kata *magneto-* yang berarti medan magnet, *-hydro-* yang berarti cairan dan *-dynamics* yang berarti perubahan. MHD diperkenalkan dan dikembangkan oleh Hannes Alfvén seorang fisikawan yang pernah mendapatkan nobel dalam fisika pada tahun 1970. MHD berperan penting dalam fisika solar, astrofisika, fisika plasma, dan eksperimen plasma laboratorium. Himpunan persamaan yang menggambarkan MHD adalah kombinasi dari persamaan Navier-Stokes pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik (Widodo Dkk, 2015).

Bentuk ideal persamaan MHD terdiri dari persamaan fluida, yakni persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi, dan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan dasar yang dibutuhkan untuk

membuat bentuk ideal persamaan MHD:

Persamaan momentum:

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} \right) = -\nabla p + J \times B$$

Persamaan konservasi massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Persamaan konservasi energi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

Persamaan Maxwell:

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

dengan:

B = medan magnet

E = medan listrik

V = kecepatan massa plasma

J = kerapatan arus

ρ = massa jenis

p = tekanan plasma

t = waktu

μ_0 = permeabilitas ruang hampa ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$)

Pada permasalahan MHD Persamaan (2.2) pada persamaan Maxwell tidak berlaku sehingga dapat dihilangkan dan Persamaan (2.2) hanya digunakan pada kondisi awal (*initial condition*). Selain itu, untuk frekuensi/kecepatan rendah, perpindahan arus bisa diabaikan (Arber, 2013). Sehingga, persamaan umum MHD

dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2.5)$$

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} \right) = -\nabla p + J \times B \quad (2.6)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (2.8)$$

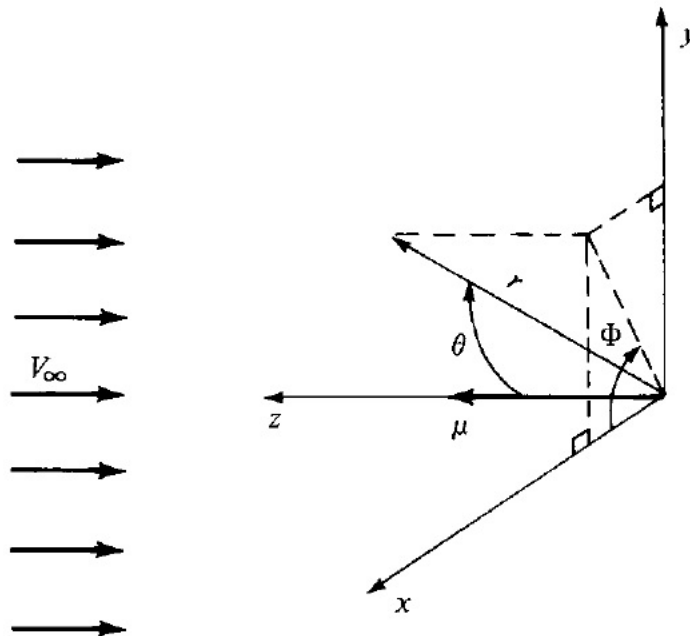
dan untuk mencari besar medan listrik, digunakan formulasi berikut:

$$E + v \times B = \eta J \quad (2.9)$$

jika $\eta = 0$ maka persamaan MHD tersebut dikatakan sebagai persamaan MHD ideal.

2.6 Aliran Bebas Bola

Aliran yang melewati bola dalam penampang 3 dimensi diilustrasikan seperti pada Gambar (2.2), dengan kecepatan seragam yaitu U_∞ pada arah z negatif yang bergerak ke arah sumbu horizontal (Anderson, 2011). Dengan koordinat bola pada aliran bebas yaitu.



Gambar 2.2: Posisi Dari Aliran Seragam dan Penampang Tiga Dimensi

$$U_r = -U_\infty \cos \theta$$

$$U_{\theta} = U_{\infty} \sin \theta$$

$$U_{\phi} = 0$$

dengan

$$U_r = -U_{\infty} \cos \theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} = -\left(U_{\infty} - \frac{\mu}{2\pi r^3}\right) \cos \theta \quad (2.10)$$

$$U_{\theta} = U_{\infty} \sin \theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} \sin \theta = \left(U_{\infty} + \frac{\mu}{4\pi r^3}\right) \sin \theta \quad (2.11)$$

$$U_{\phi} = 0 \quad (2.12)$$

Titik stagnasi diperoleh dengan mengatur $U_r = U_{\theta} = 0$ pada Persamaan (2.21) dan (2.22). Dari Persamaan (2.22) $U_{\theta} = 0$ menghasilkan $\sin \theta = 0$ sehingga titik stagnasi berada pada $\theta = 0$ dan π . Dari Persamaan (2.21) dengan $U_r = 0$ diperoleh

$$U_{\infty} - \frac{\mu}{2\pi R^3} = 0 \quad (2.13)$$

dengan $r = R$ adalah koordinat radial dari titik stagnasi. Maka diperoleh R

$$R = \left(\frac{\mu}{2\pi U_{\infty}}\right)^{1/3} \quad (2.14)$$

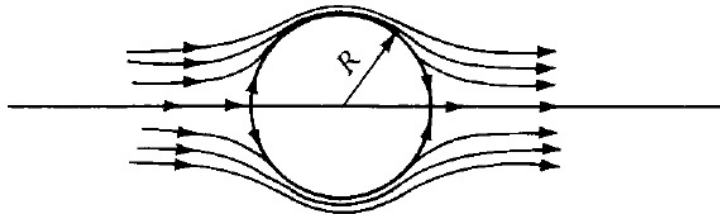
dua titik stagnasi pada sumbu koordinat z dan (r, θ) adalah

$$\left[\left(\frac{\mu}{2\pi U_{\infty}}\right)^{1/3}, 0\right] \text{ dan } \left[\left(\frac{\mu}{2\pi U_{\infty}}\right)^{1/3}, \pi\right]$$

dengan memberikan nilai $r = R$ pada Persamaan (2.21)

$$U_r = \left(U_{\infty} - \frac{\mu}{2\pi r^3}\right) \cos \theta = -\left[U_{\infty} - \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{2\pi U_{\infty}}{\mu}\right)\right] \Leftrightarrow -(U_{\infty} - U_{\infty}) \cos \theta = 0 \quad (2.15)$$

Dengan demikian, jika $U_r = 0$ ketika $r = R$ untuk semua nilai θ dan ϕ disebut aliran fluida *incompressible* yang melewati bola pejal pada radius R .



Gambar 2.3: Skema Aliran Fluida *Incompressible* Yang Melewati Bola Pejal

Pada permukaan bola, dimana $r = R$, kecepatan tangensial diperoleh

dari Persamaan (2.22) adalah

$$U_{\theta} = \left(U_{\infty} + \frac{\mu}{4\pi r^3} \right) \sin \theta \quad (2.16)$$

dari Persamaan (2.25)

$$\mu = 2\pi R^3 U_{\infty} \quad (2.17)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (2.28) ke Persamaan (2.27) diperoleh

$$U_{\theta} = \left(U_{\infty} + \frac{2\pi R^3 U_{\infty}}{4\pi r^3} \right) \sin \theta$$

atau dapat ditulis

$$U_{\theta} = \frac{3}{2} U_{\infty} \sin \theta \quad (2.18)$$

2.7 Metode Keller-Box

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana step size untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat penyelesaian persamaan diferensial parsial parabolik lebih efisien dan tepat. Penerapan metode Keller-Box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu. Berikut adalah contoh mengubah persamaan diferensial orde dua menjadi orde satu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dengan mendefinisikan

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

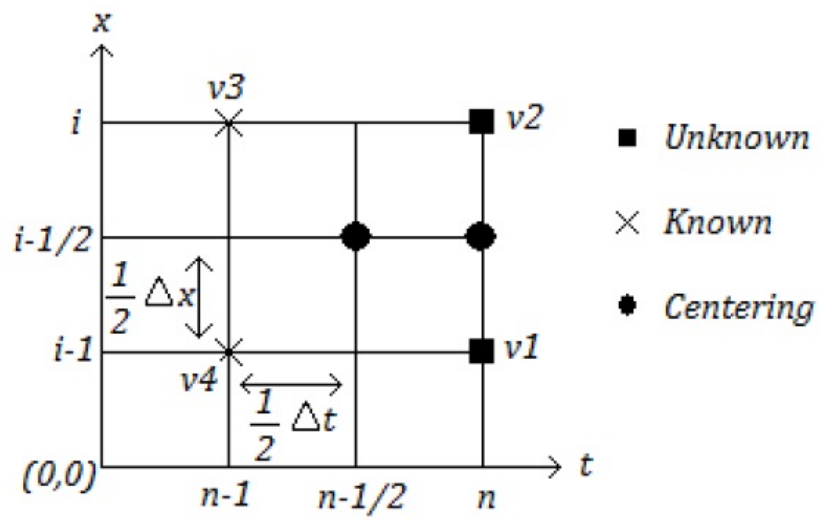
sehingga bentuk persamaan orde kedua tersebut dapat dituliskan menjadi dua persamaan orde pertama sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Berdasarkan bentuk skema Keller-Box pada Gambar 2.4 untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu yaitu sebagai berikut

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} = v_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (2.19)$$

$$2 \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t_n} = \frac{\alpha(v_i^n - v_{i-1}^n)}{\Delta x_i} + \frac{\alpha(v_i^{n-1} - v_{i-1}^{n-1})}{\Delta x_i} \quad (2.20)$$



Gambar 2.4: Stensil Skema Keller-Box

BAB III

METODA PENELITIAN

Bab ini menjelaskan mengenai tahapan dan tempat penelitian untuk menyelesaikan permasalahan magnetohidrodinamik tak tunak pada fluida mikrokutub yang melalui bola teriris. Adapun tahapan-tahapan dan tempat penelitiannya adalah sebagai berikut.

3.1 Tahapan Penelitian

Tahapan yang dilakukan pada penelitian ini diuraikan sebagai berikut.

1. Studi Literatur.

Pada tahap ini dikaji beberapa model aliran fluida mikrokutub pada lapisan batas yang mengalir melewati bola teriris dengan pengaruh magnetohidrodinamik yang telah dihasilkan dari peneliti sebelumnya dan yang akan dikaji dalam penelitian ini.

2. Pembangunan Model Matematika.

Ada beberapa tahapan yang dilakukan dalam membangun model matematika dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati bola teriris, yaitu sebagai berikut.

- i.** Penurunan Persamaan konversi massa dan hukum Newton II untuk mendapatkan persamaan pembangun.
- ii.** Penjabaran persamaan pembangun dalam bentuk vektor sehingga didapatkan persamaan pembangun berdimensi dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati bola teriris.
- iii.** Menentukan kondisi batas dengan mengamati aliran yang melewati bola teriris saat fluida melewati permukaan irisan bola karena penelitian ini difokuskan pada lapisan batas disekitar titik stagnasi $x = 0^\circ$.
- iv.** Persamaan pembangun yang berdimensi disederhanakan dan ditransformasikan ke dalam bentuk non-dimensional dengan mensubstitusikan variabel-variabel tak berdimensi.
- v.** Persamaan tak berdimensi disederhanakan dengan pendekatan lapisan batas.
- vi.** Mengubah non-dimensional ke persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir (*stream function*) pada bola teriris.
- vii.** Diperoleh persamaan similaritas magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati

bola teriris adalah sebagai berikut.

Untuk Waktu Kecil

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + \frac{3}{2}\lambda t \left[1 - (f')^2 + ff'' \right] + Kh' + Mt(1 - f') = t \frac{\partial f'}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$(1 + K/2)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}\lambda t(fh' - hf') = t \frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + f'') \quad (3.2)$$

Untuk Waktu Besar

$$(1 + K)V' + \frac{3}{2\cos\alpha}[1 - U^2 + FV] + KQ + M(1 - U) = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$(1 + K/2)Q' + \frac{1}{2}H + \frac{3}{2\cos\alpha}(FQ - HU) = \frac{\partial H}{\partial t} + K(2H + V) \quad (3.4)$$

3. Implementasi Dengan Menggunakan Metode Keller-Box.

Tahapan-tahapan penyelesaian dengan menggunakan metode Keller-Box adalah sebagai berikut.

- i.** Persamaan (3.1) sampai Persamaan (3.4) diubah kedalam persamaan orde satu.
- ii.** Dilakukan diskritisasi dengan menggunakan beda hingga pusat.
- iii.** Dilakukan linearisasi persamaan yang didapat dengan menggunakan metode Newton dan dibentuk dalam matriks vektor.
- iv.** Hasil linearisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

4. Running Program dan Verifikasi.

Didapatkan solusi numerik terbaik dari aliran fluida mikroktub pada lapisan batas yang mengalir melewati bola teriris

5. Simulasi.

Dilakukan simulasi numerik dengan memberikan inputan berupa variasi medan magnet, variasi parameter bahan dan variasi sudut potong kemudian melakukan pencatatan hasil simulasi.

6. Analisis Hasil dan Pembahasan.

Menganalisa hasil dari simulasi numerik melihat bagaimana pengaruh variasi medan magnet dan variasi sudut potong terhadap profil kecepatan fluida dan profil mikrorotasi partikel fluida mikroktub pada lapisan batas yang mengalir melewati bola teriris.

7. Pembuatan Laporan Tesis.

8. Laporan Tesis Diseminasikan.

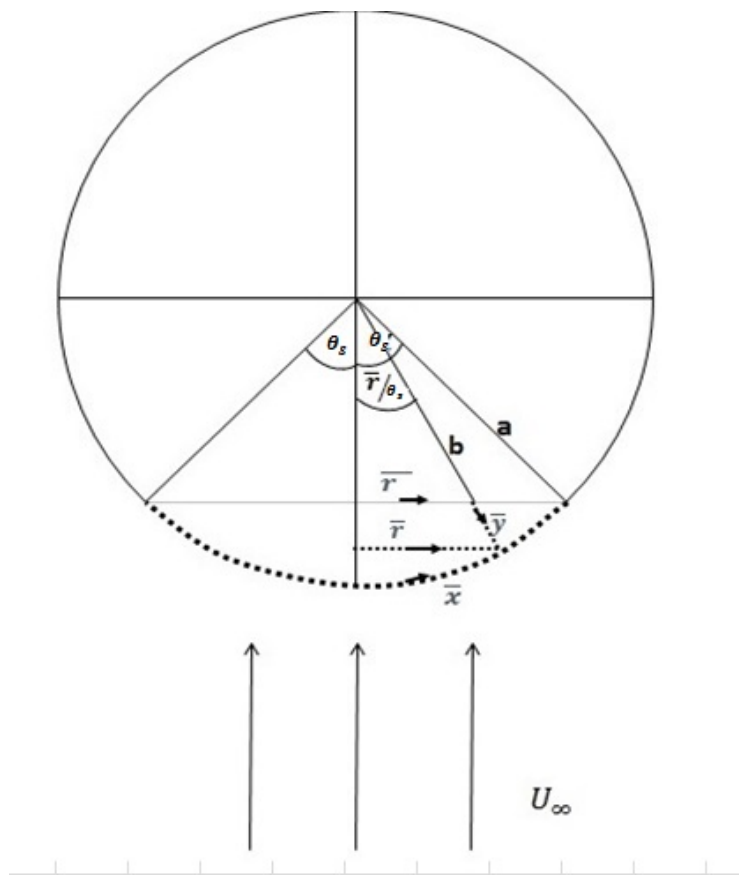
3.2 Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

BAB IV

MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai proses didapatkannya model matematika lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida mikrokutub tak tunak yang mengalir melewati bola teriris. Diasumsikan bahwa aliran fluida dari bawah keatas dengan permukaan teririsnya menghadap pada aliran fluida. Kecepatan aliran fluida mikrokutub saat sebelum melewati bola teriris adalah U_∞ dengan kecepatan seragam. Saat fluida mikrokutub melewati bola teriris maka akan membentuk suatu lapisan batas. Lapisan batas ini terbentuk di sekitar permukaan bola, yang disebabkan karena adanya gesekan permukaan fluida mikrokutub dengan permukaan bola teriris dan juga terbentuk akibat efek viskositas fluida. Pada penelitian ini lapisan batas yang diteliti adalah lapisan batas di sekitar titik stagnasi $x = 0^\circ$. Titik stagnasi adalah titik dimana lapisan batas berada paling dekat dengan permukaan benda. Dari fenomena, asumsi dan batasan masalah maka dibuat pemodelan matematika dari lapisan batas yang terbentuk di dekat permukaan bola. Pada penelitian ini model matematika diperoleh dari hasil penurunan hukum konservasi massa yaitu berupa persamaan kontinuitas, dan hukum II Newton yang berupa persamaan momentum linier dan persamaan momentum angular. Berbeda dengan jenis fluida pada umumnya, persamaan momentum pada aliran lapisan batas dalam kasus fluida mikrokutub ada 2 yaitu persamaan momentum linier dan momentum angular. Digunakan persamaan momentum angular karena fluida mikrokutub memiliki karakter unik yaitu gerak mikrorotasi, jadi selain aliran fluida bergerak melewati bola teriris, elemannya kaku pada aliran fluida mikrokutub juga dapat bergerak rotasi. Saat aliran fluida menyentuh permukaan bola teriris kecepatannya mendekati nol, tetapi belum tentu dengan kecepatan mikrorotasinya. Kecepatan mikrorotasi pada partikel fluida mikrokutub saat di dekat permukaan bola sangat dipengaruhi oleh kepekaan dari fluida mikrokutub itu sendiri sehingga sangat menarik untuk dikaji. Proses selanjutnya yaitu persamaan yang diperoleh kemudian ditransformasikan ke bentuk model matematika yang tak berdimensi, proses ini bertujuan untuk menghilangkan satuan-satuan dari model yang diperoleh agar memudahkan proses komputasi sehingga dalam hal ini saat variabel sudah tidak berdimensi lagi yaitu hanya berupa nilai-nilai perbandingan saja, kemudian dilakukan pendekatan lapisan batas karena diasumsikan lapisan batas yang terbentuk sangat tipis. Setelah itu diperkenalkan pada fungsi alir yang berupa variabel yang mewakili komponen kecepatan u dan komponen kecepatan v yang bertujuan untuk menyederhanakan banyaknya variabel sehingga memudahkan proses komputasinya. Langkah terakhir yaitu diubah ke bentuk similaritas yang merupakan persamaan yang telah mewakili kondisi aliran lapisan batas yang terbentuk saat aliran fluida mikrokutub melewati bola teriris di sekitar titik stagnasi $x = 0$. Berikut adalah gambaran dari model fisik dan koordinat bola saat fluida mikrokutub melewati bola teriris.



Gambar 4.1: Model Fisika Dan Koordinat Saat Fluida Mikroktub Melewati Bola Teriris

Kondisi fisis yang dimaksud yaitu berupa kecepatan aliran fluida sebelum melewati bola teriris U_∞ dan medan magnet yang bekerja pada aliran dalam hal ini magnet dapat memperlambat ataupun mempercepat aliran fluida sehingga nantinya akan mempengaruhi momentum dari aliran lapisan batas. Kemudian untuk koordinat bola terdiri dari sudut pengirisan (θ_s), sudut pengamatan (x), jarak daerah pengamatan terhadap permukaan bola teriris (y), jari-jari bola teriris (a)

4.1 Persamaan Pembangunan Model Matematika

Persamaan pembangunan adalah persamaan yang diuraikan dari lapisan batas yang terbentuk didekat permukaan bola teriris akibat dari aliran fluida mikroktub yang melewati bola teriris. Persamaan pembangunan yang digunakan didapatkan dari Hukum Kekekalan Massa dan Hukum II Newton. Berikut adalah uraian untuk persamaan pembangunan yang digunakan dalam membangun model.

