KONTROL OPTIMAL MODEL PERSEDIAAN *MULTI-ITEM* DENGAN TINGKAT KERUSAKAN FUNGSI EXPONENSIAL DAN TINGKAT DISKON

Desy Putma Handayani, Mardlijah
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

ABSTRACT. Permasalahan umum dari manajemen persediaan adalah menentukan berapa banyak barang yang dipesan dan berapa banyak barang yang harus diproduksi. Persediaan barang dilakukan sebagai antisipasi terhadap pemenuhan permintaan konsumen. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengembangkan kontrol optimal model persediaan *multi-item* dengan memperhatikan kerusakan produk yang mengikuti fungsi eksponensial dan tingkat diskon. Kontrol optimal sistem persediaan *multi-item* diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Pada bagian akhir, solusi yang diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde-4 dan diharapkan biaya total yang minimum.

Kata kunci: *kontrol optimal, persediaan multi-item, fungsi eksponensial, prinsip maksimum pontryagin, Runge Kutta orde-4*

1. PENDAHULUAN

Setiap perusahaan tidak terlepas dari masalah persediaan barang. Menurut Assauri (2005), tanpa adanya manajemen persediaan yang baik, perusahaan akan dihadapkan pada resiko persediaan yang berlebih atau bahkan kekurangan persediaan. Jika terjadi kelebihan persediaan, perusahaan dapat mengalami kerugian karena terhentinya perputaran modal dan munculnya biaya tambahan yang tidak diperlukan. Sebaliknya, jika perusahaan kekurangan persediaan, perusahaan tidak dapat memenuhi permintaan konsumen. Untuk dapat memenuhi permintaan tersebut perusahaan harus memesan barang lebih sering, yang berarti akan meningkatkan biaya pemesanan. Oleh karena itu, diperlukan manajemen persediaan yang baik untuk menentukan jumlah barang yang akan dipesan dan kapan pemesanan harus dilakukan.

Menurut Taha (2007), dalam sistem persediaan terdapat dua tipe permintaan yaitu deterministik dan probabilistik. Permintaan dikatakan bersifat deterministik jika laju permintaan di masa yang akan datang diketahui secara pasti dan dikatakan bersifat probabilistik jika laju permintaan di masa yang akan datang tidak diketahui secara pasti. Jika permintaan bersifat probabilistik, maka sangat dimungkinkan terjadinya kekurangan persediaan.

Model persediaan klasik umumnya berhubungan dengan *single-item* tetapi dalam dunia nyata persediaan dengan *single item* jarang terjadi sehingga hal ini mengarah pada persediaan *multi-item*. Bendaya dan Raouf (1993) mempertimbangkan persediaan *multi-item* dengan laju permintaan yang bersifat stokastik. Banyak penelitian yang membahas tentang kontrol optimal dalam manajemen persediaan. Sethi dan Thompson (2000) membahas kontrol optimal model persediaan dengan biaya dinamis tanpa memperhatikan kerusakan produk. Bounkhel dan Tadj (2005) membahas kontrol optimal persediaan dengan mempertimbangkan produk yang rusak tetapi produk yang diproduksi adalah sejenis *single-item*. Bhattacharya (2005) membahas model persediaan *multi-item* dan memperhatikan kerusakan barang dengan persediaan linier yang tergantung pada laju permintaan. Graian dan Essayed (2010) meneliti kontrol optimal pada model persediaan *multi-item* dengan memperhatikan kerusakan produk. Pada dasarnya persediaan *single-item* maupun *multi-item* memiliki tujuan yang sama yaitu memaksimalkan keuntungan atau meminimalkan total biaya yang dikeluarkan selama siklus yang diberikan. Pada penelitian yang dilakukan Darsih Indayani dalam papernya (Indayani,D.,2010) membahas kendali optimal pada pengadaan bahan mentah dengan kebijakan pengadaan tepat waktu, pergudangan, dan penundaan. Pada papernya dijelaskan mengenai faktor pemotongan atau diskon, baik dalam diskrit maupun kontinu.

Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya, pada penelitian ini akan dikembangkan tingkat kerusakan produk sebagai suatu fungsi distribusi eksponensial negatif dan pemberian tingkat diskon. Optimasi sistem persediaan diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Pada bagian akhir solusi yang diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab.

2. Metode Penelitian

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang digunakan untuk mencapai tujuan penelitian. Metode penelitian dilakukan dengan tahapan, yaitu studi literatur, pengembangan model dengan tingkat kerusakan berupa fungsi eksponensial, penentuan formulasi kontrol optimal, penyelesaian kontrol optimal, pembuatan program simulasi dan analisis hasil simulasi.

