



TESIS - SM 142501

**KONTROL OPTIMAL MODEL PERSEDIAAN *MULTI-ITEM*
DENGAN TINGKAT KERUSAKAN FUNGSI EXPONENSIAL
DAN TINGKAT DISKON**

DESY PUTMA HANDAYANI
NRP 1214 201 014

Dosen Pembimbing:
Dr. Dra. Mardijah, MT.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016



THESIS - SM 142501

**OPTIMAL CONTROL OF MULTI-ITEM INVENTORY MODEL
WITH EXPONENTIAL FUNCTION DETERIORATION RATE
AND DISCOUNT RATE**

DESY PUTMA HANDAYANI
NRP 1214 201 014

Supervisor:
Dr. Dra. Mardijah, MT.

MAGISTER DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
INSTITUTE TECHNOLOGY OF SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

KONTROL OPTIMAL MODEL PERSEDIAAN *MULTI-ITEM* DENGAN TINGKAT KERUSAKAN FUNGSI EXPONENSIAL DAN TINGKAT DISKON

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh:
DESY PUTMA HANDAYANI
NRP. 1214 201 014

Tanggal Ujian : 13 Juli 2016
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh:

- 
1. **Dr. Dra. Mardijah, MT.** (Pembimbing)
NIP. 19670114 199102 2 001
- 
2. **Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.** (Penguji)
NIP. 19730930 199702 1 001
- 
3. **Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.** (Penguji)
NIP. 19830517 200812 1 003
- 
4. **Endah Rochmati MP., S.Si., MT., Ph.D.** (Penguji)
NIP. 19761213 200212 2 001

Direktur Program Pascasarjana,




Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

KONTROL OPTIMAL MODEL PERSEDIAAN *MULTI-ITEM* DENGAN TINGKAT KERUSAKAN FUNGSI EXPONENSIAL DAN TINGKAT DISKON

Nama Mahasiswa : Desy Putma Handayani
NRP : 1214 201 014
Pembimbing : Dr. Dra. Mardlijah, MT.

ABSTRAK

Permasalahan umum dari manajemen persediaan adalah menentukan berapa banyak barang yang dipesan dan berapa banyak barang yang harus diproduksi. Persediaan barang dilakukan sebagai antisipasi terhadap pemenuhan permintaan konsumen. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengembangkan kontrol optimal model persediaan *multi-item* dengan memperhatikan kerusakan produk yang mengikuti fungsi eksponensial dan tingkat diskon. Kontrol optimal sistem persediaan *multi-item* diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Pada bagian akhir, solusi yang diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde-4 dan diharapkan biaya total yang minimum.

Kata kunci: *kontrol optimal, persediaan multi-item, fungsi eksponensial, prinsip maksimum pontryagin, Runge Kutta orde-4*

OPTIMAL CONTROL OF MULTI-ITEM INVENTORY MODEL WITH EXPONENTIAL FUNCTION DETERIORATION RATE AND DISCOUNT RATE

Name : Desy Putma Handayani
NRP : 1214 201 014
Supervisor : Dr. Dra. Mardlijah, MT.

ABSTRACT

Inventory management problem includes determination of how many items have to be ordered and how many items have to be produced. Inventory is considered in anticipating customer's request. The purpose of this research is to develop optimal control of *multi-item* inventory model by considering deteriorate as exponential sunction and discount rate. Optimal control of production maintenance system is solved by using Pontryagin Maximum Principle. Finally, the solution of the problem is illustrated by numerical simulation using Runge Kutta method for order-4 is expected the total costs are minimum.

Keywords: *optimal control, multi-item inventory, exponential function, pontryagin maximum principle, Runge Kutta method for order-4*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Model Sistem Persediaan	5
2.2 Persediaan	7
2.3 Kontrol Optimal	8
2.4 Prinsip Maksimum Pontryagin	9
2.5 Metode Runge Kutta	10
BAB III METODE PENELITIAN	11
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	13
4.1 Model Sistem Persediaan <i>multi-item</i> dengan Memperhatikan Tingkat Kerusakan Produk dan Tingkat Diskon	13
4.2 Analisa Model Persediaan <i>Multi-Item</i>	14
4.2.1 Penyelesaian Titik Kesetimbangan	14
4.2.2 Penyelesaian Linierisasi	17
4.2.3 Penyelesaian Kestabilan	18

4.3	Penyelesaian Keterkontrolan dan Keteramatan	20
4.3.1	Penyelesaian Keterkontrolan	20
4.3.2	Penyelesaian Keteramatan	21
4.4	Fungsi Objektif Sitem Persediaan <i>Multi-Item</i>	21
4.5	Penyelesaian Kontrol Optimal	22
4.6	Penyelesaian Numerik	23
4.6.1	Forward Sweep pada Persamaan <i>State</i>	24
4.6.2	Backward Sweep pada Persamaan <i>Costate</i>	24
4.7	Simulasi Numerik	24
BAB V	SIMPULAN DAN SARAN	31
5.1	Simpulan	31
5.2	Saran	32
	DAFTAR PUSTAKA	33
	BIODATA PENULIS	35

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Tingkat persediaan 1 terhadap waktu t	25
Gambar 4.2	Tingkat persediaan 2 terhadap waktu t	26
Gambar 4.3	Tingkat produksi 1 terhadap waktu t	26
Gambar 4.4	Tingkat produksi 2 terhadap waktu t	26
Gambar 4.5	Tingkat persediaan 1 terhadap waktu t	27
Gambar 4.6	Tingkat persediaan 2 terhadap waktu t	27
Gambar 4.7	Tingkat produksi 1 terhadap waktu t	27
Gambar 4.8	Tingkat produksi 2 terhadap waktu t	28
Gambar 4.9	Tingkat persediaan 1 terhadap waktu t	28
Gambar 4.10	Tingkat persediaan 2 terhadap waktu t	29
Gambar 4.11	Tingkat produksi 1 terhadap waktu t	29
Gambar 4.12	Tingkat produksi 2 terhadap waktu t	29

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Nilai Parameter (Ahmad Alshamrani dan El-Gohary,2011) . . .	25
-----------	---	----

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Setiap perusahaan tidak terlepas dari masalah persediaan barang. Menurut Assauri (2005), tanpa adanya manajemen persediaan yang baik, perusahaan akan dihadapkan pada resiko persediaan yang berlebih atau bahkan kekurangan persediaan. Jika terjadi kelebihan persediaan, perusahaan dapat mengalami kerugian karena terhentinya perputaran modal dan munculnya biaya tambahan yang tidak diperlukan. Sebaliknya, jika perusahaan kekurangan persediaan, perusahaan tidak dapat memenuhi permintaan konsumen. Untuk dapat memenuhi permintaan tersebut perusahaan harus memesan barang lebih sering, yang berarti akan meningkatkan biaya pemesanan. Oleh karena itu, diperlukan manajemen persediaan yang baik untuk menentukan jumlah barang yang akan dipesan dan kapan pemesanan harus dilakukan.

Menurut Taha (2007), dalam sistem persediaan terdapat dua tipe permintaan yaitu deterministik dan probabilistik. Permintaan dikatakan bersifat deterministik jika laju permintaan di masa yang akan datang diketahui secara pasti dan dikatakan bersifat probabilistik jika laju permintaan di masa yang akan datang tidak diketahui secara pasti. Jika permintaan bersifat probabilistik, maka sangat dimungkinkan terjadinya kekurangan persediaan.

Model persediaan klasik umumnya berhubungan dengan *single-item* tetapi dalam dunia nyata persediaan dengan *single item* jarang terjadi sehingga hal ini mengarah pada persediaan *multi-item*. Bendaya dan Raouf (1993) mempertimbangkan persediaan *multi-item* dengan laju permintaan yang bersifat stokastik. Banyak penelitian yang membahas tentang kontrol optimal dalam manajemen persediaan. Sethi dan Thompson (2000) membahas kontrol optimal model persediaan dengan biaya dinamis tanpa memperhatikan kerusakan produk. Bounkhel dan Tadj (2005) membahas kontrol optimal persediaan dengan mempertimbangkan produk yang rusak tetapi produk yang diproduksi adalah sejenis *single-item*. Bhattacharya (2005) membahas model persediaan *multi-item* dan memperhatikan kerusakan barang dengan persediaan linier yang tergantung pada laju permintaan. Graian dan Essayed (2010) meneliti kontrol optimal pada model persediaan *multi-item* dengan memperhatikan kerusakan produk. Pada dasarnya persediaan

single-item maupun *multi-item* memiliki tujuan yang sama yaitu memaksimalkan keuntungan atau meminimalkan total biaya yang dikeluarkan selama siklus yang diberikan. Pada penelitian yang dilakukan Darsih Indayani dalam papernya (Indayani,D.,2010) membahas kendali optimal pada pengadaan bahan mentah dengan kebijakan pengadaan tepat waktu, pergudangan, dan penundaan. Pada papernya dijelaskan mengenai faktor pemotongan atau diskon, baik dalam diskrit maupun kontinu.

Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya, pada penelitian ini akan dikembangkan tingkat kerusakan produk sebagai suatu fungsi distribusi eksponensial negatif dan pemberian tingkat diskon. Optimasi sistem persediaan diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Pada bagian akhir solusi yang diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut.

1. Bagaimana mengembangkan model sistem persediaan *multi-item* dengan memperhatikan kerusakan produk sebagai fungsi negatif eksponensial dan menambahkan tingkat diskon ke dalam masalah kontrol optimal.
2. Bagaimana menentukan produksi dan persediaan yang optimal dari model sistem persediaan *multi-item* menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Bagaimana analisa simulasi dengan menggunakan *software* Matlab pada kerusakan produk sebagai fungsi negatif eksponensial setelah dilakukan kontrol optimal pada sistem persediaan.