4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Konsep dari hukum konservasi massa yaitu laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem sama dengan nol atau jumlah massa dalam suatu

sistem adalah konstan. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{Dm_{\Omega}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dengan $\frac{D()}{Dt}$ adalah turunan material dan m_{Ω} adalah massa sistem.

$$m_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho dx \quad (4.2)$$

Persamaan (4.2) menyatakan massa dari suatu sistem merupakan jumlahan dari seluruh perkalian kerapatan yang merupakan unsur volume dari sistemnya. Dengan ρ adalah kerapatan atau densitas dan x adalah volume fluida. Dengan menggunakan teorema pengangkutan reynold, laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{Dm_{\Omega}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dx + \int_{cs} \rho \hat{n} \cdot \mathbf{u} dS \quad (4.3)$$

dapat ditulis

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dx + \int_{cs} \rho \hat{n} \cdot \mathbf{u} dS \quad (4.4)$$

Dengan \mathbf{u} adalah komponen kecepatan fluida $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ dan \hat{n} adalah vektor normal terhadap elemen dS . Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.3) ke Persamaan (4.1) maka diperoleh persamaan berikut

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dx + \int_{cs} \rho \hat{n} \cdot \mathbf{u} dS = 0 \quad (4.5)$$

Berikut adalah kontrol volume yang digunakan untuk menggambarkan elemen kecil pada sistem, dengan pusat elemen terdapat ρ yang merupakan densitas fluida dan komponen kecepatan \mathbf{u} pada arah u, v dan w , maka laju perubahan massa elemen kecil terhadap waktu yaitu.

a. jumlah aliran massa pada sumbu- x

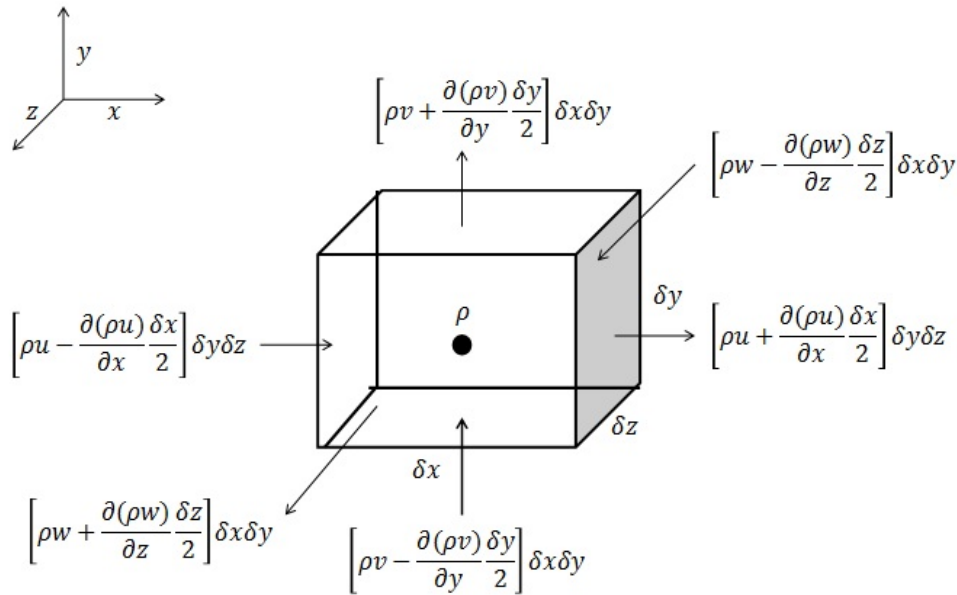
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z = \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z$$

b. jumlah aliran massa pada sumbu- y

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z = \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z$$

c. jumlah aliran massa pada sumbu- z

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z = \left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y$$



Gambar 4.2: Aliran fluida masuk dan keluar kontrol volume

dengan demikian total aliran massa pada kontrol surface adalah

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$$

maka laju perubahan massa terhadap waktu adalah

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z = 0$$

dengan membagi persamaan dengan $\delta x \delta y \delta z$ maka

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = 0$$

karena dalam penelitian ini telah diasumsikan kecepatan aliran fluida \mathbf{u} merupakan kecepatan aliran dua dimensi yaitu pada arah sumbu- x dan arah sumbu- y maka persamaan dapat ditulis.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

kemudian ditulis sebagai notasi vektor sebagai berikut.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

karena pada penelitian ini telah diasumsikan bahwa fluida mikrokutub yang digunakan adalah *incompressible* artinya densitas fluida tidak bergantung terhadap perubahan waktu

$$\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (4.6)$$

4.1.2 Persamaan Momentum Linier

Rumus momentum linear adalah massa dikalikan kecepatan, dan hukum II Newton menyatakan besarnya momentum terhadap perubahan waktu sama dengan jumlahan gaya yang bekerja pada sistem. Secara matematis hukum II Newton dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{D}{Dt} \int_{\omega} \rho \mathbf{u} dx = \Sigma F$$

dengan ρ adalah densitas \mathbf{u} adalah kecepatan, dan ΣF adalah jumlahan gaya yang bekerja pada sistem. Dengan menggunakan teorema transport reynold, laju perubahan momentum terhadap waktu adalah sebagai berikut.

$$\frac{D}{Dt} \int_{\omega} \rho \mathbf{u} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathbf{u} dx + \int_{cs} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dS$$

atau dapat ditulis

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathbf{u} dx + \int_{cs} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dS = \Sigma F$$

kemudian ditulis kedalam notasi vektor sebagai berikut

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) = \Sigma F$$

Berdasarkan pada sifat konvergensi $\nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. Karena $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ maka $\nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ sehingga dapat ditulis sebagai berikut.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = F_s + F_a + F_{mag}$$

Pada penelitian ini gaya yang bekerja pada sistem secara kontinu ada 2 jenis yaitu gaya eksternal dan gaya internal. Gaya eksternal yang bekerja yaitu gaya magnetik (F_{mag}), sementara gaya internal yang bekerja pada sistem yaitu gaya permukaan (F_s) dan gaya angular (F_a).

a. Gaya magnetik

Gaya magnetik atau dapat dinyatakan sebagai gaya Lorentz yang bekerja pada aliran fluida di tulis sebagai \mathbf{F}_{mag} dapat dinyatakan dengan rumus berikut.

$$\mathbf{F}_{mag} = \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.7)$$

dengan \mathbf{E} adalah medan listrik, \mathbf{J} massa jenis arus, dan \mathbf{B} adalah total medan

magnet. Untuk massa jenis arus dapat dituliskan

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (4.8)$$

σ adalah konduktivitas listrik. Kemudian Persamaan (4.28) ke persamaan (4.27) diperoleh

$$\mathbf{F}_{mag} = \mathbf{E} + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.9)$$

P penelitian ini telah diasumsikan bahwa pada aliran fluida tidak ada tegangan listrik maka dapat dinyatakan dengan $\mathbf{E} = 0$ sehingga Persamaan (4.8) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{F}_{mag} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

selanjutnya dengan menggunakan vektor identitas maka persamaan dapat ditulis

$$\mathbf{F}_{mag} = \sigma\{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{u}\} = \sigma\{(\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{B}\|\cos\theta_{\mathbf{uB}})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{u}\}$$

dengan \mathbf{B} adalah total medan magnet yang merupakan jumlahan dari medan magnet yang digunakan yaitu B_0 dan \mathbf{b} adalah medan magnet yang terinduksi sehingga dengan demikian dapat ditulis

$$\mathbf{B} = \mathbf{b} + B_0$$

karena pada penelitian ini telah diasumsikan bilangan Reynold magnetiknya sangat kecil maka induksi medan magnet \mathbf{b} dapat dihilangkan, sehingga medan magnet \mathbf{B} dapat ditulis

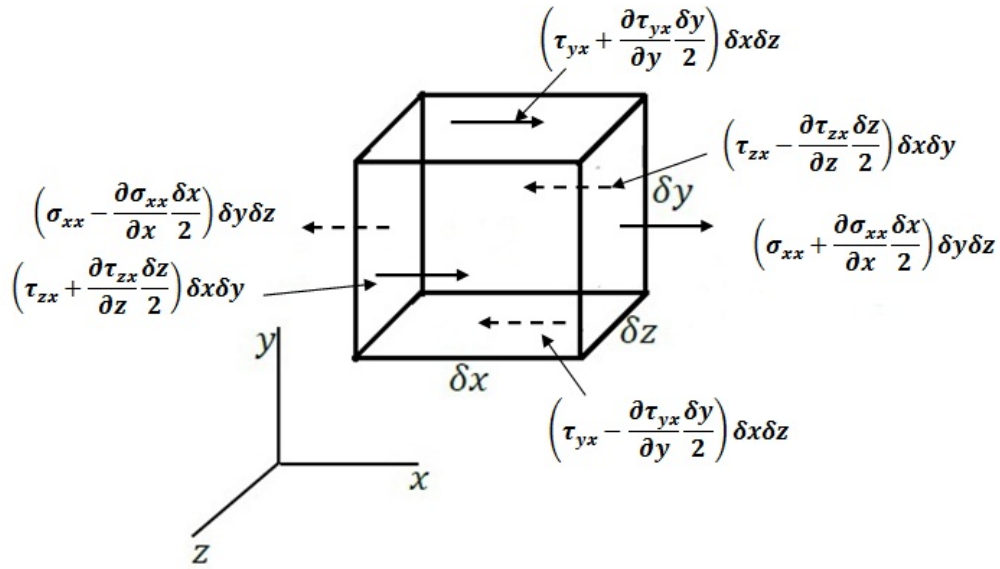
$$\mathbf{B} = B_0$$

telah diketahui gaya Lorentz $\theta_{\mathbf{vB}} = \pi/2$, maka dengan demikian diperoleh gaya magnet (\mathbf{F}_{mag}) yang dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathbf{F}_{mag} = -\sigma B_0^2 \mathbf{u} \quad (4.10)$$

b. Gaya permukaan

Gaya permukaan merupakan gaya internal yang bekerja pada fluida yaitu berupa tegangan-tegangan. diantaranya tegangan normal(σ) dan tegangan geser (τ) yang dapat dipeoleh dari kontrol surface berikut.



Gambar 4.3: Gaya-gaya Permukaan Yang Bekerja Pada Elemen Fluida

i. Gaya pada arah sumbu-x

$$F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z$$

ii. Gaya pada arah sumbu-y

$$F_{sy} = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z$$

Resultan gaya permukaan yaitu

$$F_s = F_{sx}i + F_{sy}j$$

$$F_s = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) i + \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) j$$

Karena dalam penelitian ini telah diasumsikan bahwa fluida mikroktub bersifat *incompressible* sehingga tegangan berbanding lurus terhadap laju deformasi, yang dapat ditulis.

i Tegangan normal

$$\sigma_{xx} = -p + 2(\mu + \kappa) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2(\mu + \kappa) \frac{\partial v}{\partial y}$$

ii Tegangan geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

dengan turunan σ_{xx} terhadap x

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-p + 2(\mu + \kappa) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{-\partial p}{\partial x} + 2(\mu + \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Turunan σ_{yy} terhadap y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-p + 2(\mu + \kappa) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{-\partial p}{\partial y} + 2(\mu + \kappa) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Turunan τ_{yx} terhadap x

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \kappa) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned}$$

Turunan τ_{xy} terhadap y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \kappa) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

sehingga didapatkan resultan gaya permukaan pada elemen fluida yaitu

$$\begin{aligned} F_s &= \left(\frac{-\partial p}{\partial y} + 2(\mu + \kappa) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) i + \left(\frac{-\partial p}{\partial x} + 2(\mu + \kappa) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) j \end{aligned}$$

karena persamaan kontiuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

maka resultan gaya permukaan dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
F_s &= \left(\frac{-\partial p}{\partial x} + (\mu + \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) i + \left(\frac{-\partial p}{\partial y} + (\mu + \kappa) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\
&\quad \left. + (\mu + \kappa) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) j \\
&= \left(\frac{-\partial p}{\partial x} i + \frac{-\partial p}{\partial y} j \right) + \left(\left((\mu + \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) i + \left((\mu + \kappa) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\mu + \kappa) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) j \right) \\
&= -\nabla p + (\mu + \kappa) \nabla^2 \mathbf{u}
\end{aligned}$$

p adalah tekanan. Tanda negatif dipilih saat $p > 0$ yang merepresentasikan tekanan yang diberikan dari luar permukaan elemen fluida. Tekanan ini timbul akibat adanya pengaruh gaya yang diberikan terhadap permukaan fluida.

c. Gaya angular

$$F_a = \rho f + \kappa(\nabla \times N) \quad (4.11)$$

dengan demikian persamaan momentum adalah

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + (\mu + \kappa) \nabla^2 \mathbf{u} + \rho f + \kappa(\nabla \times N) - \sigma B_0^2 \mathbf{u}$$

untuk aliran fluida mikro kutub incompressible koefisien material bernilai konstan maka $\mu > 0$ dan gaya $f = 0$ (Kucaba-Pietal, 2004), maka Persamaan (4.35) menjadi,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + (\mu + \kappa) \nabla^2 \mathbf{u} + \kappa(\nabla \times N) - \sigma B_0^2 \mathbf{u} \quad (4.12)$$

4.1.3 Persamaan Momentum Angular

Setiap benda yang bergerak pasti memiliki momentum. Dalam penelitian ini fluida mikrokutub saat mengalir melalui bola teriris tidak hanya memiliki momentum linier tetapi juga memiliki momentum angular karena fluida mikrokutub merupakan fluida dengan struktur mikro yang didalamnya terdapat partikel-partikel kaku yang tersebar secara acak pada media kental, partikel-partikel tersebut memiliki kemampuan gerak mikro rotasi yang dapat mempengaruhi aliran fluida. Prinsip dari persamaan yang dapat merepresentasikan gerak mikro rotasi tersebut didapatkan dari hukum II Newton dan momentum linier.

Dalam fisika momentum sudut secara intuitif mengukur berapa besar momentum linier yang diarahkan disekitar suatu titik tertentu yang disebut titik pusat. Berdasarkan Persamaan (4.17) yang merupakan persamaan kekekalan momentum linier, maka untuk persamaan kekekalan momentum angular dapat

diperoleh dengan.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x \times \mathbf{u}) dx \quad (4.13)$$

dengan Persamaan (4.6), maka persamaan (4.37) dapat ditulis

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{D}{Dt} (x \times \mathbf{u}) dx = \int_{\Omega(t)} \rho \left(x \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) \quad (4.14)$$

dari Persamaan (4.37) dan Persamaan (4.38) maka dapat ditulis

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x \times \mathbf{u}) dx = \int_{\Omega(t)} \rho(x \times f) dx + \int_{\partial\Omega(t)} x \times t_n dS \quad (4.15)$$

dengan x adalah posisi dari partikel yang dinyatakan sebagai vektor perpindahan dari titik pusat. Dengan teorema green maka,

$$\int_{\partial\Omega(t)} x \times t_n dS = \int_{\Omega(t)} (x \times (\nabla \cdot T) + T_x) dx \quad (4.16)$$

dimana $\nabla \cdot T$ adalah notasi lain dari $\text{div } T$, dan T_x adalah vektor $\varepsilon_{ijk} T_{jk}$ (ε_{ijk} adalah tensor alternatif dari Levi-Civita), sehingga dengan Persamaan (4.40) dapat ditulis,

$$\int_{\Omega(t)} x \times \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho f - \nabla \cdot T \right) dx = \int_{\Omega(t)} T_x dx \quad (4.17)$$

Pada penelitian ini digunakan fluida mikrotub maka diberikan g yang merupakan *body torque* per satuan massa yang ditambahkan pada tekanan f , dan pasangan tekanan c_n yang ditambahkan pada tekanan normal t_n . Keseimbangan dari momentum total didefinisikan sebagai berikut,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(l + x \times \mathbf{u}) dx = \int_{\Omega(t)} \rho(g + x \times f) dx + \int_{\Omega(t)} (c_n + x \times t_n) dS \quad (4.18)$$

dengan t_n dapat ditulis sebagai $n \cdot T$ dan c_n dapat ditulis sebagai $n \cdot C$, dimana C adalah tensor yang disebut sebagai pasangan tegangan tensor. Maka Persamaan (4.42) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(l + x \times \mathbf{u}) dx = \int_{\Omega(t)} (\rho g + \rho x \times f + \nabla \cdot C + x \times (\nabla \cdot T) + T_x) dx \quad (4.19)$$

Sehingga persamaan total momentum angular dapat ditulis

$$\rho \frac{D}{Dt} (l + x \times \mathbf{u}) = \rho g + \rho x \times f + \nabla \cdot C + x \times (\nabla \cdot T) + T_x \quad (4.20)$$

Dari perkalian vektor x dan persamaan Cauchy maka,

$$\rho \left(x \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) = \rho \frac{D}{Dt} (x \times \mathbf{u}) = \rho x \times f + x \times (\nabla \cdot T) \quad (4.21)$$

Persamaan (4.45) dapat ditulis

$$\rho \frac{Dl}{Dt} = \rho g + \nabla \cdot C + T_x \quad (4.22)$$

Diasumsikan momentum angular internal per satuan massa dapat ditulis sebagai vektor dengan komponen l_i , $i = 1, 2, 3$ dimana $l_i = I_{ik} \omega_k$. Pada penelitian ini digunakan fluida mikro kutub isotropik sehingga jika

$$I_{ik} = I \delta_{ik} \quad (4.23)$$

dimana I adalah skalar yang disebut sebagai koefisien mikro inersia, dengan demikian karena fluida yang digunakan adalah mikro kutub isotropik maka Persamaan (4.46) dapat direduksi menjadi,

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \rho g + \nabla \cdot C + T_x \quad (4.24)$$

Vektor ω disebut sebagai mikrorotasi dan merepresentasikan kecepatan angular dari rotasi partikel pada fluida mikro kutub.

Fluida mikro kutub didefinisikan sebagai fluida isotropik dengan *couple stress tensor* C sehingga $C = C_{i,j}$.

$$C_{ij} = c_0 \omega_{k,k} \delta_{ij} + c_d (\omega_{i,j} + \omega_{j,i}) + c_a (\omega_{i,j} + \omega_{j,i})$$

atau dapat ditulis

$$C_{ij} = \theta \omega_{k,k} \delta_{ij} + \beta \omega_{i,j} + \zeta \omega_{j,i} \quad (4.25)$$

persamaan non-simetrinya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \theta N_{k,ki} + \beta N_{i,ik} + \zeta N_{i,kk} + e_{jik} \left[(-p + \lambda N_{l,l}) \delta_{i,k} + (\mu - \kappa) d_{ik} \right. \\ &\quad \left. + 2\kappa (N_{k,i} - e_{ikl}) \right] \\ &= (\theta + \beta + \zeta) (N_{i,i})_j + 2\kappa e_{jik} N_{k,1} - 4\kappa N_j \end{aligned}$$

dengan menggunakan notasi vektor gibbsian dapat ditulis (Kumar, 1984).

$$\nabla C = \gamma \nabla^2 N + 2K \nabla \times N - \kappa N$$

setelah diperoleh persamaan non-simetri tensor maka dilakukan substitusi kedalam persamaan (4.48)

$$\rho j \frac{DN}{Dt} = \gamma \nabla^2 N + \kappa (-2N + \nabla \times u) \quad (4.26)$$

4.1.4 Penurunan Persamaan Pembangun Model

Penurunan persamaan pembangun merupakan penjabaran persamaan pembangun yang diperoleh dari persamaan pembangun model yang telah diasumsikan bahwa aliran fluida mikro kutub yang melalui bola teriris merupakan aliran dua dimensi bergerak ke arah sumbu-x dan sumbu-y, dengan demikian dapat

dibentuk persamaan yang disajikan dalam bentuk vektor yaitu sebagai berikut.

a Persamaan Kontinuitas Berdasarkan Persamaan (4.13) yaitu

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Persamaan kontinuitas untuk aliran fluida mikroktub yang melewati bola teriris dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

b Persamaan Momentum Linier

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + (\mu + \kappa) \nabla^2 \mathbf{u} + \kappa (\nabla \times \mathbf{N}) - \sigma B_0^2 \mathbf{u} \quad (4.27)$$

Persamaan momentum linier untuk aliran fluida mikroktub yang melewati bola teriris dapat dijabarkan bagian demi bagian agar lebih rinci dengan berdasarkan aliran yang bergerak ke arah sumbu- x dan sumbu- y sebagai berikut .

i Ruas kiri Persamaan (4.27) untuk $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \hat{j} \end{aligned}$$

ii Ruas kiri Persamaan (4.27) untuk $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) &= \left((\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \hat{j} \right) \right) (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{v} \right) (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ &= \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ &= \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \hat{i} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \hat{i} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \hat{j} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \hat{j} \end{aligned}$$

iii. Ruas kanan Persamaan (4.27) untuk ∇p

$$\begin{aligned} \nabla p &= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{j} \right) p \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \bar{j} \right) \end{aligned}$$

iv. Ruas kanan Persamaan (4.27) untuk $(\mu + \kappa)(\nabla^2 \mathbf{u})$

$$\begin{aligned}
(\mu + \kappa)(\nabla^2 \mathbf{u}) &= (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \hat{j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \hat{j} \right) (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\
&= (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \bar{y}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right) (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\
&= (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \hat{i} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \hat{j} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \bar{y}} \hat{i} + 2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \bar{y}} \hat{j} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \hat{i} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \hat{j} \right) \\
&= (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \hat{i} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \hat{j}
\end{aligned}$$

v. Ruas kanan Persamaan (4.27) untuk $\sigma B_0^2 \mathbf{u}$

$$\begin{aligned}
\sigma B_0^2 \mathbf{u} &= \sigma B_0^2 (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\
&= \sigma B_0^2 \bar{u} \hat{i} + \sigma B_0^2 \bar{v} \hat{j}
\end{aligned}$$

kemudian dengan mengelompokkn vektor \hat{i} untuk sumbu- x dan vektor \hat{j} untuk sumbu- y maka diperoleh,

Persamaan momentum sumbu- x

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{u}$$

Persamaan momentum sumbu- y

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} - \sigma B_0^2 \bar{v}$$

c Persamaan Momentum Angular

$$\rho j \frac{DN}{Dt} = \gamma \nabla^2 N + \kappa (-2N + \nabla \times \mathbf{u}) \quad (4.28)$$

N adalah daerah mikrorotasi dengan vektor $N = (0, 0, \bar{N})$, κ adalah konstanta material, j sebagai densitas mikroinersia dan γ adalah gradien viskositas, sehingga dapat ditulis

$$\rho j \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

Berdasarkan proses penjabaran untuk aliran fluida yang bergerak ke sumbu- x dan ke sumbu- y maka didapatkan persamaan aliran fluida mikrokatub saat melewati permukaan irisan bola adalah sebagai berikut.

1. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{r} \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r} \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.29)$$

2. Persamaan momentum linier sumbu-x

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{u} \quad (4.30)$$

3. Persamaan momentum linier sumbu-y

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} - \sigma B_0^2 \bar{v} \quad (4.31)$$

4. Persamaan momentum angular

$$\rho j \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (4.32)$$

Dengan kondisi awal dan kondisi batas yaitu

$$\begin{aligned} \bar{t} < 0 : \bar{u} = \bar{v} = \bar{N}, \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y} \\ \bar{t} \geq 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \text{ pada saat } \bar{y} = 0 \\ \bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{N} = 0, \text{ pada saat } \bar{y} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dimana $\bar{u}_e = \frac{3}{2} U_\infty \sin\left(\frac{\bar{x}}{b}\right)$

4.1.5 Transformasi Variabel Tak Berdimensi

Proses ini bertujuan untuk menghilangkan satuan-satuan pada model yang diperoleh agar dapat memudahkan proses komputasi. Sehingga pada variabel-variabel tak berdimensi hanya akan berupa nilai-nilai perbandingan. Pada penelitian

ini variabel tak berdimensi yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\bar{x}}{a} \\
 y &= Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a} \\
 u &= \frac{\bar{u}}{U_\infty} \\
 v &= Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty} \\
 t &= \frac{U_\infty \bar{t}}{a} \\
 p &= \frac{\bar{p}}{\rho U_\infty^2} \\
 b &= \frac{\bar{b}}{a} \\
 r &= \frac{\bar{r}}{a}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

dengan $Re = \frac{U_\infty a}{\nu}$, dan ν merupakan viskositas kinematik yang dapat ditulis sebagai $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, dan γ adalah gradien viskositas yang dapat dinyatakan dengan $\gamma = \mu + K/2$ (Ali,2010). Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.33) ke Persamaan (4.29)-(4.32) diperoleh persamaan tak berdimensi sebagai berikut .

a. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \tag{4.34}$$

b. Persamaan Momentum Sumbu-x

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 &+ K \frac{\partial N}{\partial y} - Mu
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

c. Persamaan Momentum Sumbu-y

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1+K}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
 &- \frac{K}{Re} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{M}{Re} v
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

d. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = & (1 + K/2) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ & - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

dengan

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \\ K &= \frac{\kappa}{\mu} \\ N &= Re^{-1/2} \frac{a \bar{N}}{U_\infty} \end{aligned}$$

dimana M adalah parameter magnetik, K adalah parameter bahan dan N adalah parameter mikrorotasi yang merupakan parameter-parameter tak berdimensi (Mohammad, 2014). Dengan kondisi awal dan kondisi batas yaitu

$$\begin{aligned} t < 0 : u = v = N, \text{ untuk setiap } x, y \\ t \geq 0 : u = v = 0, N = -n \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ pada saat } y = 0 \\ u = u_e(x), N = 0, \text{ pada saat } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dengan $u_e = \frac{3}{2} \sin \left(\frac{\cos x}{\cos \theta_s} x \right)$

4.1.6 Pendekatan Lapisan Batas

Dengan menggunakan pendekatan lapisan batas, dimana $Re \rightarrow \infty$ dengan demikian $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$ artinya lapisan batas yang terbentuk sangat tipis, maka diperoleh persamaan baru yaitu sebagai berikut.

a. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (4.38)$$

b. Persamaan Momentum Linier Sumbu-x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - Mu \quad (4.39)$$

c. Persamaan Momentum Linier Sumbu-y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.40)$$

d. Persamaan Momentum Angular

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = (1 + K/2) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.41)$$

Dari pendekatan lapisan batas yang diperoleh, Persamaan (4.64) menyatakan bahwa kecepatan pada arah sumbu- x tidak dipengaruhi oleh tekanan, sehingga dalam hal ini dapat disimpulkan bahwa untuk persamaan momentum aliran fluida mikrokutub yang melewati bola teriris hanya terdiri dari persamaan momentum sumbu- x . Sehingga untuk persamaan momentum aliran bebas dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - M u_e \quad (4.42)$$

Untuk kecepatan aliran bebas $u_e = \frac{3}{2} \sin \left(\frac{\cos x}{\cos \alpha} x \right)$. Sebagai aliran bebas pada lapisan batas yang melewati bola teriris sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial u_e}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_e}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Selanjutnya Persamaan (4.43) disubstitusikan kedalam sistem persamaan (4.39) diperoleh,

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial x} - M u_e$$

dapat ditulis

$$- \frac{\partial P}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M u_e$$

Persamaan (4.72) disubstitusikan pada Persamaan (4.66)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left(u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M u_e \right) + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - M u \quad (4.44)$$

Sehingga diperoleh persamaan momentum aliran bebas sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - M(u - u_e)$$

4.1.7 Fungsi Arus (*Stream Function*)

Untuk memudahkan proses komputasi maka diperkenalkan fungsi arus atau (*stream function*) yang berfungsi untuk menyederhanakan banyaknya variabel dari persamaan-persamaan yang telah diperoleh untuk diubah menjadi satu variabel. Karena dalam penelitian ini diasumsikan aliran fluida mikroktub yang melewati bola teriris merupakan aliran fluida dua dimensi yaitu aliran fluida yang melewati sumbu- x dan yang melewati sumbu- y maka terdapat dua komponen kecepatan yaitu komponen kecepatan u dan komponen kecepatan v , untuk menghubungkan kedua komponen kecepatan maka diperkenalkan fungsi arus. Sehingga untuk masing-masing komponen kecepatan adalah sebagai berikut

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.45)$$

dan

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.46)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.45) dan Persamaan (4.46) kedalam Persamaan (4.38), (4.39), dan (4.41) maka diperoleh persamaan-persamaan berikut.

a. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (4.47)$$

b. Persamaan Momentum Linier

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{du_e}{dx} \\ + (1+K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} + M \left(u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

c. Persamaan Momentum Angular

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} = (1+K/2) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (4.49)$$

Dengan kondisi awal dan kondisi batas yaitu

$$\begin{aligned} t < 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = N, \text{ untuk setiap } x, y \\ t \geq 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, N = -n \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \text{ pada saat } y = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x), N = 0, \text{ pada saat } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$u_e = \frac{3}{2} \sin \left(\frac{\cos x}{\cos \theta_s} x \right)$$

4.1.8 Persamaan Similaritas

Saat fluida mengalir maka akan terbentuk lapisan batas dengan ketebalan $O(\nu t)^{\frac{1}{2}}$ (Mohammad, 2013). Persamaan similaritas sangat diperlukan untuk mengetahui solusi waktu yang kecil ($t \leq t^*$) dan waktu yang besar ($t > t^*$) dengan sebarang nilai t . Persamaan similaritas pada persamaan (4.47) dihilangkan dari fungsi arus karena tidak memberi informasi yang signifikan, dalam hal ini kontinuitas kecepatan u dan kontinuitas kecepatan v adalah sama. Sehingga persamaan pembangun hanya terdiri dari persamaan momentum linier dan persamaan momentum angular.

a. Untuk waktu yang kecil

Variabel similaritas untuk waktu yang kecil yaitu

$$\Psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)$$

dengan $\eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}}$ dan $N = t^{1/2} u_e(x) h(x, \eta, t)$

Dengan mensubstitusikan persamaan tersebut kedalam persamaan momentum linier dan persamaan momentum angular maka diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} (1+K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{du_e}{dx} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\ = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

dan

$$\begin{aligned} (1+K/2) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{2} h + t \frac{du_e}{dx} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \right) \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ = t \frac{\partial h}{\partial t} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + t K \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Saat aliran melewati titik stagnasi ($x = 0^\circ$) diperoleh $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2 \cos \theta_s}$. Sehingga persamaan similaritas direduksi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (1+K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \lambda t \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \\ + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \end{aligned} \quad (4.52)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{2} h + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \lambda t \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\ = t \frac{\partial h}{\partial t} + t K \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Dimana $\lambda = 1$ pada saat melewati titik stagnasi, dan $\lambda = -1$ pada saat melewati titik terjauh dari titik stagnasi, kondisi awal dan kondisi batasnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} t < 0 : f &= \frac{df}{d\eta} = h = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta \\ t \geq 0 : f &= \frac{df}{d\eta} = 0, h = -n \frac{d^2f}{d\eta^2} \text{ pada saat } \eta = 0 \\ \frac{df}{d\eta} &= 1, h = 0 \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\text{dimana } u_e = \frac{3}{2} \sin \left(\frac{\cos x}{\cos \theta_s} x \right)$$

b. Untuk waktu yang besar

Variabel similaritas untuk waktu yang besar yaitu

$$\Psi = u_e(x)r(x)F(x, Y, t)$$

dengan $N = u_e(x)H(x, Y, t)$ dan $Y = y$

Dengan mensubstitusikan persamaan tersebut kedalam persamaan momentum linier dan persamaan momentum angular maka diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} (1+K) \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{du_e}{dx} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + K \frac{\partial H}{\partial Y} + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

dan

$$\begin{aligned} (1+K/2) \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{du_e}{dx} \left(F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial H}{\partial x} \right. \\ \left. - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial H}{\partial Y} \right) + K \left(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Saat aliran melewati titik stagnasi ($x = 0^\circ$) diperoleh $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2 \cos \theta_s}$ dan $u_e = 0$. Sehingga persamaan similaritas direduksi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (1+K) \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \lambda \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + K \frac{\partial H}{\partial Y} \\ + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} \end{aligned} \quad (4.57)$$

dan

$$(1 + K/2) \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \lambda \left(F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + K \left(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \quad (4.58)$$

Dimana $\lambda = 1$ pada saat melewati titik stagnasi, dan $\lambda = -1$ pada saat melewati titik terjauh dari titik stagnasi, kondisi awal dan kondisi batasnya adalah sebagai berikut.

$$F = \frac{dF}{dY} = 0, H = -n \frac{d^2 F}{dY^2} \text{ pada saat } Y = 0$$

$$\frac{dF}{dY} = 1, H = 0 \text{ pada saat } Y \rightarrow \infty$$

dimana $u_e = \frac{3}{2} \sin \left(\frac{\cos x}{\cos \theta_s} x \right)$

Karena pada penelitian ini dilakukan pada titik stagnasi $x = 0$ maka bentuk Persamaan (4.55)-(4.56) dan (4.57)-(4.58) untuk waktu kecil dan waktu besar dapat ditulis sebagai berikut.

1. Untuk Waktu Kecil

$$(1 + K) f''' + \frac{\eta}{2} f'' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t \left[1 - (f')^2 + f f'' \right] + K h' + M t (1 - f') = t \frac{\partial f'}{\partial t}$$

$$(1 + K/2) h'' + \frac{\eta}{2} h' + \frac{1}{2} h + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t (f h' - h f') = t \frac{\partial h}{\partial t} + t K (2h + f'') \quad (4.59)$$

dimana tanda (') menunjukkan turunan parsial terhadap η atau $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$, $\frac{\partial h}{\partial \eta} = h'$.

2. Untuk Waktu Besar

$$(1 + K) F''' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left[1 - (F')^2 + F F'' \right] + K H' + M (1 - F') = \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$(1 + K/2) H' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} (F H' - H F') = \frac{\partial H}{\partial t} + K (2H + F'') \quad (4.60)$$

dimana $\frac{\partial F}{\partial Y} = F'$ dan $\frac{\partial H}{\partial Y} = H'$

Kondisi awal untuk fungsi f, f', f'' dan h, h' didapatkan dengan mensubstitusikan $t = 0$ pada Sistem persamaan (4.59) yang kemudian diselesaikan dengan

kondisi batas, sehingga diperoleh.

$$f = \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K(1-n))}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} - 1\right)$$

$$f' = \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right)$$

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

dengan menggunakan kondisi batas $h = -nf''$ maka diperoleh

$$h = \frac{-n}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

$$h' = \frac{n\eta}{2(1+K(1-n))\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

BAB V

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini menjelaskan penyelesaian model matematika dari aliran fluida mikroktub pada lapisan batas yang melewati bola teriris secara numerik dengan menggunakan skema Keller-Box, kemudian hasil yang diharapkan berupa grafik profil kecepatan dan profil mikrorotasi dengan variasi besarnya sudut irisan bola, variasi parameter magnetik dan variasi parameter bahan yang kemudian di analisa bagaimana pengaruhnya terhadap profil kecepatan dan profil mikrorotasi pada lapisan batas yang terbentuk di permukaan bola teriris disekitar titik stagnasi terendah ($x = 0^\circ$).

5.1 Penyelesaian Numerik Model

Metode Keller-Box merupakan metode yang efisien untuk menyelesaikan persamaan lapisan batas yang berbentuk diferensial parsial parabolik. Tahapan-tahapan dalam penyelesaian numerik ini yaitu:

1. Sistem Persamaan (4.59) dan (4.60) dibentuk menjadi persamaan orde pertama
2. Dilakukan diskritisasi dengan menggunakan beda hingga pusat
3. Dilakukan linierisasi persamaan yang didapat dengan menggunakan metode Newton dan dibentuk dalam matriks vektor
4. Hasil linierisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

Penjabaran secara rinci dari tiap langkah adalah sebagai berikut.

5.1.1 Persamaan Orde Pertama

Sistem Persamaan (4.59) dan (4.60) terdiri dari persamaan-persamaan dengan orde tinggi. Pada penyelesaian numerik menggunakan metode Keller-Box haruslah persamaan dalam bentuk orde satu, maka dilakukan pemisalan fungsi sebagai berikut

1. Untuk Waktu Kecil

$$f' = g \quad (5.1)$$

$$g' = s \quad (5.2)$$

$$h' = q \quad (5.3)$$

$$(1 + K)s' + \frac{\eta}{2}s + \frac{3}{2\cos\theta_s}t[1 - g^2 + fs] + Kq + Mt(1 - g) = t\frac{\partial g}{\partial t} \quad (5.4)$$

$$(1 + K/2)q' + \frac{\eta}{2}q + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2\cos\theta_s}t(fq - hg) = t\frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + s) \quad (5.5)$$

2. Untuk Waktu Besar

$$F' = G \quad (5.6)$$

$$G' = S \quad (5.7)$$

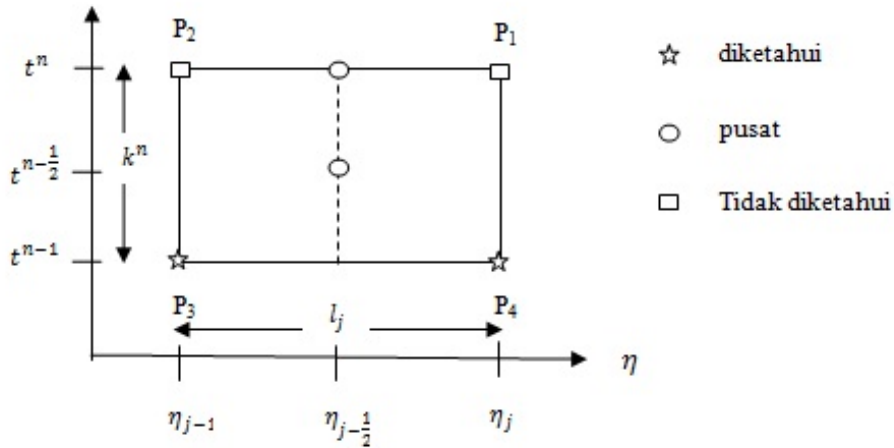
$$H' = Q \quad (5.8)$$

$$(1 + K)S' + \frac{3}{2\cos\theta_s}[1 - G^2 + FS] + KQ + M(1 - G) = \frac{\partial G}{\partial t} \quad (5.9)$$

$$(1 + K/2)Q' + \frac{1}{2}H + \frac{3}{2\cos\theta_s}(FQ - HG) = \frac{\partial H}{\partial t} + K(2H + S) \quad (5.10)$$

5.1.2 Diskritisasi Model

Diskritisasi model pada untuk waktu kecil dan untuk waktu besar dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga sesuai dengan Gambar (5.1), untuk Persamaan (5.1)-(5.3) dan (5.6)-(5.8) menggunakan titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$ pada ruas P_1P_2 dengan menggunakan beda hingga pusat, sedangkan untuk bentuk tak linier pada persamaan (5.4)-(5.5) dan (5.9)-(5.10) digunakan titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$ pada segiempat $P_1P_2P_3P_4$ berikut.



Gambar 5.1: Stensil Beda Hingga

1. Diskritisasi Untuk Waktu Kecil

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{l_j} = g_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(g_j^n - g_{j-1}^n) \quad (5.11)$$

$$\frac{(g_j^n - g_{j-1}^n)}{l_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(g_j^n - g_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(s_j^n - s_{j-1}^n) \quad (5.12)$$

$$\frac{(h_j^n - h_{j-1}^n)}{l_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j} (h_j^n - h_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (5.13)$$

Untuk persamaan momentum linier (5.4)

$$\frac{1}{2} \left[(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{g_{j-\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned} (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[(1+K)s' + \frac{\eta}{2}s + \frac{3}{2\cos\theta_s} t [1-g^2 + fs] + Kq + Mt(1-g) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &= (1+K) \left(\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} t^n \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + Kq_{j-\frac{1}{2}}^n + Mt^n \left(1 - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[(1+K)s' + \frac{\eta}{2}s + \frac{3}{2\cos\theta_s} t [1-g^2 + fs] + Kq + Mt(1-g) \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ &= (1+K) \left(\frac{s_j^{n-1} - s_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} t^{n-1} \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + Kq_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + Mt^{n-1} \left(1 - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &(1+K) \left(\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} t^n \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\ &+ Kq_{j-\frac{1}{2}}^n + Mt^n \left(1 - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + (1+K) \left(\frac{s_j^{n-1} - s_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\ &+ \frac{3}{2\cos\theta_s} t^{n-1} \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned}
& (1+K) \left(\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
& + K q_{j-\frac{1}{2}}^n + M t^n \left(1 - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1+K) \left(\frac{g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\
& - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^{n-1} \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& + M t^{n-1} \left(1 - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Untuk persamaan momentum angular (5.5)

$$\frac{1}{2} \left[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{h_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[(1+K/2)q + \frac{\eta}{2}q + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t(fq - hg) - tK(2h + s) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= (1+K/2) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \\
&\quad \left. - h_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + s_{j-\frac{1}{2}}^n \right)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[(1+K/2)q + \frac{\eta}{2}q + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t(fq - hg) - tK(2h + s) \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= (1+K/2) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right. \\
&\quad \left. - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& (1+K/2) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \\
& \left. g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + (1+K/2) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \\
& q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
& = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned}
& (1+K/2) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \\
& \left. g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1+K/2) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{lj} \\
& - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right. \\
& \left. + s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \tag{5.14}
\end{aligned}$$

2. Diskritisasi Untuk Waktu Besar

$$\frac{(F_j^n - F_{j-1}^n)}{lj} = G_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{lj} (F_j^n - F_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (G_j^n - G_{j-1}^n) \tag{5.15}$$

$$\frac{(G_j^n - G_{j-1}^n)}{lj} = S_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{lj} (G_j^n - G_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (S_j^n - S_{j-1}^n) \tag{5.16}$$

$$\frac{(H_j^n - H_{j-1}^n)}{lj} = Q_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{lj} (H_j^n - H_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (Q_j^n - Q_{j-1}^n) \tag{5.17}$$

Untuk persamaan momentum linier (5.4)

$$\frac{1}{2} \left[(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{G_{j-\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[(1+K)S' + \frac{3}{2\cos\theta_s} [1 - G^2 + FS] + KQ + M(1-G) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= (1+K) \left(\frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&\quad + KQ_{j-\frac{1}{2}}^n + M \left(1 - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[(1+K)S' + \frac{3}{2\cos\theta_s} [1 - G^2 + FS] + KQ + M(1-G) \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= (1+K) \left(\frac{S_j^{n-1} - S_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + KQ_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + M \left(1 - G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&(1+K) \left(\frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&+ KQ_{j-\frac{1}{2}}^n + M \left(1 - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + (1+K) \left(\frac{S_j^{n-1} - S_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\
&+ \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} G_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned}
&(1+K) \left(\frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&+ KQ_{j-\frac{1}{2}}^n + M \left(1 - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} G_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1+K) \left(\frac{S_j^{n-1} - S_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\
&- \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + KQ_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&+ M \left(1 - G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Untuk persamaan momentum angular (5.5)

$$\frac{1}{2} \left[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{H_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[(1 + K/2)Q + \frac{3}{2\cos\theta_s}(FQ - HG) - K(2H + S) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= (1 + K/2) \left(\frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{lj} \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \\
&\quad \left. - H_{j-\frac{1}{2}}^n G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + S_{j-\frac{1}{2}}^n \right)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[(1 + K/2)Q + \frac{3}{2\cos\theta_s}(FQ - HG) - K(2H + S) \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= (1 + K/2) \left(\frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{lj} \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right. \\
&\quad \left. - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&(1 + K/2) \left(\frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{lj} \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&- K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + (1 + K/2) \left(\frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{lj} \right) \\
&+ \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
&= 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned}
&(1 + K/2) \left(\frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{lj} \right) + \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&- K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1 + K/2) \left(\frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{lj} \right) \\
&- \frac{3}{2\cos\theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
&- 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \tag{5.18}
\end{aligned}$$

5.1.3 Linierisasi Model

Setelah didapatkan hasil diskritisasi model, selanjutnya dilakukan linierisasi model pada Persamaan (5.11)-(5.18), dengan menggunakan metode

Newton. Sebelumnya dikenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut

1. Untuk Waktu Kecil

$$\begin{aligned}
 f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\
 g_j^{(i+1)} &= g_j^{(i)} + \delta g_j^{(i)} \\
 s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\
 h_j^{(i+1)} &= h_j^{(i)} + \delta h_j^{(i)} \\
 q_j^{(i+1)} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Selanjutnya disubstitusikan bentuk iterasi (5.30) pada sistem Persamaan (5.15)-(5.10) maka diperoleh sebagai berikut.

$$\left(\delta f_j - \delta f_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta g_j - \delta g_{j-1} \right) = - \left(f_j^n - f_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(g_j^n - g_{j-1}^n \right) \tag{5.20}$$

$$\left(\delta g_j - \delta g_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta s_j - \delta s_{j-1} \right) = - \left(g_j^n - g_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(s_j^n - s_{j-1}^n \right) \tag{5.21}$$

$$\left(\delta h_j - \delta h_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta q_j - \delta q_{j-1} \right) = - \left(h_j^n - h_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(q_j^n - q_{j-1}^n \right) \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
 &(1 + K) \left(\frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n 2 g_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 &\left(\frac{\delta g_j + \delta g_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(\frac{\delta g_j + \delta g_{j-1}}{2} \right)^2 + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n f^n \\
 &\left(\frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \\
 &\left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) + K \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) - M t^n \\
 &\left(\frac{\delta g_j + \delta g_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta g_j + \delta g_{j-1}}{2} \right) = - (1 + K) \left(\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) \\
 &- \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
 &- M t^n \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + R_1
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + K/2) \left(\frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) \\
& + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \\
& + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& \left(\frac{\delta g_j + \delta g_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \\
& \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta g_j + \delta g_{j-1}}{2} \right) - 2t^n K \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) \\
& - t^n K \left(\frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) = -(1 + K/2) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \\
& - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
& - t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n + R_2 \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Secara sederhana dengan menghilangkan orde tinggi pada $(\delta f_j^{(i)}, \delta g_j^{(i)}, \delta s_j^{(i)}, \delta h_j^{(i)}, \delta q_j^{(i)})$ didapatkan

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta g_j + \delta g_{j-1}) = (r_1)_j \tag{5.25}$$

$$(\delta g_j - \delta g_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta s_j + \delta s_{j-1}) = (r_2)_j \tag{5.26}$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta q_j + \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_j \delta s_j + (a_2)_j \delta s_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + (a_5)_j \delta g_j \\
& + (a_6)_j \delta g_{j-1} + (a_7)_j \delta q_j + (a_8)_j \delta q_{j-1} = (r_4)_j \tag{5.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta g_j \\
& + (b_6)_j \delta g_{j-1} + (b_7)_j \delta h_j + (b_8)_j \delta h_{j-1} + (b_9)_j \delta s_j + (b_{10})_j \delta s_{j-1} \\
& = (r_5)_j \tag{5.29}
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
(r_1)_j &= -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(g_j^n + g_{j-1}^n) \\
(r_2)_j &= -(g_j^n - g_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(s_j^n + s_{j-1}^n) \\
(r_3)_j &= -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n + q_{j-1}^n) \\
(r_4)_j &= -(1+K) \left(\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \\
&\quad \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - M t^n \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) \\
&\quad + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^n - (1+K) \left(\frac{s_j^{n-1} - s_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\
&\quad - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^{n-1} \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
&\quad - K \left(q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - M t^{n-1} \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^{n-1}} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
(r_5)_j &= -(1+K/2) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \\
&\quad \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n K \left(2 h_{j-\frac{1}{2}}^n + s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&\quad - (1+K/2) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^{n-1} \\
&\quad \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + t^{n-1} K \left(2 h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^{n-1}} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_1)_j &= \frac{(1+K)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4\cos\theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_2)_j &= -\frac{(1+K)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4\cos\theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_3)_j &= \frac{3}{4\cos\theta_s} t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_4)_j &= (a_3)_j \\
(a_5)_j &= -\frac{3}{2\cos\theta_s} t^n g_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{Mt^n}{2} - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(a_6)_j &= (a_5)_j \\
(a_7)_j &= \frac{1}{2}K \\
(a_8)_j &= (a_7)_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b_1)_j &= \frac{(1+K/2)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4\cos\theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_2)_j &= -\frac{(1+K/2)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4\cos\theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_3)_j &= \frac{3}{4\cos\theta_s} t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= -\frac{3}{4\cos\theta_s} t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_6)_j &= (b_5)_j \\
(b_7)_j &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4\cos\theta_s} t^n g_{j-\frac{1}{2}}^n - t^n K - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_8)_j &= (b_7)_j \\
(b_9)_j &= -\frac{1}{2}t^n K \\
(b_{10})_j &= (b_9)_j
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas pada (4.54) maka dapat dinyatakan bahwa $\delta f_0 = 0, \delta g_0 = 0, \delta h_0 = 0, \delta g_N = 0, \delta h_N = 0$.