3. Model Sistem Persediaan *multi-item* dengan Memperhatikan Tingkat Kerusakan Produk dan Tingkat Diskon

Model sistem persediaan dalam penelitian ini diasumsikan semua fungsi sebagai fungsi yang *differentiable* dan kontinu. Sistem yang digunakan sebagai berikut.

$$\dot{x_1}(t) = x_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t)] + u_1(t) \tag{3.1}$$

$$\dot{x_2}(t) = x_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)] + u_2(t) \tag{3.2}$$

dengan notasi yang didefinisikan sebagai berikut.

$\dot{x}_i$	:laju persediaan pada saat t
$x_i(t)$	:persediaan pada saat t
$u_i(t)$	:banyaknya produksi pada saat t
$D_i(t)$	:banyaknya permintaan pada saat t
a_{ii}	:koefisien barang yang rusak
$a_{ij}(i \neq j)$	:koefisien permintaan dari x_i yang disebabkan adanya unit dari x_j dengan $0 \leq a_{ij} \leq 1$
i	:banyaknya barang, $i = 1, 2$

4. Fungsi Objektif Sitem Persediaan *Multi-Item*

Tujuan permasalahan kontrol optimal pada model persediaan *multi-item* dengan kerusakan mengikuti fungi eksponensial dan tingkat diskon adalah meminimumkan biaya produksi total. Biaya produksi total meliputi biaya produksi,biaya penyimpanan persediaan, dan hubungan biaya penyimpanan persediaan x_1 dan x_2. Fungsi objektif dari model persediaan *multi-item* sebagai berikut,

$$\begin{aligned} 2J &= \min_{u_i(t)\geq 0} \int_0^T e^{-\rho t} \Sigma_{i=1}^2 (h_{ii}(x_i - \widehat{x_i})^2 + c_{ii}(u_i - \widehat{u_i})^2 + (\theta_i + a_{ii}))x_i^2 + \\ &\quad 2h_{12}(x_1 - \widehat{x_1})(x_2 - \widehat{x_2})dt \end{aligned} \tag{4.1}$$

dengan $t \in [0, T]$,$h_{11}h_{22} > h_{12}^2$, $h_{ii} > 0$,$c_{ii} > 0$, $i = 1, 2$

definisi notasi sebagai berikut.

T :waktu perencanaan produksi

$\widehat{x_i}$:target persediaan

$\widehat{u_i}$:target produksi

c_{ii} :biaya produksi

h_{ii} :biaya penyimpanan persediaan

h_{12} :hubungan biaya penyimpanan persediaan x_1 dan x_2

θ_i :koefisien kerusakan barang

5. Penyelesaian Kontrol Optimal

Strategi penyelesaian permasalahan kontrol optimal sistem Persamaan (3.1) , (3.2) , dan fungsi objektif 4.1 dengan Prinsip Maksimum Pontryagin. Langkah penyelesaian dari Prinsip Maksimum Pontryagin sebagai berikut.

Langkah 1: Bentuk fungsi Hamiltonian yang diperoleh dari Persamaan (4.1).

$$\begin{aligned} H &= [-\frac{1}{2}e^{-\rho t}[h_{11}(x_1-\hat{x_1})^2+c_{11}(u_1(t)-\hat{u_1})^2+(\theta_1+a_{11})x_1^2+h_{22}(x_2-\hat{x_2})^2 \\ &\quad +c_{22}(u_2(t)-\hat{u_2})^2+(\theta_2+a_{22})x_2^2+2h_{12}(x_1-\hat{x_1})(x_2-\hat{x_2})]] \\ &\quad +\lambda_1(t)(x_1(t)[-(D_1+\theta_1 e^{-\theta_1 t}+a_{12}x_2(t)-a_{11}x_1(t))]+u_1(t)) \\ &\quad +\lambda_2(t)(x_2(t)[-(D_2+\theta_2 e^{-\theta_2 t}+a_{21}x_1(t)-a_{22}x_2(t))]+u_1(t)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Langkah 2: Meminimumkan H terhadap semua vektor kontrol persamaan u(t).

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_i(t)} &= 0 \\ -e^{-\rho t}c_{ii}(u_i(t)-\hat{u}_i)+\lambda_i(t) &= 0 \\ -e^{-\rho t}c_{ii}(u_i(t)-\hat{u}_i) &= -\lambda_i(t) \\ (u_i(t)-\hat{u}_i) &= \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t}c_{ii}} \\ u_i(t) &= \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t}c_{ii}}+\hat{u}_i \end{aligned}$$

maka diperoleh $u_i(t)$ yang optimal yaitu $u_i^*(t)$

$$u_i^*(t)=\frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t}c_{ii}}+\hat{u}_i \tag{5.2}$$

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t}c_{ii}} + \hat{u}_i < 0 \\ \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t}c_{ii}} + \hat{u}_i & 0 \leq \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t}c_{ii}} + \hat{u}_i \leq u_{max} \\ u_{max} & \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t}c_{ii}} + \hat{u}_i > u_{max} \end{cases} \tag{5.3}$$