1.3 Batasan Masalah

Penulisan penelitian ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Produk yang diproduksi adalah dua jenis.
2. Tingkat kerusakan terjadi setelah produk masuk dalam gudang penyimpanan.
3. Tidak ada perbaikan pada produk yang rusak.
4. Tidak ada kekurangan dalam persediaan.
5. Semua permintaan konsumen dapat dipenuhi.

6. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model persediaan yang kontinu.
7. Gudang penyimpanan produk dianggap dapat menampung jumlah produk yang dipesan.
8. Tingkat kerusakan mengikuti fungsi eksponensial $g(t) = \theta_i e^{-\theta_i t}$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengembangkan model sistem persediaan *multi-item* dengan memperhatikan kerusakan produk sebagai fungsi negatif eksponensial dan menambahkan tingkat diskon ke dalam masalah kontrol optimal.
2. Menentukan produksi dan persediaan yang optimal dari model sistem persediaan *multi-item* menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Menganalisa simulasi dengan menggunakan *software* Matlab pada kerusakan produk sebagai fungsi negatif eksponensial setelah dilakukan kontrol optimal pada sistem persediaan.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah.

1. Secara teoritis dapat memformulasikan dan menganalisa model matematika untuk masalah persediaan.
2. Secara praktis sebagai pertimbangan untuk menentukan kebijakan optimal bagi pelaku usaha di industri perdagangan yang berkaitan dengan manajemen persediaan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Sistem Persediaan

Pada bagian ini dibahas hasil penelitian sebelumnya mengenai kontrol optimal pada model persediaan. Berikut beberapa penelitian yang terkait dengan penulisan dan penyelesaian penelitian ini.

1. Bundaya dan Raouf (1993) mempertimbangkan persediaan *multi-item* dengan laju permintaan yang bersifat stokastik.
2. Kar dkk (2001) membahas tentang kepadatan laju permintaan untuk persediaan *multi-item*.
3. Bhattacharya (2005) membahas tentang persediaan *multi-item* dengan memperhatikan kerusakan produk dan persediaan linier tergantung laju permintaan.
4. Gohary dan Sayed (2008) meneliti kontrol optimal pada model persediaan *multi-item* dengan kerusakan produk untuk tipe yang berbeda pada laju permintaan.
5. Graian dan Essayed (2010) meneliti kontrol optimal pada model persediaan *multi-item* dengan kerusakan produk alami.

Sebuah perusahaan memproduksi produk yang heterogen atau *multi-item* dan mempunyai gudang penyimpanan. Dalam paper (Bhattacharya,2005) model sistem persediaan yang digunakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(t)[-(D_1 + \Theta_1) - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t)] + u_1(t) \\ \dot{x}_2 &= x_2(t)[-(D_2 + \Theta_2) - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)] + u_2(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan $x_i(t) \geq 0, u_i(t) \geq 0$

dengan notasi yang didefinisikan sebagai berikut.

- \dot{x}_i :laju persediaan pada saat t
- $x_i(t)$:persediaan pada saat t
- $u_i(t)$:banyaknya produksi pada saat t
- $D_i(t)$:banyaknya permintaan pada saat t
- $\Theta_i(x_i, t)$:fungsi tingkat kerusakan barang alami
- a_{ii} :koefisien barang yang rusak, $0 < a_{ii} < 1$
- $a_{ij}(i \neq j)$:koefisien permintaan dari x_i yang disebabkan adanya unit dari x_j
- i :banyaknya barang, $i = 1, 2$

Pada Graian dan Essayed (2010) digunakan fungsi objektif sebagai berikut.

$$2J = \min \int_0^T \sum_{i=1}^2 (h_{ii}(x_i - \hat{x}_i)^2 + c_{ii}(u_i - \hat{u}_i)^2 + (\theta_i + a_{ii}))x_i^2 + 2h_{12}(x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2)dt \quad (2.2)$$

dengan $t \in [0, T], h_{11}h_{22} > h_{12}^2, h_{ii} > 0, c_{ii} > 0, i = 1, 2$

definisi notasi sebagai berikut.

- T :waktu perencanaan produksi
- \hat{x}_i :target persediaan
- \hat{u}_i :target produksi
- c_{ii} :biaya produksi
- h_{ii} :biaya penyimpanan persediaan
- h_{12} :hubungan biaya penyimpanan persediaan x_1 dan x_2
- θ_i :koefisien kerusakan barang

Dari persamaan 2.1 dan 2.2 dapat diformulasikan permasalahan kontrol optimal yang terdiri dari dua variabel *state* yaitu banyaknya persediaan dua item. Fungsi objektif 2.2 adalah menghitung besarnya biaya produksi total. Biaya total terdiri dari biaya persediaan, biaya penyimpanan, dan biaya kerusakan barang. Nilai 1/2 menunjukkan bahwa bobot yang menyatakan tingkat kepentingan dari biaya yang bersangkutan adalah sama. Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan dengan Prinsip Maksimum Pontryagin (Graian dan Essayed, 2010).

Pada penelitian ini, model sistem perawatan produksi khususnya pada fungsi objektifnya akan dikembangkan dengan menambahkan faktor diskon. Selanjutnya akan dibahas mengenai pengertian dari diskon.

Darsih Indayani (2010) dalam papernya menjelaskan bahwa *Net Present Value* (NPV) merupakan metode untuk menganalisis *Discounted Cash Flow* (DCF) dan merupakan metode standar untuk menaksir kondisi finansial dari proyek jangka panjang. NPV untuk sistem waktu yang diskrit merupakan pembagian oleh nilai

1 tambah rata-rata bunga atau pemotongan untuk tiap periode waktu yang akan berlalu. Jadi untuk mendapatkan NPV untuk sistem waktu yang diskrit dilakukan *discounting* dengan faktor pemotongan sebesar $\frac{R_t}{(1+r)^t}$. Maka untuk sistem waktu yang diskrit NPV dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$NPV = \frac{R_t}{(1 + \rho)^t} \quad (2.3)$$

Sedangkan untuk sistem waktu yang kontinu digunakan faktor pemotongan sebesar $e^{-rt} R_t$. Maka untuk sistem waktu yang kontinu NPV dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$NPV = e^{-\rho t} R_t \quad (2.4)$$

2.2 Persediaan

Menurut Handoko (2011), persediaan merupakan suatu istilah yang digunakan untuk menunjukkan sumber daya yang disimpan sebagai antisipasi terhadap pemenuhan permintaan dari waktu ke waktu. Persediaan suatu barang sangat dipengaruhi oleh permintaan akan suatu barang, biaya-biaya dalam persediaan serta beberapa komponen yang lain.

Jenis-jenis permintaan

Menurut Taha (2007), permintaan akan suatu barang sangat berpengaruh terhadap pengambilan keputusan dalam persediaan.

Macam-macam biaya persediaan

Terdapat empat jenis biaya yang perlu diperhitungkan dalam mengevaluasi persoalan persediaan.

1. Biaya pemesanan (*ordering cost*).

Menurut Aminudin (2005), *ordering cost* merupakan total biaya pemesanan dan pengadaan komoditas hingga siap untuk dipergunakan. Sedangkan menurut Taha (2007), *ordering cost* merupakan biaya yang dikeluarkan untuk pemesanan barang persediaan. Secara sederhana, biaya pemesanan diperoleh dengan mengalikan banyak barang yang dibeli dengan harga beli satuan barang tersebut.

2. Biaya penyimpanan (*holding cost*).

Taha (2007) menyatakan bahwa *holding cost* adalah biaya yang dikeluarkan selama proses penyimpanan barang, yaitu dari barang diterima di gudang sampai barang terjual lagi. Biaya penyimpanan ditentukan oleh jumlah barang yang disimpan dan lama penyimpanan per unit per tahun. Setiap

waktu, jumlah barang yang disimpan akan berkurang, sehingga perlu diperhatikan tingkat persediaan rata-rata di gudang. Menurut Handoko (2011), *holding cost* per periode semakin besar apabila jumlah barang yang dipesan semakin banyak.

3. Biaya penyiapan (*setup cost*).

Menurut Handoko (2011), *setup cost* terjadi ketika bahan baku tidak dibeli melainkan diproduksi sendiri. Konsep dari *setup cost* analog dengan *ordering cost*, sehingga dapat diasumsikan sama dengan *ordering cost*.

4. Biaya kerugian (*shortage cost*).

Taha (2007) menyatakan bahwa biaya kerugian terjadi apabila ada permintaan terhadap barang tetapi stok habis (*stock out*). Jika pada keadaan *stock out* pelanggan bersedia menerima pesannya kembali pada waktu kemudian, maka pesanan disebut *backorders*. Sebaliknya, jika pelanggan tidak bersedia menerima pesannya kembali, maka pesanan disebut *lost sales*.

2.3 Kontrol Optimal

Tujuan utama dari permasalahan kontrol optimal yaitu untuk mencari nilai kontrol yang akan dimasukkan ke dalam model atau sistem dan memenuhi kendala. Pada waktu yang sama, dapat ditentukan nilai yang optimal (yaitu maksimum atau minimum) berdasarkan fungsi tujuan (fungsi objektif). Pada umumnya fungsi objektif pada masalah kontrol optimal dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^T V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.5)$$

dengan sistem (*plant*) dinyatakan oleh persamaan berikut,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.6)$$

serta kondisi batas

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \end{aligned}$$

Kontrol $u^*(t)$ merupakan kontrol optimal, jika disubstitusikan ke dalam sistem (2.6) akan diperoleh *state* yang optimal $x^*(t)$ dan pada saat yang sama mengopti-

malkan fungsi objektif (2.5) yang kemudian dinotasikan dengan $J(u^*(t))$ atau J^* . State optimal $x^*(t)$ dibatasi oleh kondisi batas, yaitu kondisi awal (x_0) dan kondisi akhir (x_f) (Naidu, 2002).