2. Untuk Waktu Besar

$$\begin{aligned}
F_j^{(i+1)} &= F_j^{(i)} + \delta F_j^{(i)} \\
G_j^{(i+1)} &= G_j^{(i)} + \delta G_j^{(i)} \\
S_j^{(i+1)} &= S_j^{(i)} + \delta S_j^{(i)} \\
H_j^{(i+1)} &= H_j^{(i)} + \delta H_j^{(i)} \\
Q_j^{(i+1)} &= Q_j^{(i)} + \delta Q_j^{(i)}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Selanjutnya disubstitusikan bentuk iterasi (5.30) pada sistem Persamaan (5.15)-(5.10) maka diperoleh sebagai berikut.

$$\left(\delta F_j - \delta F_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta G_j - \delta G_{j-1} \right) = - \left(F_j^n - F_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(G_j^n - G_{j-1}^n \right) \tag{5.31}$$

$$\left(\delta G_j - \delta G_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta G_j - \delta S_{j-1} \right) = - \left(G_j^n - G_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(S_j^n - S_{j-1}^n \right) \tag{5.32}$$

$$\left(\delta H_j - \delta H_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta Q_j - \delta Q_{j-1} \right) = - \left(H_j^n - H_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(Q_j^n - Q_{j-1}^n \right) \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
& (1+K) \left(\frac{\delta S_j - \delta S_{j-1}}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} 2G_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \\
& \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right)^2 + \frac{3}{2 \cos \theta_s} f^n \left(\frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} S_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& \left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2} \right) \\
& + K \left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2} \right) - M \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right) \\
& = -(1+K) \left(\frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
& - K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - M \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + R_1
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
& (1+K/2) \left(\frac{\delta Q_j - \delta Q_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right) \\
& + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Q_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2} \right) \\
& - \frac{3}{2 \cos \theta_s} H_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \alpha} \\
& \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right) - 2K \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2} \right) - K \left(\frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2} \right) \\
& - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2} \right) = -(1+K/2) \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \\
& \left. - H_{j-\frac{1}{2}}^n G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n + R_2 \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Secara sederhana dengan menghilangkan orde tinggi pada $(\delta F_j^{(i)}, \delta G_j^{(i)}, \delta S_j^{(i)}, \delta F_j^{(i)}, \delta Q_j^{(i)})$ didapatkan

$$(\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta G_j + \delta G_{j-1}) = (r_1)_j \tag{5.36}$$

$$(\delta G_j - \delta G_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta S_j + \delta S_{j-1}) = (r_2)_j \tag{5.37}$$

$$(\delta H_j - \delta H_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta Q_j + \delta Q_{j-1}) = (r_3)_j \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_j \delta S_j + (a_2)_j \delta S_{j-1} + (a_3)_j \delta F_j + (a_4)_j \delta F_{j-1} + (a_5)_j \delta G_j \\
& + (a_6)_j \delta G_{j-1} + (a_7)_j \delta Q_j + (a_8)_j \delta Q_{j-1} = (r_4)_j \tag{5.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (b_1)_j \delta Q_j + (b_2)_j \delta Q_{j-1} + (b_3)_j \delta F_j + (b_4)_j \delta F_{j-1} + (b_5)_j \delta G_j \\
& + (b_6)_j \delta G_{j-1} + (b_7)_j \delta H_j + (b_8)_j \delta H_{j-1} + (b_9)_j \delta S_j + (b_{10})_j \delta S_{j-1} \\
& = (r_5)_j \tag{5.40}
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
(r_1)_j &= -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(G_j^n + G_{j-1}^n) \\
(r_2)_j &= -(G_j^n - G_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(S_j^n + S_{j-1}^n) \\
(r_3)_j &= -(H_j^n - H_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Q_j^n + Q_{j-1}^n) \\
(r_4)_j &= -(1+K) \left(\frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&\quad - K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - M \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} G_{j-\frac{1}{2}}^n - (1+K) \\
&\quad \left(\frac{S_j^{n-1} - S_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(1 - \left(S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
&\quad - K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - M \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^{n-1}} \left(G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
(r_5)_j &= -(1+K/2) \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&\quad + K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n - (1+K/2) \frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \\
&\quad - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
&\quad - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^{n-1}} H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$(a_1)_j = \frac{(1+K)}{l_j} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} F_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_2)_j = -\frac{(1+K)}{l_j} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} F_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_3)_j = \frac{3}{4 \cos \theta_s} S_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_4)_j = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = -\frac{3}{2 \cos \theta_s} G_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{M}{2} - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(a_6)_j = (a_5)_j$$

$$(a_7)_j = \frac{1}{2} K$$

$$(a_8)_j = (a_7)_j$$

$$\begin{aligned}
(b_1)_j &= \frac{(1+K/2)}{l_j} + \frac{3}{4\cos\theta_s} F^{j-\frac{1}{2}} \\
(b_2)_j &= -\frac{(1+K/2)}{l_j} + \frac{3}{4\cos\theta_s} F^{j-\frac{1}{2}} \\
(b_3)_j &= \frac{3}{4\cos\theta_s} Q^{j-\frac{1}{2}} \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= -\frac{3}{4\cos\theta_s} H^{j-\frac{1}{2}} \\
(b_6)_j &= (b_5)_j \\
(b_7)_j &= -\frac{3}{4\cos\theta_s} G^{j-\frac{1}{2}} - K - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_8)_j &= (b_7)_j \\
(b_9)_j &= -\frac{1}{2}K \\
(b_{10})_j &= (b_9)_j
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas pada (4.54) maka dapat dinyatakan bahwa $\delta F_0 = 0, \delta G_0 = 0, \delta H_0 = 0, \delta G_N = 0, \delta H_N = 0$.

5.1.4 Teknik Eliminasi Blok

Sistem linier pada Persamaan (5.36)-(5.21) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok (Na, 1979). Struktur tridiagonal blok biasanya terdiri dari elemen-elemen yang berupa variabel atau konstanta, sedangkan pada metode Keller-Box ini elemen-elemen dari blok tridiagonal berupa matriks blok, oleh karena itu terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks blok tridiagonal dari sistem linier Persamaan (5.36)-(5.21) dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat $j = 1, j = N - 1, \text{ dan } j = N$.

Keadaan 1 Saat $j = 1$, maka Persamaan (5.36)-(5.21) menjadi

$$\begin{aligned}
(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_1}{2}(\delta g_1 + \delta g_0) &= (r_1)_1 \\
(\delta g_1 - \delta g_0) - \frac{l_1}{2}(\delta s_1 + \delta s_0) &= (r_2)_1 \\
(\delta h_1 - \delta h_0) - \frac{l_1}{2}(\delta q_1 + \delta q_0) &= (r_3)_1 \\
(a_1)_1 \delta s_1 + (a_2)_1 \delta s_0 + (a_3)_1 \delta f_1 + (a_4)_1 \delta f_0 + (a_5)_1 \delta g_1 + (a_6)_1 \delta g_0 \\
+ (a_7)_1 \delta q_1 + (a_8)_1 \delta q_0 &= (r_4)_1 \\
(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta g_1 + (b_6)_1 \delta g_0 \\
+ (b_7)_1 \delta h_1 + (b_8)_1 \delta h_0 + (b_9)_1 \delta s_1 + (b_{10})_1 \delta s_0 &= (r_5)_1
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas $\delta f_0 = 0, \delta g_0 = 0, \delta h_0 = 0$ maka sistem diatas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_2)_1 & (a_8)_1 & (a_3)_1 & (a_1)_1 & (a_7)_1 \\ (b_{10})_1 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & (b_9)_1 & (b_1)_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s_0 \\ \delta q_0 \\ \delta f_1 \\ \delta s_1 \\ \delta q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (b_5)_1 & (b_7)_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta g_1 \\ \delta h_1 \\ \delta f_2 \\ \delta s_2 \\ \delta q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{pmatrix}$$

Dapat dituliskan secara sederhana bahwa untuk $j = 1$ $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$.

Kedaaan 2 Saat nilai $j = N - 1$ maka Persamaan (5.36)-(5.21) menjadi

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta g_{N-1} + \delta g_{N-2}) = (r_1)_{N-1}$$

$$(\delta g_{N-1} - \delta g_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta s_{N-1} + \delta s_{N-2}) = (r_2)_{N-1}$$

$$(\delta h_{N-1} - \delta h_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta q_{N-1} + \delta q_{N-2}) = (r_3)_{N-1}$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_{N-1}\delta s_{N-1} + (a_2)_{N-1}\delta s_{N-2} + (a_3)_{N-1}\delta f_{N-1} + (a_4)_{N-1}\delta f_{N-2} \\ & + (a_5)_{N-1}\delta g_{N-1} + (a_6)_{N-1}\delta g_{N-2} + (a_7)_{N-1}\delta q_{N-1} + (a_8)_{N-1}\delta q_{N-2} \\ & = (r_4)_{N-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_{N-1}\delta q_{N-1} + (b_2)_{N-1}\delta q_{N-2} + (b_3)_{N-1}\delta f_{N-1} + (b_4)_{N-1}\delta f_{N-2} \\ & + (b_5)_{N-1}\delta g_{N-1} + (b_6)_{N-1}\delta g_{N-2} + (b_7)_{N-1}\delta h_{N-1} + (b_8)_{N-1}\delta h_{N-2} \\ & + (b_9)_{N-1}\delta s_{N-1} + (b_{10})_{N-1}\delta s_{N-2} = (r_5)_{N-1} \end{aligned}$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_4)_{N-1} & (a_2)_{N-1} & (a_8)_{N-1} \\ 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & (b_{10})_{N-1} & (b_2)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s_{N-2} \\ \delta q_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ (a_6)_{N-1} & 0 & (a_3)_{N-1} & (a_1)_{N-1} & (a_7)_{N-1} \\ (b_6)_{N-1} & (b_8)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & (b_9)_{N-1} & (b_1)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta g_{N-2} \\ \delta h_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (b_5)_{N-1} & (b_7)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta g_{N-1} \\ \delta h_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta s_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_{N-1} \\ (r_2)_{N-1} \\ (r_3)_{N-1} \\ (r_4)_{N-1} \\ (r_5)_{N-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Secara sederhana bentuk matriks diatas dapat dinyatakan sebagai

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

dimana bentuk ini berlaku untuk setiap $j = 2, 3, \dots, N-1$.

Kedaaan 3 Saat nilai $j = N$ maka Persamaan (5.36)-(5.21) menjadi

$$(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta g_N + \delta g_{N-1}) = (r_1)_N$$

$$(\delta g_N - \delta g_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta s_N + \delta s_{N-1}) = (r_2)_N$$

$$(\delta h_N - \delta h_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta q_N + \delta q_{N-1}) = (r_3)_N$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_N \delta s_N + (a_2)_N \delta s_{N-1} + (a_3)_N \delta f_N + (a_4)_N \delta f_{N-1} \\
& + (a_5)_N \delta g_N + (a_6)_N \delta g_{N-1} + (a_7)_N \delta q_N + (a_8)_N \delta q_{N-1} = (r_4)_N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (b_1)_N \delta q_N + (b_2)_N \delta q_{N-1} + (b_3)_N \delta f_N + (b_4)_N \delta f_{N-1} \\
& + (b_5)_N \delta g_N + (b_6)_N \delta g_{N-1} + (b_7)_N \delta h_N + (b_8)_N \delta h_{N-1} \\
& + (b_9)_N \delta s_N + (b_{10})_N \delta s_{N-1} = (r_5)_N
\end{aligned}$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & (a_4)_N & (a_2)_N & (a_8)_N \\ 0 & 0 & (b_4)_N & (b_{10})_N & (b_2)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta s_N \\ \delta q_N \end{pmatrix}$$

dimana

$$L = \begin{pmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\alpha_1] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [\alpha_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [\alpha_N] \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$U = \begin{pmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & \\ & [I] & [\Gamma_1] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & [I] & [\Gamma_{N-1}] \\ & & & & & [I] \end{pmatrix}$$

dengan $[I]$ adalah matriks identitas yang berukuran 5×5 dan $[\alpha_j], [\Gamma_j]$ merupakan matriks ukuran 5×5 dengan elemen-elemennya ditentukan dengan persamaan berikut

$$\begin{aligned} [\alpha_1] &= [A_1] \\ [A_1][\Gamma_1] &= [C_1] \\ [\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, N \\ [\alpha_j][\Gamma_j] &= [C_j], \quad j = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (5.42) pada Persamaan (5.41) maka didapatkan persamaan

$$LU\delta = r \tag{5.43}$$

dengan mendefinisikan bahwa

$$U\delta = W \tag{5.44}$$

sehingga Persamaan (5.43) dapat dituliskan sebagai

$$LW = r \tag{5.45}$$

dimana

$$W = \begin{pmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{pmatrix}$$

dan $[W_j]$ adalah matriks berukuran 5×1 dengan elemen-elemennya didapatkan dari Persamaan (5.45) yaitu

$$\begin{aligned} [\alpha_1][W_1] &= [r_1] \\ [\alpha_j][W_j] &= [r_j] - [B_j][W_{j-1}], \quad 2 \leq j \leq N \end{aligned}$$

Setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks \mathbf{W} , maka selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari δ pada Persamaan (5.44) dengan menggunakan persamaan berikut

$$\begin{aligned} [\delta_j] &= [W_j] \\ [\delta_j] &= [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq N-1 \end{aligned}$$

dengan didapatkannya nilai δ , maka Persamaan (5.36)-(5.40) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian Persamaan (5.30) dengan melakukan iterasi sebanyak sampai memenuhi kriteria konvergen. Menurut Cebeci dan Bradshaw kriteria konvergen menggunakan $v(0,t)$ dan iterasi berhenti saat didapatkan $|\delta v(0,t)| < \epsilon$, dimana nilai dari ϵ sangat kecil. Pada penelitian ini digunakan nilai $\epsilon = 10^{-5}$ (Mohammad, 2014).

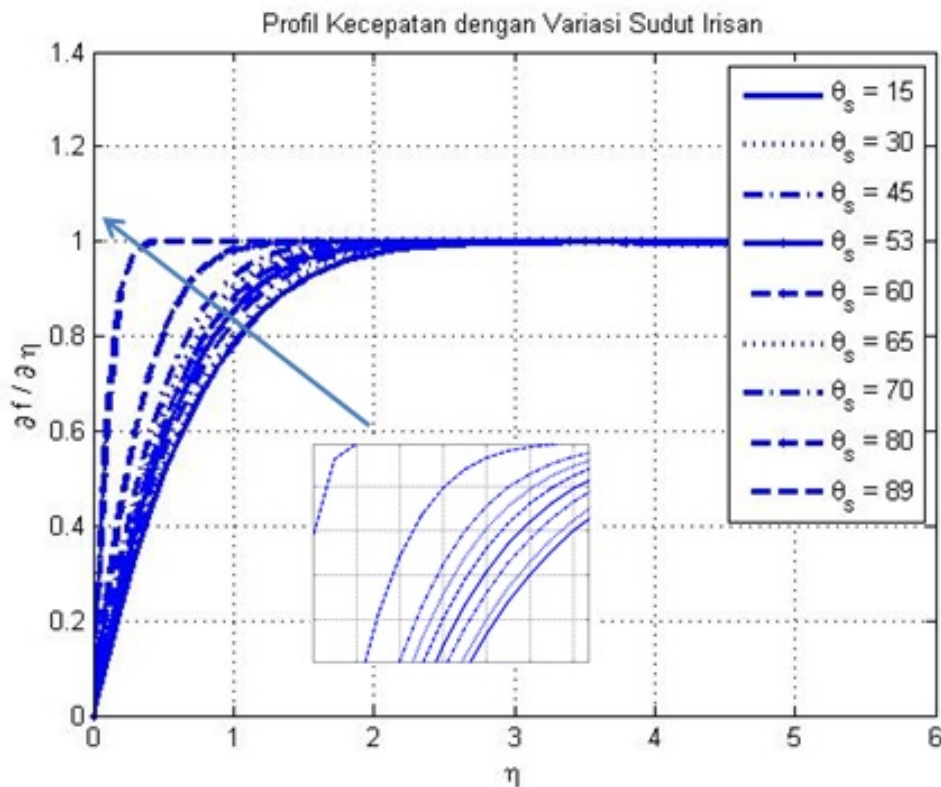
5.2 Hasil Simulasi Numerik

Setelah dilakukan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Keller-Box, selanjutnya dilakukan simulasi dengan memberikan inputan variasi parameter magnetik (M), variasi parameter mikrorotasi (K) dan, variasi sudut irisan bola (θ_s) pada titik stagnasi terendah ($x = 0^\circ$), selain itu dilakukan juga simulasi untuk nilai $n = 0$ dan $n = 0.5$, n adalah konstanta yang bernilai $0 \leq n \leq 1$. Ketika nilai $n = 0$, menunjukkan rasio antara komponen vektor mikrorotasi dan gesekan fluida pada permukaan bernilai nol, mikro elemen dekat permukaan objek tidak mampu untuk untuk berotasi dan hal ini biasanya dikenal sebagai kekuatan konsentrasi dari mikro elemen. Sedangkan jika nilai $n = 0.5$ bagian antisimetri tegangan tensor menghilang dan keadaan ini sering disebut sebagai kelemahan konsentrasi mikro elemen, model aliran turbulen dalam lapisan batas mikro rotasi dapat direpresentasikan dengan menggunakan nilai $n = 1$ (Guram dan Smith, 1980). Tetapi pada penelitian ini hanya dikaji untuk nilai $n = 0$ dan $n = 0.5$ yang artinya aliran fluida mikrokutub yang diteliti hanya dengan konsentrasi pekat dan setengah pekat sehingga aliran fluida mikrokutub yang dihasilkan merupakan jenis aliran laminar, hal ini dikarenakan Pada tahun 2011, ada sebuah artikel menyajikan pernyataan yang penting yakni medan magnet berskala besar lebih mudah diproduksi dalam aliran laminar dari pada turbulen. Kemudian hasil simulasi ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana profil kecepatan dan profil mikrorotasi dari pengaruh variasi parameter magnetik, besarnya sudut irisan dan parameter bahan yang diinputkan. Dengan memilih $\delta\eta = l_j = 0.1$ yang merupakan *step size* η dan $\delta t = k^n = 0.05$ yang merupakan *step size* dari t . Dengan η merepresentasikan ketebalan lapisan batas dan

t adalah waktu, maka berikut adalah hasil simulasi numerik yang diperoleh.