Langkah 3: menggunakan hasil dari langkah 2, subtitusi ke dalam langkah 1 sehingga diperoleh H^* yang optimal.

$$\begin{aligned} H &= [-\frac{1}{2}e^{-\rho t}[h_{11}(x_1 - \hat{x_1})^2 + c_{11}(u_1^*(t) - \hat{u_1})^2 + (\theta_1 + a_{11})x_1^2 + h_{22}(x_2 - \hat{x_2})^2 \\ &\quad + c_{22}(u_2^*(t) - \hat{u_2})^2 + (\theta_2 + a_{22})x_2^2 + 2h_{12}(x_1 - \hat{x_1})(x_2 - \hat{x_2})]] \\ &\quad + \lambda_1(t)(x_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t))] + u_1^*(t)) \\ &\quad + \lambda_2(t)(x_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))] + u_2^*(t)) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Langkah 4: menentukan persamaan *state* dan *costate*

- Persamaan *state*:

$$\dot{x}_1^*(t) = (x_1(t))[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t))] + u_1^*(t) \tag{5.5}$$

$$\dot{x}_2^*(t) = (x_2(t))[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))] + u_2^*(t) \tag{5.6}$$

- Persamaan *costate*:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1^* &= -(-e^{-\rho t}(h_{11}(x_1 - \hat{x_1}) + c_{11}(u_1^*(t) - \hat{u_1})) + 2h_{12}(x_2 - \hat{x_2}) \\ &\quad + \lambda_1(t)[-((D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) - a_{12}x_2(t) - 2a_{11}x_1(t))] \\ &\quad - \lambda_2(t)a_{21}x_2(t))) \\ \dot{\lambda}_2^* &= -(-e^{-\rho t}(h_{22}(x_2 - \hat{x_2}) + c_{22}(u_2^*(t) - \hat{u_2})) + 2h_{12}(x_1 - \hat{x_1}) \\ &\quad + \lambda_2(t)[-((D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) - a_{21}x_1(t) - 2a_{22}x_2(t))] \\ &\quad - \lambda_1(t)a_{12}x_1(t))) \end{aligned} \tag{5.7}$$

dengan kondisi awal x_{10} dan x_{20} serta kondisi akhir $\lambda_i(t_f) = 0$.

6. Kesimpulan

Dari Hasil pembahasan diperoleh nilai state dan costate untuk dibuat kedalam program Runge Kutta orde 4 untuk mengetahui hasil yang optimum.

References

[1]

[2] Aminudin.2005. Prinsip-Prinsip Riset Operasi, Erlangga,Jakarta.

[3] Bendaya, M. dan Raouf,A. 1993.On The Constrained Multi-Item Single-Period Inventory problem. International Journal of Production Management. 13 pp.104-112.

[4] Bhattacharya, D.K.2005.Production,Manufacturing, and Logistics on Multi-Item Inventory.European Journal of Operation Research.162 pp.786-791.

[5] Bounkhel, M. dan Tadj, L.2005.Optimal Control of Deteriorating Production Inventory System.Statistics and Operations Research. Vol. 7 hal. 30-45.

[6] El-Gohary dan El-Sayed. 2008. Optimal Control of Multi Item Inventory Model.International Mathematical Forum.27.pp.1295-1312.

[7] Grainan,M. dan Essayed,A.2010.Optimal Control of Multi Item Inventory Model with Natural Deterioration Function.International Mathematical Forum.30 pp.1485-1494.

[8] Handoko,T.H.2011.Dasar-Dasar Manajemen Produksi dan Operasi.1 ed.BPFE-Yogyakarta. Yogyakarta.

[9] Indayani, D.2010.Kendali Optimal pada Pengadaan Bahan Mentah dengan Kebijakan Pengadaan Tepat Waktu, Pergudangan, dan Penundaan.Jurusan Matematika. FMIPA-ITS.

[10] Kar,S. Bhunia,A.K.dan Maiti,M.2001.Inventory of Multi-Deteriorating Items Sold from Two Shops Under Single Management with Constraints on Space and Investment.Computers and Operation Research.28 pp.1203-1221.

[11] Naidu, D. S.2002.Optimal Control Systems. CRC Press, New York.

[12] Pavela, V.2015.Kontrol Optimal Sistem Inventori dengan Memperhatikan Kerusakan Produk.Tesis.FMIPA-ITS.Surabaya.

[13] Sethi,S.P dan Thompson,G.L.2000.Optimal Control Theory:Aplications to Management Science and Economics.Kluwer Academic Publishers.Beston.London.

[14] Hardiyanti,S.A.2016.kontrol Optimal Sistem Perawatan Produksi dengan Memperhatikan Kerusakan Produk dan Tingkat Diskon.Tesis.FMIPA-ITS.Surabaya.

[15] Taha, H.A.2007.Operation Research:An Introduction.Eight Ed..Prentice Hall,Inc. New Jersey.