2.4 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk memperoleh kontrol terbaik pada sistem dinamik dari *state* awal hingga *state* akhir, yaitu dengan memaksimalkan atau meminimumkan indeks performansi dengan kontrol $u(t)$ terbatas pada ($u(t) \in U$). Langkah-langkah menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut. Diberikan persamaan state (2.6) dimana \dot{x} merupakan vektor yang merepresentasikan sistem, fungsi objektif (2.5), dan kondisi batas $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_f) = x_f$. Maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut (Naidu, 2002).

1. membentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda' f(x(t), u(t), t) \quad (2.7)$$

2. meminimumkan H terhadap semua vektor kontrol u(t)

$$\frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial u(t)} = 0 \quad (2.8)$$

dan diperoleh

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. menggunakan hasil dari langkah 2 yaitu dengan mensubstitusikannya ke dalam langkah 1 dan menentukan H^* yang optimal.

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (2.9)$$

4. menyelesaikan persamaan

$$\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial \lambda(t)} \right)_* \quad (2.10)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial x(t)} \right)_* \quad (2.11)$$

dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir

$$[H^* + \frac{\partial S}{\partial t}]_{t_f} \delta t_f + [(\frac{\partial S}{\partial x})^* - \lambda^*(t)]'_{t_f} \delta x_f = 0 \quad (2.12)$$

dengan S adalah bentuk Meyer dari fungsi tujuan J, H adalah persamaan Hamiltonian, δ menunjukkan variasi dan tanda * menunjukkan keadaan saat variabel kontrolnya stasioner.

5. untuk memperoleh kontrol optimal, solusi $x^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah 4 disubstitusikan ke dalam ekspresi kontrol optimal $u^*(t)$ pada langkah 2.

2.5 Metode Runge Kutta

Metode Runge Kutta merupakan metode penyelesaian numerik yang hanya membutuhkan satu nilai awal. Metode ini hanya dapat digunakan pada sistem persamaan diferensial tingkat satu, selain itu harus diubah menjadi persamaan differensial simultan terlebih dahulu. Jenis metode Runge Kutta yang digunakan adalah metode *forward backward sweep* Runge Kutta orde 4 karena sistem persamaan diferensial pada usulan penelitian ini terdapat persamaan yang diketahui nilai awal dan persamaan yang lain diketahui nilai akhir. Alur pengerjaannya adalah menyelesaikan persamaan yang diketahui nilai awalnya terlebih dahulu secara *forward*, kemudian persamaan yang lain yang diketahui nilai akhir dikerjakan secara *backward*. Secara matematika dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= f(t, x_i(t), u_i(t)), x_i(t_0) = a \\ \frac{d\lambda(t)}{dt} &= g(t, \lambda(t), u_i(t)), \lambda(t_f) = b \\ t_0 &\leq t \leq t_f \end{aligned} \quad (2.13)$$

Integrasi numerik dari persamaan (2.13) dengan metode Runge Kutta orde empat dinyatakan sebagai berikut:

- *Forward Sweep*

$$x_{i,n+1}(t) = x_{i,n}(t) + \frac{h}{6}(k_{1,x_i} + 2k_{2,x_i} + 2k_{3,x_i} + k_{4,x_i})$$

- *Backward Sweep*

$$\lambda_{i,n-1}(t) = \lambda_{i,n}(t) - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_i} + 2k_{2,\lambda_i} + 2k_{3,\lambda_i} + k_{4,\lambda_i})$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang akan digunakan untuk mencapai tujuan penelitian. Metode penelitian dilakukan dengan tahapan sebagai berikut.

1. Memahami Konsep dan Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pemahaman konsep dan studi literatur dari berbagai sumber mengenai model sistem persediaan, biaya-biaya persediaan, kontrol optimal dan Prinsip Maksimum Pontryagin. Berbagai materi tersebut diperoleh dari berbagai sumber pustaka yaitu buku, jurnal, dan referensi dari internet.

2. Mengembangkan Model

Pada tahap ini dilakukan pengembangan model sistem persediaan *multi-item* dengan memperhatikan banyaknya tingkat kerusakan mengikuti fungsi eksponensial yaitu $g(t) = \theta e^{-\theta t}$, $\theta > 0, t \geq 0$ dan menambahkan faktor diskon ke dalam fungsi objektif.

3. Menentukan Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Pada tahap ini, ditentukan formulasi masalah kontrol optimal yang meliputi sistem persediaan, fungsi objektif, serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi.

4. Menyelesaikan Permasalahan Kontrol Optimal

Pada tahap ini, dilakukan penyelesaian kontrol optimal. Metode yang digunakan dalam penyelesaian kontrol optimal ini adalah Prinsip Maksimum Pontryagin.

5. Pembuatan Program Simulasi

Pada tahap ini, dicari solusi dari permasalahan kontrol optimal yaitu meminimumkan biaya produksi total dengan memanfaatkan persamaan sistem, fungsi objektif, serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi, maka dibuat simulasi dengan memasukkan parameter yang berbeda dan *software* yang digunakan adalah Matlab.

6. Analisa Hasil Simulasi

Pada tahap ini, dilakukan analisa dan pembahasan terhadap hasil dari *running* simulasi yang berupa grafik fungsi permintaan, fungsi produksi, fungsi persediaan dan biaya total dengan mengubah mengubah parameter-parameter pada program simulasi maka akan dianalisis bagaimana perubahan grafik tersebut.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang formulasi masalah kontrol optimal model persediaan *multi-item* yang terdiri dari dua variabel *state* yaitu banyaknya persediaan barang pertama ($x_1(t)$) dan banyaknya persediaan barang kedua ($x_2(t)$) serta variabel kontrol yaitu banyaknya produksi pada saat t , ($u_i(t)$) dengan $i = 1, 2$. Dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin kemudian dilanjutkan dengan melakukan simulasi dan analisa terhadap hasil yang diperoleh.

4.1 Model Sistem Persediaan *multi-item* dengan Memperhatikan Tingkat Kerusakan Produk dan Tingkat Diskon

Model sistem persediaan dalam penelitian ini diasumsikan semua fungsi sebagai fungsi yang *differentiable* dan kontinu. Sistem yang digunakan sebagai berikut.

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t)] + u_1(t) \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)] + u_2(t) \quad (4.2)$$

dengan notasi yang didefinisikan sebagai berikut.

- \dot{x}_i :laju persediaan pada saat t
- $x_i(t)$:persediaan pada saat t
- $u_i(t)$:banyaknya produksi pada saat t
- $D_i(t)$:banyaknya permintaan pada saat t
- a_{ii} :koefisien barang yang rusak
- $a_{ij}(i \neq j)$:koefisien permintaan dari x_i yang disebabkan adanya unit dari x_j
dengan $0 \leq a_{ij} \leq 1$
- i :banyaknya barang, $i = 1, 2$

Laju persediaan dipengaruhi oleh banyaknya produksi, banyaknya persediaan, jumlah permintaan, dan tingkat kerusakan alami. Sehingga kendala variabel Persamaan (4.1) dan (4.2) adalah

$$x_i(t) \geq 0, u_i(t) \geq 0, D_i \geq 0, 0 \leq \theta \leq 1, a_{ij} \geq 0, a_{ii} \geq 0 \quad (4.3)$$

kendala variabel menjelaskan tingkat persediaan, banyaknya produksi.

4.2 Analisa Model Persediaan *Multi-Item*

Dalam menentukan kestabilan model persediaan *multi-item* maka diperlukan penyelesaian titik kesetimbangan, linierisasi, dan kestabilan. Analisa model sistem persediaan digunakan untuk memperoleh titik setimbang, menentukan kestabilan, mengetahui sistem terkontrol dan teramati.

4.2.1 Penyelesaian Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan model sistem persediaan *multi-item* (x_1^o, x_2^o) pada sistem Persamaan (4.1) dan (4.2) dapat diperoleh jika memenuhi $\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dx_2(t)}{dt} = 0$, sehingga Persamaan (4.1) dan (4.2) menjadi,

$$x_1 \dot{(t)} = x_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t)] + u_1(t) = 0 \quad (4.4)$$

$$x_2 \dot{(t)} = x_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)] + u_2(t) = 0 \quad (4.5)$$

dari persamaan (4.4) dan (4.5) sehingga diperoleh,

$$x_{1a,1b} = \frac{(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t)) \pm \sqrt{(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t))^2 - 4(-a_{11})u_1}}{2(-a_{11})}$$

$$x_{2a,2b} = \frac{(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t)) \pm \sqrt{(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t))^2 - 4(-a_{22})u_2}}{2(-a_{22})}$$

Pada kasus ini titik setimbang harus bernilai non-negatif karena berupa suatu persediaan sehingga diambil persamaan x_{1b} dan x_{2b} dengan batasan $D_i < u_i$ yaitu,

$$x_{1b} = \frac{(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t)) - \sqrt{(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t))^2 - 4(-a_{11})u_1}}{2(-a_{11})} \quad (4.6)$$

$$x_{2b} = \frac{(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t)) - \sqrt{(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t))^2 - 4(-a_{22})u_2}}{2(-a_{22})} \quad (4.7)$$