5.2.1 Pengaruh Variasi Sudut irisan Terhadap Profil Kecepatan

Pengaruh besarnya sudut irisan pada bola terhadap kecepatan aliran fluida mikrokutub merupakan kontribusi terpenting dari penelitian ini. Oleh sebab itu dilakukan variasi sudut irisan bola dengan memberikan nilai tetap untuk parameter magnetik $M = 1$, parameter bahan $K = 1$, dan dilakukan simulasi untuk $n = 0$ dan $n = 0.5$. Dalam hal ini $M = 1$ artinya diberikan pengaruh medan magnet sebesar $M = 1$ terhadap aliran fluida mikrokutub dan $K = 1$ artinya fluida mikrokutub memiliki parameter jenis bahan $K = 1$ untuk bisa diteliti dengan melakukan simulasi pada konsentrasi pekat dengan $n = 0$ dan konsentrasi setengah pekat dengan $n = 0.5$. Simulasi pengaruh besarnya sudut irisan terhadap kecepatan aliran fluida disekitar titik stagnasi $x = 0^\circ$ ini dilakukan dengan memberikan variasi sudut irisan pada bola teriris sebesar $\theta_s = 15^\circ, \theta_s = 30^\circ, \theta_s = 45^\circ, \theta_s = 53^\circ, \theta_s = 60^\circ, \theta_s = 65^\circ, \theta_s = 70^\circ, \theta_s = 80^\circ$ dan $\theta_s = 89^\circ$ maka diperoleh grafik profil kecepatan aliran fluida mikrokutub pada lapisan batas dengan variasi sudut irisan sebagai berikut.

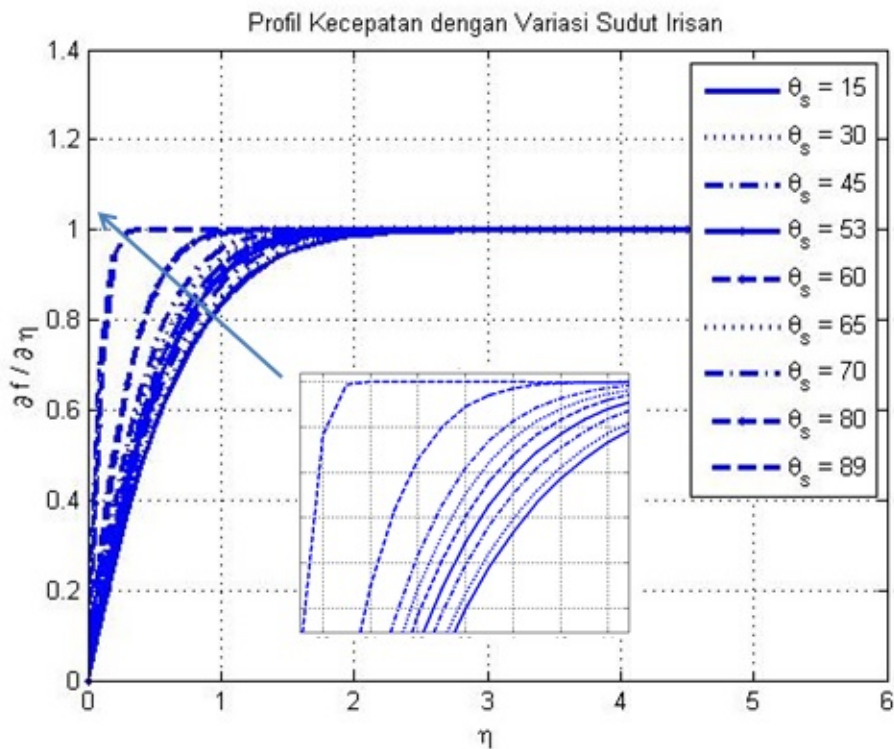


Gambar 5.2: Profil kecepatan dengan variasi sudut iris saat $M = 1, K = 1, n = 0$

Gambar (5.2) merupakan hasil dari simulasi pengaruh besarnya sudut irisan terhadap kecepatan aliran fluida mikrokutub disekitar titik stagnasi $x =$

0° dengan konsentrasi pekat. Grafik menunjukkan bahwa semakin besar sudut irisan yang diberikan pada bola maka kecepatan aliran fluida mikrokutub juga akan semakin besar disekitar titik stagnasi, Hal ini disebabkan karena nilai yang dihasilkan dari $\frac{3}{2\cos\theta_s}$ yang semakin besar dengan semakin besarnya sudut irisan sehingga menyebabkan gradien kecepatan akan semakin besar. Nilai kecepatan pada aliran lapisan batas yang dihasilkan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ di permukaan bola sampai $f' \approx 1$ yang terjauh dari permukaan bola mengikuti kecepatan aliran bebas u_∞ .

Kemudian dilakukan simulasi untuk aliran fluida mikrokutub dengan konsentrasi setengah pekat dengan diberikan pengaruh medan magnet, jenis parameter bahan dan variasi sudut irisan yang sama yaitu $M = 1$, $K = 1$ dan diberi variasi sudut irisan sebesar $\theta_s = 15^\circ$, $\theta_s = 30^\circ$, $\theta_s = 45^\circ$, $\theta_s = 53^\circ$, $\theta_s = 60^\circ$, $\theta_s = 65^\circ$, $\theta_s = 70^\circ$, $\theta_s = 80^\circ$ dan $\theta_s = 89^\circ$. Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui seberapa besar pengaruh konsentrasi fluida mikrokutub pekat dan setengah pekat terhadap profil kecepatan aliran disekitar titik stagnasi, maka didapatkan hasil simulasi sebagai berikut.

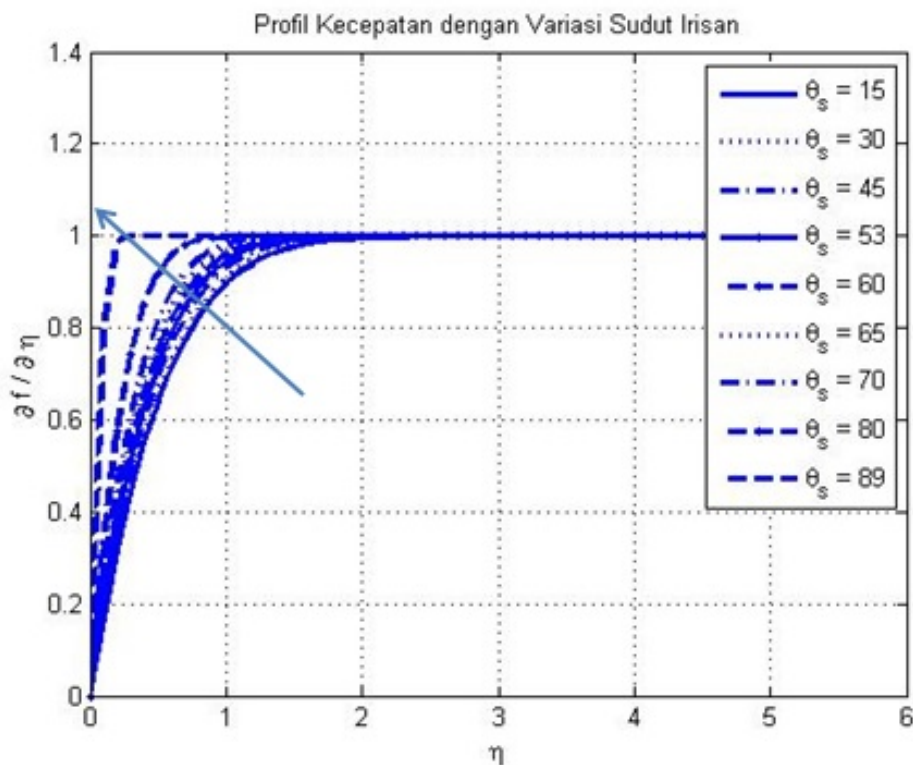


Gambar 5.3: Profil kecepatan dengan variasi sudut iris saat $M = 1$, $K = 1$, $n = 0.5$

Dari hasil simulasi yaitu pada Gambar (5.3) diperoleh hasil semakin besar sudut irisan yang diberikan pada bola maka kecepatan aliran fluida mikrokutub juga akan semakin besar disekitar titik stagnasi, yaitu sama halnya pada konsentrasi pekat. Akan tetapi pada konsentrasi setengah pekat profil kecepatan dari masing-masing besarnya sudut irisan yang diberikan lebih cepat konvergen

dibandingkan dengan konsentrasi pekat sehingga menghasilkan ketebalan lapisan batas yang berbeda antara fluida mikroktub dengan konsentrasi pekat dan konsentrasi setengah pekat. Dalam penelitian ini didapatkan hasil bahwa untuk ketebalan lapisan batas yang terbentuk antara dua konsentrasi fluida mikroktub yang disimulasikan tidak signifikan.

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk mengetahui pengaruh variasi besarnya sudut irisan terhadap kecepatan aliran fluida mikroktub yang melewati bola teriris dengan variasi sudut irisan sebesar $\theta_s = 15^\circ$, $\theta_s = 30^\circ$, $\theta_s = 45^\circ$, $\theta_s = 53^\circ$, $\theta_s = 60^\circ$, $\theta_s = 65^\circ$, $\theta_s = 70^\circ$, $\theta_s = 80^\circ$ dan $\theta_s = 89^\circ$, dengan parameter magnetik $M = 1$, parameter bahan $K = 0$ dan $n = 0$. Sehingga diperoleh hasil simulasi sebagai berikut.



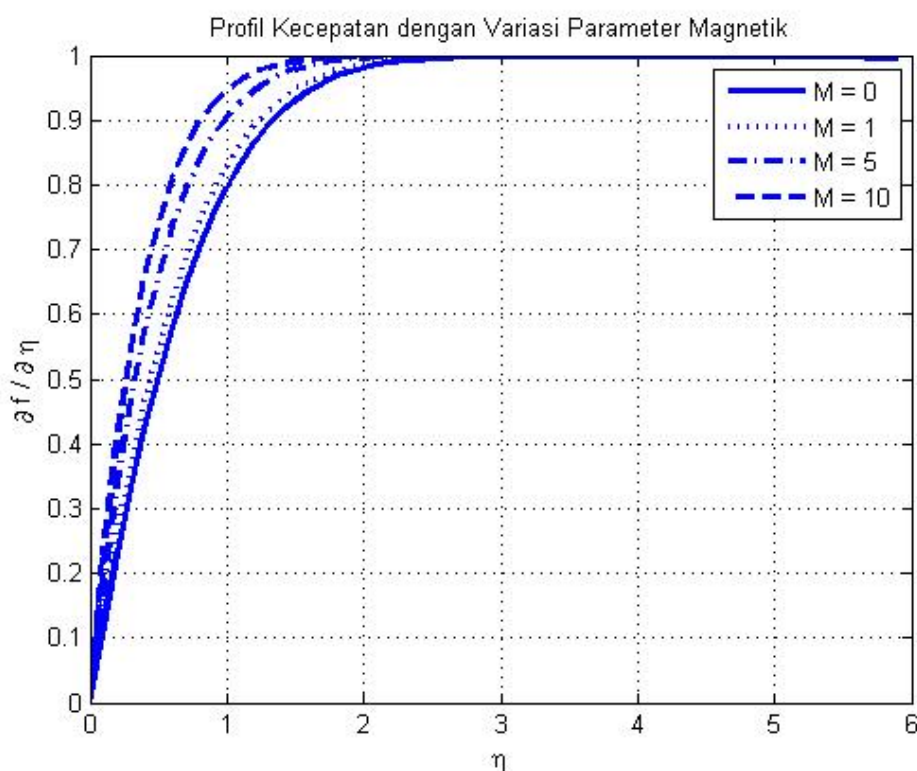
Gambar 5.4: Profil kecepatan dengan variasi sudut iris saat $M = 1$, $K = 0$, $n = 0$

Dengan nilai parameter $K = 0$ dan $n = 0$ artinya fluida mikroktub jenis ini hampir sama dengan fluida viskos. Dari hasil simulasi diperoleh dengan semakin besar variasi sudut irisan yang diberikan maka kecepatan aliran fluida juga akan semakin besar hal ini disebabkan karena nilai $\frac{3}{2\cos\theta_s}$ akan semakin besar dengan semakin meningkatnya variasi sudut irisan yang diberikan sehingga gradien kecepatan akan semakin besar. Selain itu dengan nilai $K = 0$ atau tidak adanya parameter bahan menyebabkan berkurangnya massa dari fluida sehingga mengakibatkan perubahan dalam momentum. Gradien kecepatan fluida mikroktub semakin

meningkat menyebabkan momentum linier yang semakin besar.

5.2.2 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Kecepatan

Magnetohidrodinamik membicarakan tentang pergerakan aliran fluida penghantar listrik dibawah pengaruh medan magnet. Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui seberapa besar pengaruh medan magnet yang diberikan terhadap kecepatan aliran fluida mikrokutub pada lapisan batas disekitar titik stagnasi $x = 0^\circ$. Dengan menggunakan fluida mikrokutub pada konsentrasi pekat dan setengah pekat. Simulasi ini dilakukan dengan diberikan pengaruh medan magnet sebesar $M = 0$, $M = 1$, $M = 5$ dan $M = 10$, nilai parameter magnetik bisa divariasikan untuk $0 \leq M \leq 100$, untuk $M = 0$ artinya tidak ada pengaruh medan magnet yang diberikan pada aliran fluida saat melewati bola teriris, untuk nilai M yang semakin besar maka semakin besar pula medan magnet yang dihasilkan. Penelitian ini disimulasikan pada sudut irisan 45° dan $K = 1$ maka diperoleh hasil simulasi sebagai berikut.

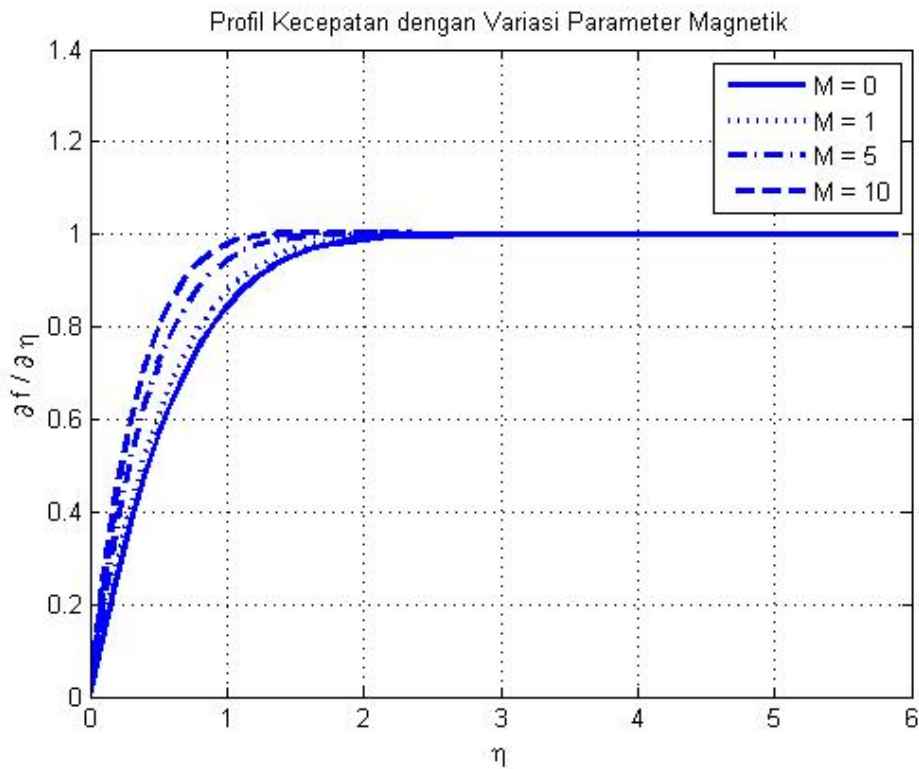


Gambar 5.5: Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik saat $K = 1$, $n = 0$

Hasil simulasi pada Gambar (5.4) menunjukkan bahwa semakin besar pengaruh medan magnet yang diberikan pada aliran fluida maka kecepatan aliran fluida mikrokutub saat melewati bola teriris akan semakin besar. Hal ini terjadi karena besar gaya Lorentz yang bekerja semakin besar seiring dengan bertambahnya besar medan magnet yang mempengaruhi fluida mikrokutub, hal ini dapat

di tunjukkan secara matematis dengan rumus $M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty}$ yang berarti bahwa $M \sim B_0$ atau besarnya parameter magnetik yang diberikan berbanding lurus dengan besarnya gaya Lorentz yang dihasilkan. Penelitian ini dilakukan pada fluida mikrokutub dengan konsentrasi pekat. Kecepatan aliran fluida nol saat menyentuh permukaan bola teriris di titik stagnasi $x = 0^\circ$ kemudian kecepatannya akan semakin membesar dan konvergen pada nilai 1 artinya kecepatannya akan mengikuti kecepatan aliran bebas u_∞ .

Selanjutnya dilakukan simulasi yang sama untuk fluida mikrokutub dengan konsentrasi setengah pekat, dengan memberikan sudut irisan 45° , parameter jenis bahan $K = 1$ dan besarnya variasi parameter magnetik sama yaitu sebesar $M = 0$, $M = 1$, $M = 5$ dan $M = 10$. Sehingga diperoleh hasil simulasi sebagai berikut.

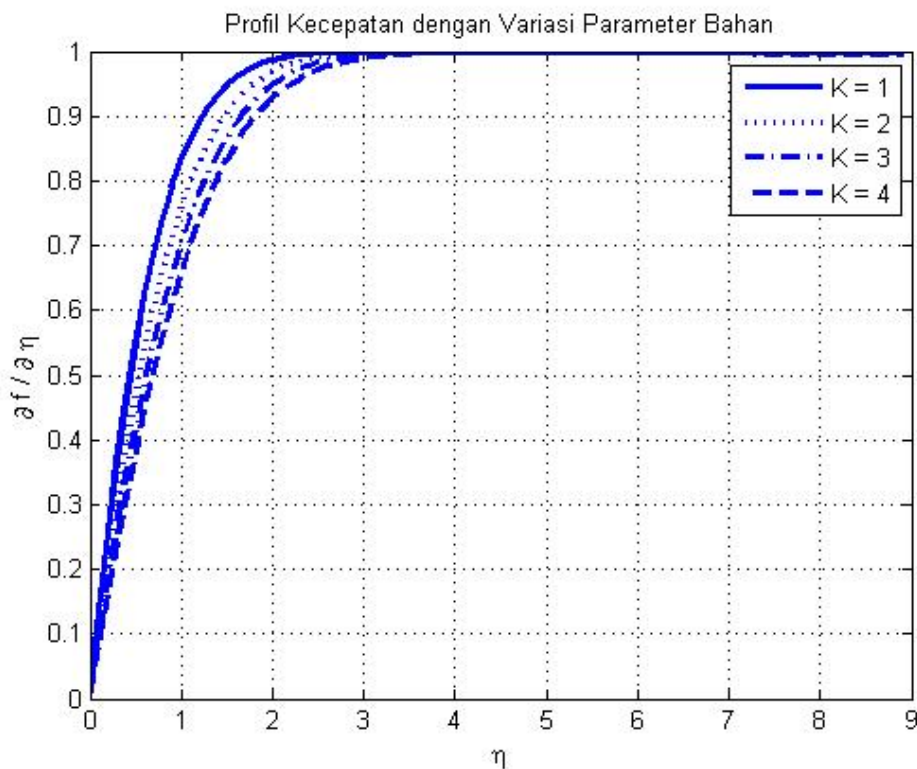


Gambar 5.6: Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik saat $K = 1$, $n = 0.5$

Pada Gambar (5.5) saat fluida mikrokutub dengan konsentrasi setengah pekat disimulasikan juga menunjukkan hasil yang sama seperti fluida mikrokutub dengan konsentrasi pekat. Didapatkan hasil dengan bertambahnya pengaruh parameter magnetik yang diberikan maka kecepatan aliran fluida akan semakin besar. Tetapi untuk masing-masing nilai parameter magnetik yang diberikan pada konsentrasi setengah pekat didapatkan hasil ketebalan lapisan batasnya berbeda akan tetapi perbedaan ini tidak signifikan.

5.2.3 Pengaruh Variasi Parameter Bahan Terhadap Profil Kecepatan

Pada fluida mikrokutub mengenal adanya parameter material atau sering disebut dengan parameter bahan. Jenis dari fluida mikrokutub ini di tentukan dari berapa nilai parameter bahan yang terkandung didalamnya. Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui seberapa besar parameter bahan mempengaruhi kecepatan aliran fluida mikrokutub yang melewati bola teriris. Dalam simulasi ini diberikan variasi parameter bahan dengan besar $K = 1$, $K = 2$, $K = 3$ dan $K = 4$, diberikan pengaruh medan magnet sebesar $M = 1$ dan dilakukan pada sudut pengirisan pada bola yaitu sebesar 45° . Simulasi ini dilakukan pada fluida mikrokutub dengan konsentrasi pekat dan dengan konsentrasi setengah pekat hal ini juga dilakukan untuk mengetahui bagaimana pengaruh konsentrasi fluida mikrokutub dengan variasi parameter bahan terhadap kecepatan aliran fluida saat melewati bola teriris, sehingga didapatkan hasil sebagai berikut.

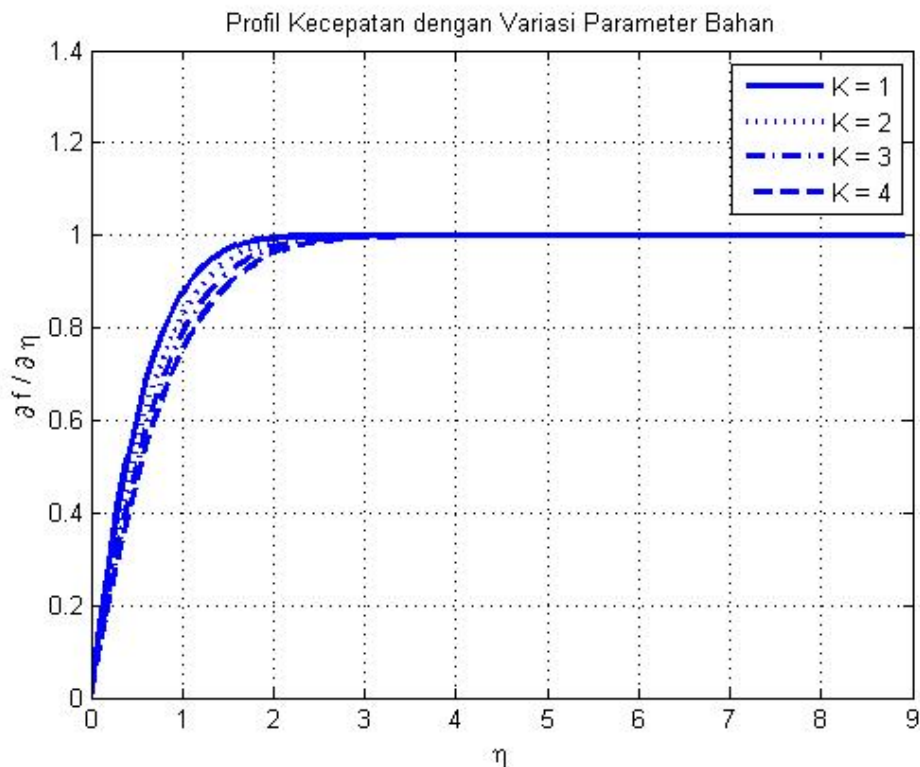


Gambar 5.7: Profil kecepatan dengan variasi parameter bahan saat $M = 1$, $n = 0$

Gambar (5.6) adalah simulasi fluida mikrokutub dengan konsentrasi pekat, grafik menunjukkan bahwa dengan semakin bertambahnya nilai parameter bahan maka kecepatan aliran fluida saat melewati bola teriris akan semakin berkurang. Hal ini disebabkan karena semakin besar gesekan yang terjadi antar sesama partikel fluida mikrokutub saat mengalir sehingga menyebabkan kecepatannya semakin

berkurang dengan seiring bertambahnya parameter bahan dari fluida mikrokurub. Selain itu dengan bertambahnya massa parameter bahan mengakibatkan semakin besar momentum linier yang dihasilkan sehingga gradien kecepatan dari fluida akan semakin kecil.

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk fluida mikrokutub dengan konsentrasi setengah pekat dengan memberikan besar variasi parameter bahan sama yaitu $K = 1$, $K = 2$, $K = 3$ dan $K = 4$ dengan memberikan pengaruh medan magnet sebesar $M = 1$ dan dilakukan pada sudut pengirisan yang sama yaitu pada sudut 45° maka diperoleh hasil simulasi sebagai berikut.



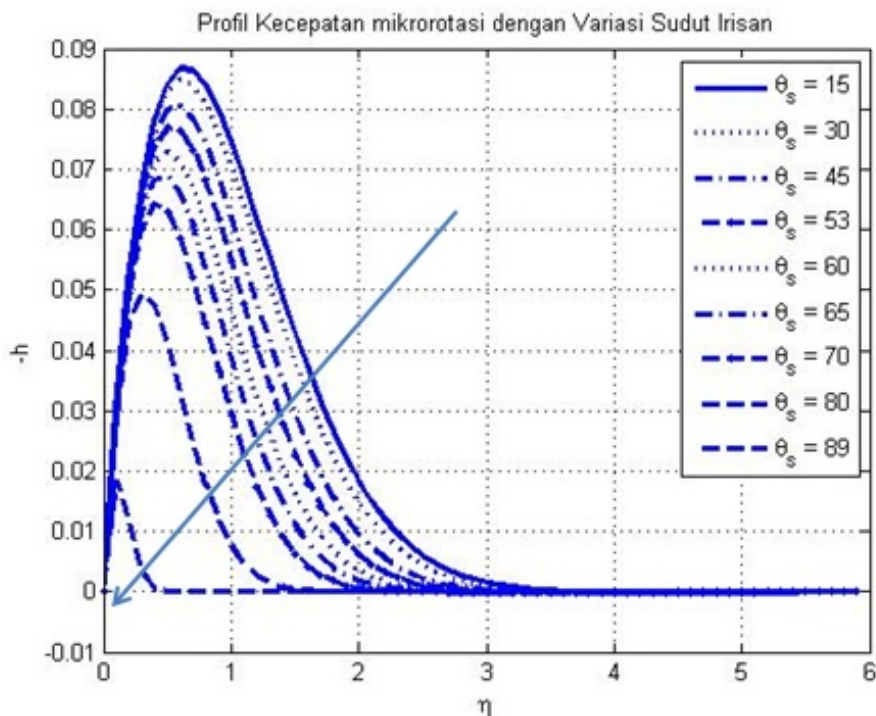
Gambar 5.8: Profil kecepatan dengan variasi parameter bahan saat $M = 1$, $n = 0.5$

Hasil simulasi menunjukkan bahwa terjadi penurunan kecepatan seiring dengan bertambahnya parameter bahan. Sama halnya dengan pengaruh besarnya sudut irisan dan variasi parameter magnetik, pada variasi parameter bahan juga tidak terdapat perbedaan signifikan pada ketebalan lapisan batas yang terbentuk di titik stagnasi dengan pemberian nilai tetap terhadap simulasi yang dilakukan pada kedua konsentrasi fluida mikrokutub yang berbeda.

5.2.4 Pengaruh Variasi Sudut irisan Terhadap Profil Mikrorotasi

Fluida mikrokutub merupakan fluida yang memiliki sifat unik yaitu memiliki partikel kaku berukuran mikro yang mendukung body couples dan berakibat pada perilaku mikrorotasi. Kemampuan mikrorotasi ini sangat menarik

untuk diteliti karena mikrokutub ini dapat menunjukkan prediksi sifat fluida dalam skala mikro. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana profil mikrorotasi fluida mikrokutub di sekitar titik stagnasi $x = 0^\circ$ saat fluida melewati bola teriris dengan diberikan variasi sudut irisan $\theta_s = 15^\circ$, $\theta_s = 30^\circ$, $\theta_s = 45^\circ$, $\theta_s = 53^\circ$, $\theta_s = 60^\circ$, $\theta_s = 65^\circ$, $\theta_s = 70^\circ$, $\theta_s = 80^\circ$, $\theta_s = 89^\circ$ dan diberikan medan magnet sebesar $M = 1$ dengan koefisien bahan $K = 1$. Penelitian ini dilakukan pada fluida mikrokutub dengan konsentrasi pekat dan fluida mikrokutub dengan konsentrasi setengah pekat untuk mengetahui bagaimana pengaruh kepekatan fluida mikrokutub terhadap profil mikrorotasi dengan variasi sudut irisan, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

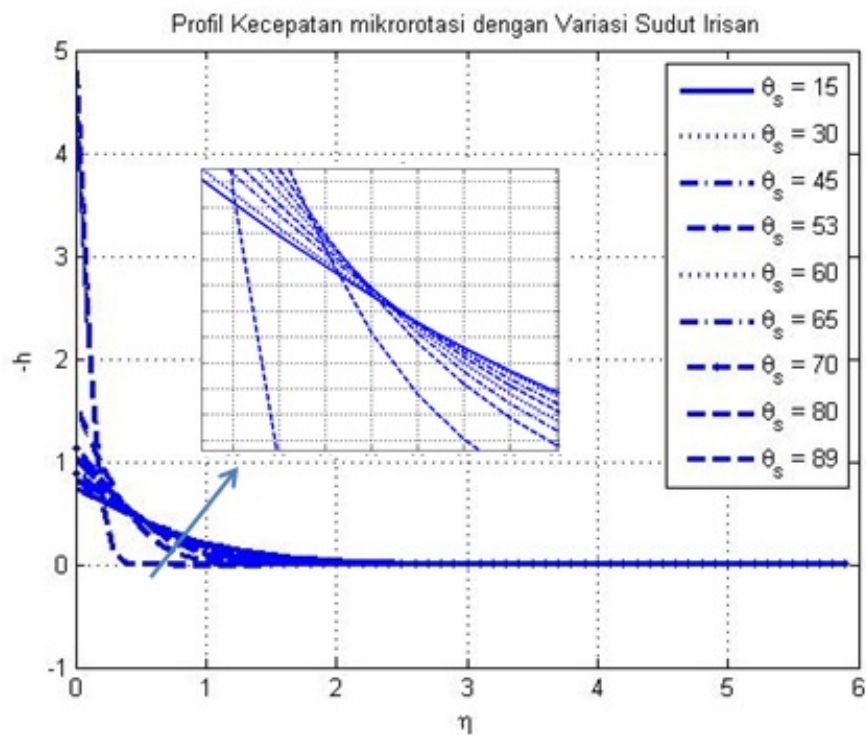


Gambar 5.9: Profil Mikrorotasi dengan variasi sudut iris saat $M = 1$, $K = 1$, $n = 0$

Hasil simulasi dengan $n = 0$ menunjukkan bahwa kecepatan mikrorotasi dari aliran fluida mikrokutub yang melewati bola teriris dengan sudut irisan $0^\circ < \theta_s < 90^\circ$ saat menyentuh permukaan bola teriris di titik stagnasi $x = 0^\circ$ kecepatannya sama dengan nol artinya rasio antara komponen vektor mikrorotasi dan gesekan fluida dipermukaan bernilai nol menyebabkan mikro elemen didekat permukaan bola tidak mampu untuk bermikrorotasi. Kemudian semakin menjauhi titik stagnasi kecepatannya akan meningkat yaitu saat ketebalan lapisan batas mendekati 1 dan kemudian menurun dengan cepat hingga konvergen ke 0 yang artinya mikro elemen berhenti berotasi saat ketebalan lapisan batas semakin tebal. Dengan semakin besarnya sudut irisan yang diberikan pada bola teriris maka

permukaannya akan semakin panjang sehingga kecepatan mikro elemen di dekat permukaan bola akan semakin kecil.

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk konsentrasi setengah pekat, dengan memberikan variasi sudut irisan yang sama yaitu $\theta_s = 15^\circ$, $\theta_s = 30^\circ$, $\theta_s = 45^\circ$, $\theta_s = 53^\circ$, $\theta_s = 60^\circ$, $\theta_s = 65^\circ$, $\theta_s = 70^\circ$, $\theta_s = 80^\circ$, $\theta_s = 89^\circ$ dan diberikan medan magnet sebesar $M = 1$ kemudian dengan koefisien bahan $K = 1$ maka diperoleh hasil simulasi sebagai berikut.

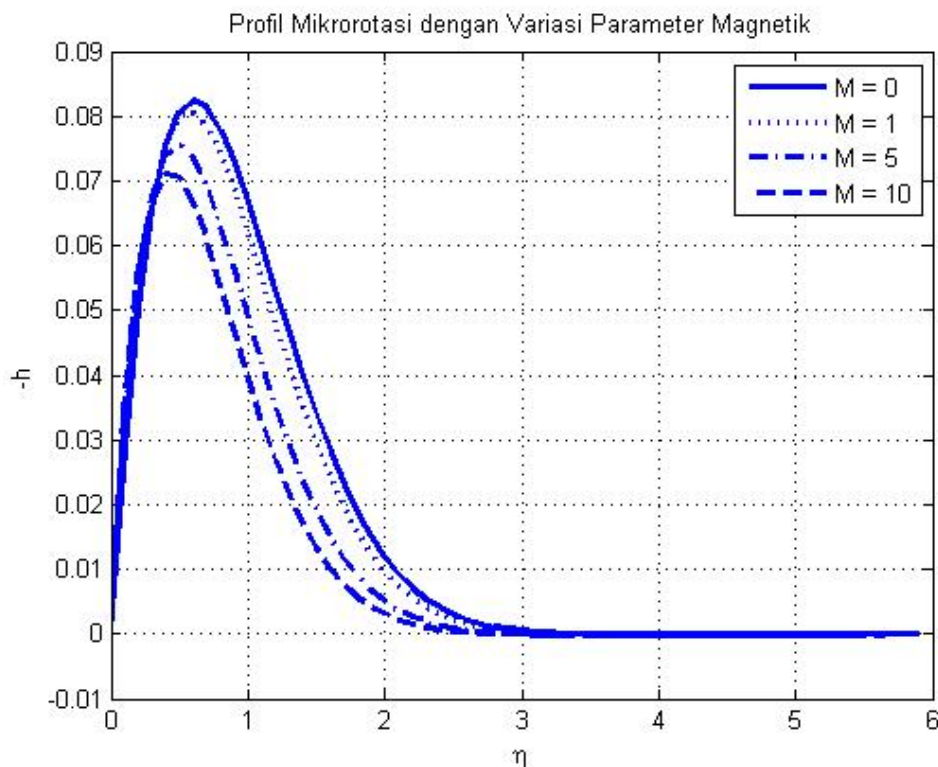


Gambar 5.10: Profil Mikrorotasi dengan variasi sudut iris saat $M = 1$, $K = 1$, $n = 0.5$

Hasil simulasi pada Gambar (5.9) dengan $n = 0.5$ menunjukkan bahwa terjadi perbedaan kondisi yang signifikan pada fluida mikrokutub setengah pekat jika dibandingkan dengan fluida mikrokutub dengan konsentrasi pekat. Pada kondisi ini kecepatan mikrorotasi partikel saat menyentuh permukaan bola teriris kecepatannya bervariasi, semakin besar sudut irisan maka semakin besar kecepatan mikrorotasi hal ini disebabkan karena saat rasio antara komponen vektor mikrorotasi dan gesekan fluida pada permukaan bola teriris adalah 0.5 maka bagian antisimetri tegangan tensor menghilang. Setelah itu sudut irisan yang lebih besar akan lebih dahulu berhenti bermikrorotasi.

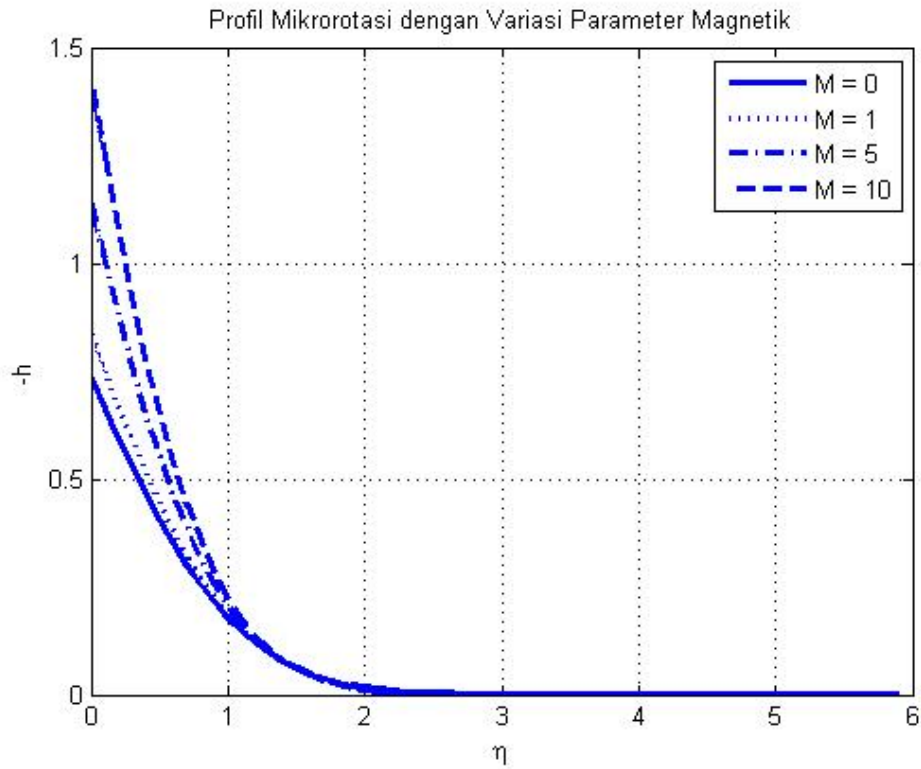
5.2.5 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Mikrorotasi

Penelitian ini sangat penting untuk dilakukan untuk mengetahui seberapa besar medan magnet mampu mempengaruhi kecepatan mikrorotasi dari fluida mikro kutub saat melewati permukaan bola teriris di sekitar titik stagnasi $x = 0^\circ$. Dengan memberikan variasi parameter magnetik sebesar $M = 0$, $M = 1$, $M = 5$ dan $M = 10$. untuk $M = 0$ artinya tidak ada pengaruh medan magnet yang diberikan. Simulasi ini dilakukan dengan memberikan nilai parameter bahan $K = 1$ dan dilakukan pada sudut irisan $\theta_s = 45^\circ$. Hasil simulasi yang diperoleh adalah sebagai berikut.



Gambar 5.11: Profil mikrorotasi dengan variasi parameter magnetik saat $K = 1$, $n = 0$

Dari hasil simulasi pada Gambar (5.11) yaitu dengan fluida mikro kutub dengan konsentrasi pekat dapat dilihat bahwa kecepatan mikrorotasi dari fluida mikro kutub yang melewati bola teriris semakin kecil dengan semakin bertambahnya parameter magnetik yang diberikan, sehingga dapat diartikan semakin besar pengaruh medan magnet yang diberikan maka akan semakin menurunkan kemampuan partikel untuk bermikrorotasi pada konsentrasi pekat hal ini disebabkan karena induksi medan magnet pada partikel fluida memberikan pengaruh yang cukup signifikan. Selanjutnya dilakukan simulasi untuk fluida mikro kutub dengan konsentrasi setengah pekat dengan memberikan variasi M, K dan θ_s yang sama dengan simulasi sebelumnya maka didapatkan hasil simulasi sebagai berikut.



Gambar 5.12: Profil mikrorotasi dengan variasi parameter magnetik saat $K = 1$, $n = 0.5$

Hasil simulasi menunjukkan bahwa dengan konsentrasi setengah pekat didapatkan hasil kecepatan fluida mikrokutub akan semakin besar dengan bertambahnya parameter magnetik yang diberikan, hal ini disebabkan karena saat aliran fluida mikrokutub memiliki konsentrasi setengah pekat maka jenis aliran fluida adalah aliran transisi sehingga ketika bilangan reynold magnetiknya sangat kecil maka induksi medan magnet tidak berpengaruh signifikan untuk menarik massa partikel untuk bermikrorotasi lebih lambat sehingga kecepatan mikrorotasinya akan semakin besar.

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Model matematika dari aliran fluida mikrokutub magnetohidrodinamik tak tunak pada lapisan batas yang melewati bola teriris diperoleh dari hasil penurunan persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier dan persamaan momentum angular dengan proses mengubah persamaan menjadi persamaan yang non-dimensional kemudian melakukan pendekatan lapisan batas dan merubah persamaan menjadi persamaan similaritas dengan waktu besar dan waktu kecil, diperoleh model matematika seperti pada system Persamaan (4.59) dan (4.60).
2. Model matematika pada lapisan batas aliran fluida mikrokutub magnetohidrodinamik tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati bola teriris diselesaikan dengan metode beda hingga dengan skema Keller-Box dengan 4 tahapan yaitu persamaan pembangun model diubah menjadi persamaan orde pertama, setelah itu dilakukan diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga pusat, kemudian dilakukan linearisasi persamaan dengan menggunakan metode newton dan dibentuk dalam matriks vektor dan langkah terakhir yaitu hasil linearisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.
3. Hasil simulasi numerik dengan menggunakan beberapa variasi parameter yaitu parameter magnetik, sudut irisan, parameter bahan dengan $n=0.5$ dan $n=0$ diperoleh hasil:
 - a. Semakin besar sudut irisan maka profil kecepatan aliran fluida akan semakin meningkat.
 - b. Semakin besar parameter magnetik didapatkan bahwa profil kecepatan fluida yang dihasilkan semakin meningkat.
 - c. Semakin besar parameter bahan maka profil kecepatan aliran fluida akan semakin menurun.
 - d. Semakin besar sudut irisan maka profil mikrorotasi akan semakin kecil untuk $n = 0$, kemudian untuk $n = 0.5$ semakin besar sudut irisan maka profil mikrorotasi semakin besar.
 - e. Semakin besar parameter magnetik profil mikrorotasi akan semakin kecil untuk $n = 0$, kemudian untuk $n = 0.5$ semakin besar parameter magnetik profil mikrorotasi akan semakin besar.

6.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan pada penelitian yang selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan studi tidak pada titik stagnasi atau ($x \neq 0$), sehingga dapat dilihat profil kecepatan dan profil kecepatan mikrorotasi disekeliling permukaan bola teriris.
2. Pada penelitian ini penelitian dilakukan pada aliran medan magnet yang tidak mengalami induksi, diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian dengan memperhitungkan adanya induksi medan magnet.
3. Pada penelitian selanjutnya dilakukan studi mengenai konveksi paksa atau konveksi campuran dari aliran fluida mikrokutub dengan melewati geometri benda yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdel-Rahman, G. M (2009), Studying Effect of MHD on Thin Films of A Micropolar Fluid, *Physica B: Condensed Matter*, 404(21):3859-3866 .
- Ali, F. M., Nazar, R., Arifin, N. M (2010), Numerical Solutions of Unsteady Boundary Layer Flow Due to an Impulsively Stretching Surface, *Journal of Applied Computer Science and Mathematics*, no. 8(4).
- Anderson, Jhon. D (2011), *Fundamentals of Aerodynamics* 5th, 492-494 .
- Arber, T. (2003), *Fundamentals of Magnetohydrodynamics (MHD)*, Lecture Handout: University of Harwick, UK.
- Kucaba-Pietal (2004), "Microchannels Flow Modelling With The Micropolar Fluid Theory", *Bulletin of The Polish Academy of Science*, Vol.52, No.3.
- Kudenatti, R. B. Kirsur, S. R. Achala, L. and Bujurke, N. (2013), "MHD Boundary Layer Flow Over A Non-Linear Stretching Boundary with Suction and Injection", *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 50:58-67.
- Kumar, Vijay (1984), *Theories of Fluids With Microstructure*, Department of Mechanical Engineering Indian Institute of Technology Kanpur, India and Corporate Research and Development General Electric Company Schenectady, New York, USA. 121-158.
- Lukaszewicz, Grzegorz (1999), *Micropolar Fluid: theory and applications*, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Univeristy of Warsaw . 6-24.
- Mohammad, N. F. (2014), *Unsteady Magnetohydrodynamics Convective Boundary Layer Flow Past A Sphere In Viscous and Micropolar Fluids*, Universiti Technology Malaysia, Malaysia.
- Munson, B.R., Young, D.F., dan Okiishi, T.H. (2002), *Convective Heat Transfer Solved Problems*, ISTE Ltd, UK.
- Nugroho, Aditya, 2007, *Studi Eksperimental tentang Karakteristik aliran fluida melintasi silinder sirkular teriris tipe D (studi kasus untuk pengaruh gap ratio silinder teriris terhadap endwall ($0 \leq \alpha \leq 0.4$))*, Tugas Akhir, Jurusan Teknik Mesin, FTI, ITS
- Pamungkas, D. C (2009), *Studi Eksperimental Tentang karakteristik Aliran Fluida Melintasi Silinder teriris Tipe-I Didekat Plat Datar Untuk Lapisan Batas Laminar dan Turbulen*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Tugas Akhir S1 Jurusan Teknik Mesin.