Persamaan (4.7) disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.6) sehingga diperoleh

persamaan polinomial sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
x_{1b} = & ((-2a_{22})^2(-2a_{11})^4 - 4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})^3(a_{12}))x^4 \\
& - (4(-2a_{22})^2(-2a_{11})^3(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) + (-2a_{22})(-2a_{11})^3(a_{12}) \\
& - 8(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})^2(a_{12})(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}))x^3 \\
& + (4(-2a_{22})^2(-2a_{11})^2(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t})^2 - 2(-2a_{22})^2(4a_{11}u_1) \\
& (-2a_{11})^2 + 8(-2a_{22})(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t})(-2a_{11})^2(a_{12}) \\
& (D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) + 4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})(a_{12})(4a_{11}u_1) \\
& - 4(4a_{22}u_1)(-2a_{11})^2(a_{12})^2)x^2 + (4(-2a_{22})^2(4a_{11}u_1)(-2a_{11}) \\
& (D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) + 4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})(a_{12})(4a_{11}u_1))x \\
& + (-2a_{22})^2(4a_{11}u_1)^2.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Langkah-langkah mencari akar-akar Persamaan (4.8) adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
a_0 = & (-2a_{22})^2(-2a_{11})^4 - 4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})^3(a_{12}). \\
a_1 = & -(4(-2a_{22})^2(-2a_{11})^3(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) + (-2a_{22})(-2a_{11})^3(a_{12}) \\
& - 8(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})^2(a_{12})(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t})). \\
a_2 = & 4(-2a_{22})^2(-2a_{11})^2(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t})^2 - 2(-2a_{22})^2(4a_{11}u_1) \\
& (-2a_{11})^2 + 8(-2a_{22})(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t})(-2a_{11})^2(a_{12})(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}). \\
& + 4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})(a_{12})(4a_{11}u_1) - 4(4a_{22}u_1)(-2a_{11})^2(a_{12})^2. \\
a_3 = & 4(-2a_{22})^2(4a_{11}u_1)(-2a_{11})(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) \\
& + 4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})(a_{12})(4a_{11}u_1). \\
a_4 = & (-2a_{22})^2(4a_{11}u_1)^2.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

mencari nilai b_i dengan $i = 1, 2, 3, 4$,

$$b_1 = \frac{a_1}{a_0}, b_2 = \frac{a_2}{a_0}, b_3 = \frac{a_3}{a_0}, b_4 = \frac{a_4}{a_0}. \tag{4.10}$$

mencari nilai c_1, c_2, c_3 adalah

$$\begin{aligned}
c_1 = & b_2 - \frac{3}{8}b_1^2. \\
c_2 = & \frac{1}{8}b_1^3 - \frac{1}{2}b_1b_2 + b_3. \\
c_3 = & b_4 + \frac{1}{16}b_1^2b_2 - \frac{1}{4}b_1b_3 - \frac{3}{256}b_1^4.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

mensubstitusikan persamaan $c_1, c_2, dan c_3$ ke dalam persamaan $d_1, d_2, dan d_3$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{5}{2}c_1. \\ d_2 &= 2c_1^2 - c_3. \\ d_3 &= \frac{1}{2}c_1^3 - \frac{1}{2}c_1c_3 - \frac{1}{8}c_2^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} e_1 &= d_2 - \frac{1}{3}d_1^2 \\ &= 2c_1^2 - c_3 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}c_1\right)^2 \\ &= 2\left(b_2 - \frac{3}{8}b_1\right)^2 - \left(b_4 + \frac{1}{16}b_1^2b_2 - \frac{1}{4}b_1b_3 - \frac{3}{256}b_1^4\right) - \frac{25}{12}\left(b_2 - \frac{3}{8}b_1\right)^2. \\ e_2 &= d_3 - \frac{1}{3}d_1d_2 + \frac{2}{27}d_1^3 \\ &= \frac{1}{2}c_1^3 - \frac{1}{2}c_1c_3 - \frac{1}{8}c_2^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}c_1\right)(2c_1^2 - c_3) + \frac{2}{27}\left(\frac{5}{2}c_1\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{3}\left(b_2 - \frac{3}{8}b_1\right)^3 - \frac{1}{2}\left(b_2 - \frac{3}{8}b_1\right)\left(b_4 + \frac{1}{16}b_1^2b_2 - \frac{1}{4}b_1b_3 - \frac{3}{256}b_1^4\right)\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}b_1^3 - \frac{1}{2}b_1b_2 + b_3\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\left(b_2 - \frac{3}{8}b_1\right)\right)\left(2\left(b_2 - \frac{3}{8}b_1\right)^2\right.\right. \\ &\quad \left. - \left(b_4 + \frac{1}{16}b_1^2b_2 - \frac{1}{4}b_1b_3 - \frac{3}{256}b_1^4\right)\right) + \frac{2}{27}\left(\frac{5}{2}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right)^3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

selanjutnya mencari nilai $k, n, m,$ dan j untuk memperoleh akar-akar persamaan polinomial derajat empat,

$$\begin{aligned} k^3 &= -\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2} \\ k &= \left(-\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

dengan $k = r$.

$$\begin{aligned} n &= c_1 + k + r - \frac{1}{3}d_1 \\ &= \left(b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right) + \left(-\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad - \frac{5}{6}\left(b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
j &= c_1 + 2k + 2r - \frac{2}{3}d_1 \\
&= \left(b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right) + 2\left(-\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\left(-\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad - \frac{5}{3}\left(b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right). \tag{4.16}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh formula m sebagai berikut,

$$m = \frac{c_2}{2j}. \tag{4.17}$$

maka diperoleh formula akar-akar persamaan polinomial derajat 4 sebagai berikut,

$$x_{1b1} = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4(n + m\sqrt{j})}}{2} - \frac{1}{4}b_1. \tag{4.18}$$

$$x_{1b2} = \frac{\sqrt{j}}{2} - \frac{\sqrt{j - 4(n + m\sqrt{j})}}{2} - \frac{1}{4}b_1. \tag{4.19}$$

$$x_{1b3} = -\frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4(n + m\sqrt{j})}}{2} - \frac{1}{4}b_1. \tag{4.20}$$

$$x_{1b4} = -\frac{\sqrt{j}}{2} - \frac{\sqrt{j - 4(n + m\sqrt{j})}}{2} - \frac{1}{4}b_1. \tag{4.21}$$

Setelah dilakukan substitusi x_2 ke dalam x_1 maka diperoleh titik kesetimbangan $X(x_1^0, x_2^0)$ adalah (x_{1b1}, x_{2b}) dan (x_{1b2}, x_{2b}) .

4.2.2 Penyelesaian Linierisasi

Tujuan pelinieran adalah untuk melinierkan sistem persediaan *multi-item* dimana sistem persediaan tersebut tak linier. Pelinieran pada sistem persamaan tak linier dilakukan dengan menurunkan Persamaan (4.1) dan (4.2) terhadap variabel state dan kontrolnya. Pendekatan tak linier dilakukan persekitaran titik kesetimbangan. Berikut hasil pelinieran dari Persamaan (4.1) dan (4.2) dalam bentuk matriks,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial x_1(t)}{\partial x_2(t)} \\ \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(t)}{\partial u_1(t)} & \frac{\partial x_1(t)}{\partial u_2(t)} \\ \frac{\partial x_2(t)}{\partial u_1(t)} & \frac{\partial x_2(t)}{\partial u_2(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh hasil linierisasi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - 2(a_{11}x_1(t))) & -a_{12}x_1(t) \\ -a_{21}x_2(t) & -(D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - 2(a_{22}x_2(t))) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

dengan matriks A

$$A = \begin{bmatrix} -(D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - 2(a_{11}x_1(t))) & -a_{12}x_1(t) \\ -a_{21}x_2(t) & -(D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - 2(a_{22}x_2(t))) \end{bmatrix}$$

4.2.3 Penyelesaian Kestabilan

Akar-akar persamaan polinomial dari matriks Jacobi (A) sistem persediaan *multi-item* adalah μ_1 dan μ_2 . Nilai μ_1 dan μ_2 digunakan untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem persediaan *multi-item*. Untuk memperoleh μ_1 dan μ_2 atau nilai eigen digunakan rumus $\det(\mu I - A) = 0$. Penyelesaian untuk menentukan nilai eigen dengan menggunakan rumus $\det(\mu I - A) = 0$ sebagai berikut,

$$\det(\mu I - A) = 0$$

dengan,

$$I = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -(D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - 2(a_{11}x_1(t))) & -a_{12}x_1(t) \\ -a_{21}x_2(t) & -(D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - 2(a_{22}x_2(t))) \end{pmatrix}$$

misal:

$$aa = -(D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - 2(a_{11}x_1(t)))$$

$$bb = -a_{12}x_1(t)$$

$$cc = -a_{21}x_2(t)$$

$$dd = -(D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - 2(a_{22}x_2(t)))$$

sehingga diperoleh

$$\det \left[\begin{pmatrix} \mu + aa & bb \\ cc & \mu + dd \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
& (\mu + (D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t) + 2(a_{11}x_1(t)))) \\
& (\mu + (D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) + 2(a_{22}x_2(t))) - (a_{12}x_1(t))(a_{21}x_2(t)) \quad = 0 \\
& \mu^2 + (D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) + 2a_{22}x_2(t) + D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t) \\
& + 2a_{11}x_1(t))\mu + D_1(t)\theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t)D_1(t) + 2D_1(t)a_{22}(t)x_2(t) \\
& + D_2(t)\theta_1 e^{-\theta_1 t} + (\theta_1 e^{-\theta_1 t})(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) + \theta_1 e^{-\theta_1 t}a_{21}x_1(t) + 2\theta_1 e^{-\theta_1 t}a_{22}x_2(t) \\
& + D_2(t)a_{12}x_2(t) + a_{12}x_2(t)(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) + a_{12}x_2(t)a_{21}x_1(t) + a_{12}x_2(t)a_{22}x_2(t) \\
& + 2a_{11}x_1(t)D_2(t) + 2a_{11}x_1(t)(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) + 2a_{11}x_1(t)a_{21}x_1(t) \\
& + 4a_{11}x_1(t)2a_{22}x_2(t) \quad = 0
\end{aligned}$$

misal:

$$\begin{aligned}
Aa &= 1, \\
Bb &= (D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) + 2a_{22}x_2(t) + D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} \\
& + a_{12}x_2(t) + 2a_{11}x_1(t)) \\
Cc &= D_1(t)\theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t)D_1(t) + 2D_1(t)a_{22}(t)x_2(t) \\
& + D_2(t)\theta_1 e^{-\theta_1 t} + (\theta_1 e^{-\theta_1 t})(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) + \theta_1 e^{-\theta_1 t}a_{21}x_1(t) \\
& + 2\theta_1 e^{-\theta_1 t}a_{22}x_2(t) + D_2(t)a_{12}x_2(t) + a_{12}x_2(t)(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) \\
& + a_{12}x_2(t)a_{21}x_1(t) + a_{12}x_2(t)a_{22}x_2(t) + 2a_{11}x_1(t)D_2(t) \\
& + 2a_{11}x_1(t)(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) + 2a_{11}x_1(t)a_{21}x_1(t) + 4a_{11}x_1(t)2a_{22}x_2(t)
\end{aligned}$$

sehingga akar-akar persamaannya diperoleh,

$$\mu_{12} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (4.22)$$

dimana,

$$\mu_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (4.23)$$

$$\mu_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (4.24)$$

Di dalam B dan C masih memuat variabel $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ sehingga untuk memenuhi kriteria kestabilan $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ haruslah positif atau $x_1(t), x_2(t) > 0$. Dari hasil yang diperoleh, maka $\mu_2 < 0$ (stabil asimptotik) dan μ_1 agar diperoleh

stabil maka $\mu_1 < 0$ dengan syarat,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{B^2 - 4AC} &< B \\
 (\sqrt{B^2 - 4AC})^2 &< B^2 \\
 B^2 - 4AC &< B^2 \\
 -4AC &< 0 \\
 4AC &> 0
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

dengan syarat $4AC > 0$ maka μ_1 stabil.

4.3 Penyelesaian Keterkontrolan dan Keteramatan

4.3.1 Penyelesaian Keterkontrolan

Dari hasil linierisasi maka diperoleh matriks A dan B sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} -(D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - 2(a_{11}x_1(t))) & -a_{12}x_1(t) \\ -a_{21}x_2(t) & -(D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - 2(a_{22}x_2(t))) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan parameter $a_{11} = 0.04, a_{22} = 0.05, a_{12} = 0.2, a_{21} = 0.1, \theta_1 = 0.02, \theta_2 = 0.03, u_1(t) = 75, u_2(t) = 75, D_1(t) := 70; D_2(t) = 70$, dan $t = 100$ maka diperoleh titik kesetimbangan $(x_1^0, x_2^0) = (1.0085851, 1.069056700)$ maka diperoleh matriks A dan B sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} -69.7082 & -0.2017 \\ -0.1069 & -69.7937 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Syarat perlu dan syarat cukup keterkontrolan adalah $M_c = (B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B)$ memiliki rank yang sama dengan n, sehingga diperoleh matriks M_c ,

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -69.7082 & -0.2017 \\ 0 & 1 & -0.1069 & -69.7937 \end{bmatrix}$$

karena matriks M_c mempunyai rank sama dengan 2 maka sistem terkontrol.

4.3.2 Penyelesaian Keteramatan

Menggunakan parameter $a_{11} = 0.04, a_{22} = 0.05, a_{12} = 0.2, a_{21} = 0.1, \theta_1 = 0.02, \theta_2 = 0.03, u_1(t) = 75, u_2(t) = 75, D_1(t) := 70; D_2(t) = 70$, dan $t = 100$ maka diperoleh titik kesetimbangan $(x_1^0, x_2^0) = (1.0085851, 1.069056700)$ maka diperoleh matriks A sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} -69.7082 & -0.2017 \\ -0.1069 & -69.7937 \end{bmatrix}$$

dan matriks C sebagai,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

syarat perlu dan syarat cukup keteramatan adalah $M_o = (C|CA|CA^2|\dots|CA^{n-1})$ memiliki rank yang sama dengan n, sehingga didapat matriks M_o sebagai,

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -69.7082 & -0.2017 \\ -0.1069 & -69.7937 \end{bmatrix}$$

karena matriks M_o memiliki rank yang sama dengan 2 maka sistem teramat.

4.4 Fungsi Objektif Sitem Persediaan *Multi-Item*

Tujuan permasalahan kontrol optimal pada model persediaan *multi-item* dengan kerusakan mengikuti fungsi eksponensial dan tingkat diskon adalah meminimumkan biaya produksi total. Biaya produksi total meliputi biaya produksi, biaya penyimpanan persediaan, dan hubungan biaya penyimpanan persediaan x_1 dan x_2 . Fungsi objektif dari model persediaan *multi-item* sebagai berikut,

$$2J = \min_{u_i(t) \geq 0} \int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^2 (h_{ii}(x_i - \hat{x}_i)^2 + c_{ii}(u_i - \hat{u}_i)^2 + (\theta_i + a_{ii}))x_i^2 + 2h_{12}(x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2) dt \quad (4.26)$$

dengan $t \in [0, T], h_{11}h_{22} > h_{12}^2, h_{ii} > 0, c_{ii} > 0, i = 1, 2$

definisi notasi sebagai berikut.

- T :waktu perencanaan produksi
 \hat{x}_i :target persediaan
 \hat{u}_i :target produksi
 c_{ii} :biaya produksi
 h_{ii} :biaya penyimpanan persediaan
 h_{12} :hubungan biaya penyimpanan persediaan x_1 dan x_2
 θ_i :koefisien kerusakan barang

4.5 Penyelesaian Kontrol Optimal

Strategi penyelesaian permasalahan kontrol optimal sistem Persamaan (4.1) , (4.2) , dan fungsi objektif 4.26 dengan Prinsip Maksimum Pontryagin. Langkah penyelesaian dari Prinsip Maksimum Pontryagin sebagai berikut.

Langkah 1: Bentuk fungsi Hamiltonian yang diperoleh dari Persamaan (4.26).

$$\begin{aligned}
 H = & \left[-\frac{1}{2}e^{-\rho t} [h_{11}(x_1 - \hat{x}_1)^2 + c_{11}(u_1(t) - \hat{u}_1)^2 + (\theta_1 + a_{11})x_1^2 + h_{22}(x_2 - \hat{x}_2)^2 \right. \\
 & \left. + c_{22}(u_2(t) - \hat{u}_2)^2 + (\theta_2 + a_{22})x_2^2 + 2h_{12}(x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2)] \right] \\
 & + \lambda_1(t)(x_1(t) [-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t))] + u_1(t)) \\
 & + \lambda_2(t)(x_2(t) [-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))] + u_2(t)) \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

Langkah 2: Meminimumkan H terhadap semua vektor kontrol persamaan u(t).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial u_i(t)} &= 0 \\
 -e^{-\rho t} c_{ii}(u_i(t) - \hat{u}_i) + \lambda_i(t) &= 0 \\
 -e^{-\rho t} c_{ii}(u_i(t) - \hat{u}_i) &= -\lambda_i(t) \\
 (u_i(t) - \hat{u}_i) &= \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} \\
 u_i(t) &= \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i
 \end{aligned}$$

maka diperoleh $u_i(t)$ yang optimal yaitu $u_i^*(t)$

$$u_i^*(t) = \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i \quad (4.28)$$

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i < 0 \\ \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i & 0 \leq \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i \leq u_{max} \\ u_{max} & \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i > u_{max} \end{cases} \quad (4.29)$$

Langkah 3: menggunakan hasil dari langkah 2, substitusi ke dalam langkah 1 sehingga diperoleh H^* yang optimal.

$$\begin{aligned}
H = & \left[-\frac{1}{2}e^{-\rho t} [h_{11}(x_1 - \hat{x}_1)^2 + c_{11}(u_1^*(t) - \hat{u}_1)^2 + (\theta_1 + a_{11})x_1^2 + h_{22}(x_2 - \hat{x}_2)^2 \right. \\
& + c_{22}(u_2^*(t) - \hat{u}_2)^2 + (\theta_2 + a_{22})x_2^2 + 2h_{12}(x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2)] \\
& + \lambda_1(t)(x_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t))] + u_1^*(t)) \\
& + \lambda_2(t)(x_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))] + u_2^*(t)) \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Langkah 4: menentukan persamaan *state* dan *costate*

- Persamaan *state*:

$$\dot{x}_1^*(t) = (x_1(t))[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t))] + u_1^*(t) \quad (4.31)$$

$$\dot{x}_2^*(t) = (x_2(t))[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))] + u_2^*(t) \quad (4.32)$$

- Persamaan *costate*:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1^* &= -(-e^{-\rho t}(h_{11}(x_1 - \hat{x}_1) + c_{11}(u_1^*(t) - \hat{u}_1)) + 2h_{12}(x_2 - \hat{x}_2) \\
& + \lambda_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) - a_{12}x_2(t) - 2a_{11}x_1(t)]) \\
& - \lambda_2(t)a_{21}x_2(t)) \\
\dot{\lambda}_2^* &= -(-e^{-\rho t}(h_{22}(x_2 - \hat{x}_2) + c_{22}(u_2^*(t) - \hat{u}_2)) + 2h_{12}(x_1 - \hat{x}_1) \\
& + \lambda_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) - a_{21}x_1(t) - 2a_{22}x_2(t)]) \\
& - \lambda_1(t)a_{12}x_1(t)) \quad (4.33)
\end{aligned}$$

dengan kondisi awal x_{10} dan x_{20} serta kondisi akhir $\lambda_i(t_f) = 0$.

Setelah diperoleh hasil dari Prinsip Maksimum Pontryagin yaitu Persamaan 4.30, *state* pada Persamaan 4.31, dan *costate* pada Persamaan 4.33 dan selanjutnya menyelesaikan hasil tersebut dengan simulasi numerik.