- Satya Narayana, P., Venkateswarlu, B. dan Venkataramana, S (2013). Effects of Hall Current And Radiation Absorption on MHD Micropolar Fluid In A rotating System, *Ain Shams Engineering Journal*, 4(4):843-854.
- Shercliff, J.(1979). Thermoelectric Magnetohydrodynamics. *Journal of Fluid Mechanics*. 91(02):231-251.
- Uddin, Z. dan Kumar, M. (2013). Hall and ion slip effect on MHD boundary Layer Of A Micropolar Fluid Past A wedge. *Scientia Iranica*. 20(3): 467-476.
- Widodo, B. (2012), *Peemodelan Matematika*, itsres, Surabaya.
- Widodo, B., Khalimah, D.A., Zainal , F. D. S, dan Imron, C. (2015) The Effect of Prandalt Number and Magnetic Parameters on Unsteady Magnetohydrodynamic Forced Convection Boundary Layer Flow of a Viscous Fluid Past A Sphere, *International Convergence on Science and innovative Engineering (ICSIE)*, Kuala Lumpur, Malaysia, 16 Oktober 2015.
- Widodo, B.,Anggriani, I., dan Imron, C. (2015) The Characterization of Boundary Layer Flow in The Magnetohydrodynamic Micropolar Fluid Past a Solid Sphere, *International Convergence on Science and innovative Engineering (ICSIE)*, Kuala Lumpur, Malaysia, 16 Oktober 2015.
- Widodo, B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, G.), Rahayuningsih,. T. dan Purbandini (2016), *Fiscoelastic Fluid Flow Past A Porous Circular Cylinder when The Magnetic Field Included*, *Far East Journal Mathematical and Sciences (Puspa Publishing House India)*, Vol 99 No 2: 173-186.
- Widodo, B., Mohamed, M.K.A., Salleh, M.Z., Husanan, A., Sarif, N.M., Noar, N.A.Z., Ishak, A., *Mathematical Model Of Free Convection Boundary Layer Flow On Solid Sphere With Viscouse Dissipation and Thermal Radiation*, (2016), *International Journal Of Computing Science and Aplied Mathematics*, Vol.2(2).
- Widodo, B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, G.O., Rahayuningsih, T., Purbandini., (2016), *Viscoelastic Fluid Flow Pass A Porous Circular Cylinder When The Magnetic Field Included*, *Far East Journal of Mathematics Science (FJMS)*, Vol. 99(2):173-186.

BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Rita Ayu Ningtyas lahir pada tanggal 28 Agustus 1992 di Kendari dan merupakan anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan bapak Suwito dan ibu Istina. Pendidikan formal yang ditempuh mulai dari SDN 2 Matahoalu lulus pada tahun 2004, setelah itu melanjutkan pendidikan ke SMPN 1 Uepai yang lulus pada tahun 2007, kemudian melanjutkan pendidikan ke SMAN 1 Unaaha yang lulus pada tahun 2010. Pada tahun 2010 penulis melanjutkan pendidikan S1 di jurusan Matematika FMIPA Universitas Haluoleo melalui jalur tes SNMPTN kemudian lulus dengan waktu 3.5 tahun dengan mengambil bidang minat pada pemodelan matematika dan setelah itu penulis melanjutkan pendidikan S2 pada jurusan Matematika FMIPA ITS pada tahun 2014 yang dapat diselesaikan pada waktu 1.5 tahun dengan mengambil bidang minat Komputasi Dinamika Fluida (*CFD*). Informasi, kritik dan saran membangun dapat diajukan ke alamat email ritaayu777@gmail.com.

LAMPIRAN

Lampiran 1 transformasi persamaan pembangun dimensional diubah menjadi persamaan pembangun non-dimensional

1. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(xa)} + \frac{\partial(vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial(ya Re^{-\frac{1}{2}})} &= 0 \\ \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Linier Sumbu-x

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{u}$$

Ruas kiri persamaan:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left(\frac{\partial(uU_\infty)U_\infty}{\partial(at)} + (uU_\infty) \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(ax)} + (uU_\infty) \right. \\ &\quad \left. Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(ay Re^{-\frac{1}{2}})} \right) \\ &= \rho \left(\frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a} Re^{-\frac{1}{2}} v \frac{\partial u}{\partial y Re^{-\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Ruas kanan persamaan:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{u} \\
= & \frac{-\partial \rho U_\infty^2 p}{\partial x a} + (\mu + \mu K) \left(\frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial (x a)^2} + \frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial (y a Re^{-\frac{1}{2}})^2} \right) + \mu K \left(\frac{\partial U_\infty N}{\partial y a Re^{-\frac{1}{2}}} \right) \\
& - \sigma B_0^2 u U_\infty \\
= & -\rho \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \mu \left(\frac{U_\infty}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu K \left(\frac{U_\infty}{a Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\
& - \sigma B_0^2 u U_\infty \\
= & -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \mu \frac{U_\infty}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\mu K) \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{1}{Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\
& - \sigma B_0^2 u U_\infty
\end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan

$$\begin{aligned}
\rho \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \mu \frac{U_\infty}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
& + (\mu K) \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{1}{Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial N}{\partial y} \right) - \sigma B_0^2 u U_\infty
\end{aligned}$$

kedua ruas dibagi dengan $\rho \frac{U_\infty^2}{a}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho a U_\infty} (1 + K) \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho U_\infty} (\mu K) \\
& \left(\frac{1}{Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial N}{\partial y} \right) - \left(\frac{a}{\rho U_\infty} \sigma B_0^2 \right) u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu \rho}{\rho a U_\infty} (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu \rho (1 + K) Re^{\frac{1}{2}}}{\rho a U_\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
& + \frac{\nu \rho K Re^{\frac{1}{2}}}{\rho U_\infty} \frac{\partial N}{\partial y} - Mu
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1 + K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - Mu$$

3. Persamaan Momentum Linier Sumbu-y

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{v}$$

Ruas kiri persamaan:

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left(\frac{\partial (vU_\infty) Re^{-\frac{1}{2}}}{\partial (at) U_\infty^{-1}} + uU_\infty \frac{\partial (vU_\infty) Re^{-\frac{1}{2}}}{\partial (xa)} + (vU_\infty) \right. \\
&\quad \left. Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial (vU_\infty) Re^{-\frac{1}{2}}}{\partial (ya) Re^{-\frac{1}{2}}} \right) \\
&= \rho \left(\frac{U_\infty^2}{a} \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a} \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a} \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&= \rho \frac{U_\infty^2}{a} \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Ruas kanan persamaan:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{v} \\
&= -\frac{\partial \rho P U_\infty^2}{\partial ya Re^{-\frac{1}{2}}} + (\mu + \mu K) \left(\frac{\partial^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}}{\partial (xa)^2} + \frac{\partial^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}}{\partial (ya Re^{-\frac{1}{2}})^2} \right) - \mu K \left(\frac{\partial U_\infty N Re^{\frac{1}{2}}}{\partial aay Re^{-\frac{1}{2}}} \right) \\
&\quad - \sigma B_0^2 U_\infty v Re^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} + (1 + K) \mu \left(\frac{U_\infty}{a^2} Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_\infty}{a^2} \frac{Re^{-\frac{1}{2}}}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \mu K \frac{U_\infty}{a^2} Re \\
&\quad \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) - \sigma B_0^2 U_\infty v Re^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-\frac{1}{2}}} (1 + K) \mu \rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \mu K \frac{U_\infty}{a^2} Re \frac{\partial N}{\partial y} \\
&\quad - \sigma B_0^2 U_\infty v Re^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan

$$\begin{aligned}
\rho \frac{U_\infty^2}{a} \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-\frac{1}{2}}} (1 + K) \mu \rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\
&\quad \left. + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \mu K \frac{U_\infty}{a^2} Re \frac{\partial N}{\partial y} - \sigma B_0^2 U_\infty v Re^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan $\frac{\rho U_\infty^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}}$

$$\begin{aligned}
 Re^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y} + (1+K) \mu \frac{Re^{-1}}{\rho a U_\infty} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \mu K \frac{Re}{\rho U_\infty Re^{\frac{1}{2}}} \\
 &\quad \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{a Re^{-1}}{\rho U_\infty} \sigma B_0^2 v \\
 \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y} + (1+K) \frac{\nu \rho Re^{-1}}{\rho a U_\infty} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \nu \rho K \frac{Re}{\rho U_\infty Re^{\frac{1}{2}}} \\
 &\quad \frac{\partial N}{\partial y} - Re^{-1} \left(\frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \right) v \\
 \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1+K}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K}{Re} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{M}{Re} v
 \end{aligned}$$

4. Persamaan Momentum Angular

$$\rho j \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

Ruas kiri persamaan:

$$\begin{aligned}
 \rho j \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho j \left(\frac{\partial NU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{\partial t a} + u U_\infty \frac{\partial NU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{\partial x a} + v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial NU_\infty Re^{\frac{1}{2}} Re^{\frac{1}{2}}}{\partial y a} \right) \\
 &= \rho j \left(\frac{U_\infty^2}{a^2} Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a^2} Re^{\frac{1}{2}} u \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a^2} Re^{\frac{1}{2}} v \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\
 &= \rho j \frac{U_\infty^2}{a^2} Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

Ruas kanan persamaan:

$$\begin{aligned}
 &\gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \\
 &= \left(\mu + \frac{K\mu}{2} \right) j \left(\frac{\partial^2 NU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{\partial x^2 a^2 a} + \frac{\partial^2 NU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{\partial y^2 a^2 (Re^{\frac{1}{2}})^2 a} \right) - (K\mu) j \left(2 \frac{NU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial u U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{\partial y a} - \frac{\partial v U_\infty}{\partial x a Re^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 &= (1+K/2) \mu j \left(\frac{U_\infty}{a^3} Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \mu j \left(\frac{U_\infty}{a} Re^{\frac{1}{2}} 2N + \frac{U_\infty}{a} Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{U_\infty}{a} \right. \\
 &\quad \left. Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

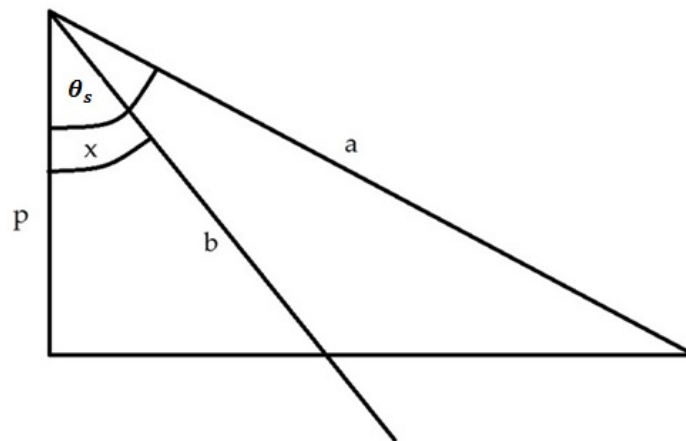
Ruas kiri sama dengan ruas kanan

$$\begin{aligned} \rho j \frac{U_\infty^2}{a^2} Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= (1 + K/2) \mu j \left(\frac{U_\infty}{a^3} Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ &\quad - K \mu j \left(\frac{U_\infty}{a} Re^{\frac{1}{2}} 2N + \frac{U_\infty}{a} Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{U_\infty}{a} \right. \\ &\quad \left. Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \rho j \frac{U_\infty^2}{a^2} Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= (1 + K/2) \rho v j \left(\frac{U_\infty}{a^3} Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ &\quad - K \rho v j \left(\frac{U_\infty}{a} Re^{\frac{1}{2}} 2N + \frac{U_\infty}{a} Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{U_\infty}{a} \right. \\ &\quad \left. Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

kedua ruas dibagi dengan $\rho j \frac{U_\infty^2}{a^2} Re^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = (1 + K/2) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Lampiran 2 Perhitungan Kecepatan Aliran Bebas U_e Bola Teriris



Gambar 6.1: Sistem Koordinat Bola

$$\begin{aligned}\cos \theta_s &= \frac{p}{a} \\ p &= a \cos \theta_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{p}{b} \\ p &= b \cos x\end{aligned}$$

dapat ditulis

$$\begin{aligned}\bar{b} \cos x &= a \cos \theta_s \\ \bar{b} &= a \frac{\cos \theta_s}{\cos x}\end{aligned}$$

diubah kebentuk nondimensional didapatkan

$$ab = a \frac{\cos \theta_s}{\cos x}$$

Dengan memodifikasi penurunan rumus aliran bebas yang dilakukan oleh Anderson yaitu aliran bebas pada bola maka didapatkan hasil sebagai berikut.

$$u_e u_\infty = \frac{3}{2} u_\infty \sin \frac{x}{b}$$

$$u_e = \frac{3}{2} \sin \frac{x}{\frac{\cos \theta_s}{\cos x}}$$

$$u_e = \frac{3}{2} \sin x \frac{\cos x}{\cos \theta_s}$$

kemudian diubah kebentuk non-dimensional didapatkan

$$u_e = \frac{3}{2} \sin \left(x \frac{\cos x}{\cos \theta_s} \right)$$

$\frac{d}{dx}(u_e)$ adalah sebagai berikut.

$$\frac{d}{dx}(u_e) = \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2} \sin \left(x \frac{\cos x}{\cos \theta_s} \right) \right)$$

$$\frac{d}{dx}(u_e) = \frac{3}{2} \cos \left(x \frac{\cos x}{\cos \theta_s} \right) \left(\frac{-\sin x}{\cos \theta_s} x + \frac{\cos x}{\cos \theta_s} \cdot 1 \right)$$

karena $x = 0$ maka,

$$\frac{d}{dx}(u_e) = \frac{3}{2} \cos(0) \left(\frac{-\sin 0}{\cos \theta_s} 0 + \frac{\cos 0}{\cos \theta_s} \cdot 1 \right)$$

$$\frac{d}{dx}(u_e) = \frac{3}{2 \cos \theta_s}$$

Lampiran 3 Perhitungan Persamaan Similaritas

Berdasarkan persamaan tak berdimensi yaitu pada Persamaan (4.62), (4.63), dan (4.65) dilakukan transformasi ke bentuk persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir sesuai dengan Persamaan (4.75) dan (4.76) yaitu

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dengan variabel similaritas yaitu

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{t}}$$

$$N = t^{-1/2} U e(x) h(x, \eta, t)$$

sehingga didapatkan

1. Persamaan Kontinu

$$\frac{\partial r u}{\partial x} + \frac{\partial r v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial r}{\partial y} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

2. Persamaan Momentum Linier

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - M(u - u_e)$$

$$(\Leftrightarrow)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

$$= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1+K) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + K \frac{\partial N}{\partial y} - M \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + (1+K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} + M \left(u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

(\Leftrightarrow)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{du_e}{dx} + (1+K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} + M \left(u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

dengan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{t^{1/2}} \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{1}{2} y t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{1}{t^{1/2}} = u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)}{\partial x} = t^{1/2} f(x, \eta, t) r(x) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + t^{1/2} u_e(x) \\
&\quad r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} + t^{1/2} f(x, \eta, t) u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&\quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{1}{t^{1/2}} = \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= \frac{1}{t} u_e(x) r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
&\quad + u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&\quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + u_e(x) \\
&\quad r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta \partial t} = -\frac{u_e(x) r(x) \eta}{t} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta \partial t}
\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dituliskan bahwa $u_e(x) = u_e$ dan $f(x, \eta, t) = f$ sehingga persamaan similaritas untuk persamaan momentum linier yaitu

a. Ruas kiri

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
= & \frac{1}{r} \left(-\frac{u_e r \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) + \frac{1}{r^2} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \\
& \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(t^{\frac{1}{2}} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e r \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
= & -\frac{1}{r} \frac{u_e r \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + \frac{1}{r^2} u_e r^2 \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} (u_e)^2 r \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
& + \frac{1}{r^2} (u_e)^2 r^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} (u_e)^2 r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - t^{\frac{1}{2}} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \frac{1}{r} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
& - t^{\frac{1}{2}} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \frac{1}{r} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} - t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \frac{1}{r} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
= & -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r} (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
& + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \frac{1}{r} \frac{d}{dx} (u_e)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - f (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{1}{r} \\
& - (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

b. Ruas kanan

$$\begin{aligned}
& u_e \frac{du_e}{dx} + (1+K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} + M \left(u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
= & u_e \frac{du_e}{dx} + (1+K) \frac{1}{r} \frac{1}{t} r u_e \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + K \frac{1}{t} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} + M \left(u_e - \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
= & u_e \frac{du_e}{dx} + (1+K) \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + K \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} + M u_e \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri dan ruas kanan sama sehingga

$$\begin{aligned}
& -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r} (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
& + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \frac{1}{r} \frac{d}{dx} (u_e)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - f (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{1}{r} \\
& - (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = u_e \frac{du_e}{dx} + (1+K) \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + K \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} + M u_e \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

kedua ruas dibagi dengan u_e/t

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{r} t u_e \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{d}{dx} t u_e \\ & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{t}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} f t u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = t \frac{du_e}{dx} + (1+K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \\ & + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} & (1+K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{du_e}{dx} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\ & = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

3. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} &= (1+K/2) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial N}{\partial x} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial N}{\partial y} &= (1+K/2) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left(2N + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} &= (1+K/2) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} u_e(x) f(x, \eta, t) + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} - \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left(\frac{1}{2t} \right) \\ \frac{\partial N}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) \frac{\partial(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{t} u_e(x) \frac{\partial(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) \frac{\partial(h, \eta, t)}{\partial x} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} (h, \eta, t) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e(x) \frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

selanjutnya $h(x, \eta, t)$ dapat ditulis h sehingga persamaan similaritas momentum angular adalah sebagai berikut.

a. Ruas kiri

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \\
&= -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} u_e h + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} f u_e \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} h \frac{\partial u_e}{\partial x} \right) \\
&\quad - \frac{1}{r} \left(t^{\frac{1}{2}} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{1}{t} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&= -\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e h + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} h \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} \\
&\quad - \frac{1}{r} \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} t^{\frac{1}{2}} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} t^{\frac{1}{2}} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \\
&= -\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e h + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{(u_e)^2}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} \\
&\quad - \frac{u_e t^{\frac{1}{2}}}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} f \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{(u_e)^2 t^{\frac{1}{2}}}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} f \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{(u_e)^2 t^{\frac{1}{2}}}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x}
\end{aligned}$$

b. ruas kanan

$$\begin{aligned}
& (1 + K/2) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
&= (1 + K/2) \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - K \left(2 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e h + \frac{1}{r} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
&= (1 + K/2) \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - K \left(2 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e h + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e h + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{(u_e)^2}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} \\
&\quad - \frac{u_e t^{\frac{1}{2}}}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} f \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{(u_e)^2 t^{\frac{1}{2}}}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} f \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{(u_e)^2 t^{\frac{1}{2}}}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} \\
&= (1 + K/2) \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - K \left(2 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e h + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

kedua ruas dibagi dengan $\frac{u_e}{t^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} h + t \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u_e}{t} h \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} - t \frac{\partial h}{\partial \eta} f \frac{\partial u_e}{\partial x} \\
&\quad - \frac{1}{r} u_e t f \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial x} - u_e t \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} = (1 + K/2) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - t K \left(2h + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

dapat ditulis

$$(1 + K/2) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{2} h + t \frac{du_e}{dx} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \right) \frac{\partial f}{\partial \eta} = t \frac{\partial h}{\partial t} + tu_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + tK \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)$$

Lampiran 4 Penurunan Kondisi Awal

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + \frac{3}{2\cos\theta_s}t \left[1 - (f')^2 + ff'' \right] + Kh' + Mt(1 - f') = t \frac{\partial f'}{\partial t}$$

$$(1 + K/2)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2\cos\theta_s}t(fh' - hf') = t \frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + f'')$$

dengan $t = 0$ maka persamaan dapat ditulis

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + Kh' = 0$$

$$(1 + K/2)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{1}{2}h = 0$$

Persamaan diubah menjadi persamaan orde satu dengan memisalkan $f'' = s$ maka

$$(1 + K)s' + \frac{\eta}{2}s + Kh' = 0$$

dan diketahui $h = -nf''$

$$(1 + K)s' + \frac{\eta}{2}s - Kns' = 0$$

$$(1 + K[1 - n])s' + \frac{\eta}{2}s = 0$$

dengan $s' = \frac{ds}{d\eta}$ maka

$$(1 + K[1 - n])\frac{ds}{d\eta} + \frac{\eta}{2}s = 0$$

dikali $d\eta$

$$(1 + K[1 - n])ds + \frac{\eta}{2}s d\eta = 0$$

dibagi $\frac{1}{s}$

$$\frac{(1 + K[1 - n])}{s}ds + \frac{\eta}{2}d\eta = 0$$

Kedua ruas diintegalkan

$$(1 + K[1 - n])\ln s + \frac{\eta^2}{4} = c_1$$

$$\begin{aligned}
(1 + K[1 - n]) \ln s &= c_1 - \frac{\eta^2}{4} \\
\ln s &= \frac{c_1}{(1 + K[1 - n])} - \frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])} \\
f'' &= s = e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])} - \frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}} \\
f' &= \int \left(e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}} \right) d\eta \\
f' &= e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])}} \int e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}} d\eta
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang mensubstitusikan fungsi error (*erf*) diperoleh

$$\begin{aligned}
f' &= e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{4 \cdot \frac{1}{4(1 + K(1 - n))}}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\eta^2}{4(1 + K(1 - n))}} \right) \right) \\
f' &= \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1 + K(1 - n))}} \right) e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}} + c_2
\end{aligned}$$

dengan menggunakan kondisi batas

$$\begin{aligned}
t \geq 0 : f' = 0, h = -nf'', \text{ pada saat } \eta = 0 \\
f' = 1, \text{ pada saat } \eta \mapsto \infty
\end{aligned}$$

selanjutnya ditentukan nilai c_2 dengan mensubstitusikan kondisi batas $f' = 0$ saat $\eta = 0$.