4.6 Penyelesaian Numerik

Penyelesaian kondisi optimal, persamaan *state*, persamaan *costate* pada masalah kontrol optimal model persediaan *multi-item* dengan kerusakan mengikuti fungsi eksponensial dan tingkat diskon tidak mudah diselesaikan secara analitis, sehingga permasalahan ini diselesaikan secara numerik. Penyelesaian numerik dilakukan untuk memudahkan dalam menganalisa. Penyelesaian numerik pada penelitian ini menggunakan metode Runge Kutta orde-4 dan *forward-backward sweep method*.

Langkah pertama untuk penyelesaian numerik adalah transformasikan masalah

kontrol optimal model persediaan *multi-item* dengan kerusakan mengikuti fungsi eksponensial dan tingkat diskon dalam bentuk diskrit. Diskritisasi dilakukan pada interval $[t_0, t_f]$ dengan *step size* $h_0 = \frac{t_f - t_0}{N}$ dan *grid* $t_i = t_0 + ih_0 (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ sehingga $t_f = t_N$. Selanjutnya, pada persamaan *state* dilakukan diskritisasi beda maju (*forward sweep*) metode Runge Kutta orde empat karena diketahui nilai awal dari x_1 dan x_2 . Kemudian untuk persamaan *costate* dilakukan diskritisasi beda mundur (*backward sweep*) metode Runge Kutta orde empat karena diketahui nilai akhir dari λ_1 dan λ_2 .

4.6.1 Forward Sweep pada Persamaan State

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^*(t) &= (x_1(t))[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t))] + \frac{\lambda_1(t)}{e^{-\rho t} c_{11}} + \hat{u}_1 \\ \dot{x}_2^*(t) &= (x_2(t))[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))] + \frac{\lambda_2(t)}{e^{-\rho t} c_{22}} + \hat{u}_2\end{aligned}$$

Hasil diskritisasi dengan menggunakan *forward sweep* Runge Kutta orde-4 sebagai berikut,

$$\begin{aligned}x_{1,n+1} &= x_{1n} + \frac{h}{6}(k_{1,x_1} + 2k_{2,x_1} + 2k_{3,x_1} + k_{4,x_1}) \\ x_{2,n+1} &= x_{2n} + \frac{h}{6}(k_{1,x_2} + 2k_{2,x_2} + 2k_{3,x_2} + k_{4,x_2})\end{aligned}$$

4.6.2 Backward Sweep pada Persamaan Costate

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1^* &= -(e^{-\rho t}(h_{11}(x_1 - \hat{x}_1) + c_{11}(u_1^*(t) - \hat{u}_1)) + 2h_{12}(x_2 - \hat{x}_2) \\ &\quad + \lambda_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) - a_{12}x_2(t) - 2a_{11}x_1(t)]) \\ &\quad - \lambda_2(t)a_{21}x_2(t)) \\ \dot{\lambda}_2^* &= -(e^{-\rho t}(h_{22}(x_2 - \hat{x}_2) + c_{22}(u_2^*(t) - \hat{u}_2)) + 2h_{12}(x_1 - \hat{x}_1) \\ &\quad + \lambda_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) - a_{21}x_1(t) - 2a_{22}x_2(t)]) \\ &\quad - \lambda_1(t)a_{12}x_1(t))\end{aligned}$$

Hasil diskritisasi dengan menggunakan *backward sweep* Runge Kutta orde-4 sebagai berikut,

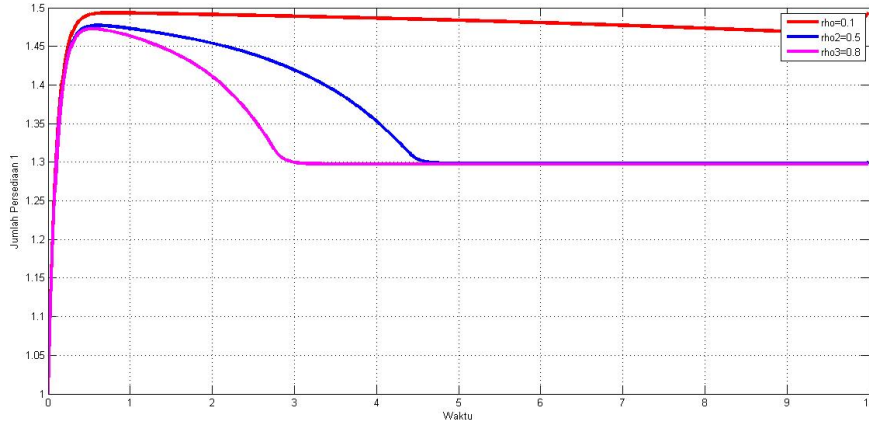
$$\begin{aligned}\lambda_{1,n+1} &= \lambda_{1,n} - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_1} + 2k_{2,\lambda_1} + 2k_{3,\lambda_1} + k_{4,\lambda_1}) \\ \lambda_{2,n+1} &= \lambda_{2,n} - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_2} + 2k_{2,\lambda_2} + 2k_{3,\lambda_2} + k_{4,\lambda_2})\end{aligned}$$

4.7 Simulasi Numerik

Pada subbab ini dipaparkan tentang hasil simulasi numerik dan interpretasinya. Simulasi numerik ini menggunakan *software* Matlab. Dengan menerapkan kondisi batas pada Persamaan (4.26) dan menggunakan *forward backward sweep method* Runge Kutta orde-4 maka didapatkan solusi optimal yang nilainya bergantung pada bentuk fungsi permintaan konsumen. Adapun nilai-nilai parameter dari model

Tabel 4.1: Nilai Parameter (Ahmad Alshamrani dan El-Gohary,2011)

par.	a_{11}	a_{22}	a_{12}	a_{21}	h_{11}	h_{12}	h_{22}	c_{11}	c_{22}	θ_1	θ_2	α_1	α_2	d_1	d_2
val.	0.04	0.05	0.2	0.1	2	4	5	6	5	0.02	0.03	0.6	0.8	3	4



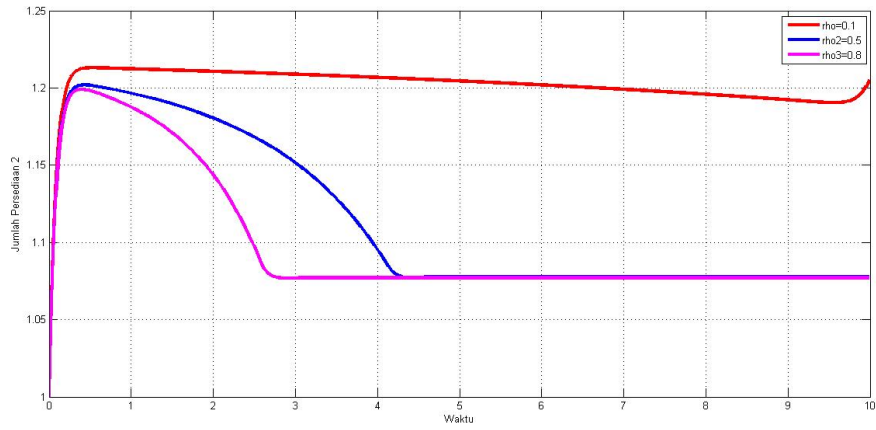
Gambar 4.1: Tingkat persediaan 1 terhadap waktu t

persediaan *multi-item* yang digunakan untuk simulasi dinyatakan dalam Tabel 4.1 berikut,

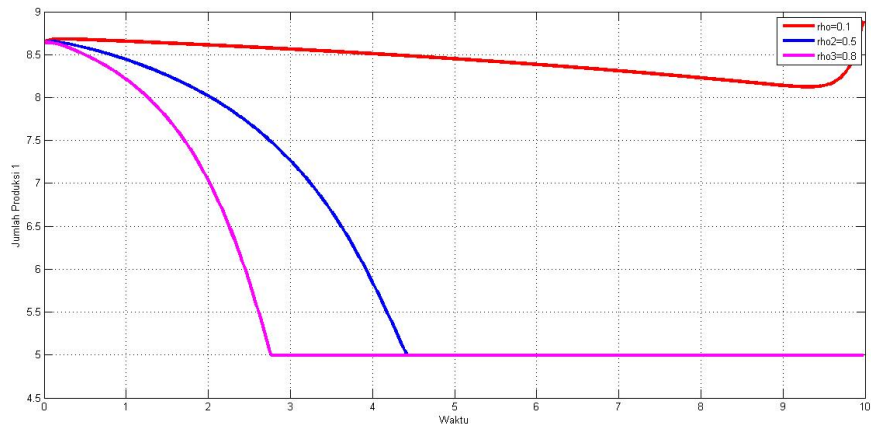
Diberikan nilai parameter untuk nilai awal $x_{10} = 1, x_{20} = 1, \hat{x}_1 = 3, \hat{x}_2 = 5, \hat{u}_1 = 9, \hat{u}_2 = 5, \theta_1 = \theta_2 = 0.01, \rho = 0.1, \rho_2 = 0.5, \rho_3 = 0.8$. Untuk jumlah permintaan mengikuti fungsi permintaan linier $d_i x_i + \alpha_i = 0$ dengan α_i dan d_i adalah konstan.

Pada saat $\theta_1 = \theta_2 = 0.01, \rho = 0.1, \rho_2 = 0.5, \rho_3 = 0.8$ dengan selang 10 satuan waktu menunjukkan bahwa tingkat persediaan 1 dan tingkat persediaan 2 naik kemudian menurun menuju suatu titik. Hal ini dipengaruhi oleh kerusakan barang dan fungsi permintaan linier ($d_i x_i + \alpha_i = 0$) ditunjukkan Gambar 4.1 dan Gambar 4.2. Gambar 4.3 dan Gambar 4.4 pada saat selang 10 satuan waktu menunjukkan bahwa jumlah produksi 1 dan produksi 2 dipengaruhi jumlah permintaan, jumlah persediaan, dan tingkat kerusakan barang.

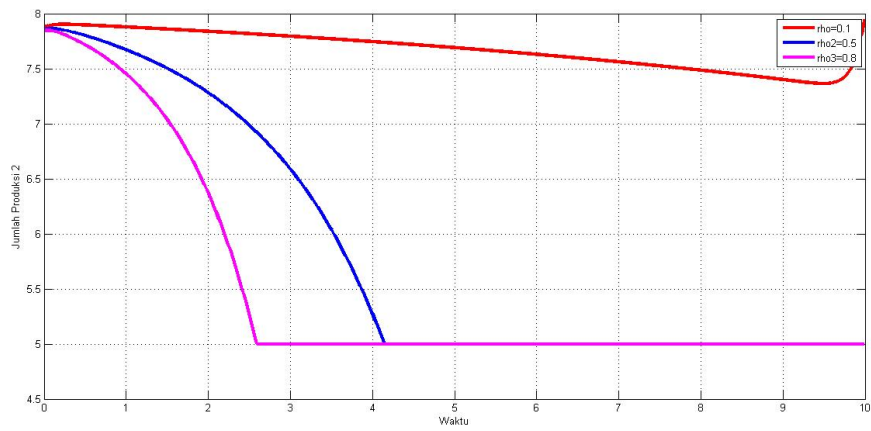
Diberikan nilai parameter untuk nilai awal $x_{10} = 1, x_{20} = 1, \hat{x}_1 = 3, \hat{x}_2 = 5, \hat{u}_1 = 9, \hat{u}_2 = 5, \theta_1 = \theta_2 = 0.05, \rho = 0.1, \rho_2 = 0.5, \rho_3 = 0.8$. Untuk jumlah permintaan mengikuti fungsi permintaan linier $d_i x_i + \alpha_i = 0$ dengan α_i dan d_i adalah konstan.



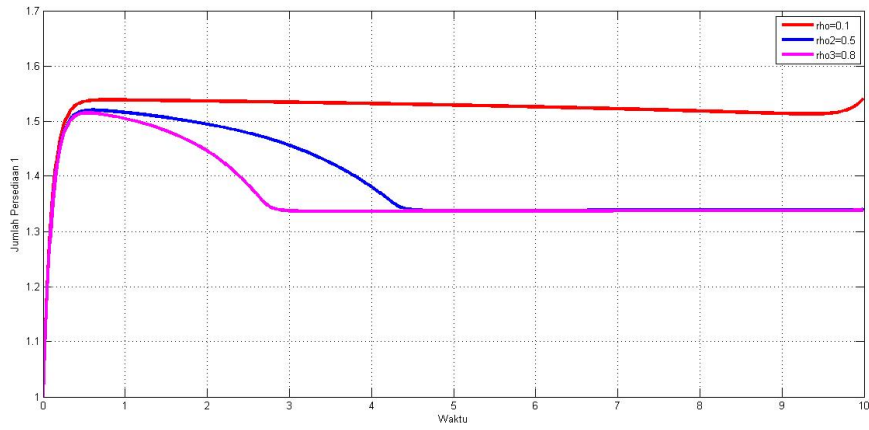
Gambar 4.2: Tingkat persediaan 2 terhadap waktu t



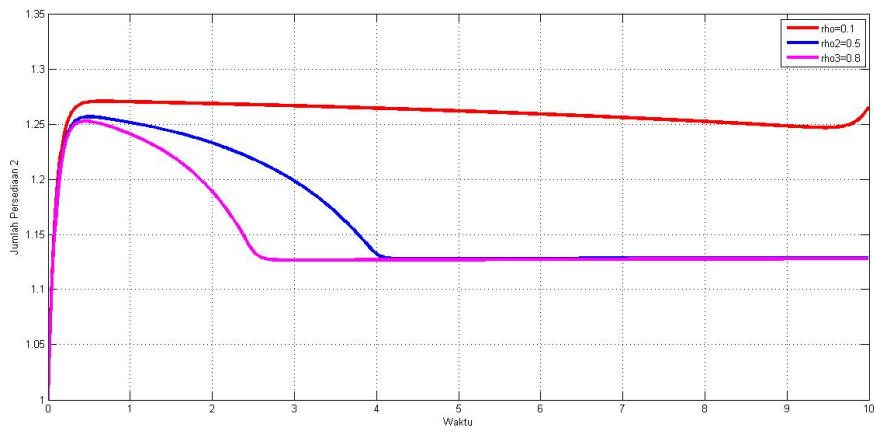
Gambar 4.3: Tingkat produksi 1 terhadap waktu t



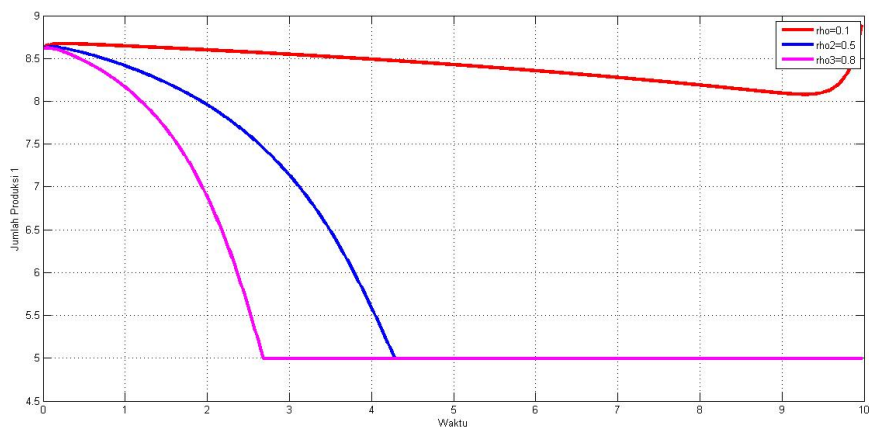
Gambar 4.4: Tingkat produksi 2 terhadap waktu t



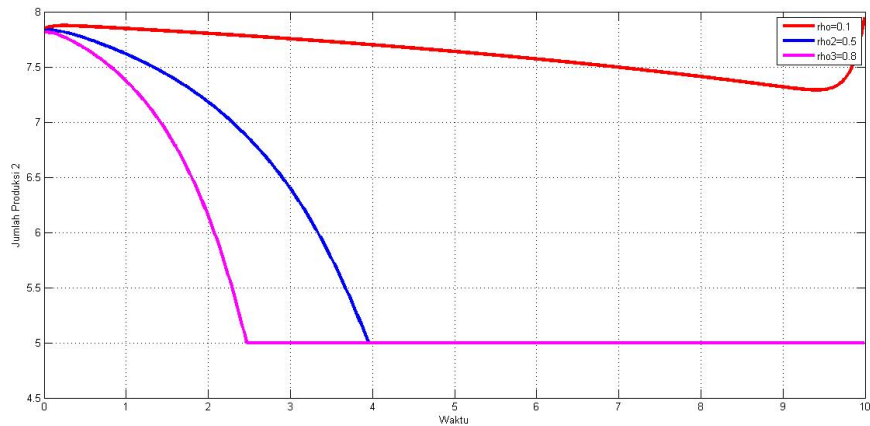
Gambar 4.5: Tingkat persediaan 1 terhadap waktu t



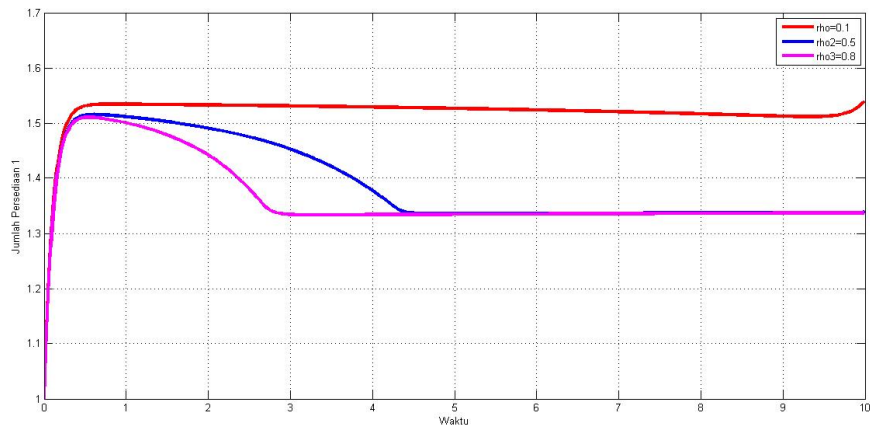
Gambar 4.6: Tingkat persediaan 2 terhadap waktu t



Gambar 4.7: Tingkat produksi 1 terhadap waktu t



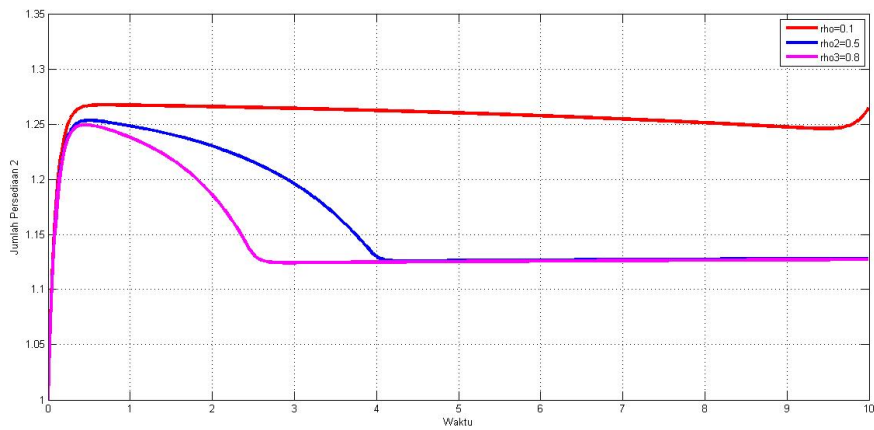
Gambar 4.8: Tingkat produksi 2 terhadap waktu t