$$\begin{aligned}
f' &= \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1 + K(1 - n))}} \right) e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}} + c_2 \\
c_2 &= 0
\end{aligned}$$

saat $f' = 1$ pada saat $\eta \mapsto \infty$ diperoleh $e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}}$, dengan $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

$$\begin{aligned}
f' &= \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1 + K(1 - n))}} \right) e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}} \\
1 &= \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} \operatorname{erf} \left(\infty \right) e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}} \\
1 &= \sqrt{\pi(1 + K(1 - n))} e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}} + c_2 \\
e^{\frac{c_1}{(1 + K(1 - n))}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + K(1 - n))}}
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan c_2 dan $e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}}$ pada f' maka diperoleh f' sebagai berikut.

$$f' = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right)$$

$$f' = \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right)$$

untuk mendapatkan f maka f' diintegrasikan

$$f = \int f' d\eta$$

$$= \int \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right) d\eta$$

$$= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K(1-n))}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}\right) + c_3$$

untuk memperoleh nilai c_3 maka disubstitusikan kondisi batas $f' = 1$ pada saat $\eta \rightarrow \infty$

$$1 = \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K(1-n))}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}\right) + c_3$$

$$c_3 = -1$$

dengan demikian diperoleh

$$f = \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K(1-n))}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} - 1\right)$$

untuk mendapatkan f'' maka f' diturunkan

$$f'' = \frac{d}{d\eta} f'$$

$$= \frac{d}{d\eta} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

untuk mendapatkan f''' maka f'' diturunkan

$$\begin{aligned}
 f''' &= \frac{d}{d\eta} f'' \\
 &= \frac{d}{d\eta} \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} \\
 &= -\frac{\eta}{2(1+K(1-n))\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan h

$$\begin{aligned}
 h &= -nf'' \\
 &= -n \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h' &= -nf''' \\
 &= \frac{n\eta}{2(1+K(1-n))\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}}
 \end{aligned}$$

Lampiran 5 Linearisasi Dengan Metode Newton

1. Untuk Waktu Kecil

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j} \left(f_j^n - f_{j-1}^n \right) + \frac{1}{l_j} \left(\delta f_j - \delta f_{j-1} \right) &= \frac{1}{2} \left(g_j^n - g_{j-1}^n \right) + \frac{1}{2} \left(\delta g_j - \delta g_{j-1} \right) \\ \left(\delta f_j - \delta f_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta g_j - \delta g_{j-1} \right) &= - \left(f_j^n - f_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(g_j^n - g_{j-1}^n \right)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j} \left(g_j^n - g_{j-1}^n \right) + \frac{1}{l_j} \left(\delta g_j - \delta g_{j-1} \right) &= \frac{1}{2} \left(s_j^n - s_{j-1}^n \right) + \frac{1}{2} \left(\delta s_j - \delta s_{j-1} \right) \\ \left(\delta g_j - \delta g_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta s_j - \delta s_{j-1} \right) &= - \left(g_j^n - g_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(s_j^n - s_{j-1}^n \right)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j} \left(h_j^n - h_{j-1}^n \right) + \frac{1}{l_j} \left(\delta h_j - \delta h_{j-1} \right) &= \frac{1}{2} \left(q_j^n - q_{j-1}^n \right) + \frac{1}{2} \left(\delta q_j - \delta q_{j-1} \right) \\ \left(\delta h_j - \delta h_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta q_j - \delta q_{j-1} \right) &= - \left(h_j^n - h_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(q_j^n - q_{j-1}^n \right)\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}(1+K) \left(\left(\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) + \left(\frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{l_j} \right) \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{2} \right) \\ + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right)^2 + \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j - \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{2} \right) \right) + K \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{2} \right) + M t^n \left(1 - g_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right) \\ - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right) = R_1\end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned}
& (1+K) \left(\frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n 2g_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right) \\
& - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right)^2 + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n f^n \left(\frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& \left(\frac{\delta f_j - \delta f_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(\frac{\delta f_j - \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{2} \right) + K \left(\frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
& - M t^n \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right) = -(1+K) \left(\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) \\
& - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
& - M t^n \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + R_1
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
& (1+K/2) \left(\left(\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \left(\frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{l_j} \right) \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
& + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(\left(f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j - \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{2} \right) - \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2} \right) \right. \\
& \left. \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right) \right) + t^n K \left(2 \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2} \right) + \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{2} \right) \right) \\
& - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2} \right) = R_2
\end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
& (1 + K/2) \left(\frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2} \right) \\
& + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta q_j - \delta q_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j - \delta f_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right) \\
& + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(\frac{\delta f_j - \delta f_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right) \left(\frac{\delta q_j - \delta q_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta h_j - \delta h_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \\
& \left(\frac{\delta h_j - \delta h_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right) \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right) - 2t^n K \left(\frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2} \right) - t^n K \\
& \left(\frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2} \right) = -(1 + K/2) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \\
& - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
& - t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n + R_2
\end{aligned}$$

Dengan

$$\begin{aligned}
R_1 &= -(1 + K) \left(\frac{s_j^{n-1} - s_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^{n-1} \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 \right. \\
& \left. + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - K \left(q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - M t^{n-1} \left(1 - \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
R_2 &= -(1 + K/2) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right. \\
& \left. - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + t^n K \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

2. Untuk Waktu Besar

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l_j} \left(F_j^n - F_{j-1}^n \right) + \frac{1}{l_j} \left(\delta F_j - \delta F_{j-1} \right) &= \frac{1}{2} \left(G_j^n - G_{j-1}^n \right) + \frac{1}{2} \left(\delta G_j - \delta G_{j-1} \right) \\
\left(\delta F_j - \delta F_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta G_j - \delta G_{j-1} \right) &= - \left(F_j^n - F_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(G_j^n - G_{j-1}^n \right)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j} \left(G_j^n - G_{j-1}^n \right) + \frac{1}{l_j} \left(\delta G_j - \delta G_{j-1} \right) &= \frac{1}{2} \left(S_j^n - S_{j-1}^n \right) + \frac{1}{2} \left(\delta S_j - \delta S_{j-1} \right) \\ \left(\delta G_j - \delta G_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta S_j - \delta S_{j-1} \right) &= - \left(G_j^n - G_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(S_j^n - S_{j-1}^n \right)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j} \left(H_j^n - H_{j-1}^n \right) + \frac{1}{l_j} \left(\delta H_j - \delta H_{j-1} \right) &= \frac{1}{2} \left(Q_j^n - Q_{j-1}^n \right) + \frac{1}{2} \left(\delta Q_j - \delta Q_{j-1} \right) \\ \left(\delta H_j - \delta H_{j-1} \right) - \frac{l_j}{2} \left(\delta Q_j - \delta Q_{j-1} \right) &= - \left(H_j^n - H_{j-1}^n \right) + \frac{l_j}{2} \left(Q_j^n - Q_{j-1}^n \right)\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}(1+K) \left(\frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\ + K Q_{j-\frac{1}{2}}^n + M \left(1 - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} G_{j-\frac{1}{2}}^n &= - (1+K) \left(\frac{S_j^{n-1} - S_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\ - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ + M \left(1 - G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\end{aligned}$$

 \Leftrightarrow

$$\begin{aligned}(1+K) \left(\frac{\delta S_j - \delta S_{j-1}}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} 2 G_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \\ \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right)^2 + \frac{3}{2 \cos \theta_s} f^n \left(\frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} S_{j-\frac{1}{2}}^n \\ \left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2} \right) \\ + K \left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2} \right) - M \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right) \\ = - (1+K) \left(\frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\ - K \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - M \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + R_1\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
& (1+K/2) \left(\frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
& - K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1+K/2) \left(\frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\
& - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
& - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

 \Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
& (1+K/2) \left(\frac{\delta Q_j - \delta Q_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2} \right) \\
& + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Q_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2} \right) \\
& - \frac{3}{2 \cos \theta_s} H_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \\
& \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta G_j + \delta G_{j-1}}{2} \right) - 2K \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2} \right) - K \left(\frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2} \right) \\
& - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2} \right) = -(1+K/2) \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \\
& \left. - H_{j-\frac{1}{2}}^n G_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n + R_2
\end{aligned}$$

Dengan

$$\begin{aligned}
R_1 &= -(1+K) \left(\frac{S_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\
& - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(1 - \left(G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& + M \left(1 - G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
R_2 &= -(1+K/2) \left(\frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\
& - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} G_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K \left(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
& - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Lampiran 6 List Program Dengan Matlab

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60;
nt = 33;
nt1 = 21;
%lambda = 1;
K = 0;
M = 1;
na = 0.5;
deleta = 0.1;
delt = 0.05;
sudut(1)=(15/180)*pi;
sudut(2)=(30/180)*pi;
sudut(3)=(45/180)*pi;
sudut(4)=(53/180)*pi;
sudut(5)=(60/180)*pi;
sudut(6)=(65/180)*pi;
sudut(7)=(70/180)*pi;
sudut(8)=(80/180)*pi;
sudut(9)=(89/180)*pi;

for i=1:4
    eta(1) = 0;
    etac(1) = 0;
end

for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end

for n = 1:nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
end
for i=1:9
%    k=1;
    alpha = sudut(i);

    for n = 1:nt
        k = 1;
        stop = 1;
        while stop > 0.00001
            %%initial condition
            for j = 1:np
```

```

        if n == 1
            f(j,1,n) = eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 -
na))) + 2*sqrt((1 + K*(1 - na))/pi)*(exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1
- na))) - 1);
            u(j,1,n) = erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na)));
            v(j,1,n) = exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 -
na)))/sqrt(pi*(1 + K*(1 - na)));
            g(j,1,n) = -na*exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 -
na)))/sqrt(pi*(1 + K*(1 - na)));
            p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 -
na)))/(sqrt(pi*(1 + K*(1 - na)))*2*(1 + K*(1 - na)));

        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
            g(j,1,n) = gg(j,n-1);
            p(j,1,n) = pp(j,n-1);
        end
    end

for j = 2:np
    if n == 1
        cfb(j,n) = 0; cub(j,n) = 0;
        cvb(j,n) = 0; cgb(j,n) = 0; cpb(j,n) = 0;
        cdervb(j,n) = 0; cderpb(j,n) = 0;
        cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
        cfpb(j,n) = cfb(j,n)*cpb(j,n);
        cgub(j,n) = cgb(j,n)*cub(j,n);
        cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
    else
        cfb(j,n) = ffb(j,n-1);
        cub(j,n) = uub(j,n-1);
        cvb(j,n) = vvb(j,n-1);
        cgb(j,n) = gg(j,n-1);
        cpb(j,n) = ppb(j,n-1);
        cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
        cdervb(j,n) = ddervb(j,n-1);
        cderpb(j,n) = dderpb(j,n-1);
        cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
        cfpb(j,n) = cfb(j,n)*cpb(j,n);
        cgub(j,n) = cgb(j,n)*cub(j,n);
    end

    fb(j,k,n) = 0.5*(f(j,k,n) + f(j-1,k,n));
    ub(j,k,n) = 0.5*(u(j,k,n) + u(j-1,k,n));
    vb(j,k,n) = 0.5*(v(j,k,n) + v(j-1,k,n));
    gb(j,k,n) = 0.5*(g(j,k,n) + g(j-1,k,n));
    pb(j,k,n) = 0.5*(p(j,k,n) + p(j-1,k,n));
    dervb(j,k,n) = (v(j,k,n) - v(j-1,k,n))/deleta;
    derpb(j,k,n) = (p(j,k,n) - p(j-1,k,n))/deleta;
    fvb(j,k,n) = fb(j,k,n)*vb(j,k,n);
    fpb(j,k,n) = fb(j,k,n)*pb(j,k,n);
    gub(j,k,n) = gb(j,k,n)*ub(j,k,n);
    uub(j,k,n) = ub(j,k,n)^2;

    if n < nt1 + 1

```

```

a1(j,k) = ((1 + K)/deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75/cos(alpha))*t1(n)*fb(j,k,n));
a2(j,k) = (-(1 + K)/deleta + 0.25*etac(j)) +
((0.75/cos(alpha))*t1(n)*fb(j,k,n));
a3(j,k) = (0.75/cos(alpha))*t1(n)*vb(j,k,n);
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = (-(1.5/cos(alpha))*t1(n)*ub(j,k,n)) -
(0.5*M*t1(n)) - (t1(n)/delt);
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);

b1(j,k) = ((1 + 0.5*K)/deleta) + (0.25*etac(j))
+ ((0.75/cos(alpha))*t1(n)*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (-(1 + 0.5*K)/deleta) + (0.25*etac(j))
+ ((0.75/cos(alpha))*t1(n)*fb(j,k,n));
b3(j,k) = (0.75/cos(alpha))*t1(n)*pb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -(0.75/cos(alpha))*t1(n)*gb(j,k,n);
b6(j,k) = b5(j,k);
b7(j,k) = 0.25 -
((0.75/cos(alpha))*t1(n)*ub(j,k,n)) - (t1(n)*K) - (t1(n)/delt);
b8(j,k) = b7(j,k);
b9(j,k) = -0.5*t1(n)*K;
b10(j,k) = b9(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k,n) - f(j,k,n) +
deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n) - u(j,k,n) +
deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = g(j-1,k,n) - g(j,k,n) +
deleta*pb(j,k,n);
r4(j,k) = -(1 + K)*dervb(j,k,n) -
0.5*etac(j)*vb(j,k,n) - (1.5/cos(alpha))*t1(n)*(1 - uub(j,k,n) + ...
fjb(j,k,n)) - K*pb(j,k,n) - M*t1(n)*(1 -
ub(j,k,n)) + 2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt - (1 + K)*cdervb(j,n) - ...
0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
(1.5/cos(alpha))*t1(n)*(1 - cuub(j,n) + cfvb(j,n)) - K*cpb(j,n) -
M*t1(n)*(1 - cub(j,n)) - 2*t1(n)*cub(j,n)/delt ;
%r5(j,k)=0;
r5(j,k) = -(1 + 0.5*K)*derpb(j,k,n) -
0.5*etac(j)*pb(j,k,n) - 0.5*gb(j,k,n) -
(1.5/cos(alpha))*t1(n)*(fpb(j,k,n)-gub(j,k,n)) ...
+ t1(n)*K*(2*gb(j,k,n) + vb(j,k,n))
+ 2*t1(n)*gb(j,k,n)/delt- (1 + 0.5*K)*cderpb(j,n) -
0.5*etac(j)*cpb(j,n) - 0.5*cgb(j,n)...
-(1.5/cos(alpha))*t1(n)*(cfpb(j,n) -
cgub(j,n)) + t1(n)*K*(2*cgb(j,n) + cvb(j,n)) -
2*t1(n)*cgb(j,n)/delt;
else
a1(j,k) = ((1 + K)/deleta) +
((0.75/cos(alpha))*fb(j,k,n));
a2(j,k) = (-(1 + K)/deleta) +
((0.75/cos(alpha))*fb(j,k,n));
a3(j,k) = (0.75/cos(alpha))*vb(j,k,n);
a4(j,k) = a3(j,k);

```

```

a5(j,k) = (-1.5/cos(alpha))*ub(j,k,n) -
(0.5*M) - (1/delt);
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);

b1(j,k) = ((1 + 0.5*K)/deleta) +
((0.75/cos(alpha))*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (-1 + 0.5*K)/deleta) +
((0.75/cos(alpha))*fb(j,k,n));
b3(j,k) = (0.75/cos(alpha))*pb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -(0.75/cos(alpha))*gb(j,k,n);
b6(j,k) = b5(j,k);
b7(j,k) = - ((0.75/cos(alpha))*ub(j,k,n)) - (K)
- (1/delt);
b8(j,k) = b7(j,k);
b9(j,k) = -0.5*K;
b10(j,k) = b9(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k,n) - f(j,k,n) +
deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n) - u(j,k,n) +
deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = g(j-1,k,n) - g(j,k,n) +
deleta*pb(j,k,n);
r4(j,k) = -(1 + K)*dervb(j,k,n) -
(1.5/cos(alpha))*(1 - uub(j,k,n) + ...
fvb(j,k,n) - K*pb(j,k,n) - M*(1 -
ub(j,k,n)) + 2*ub(j,k,n)/delt - (1 + K)*cdervb(j,n) ...
-(1.5/cos(alpha))*(1 - cuub(j,n) +
cfvb(j,n)) - K*cpb(j,n) - M*(1 - cub(j,n)) - 2*cub(j,n)/delt ;
)r5(j,k)=0;
r5(j,k) = -(1 + 0.5*K)*derpb(j,k,n) -
(1.5/cos(alpha))*(fpb(j,k,n)-gub(j,k,n)) ...
+ K*(2*gb(j,k,n) + vb(j,k,n))
+ 2*gb(j,k,n)/delt - (1 + 0.5*K)*cderpb(j,n)...
-(1.5/cos(alpha))*(cfpb(j,n) - cgub(j,n)) +
K*(2*cgb(j,n) + cvb(j,n)) - 2*cgb(j,n)/delt;
end
end
%%Matrices
a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta 0; 0 -
0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta; a2(2,k) a8(2,k) a3(2,k) a1(2,k) a7(2,k);
b10(2,k) b2(2,k) b3(2,k) b9(2,k) b1(2,k)];
for j = 3:np
a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1 0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0
0 -0.5*deleta; a6(j,k) 0 a3(j,k) a1(j,k) a7(j,k); b6(j,k) b8(j,k)
b3(j,k) b9(j,k) b1(j,k)];
b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -0.5*deleta 0; 0 0 0 0 -
0.5*deleta; 0 0 a4(j,k) a2(j,k) a8(j,k); 0 0 b4(j,k) b10(j,k)
b2(j,k)];
end;
for j = 2:np
c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; a5(j,k)
0 0 0 0; b5(j,k) b7(j,k) 0 0 0];

```

```

end;
alfa{2,k} = a{2,k};
gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
for j = 3:np
    alfa{j,k} = a{j,k} - (b{j,k}*gamma{j-1,k});
    gamma{j,k} = inv(alfa{j,k})*c{j,k};
end;
for j = 2:np
    rr{j,k} = [r1(j,k); r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
end;
ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
for j = 3:np
    ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k} - (b{j,k}*ww{j-1,k}));
end;

%%backward sweep
delu(1,k) = 0;delu(np,k) = 0;
delg(1,k) = 0;delg(np,k) = 0;
delf(1,k) = 0;

dell{np,k} = ww{np,k};
for j = np-1:-1:2
    dell{j,k} = ww{j,k} - (gamma{j,k}*dell{j+1,k});
end;
delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
delg(1,k) = -na*delv(1,k);

for j = np:-1:3
    delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
    delg(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
    delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
    delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
    delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);

end;
%% Newton's Method
for j = 1:np
    u(j,k+1,n) = u(j,k,n) + delu(j,k);
    g(j,k+1,n) = g(j,k,n) + delg(j,k);
    f(j,k+1,n) = f(j,k,n) + delf(j,k);
    v(j,k+1,n) = v(j,k,n) + delv(j,k);
    p(j,k+1,n) = p(j,k,n) + delp(j,k);
end;

%%check for convergence of the iterations
stop = abs(delv(1,k));
kmax = k;
k = k+1;
end

%shift profile

```



```

    for j = 1:np
        ff(j,n) = f(j,k,n);
        uu(j,n) = u(j,k,n);
        vv(j,n) = v(j,k,n);
        gg(j,n) = g(j,k,n);
        pp(j,n) = p(j,k,n);
    end

    for j = 1:np
        ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
        uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
        vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);
        ggb(j,n) = gb(j,kmax,n);
        ppb(j,n) = pb(j,kmax,n);
        ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
        dderpb(j,n) = derpb(j,kmax,n);
    end
end
if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),':', 'Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'-.', 'Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==4)
    a14=u(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'.-', 'Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==5)
    a15=u(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'--.', 'Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==6)
    a16=u(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),':', 'Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==7)
    a17=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

```

```

        plot(eta,u(:,kmax,nt),'-.','Linewidth',2.5)
        grid on;
        hold on;
    elseif(i==8)
        a18=u(:,kmax,nt)
        figure(1)
        plot(eta,u(:,kmax,nt),'--','Linewidth',2.5)
        grid on;
        hold on;
    elseif(i==9)
        a19=u(:,kmax,nt)
        figure(1)
        plot(eta,u(:,kmax,nt),'--','Linewidth',2.5)
        grid on;
        hold on;
        legend('\theta_s = 15', '\theta_s = 30', '\theta_s = 45',
'\theta_s = 53', '\theta_s = 60', '\theta_s = 65', '\theta_s = 70',
'\theta_s = 80', '\theta_s = 89')
        title('Velocity profil with various sliced angle')
        xlabel ('\eta')
        ylabel ('\partial f / \partial \eta')
    end
end
end

```