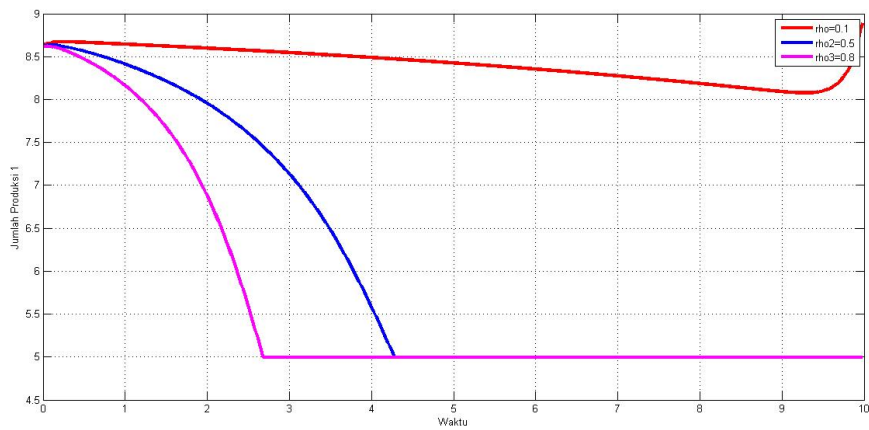
Gambar 4.9: Tingkat persediaan 1 terhadap waktu t

Pada saat $\theta_1 = \theta_2 = 0.05, \rho = 0.1, \rho_2 = 0.5, \rho_3 = 0.8$ dengan selang 10 satuan waktu menunjukkan bahwa tingkat persediaan 1 dan tingkat persediaan 2 naik kemudian menurun menuju suatu titik. Hal ini dipengaruhi oleh kerusakan barang dan fungsi permintaan linier ($d_i x_i + \alpha_i = 0$) ditunjukkan Gambar 4.5 dan Gambar 4.6. Gambar 4.7 dan Gambar 4.8 pada saat selang 10 satuan waktu menunjukkan bahwa jumlah produksi 1 dan produksi 2 dipengaruhi jumlah permintaan, jumlah persediaan, dan tingkat kerusakan barang.

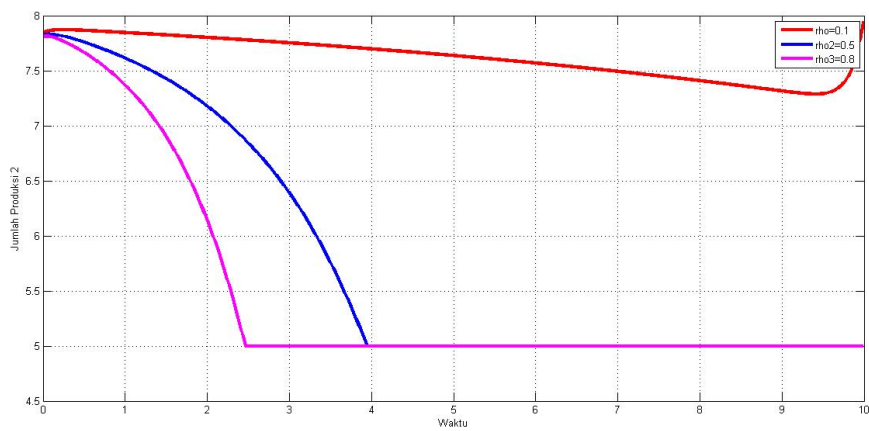
Diberikan nilai parameter untuk nilai awal $x_{10} = 1, x_{20} = 1, \hat{x}_1 = 3, \hat{x}_2 = 5, \hat{u}_1 = 9, \hat{u}_2 = 5, \theta_1 = \theta_2 = 0.08, \rho = 0.1, \rho_2 = 0.5, \rho_3 = 0.8$. Untuk jumlah permintaan mengikuti fungsi permintaan linier $d_i x_i + \alpha_i = 0$ dengan α_i dan d_i adalah konstan.



Gambar 4.10: Tingkat persediaan 2 terhadap waktu t



Gambar 4.11: Tingkat produksi 1 terhadap waktu t



Gambar 4.12: Tingkat produksi 2 terhadap waktu t

Pada saat $\theta_1 = \theta_2 = 0.08$, $\rho = 0.1$, $\rho_2 = 0.5$, $\rho_3 = 0.8$ dengan selang 10 satuan waktu menunjukkan bahwa tingkat persediaan 1 dan tingkat persediaan 2 naik kemudian menurun menuju suatu titik. Hal ini dipengaruhi oleh kerusakan barang dan fungsi permintaan linier ($d_i x_i + \alpha_i = 0$) ditunjukkan Gambar 4.9 dan Gambar 4.10. Gambar 4.11 dan Gambar 4.12 pada saat selang 10 satuan waktu menunjukkan bahwa jumlah produksi 1 dan produksi 2 dipengaruhi jumlah permintaan, jumlah persediaan, dan tingkat kerusakan barang.

BAB V

SIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan simpulan dari hasil pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya. Selain itu, diberikan saran untuk penelitian berikutnya.

5.1 Simpulan

Berdasarkan analisis dari hasil pembahasan, beberapa simpulan yang dapat diambil antara lain.

1. Model sistem persediaan *multi-item* adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t)] + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)] + u_2(t) \end{aligned}$$

dengan kendala variabel sebagai berikut:

$$x_i(t) \geq 0, u_i(t) \geq 0, D_i \geq 0, 0 \leq \theta_i \leq 1, a_{ij} \geq 0, a_{ii} \geq 0$$

2. Fungsi objektif dari sistem perawatan produksi sebagai berikut:

$$2J = \min_{u_i(t) \geq 0} \int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^2 (h_{ii}(x_i - \hat{x}_i)^2 + c_{ii}(u_i - \hat{u}_i)^2 + (\theta_i + a_{ii}))x_i^2 + 2h_{12}(x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2) dt$$

dengan $t \in [0, T], h_{11}h_{22} > h_{12}^2, h_{ii} > 0, c_{ii} > 0, i = 1, 2$

3. Diperoleh $u_i(t)$ yang optimal yaitu $u_i^*(t)$

$$u_i^*(t) = \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i$$

Sehingga persamaan $u_i^*(t)$ diperoleh batasan sebagai berikut.

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i < 0 \\ \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i & 0 \leq \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i \leq u_{max} \\ u_{max} & \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i > u_{max} \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, hal yang dapat dikembangkan dari tesis ini adalah kontrol optimal model sistem persediaan *periodic review multi-item*.

DAFTAR PUSTAKA

- Aminudin.2005. Prinsip-Prinsip Riset Operasi, Erlangga,Jakarta.
- Bendaya, M. dan Raouf,A. 1993.On The Constrained Multi-Item Single-Period Inventory problem. International Journal of Production Management. 13 pp.104-112.
- Bhattacharya, D.K.2005.Production,Manufacturing, and Logistics on Multi-Item Inventory.European Journal of Operation Research.162 pp.786-791.
- Bounkhel, M. dan Tadj, L.2005.Optimal Control of Deteriorating Production Inventory System.Statistics and Operations Research. Vol. 7 hal. 30-45.
- El-Gohary dan El-Sayed. 2008. Optimal Control of Multi Item Inventory Model.International Mathematical Forum.27.pp.1295-1312.
- Grainan,M. dan Essayed,A.2010.Optimal Control of Multi Item Inventory Model with Natural Deterioration Function.International Mathematical Forum.30 pp.1485-1494.
- Handoko,T.H.2011.Dasar-Dasar Manajemen Produksi dan Operasi.1 ed.BPFE-Yogyakarta. Yogyakarta.
- Indayani, D.2010.Kendali Optimal pada Pengadaan Bahan Mentah dengan Kebijakan Pengadaan Tepat Waktu, Pergudangan, dan Penundaan.Jurusan Matematika. FMIPA-ITS.
- Kar,S. Bhunia,A.K.dan Maiti,M.2001.Inventory of Multi-Deteriorating Items Sold from Two Shops Under Single Management with Constraints on Space and Investment.Computers and Operation Research.28 pp.1203-1221.
- Naidu, D. S.2002.Optimal Control Systems. CRC Press, New York.
- Pavela, V.2015.Kontrol Optimal Sistem Inventori dengan Memperhatikan Kerusakan Produk.Tesis.FMIPA-ITS.Surabaya.
- Sethi,S.P dan Thompson,G.L.2000.Optimal Control Theory:Applications to Management Science and Economics.Kluwer Academic Publishers.Beston.London.

Hardiyanti,S.A.2016.kontrol Optimal Sistem Perawatan Produksi dengan Memperhatikan Kerusakan Produk dan Tingkat Diskon.Tesis.FMIPA-ITS.Surabaya.

Taha, H.A.2007.Operation Research:An Introduction.Eight Ed..Prentice Hall,Inc. New Jersey.

BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Desy Putma Handayani, dilahirkan di Madiun pada 26 Mei 1991. Pendidikan formal ditempuh mulai dari SD Negeri 01 Manisrejo Madiun, lulus pada tahun 2003, SMP Negeri 4 Madiun, lulus tahun 2006, dan SMA Negeri 4 Madiun, lulus pada tahun 2009. Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi di Jurusan Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta melalui jalur PMDK Reguler sebagai mahasiswa angkatan 2009 dan wisuda pada bulan Juni 2014 dengan mengambil bidang minat Statistika. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika, Insitut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya dan mengambil bidang minat Matematika Terapan. Informasi, kritik, dan saran yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditujukan ke alamat e-mail:
desymath45@gmail.com.