KONTROL OPTIMAL MODEL PERSEDIAAN *MULTI-ITEM* DENGAN TINGKAT KERUSAKAN MENGIKUTI FUNGSI EKSPONENSIAL DAN TINGKAT DISKON

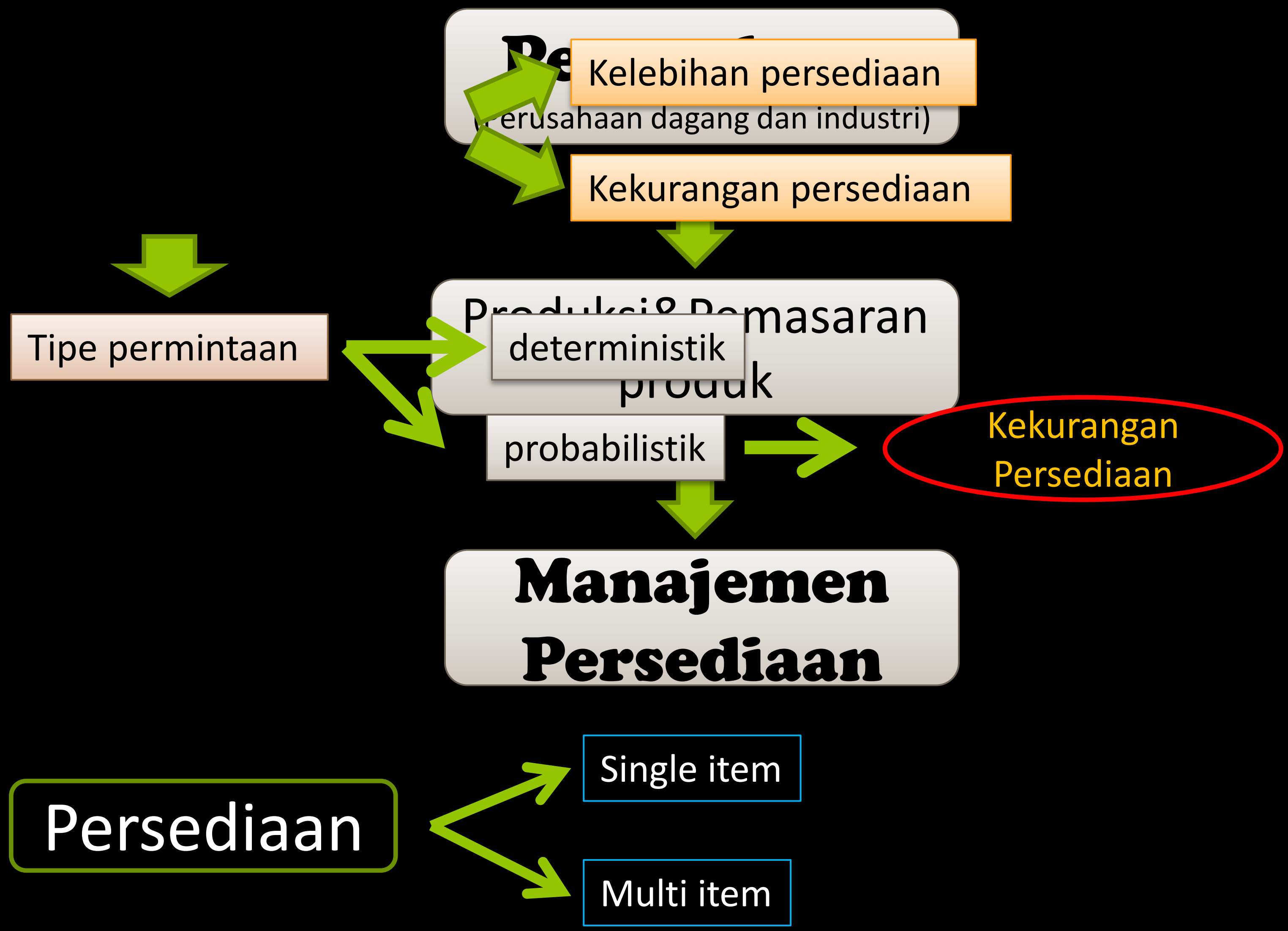
Disusun oleh:

Desy Putma Handayani 1214201014

Dosen Pembimbing:

Dr. Dra. Mardlijah, MT

PENDAHULUAN



Perumusan Masalah

1. Bagaimana mengembangkan model sistem persediaan multi-item dengan memperhatikan kerusakan produk sebagai fungsi negatif eksponensial dan menambahkan tingkat diskon ke dalam masalah kontrol optimal.
2. Bagaimana menentukan produksi dan persediaan yang optimal dari model sistem persediaan multi-item mengggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Bagaimana analisa simulasi dengan mengunakan software Matlab pada kerusakan produk sebagai fungsi negatif eksponensial setelah dilakukan kontrol optimal pada sistem persediaan.

Batasan Masalah

1. Barang yang diproduksi adalah 2 jenis
2. Tingkat kerusakan terjadi setelah produk masuk dalam gudang penyimpanan.
3. Tidak ada perbaikan pada produk yang rusak.
4. Tidak ada kekurangan dalam persediaan.
5. Semua permintaan konsumen dapat dipenuhi.
6. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model persediaan yang kontinu.
7. Gudang penyimpanan produk dianggap dapat menampung jumlah produk yang dipesan.
8. Distribusi waktu untuk kerusakan produk mengikuti distribusi negatif eksponensial $g(t) = \theta e^{-\theta t}, \theta > 0, t \geq 0$.

Tujuan Penelitian

1. Mengembangkan model sistem persediaan multi-item dengan memperhatikan kerusakan produk sebagai fungsi negatif eksponensial dan menambahkan tingkat diskon ke dalam masalah kontrol optimal.
2. Menentukan produksi dan persediaan yang optimal dari model sistem persediaan multi-item mengggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Menganalisa simulasi dengan mengunakan software Matlab pada kerusakan produk sebagai fungsi negatif eksponensial setelah dilakukan kontrol optimal pada sistem persediaan.

Manfaat Penelitian

1. Secara teoritis dapat memformulasikan dan menganalisa model matematika untuk masalah persediaan.
2. Secara praktis sebagai pertimbangan untuk menentukan kebijakan optimal bagi pelaku usaha di industri perdagangan yang berkaitan dengan manajemen persediaan.

TINJAUAN PUSTAKA

Berikut beberapa penelitian terdahulu

Bendaya dan Raouf (1993)

mempertimbangkan persediaan multi-item dengan laju permintaan yang bersifat stokastik.

Kar dkk (2001)

membahas tentang kepadatan laju permintaan untuk persediaan multi-item.

Bhattacharya (2005)

membahas tentang persediaan multi-item dengan memperhatikan kerusakan produk dan persediaan linier tergantung laju permintaan.

Gohary dan Sayed (2008)

meneliti kontrol optimal pada model persediaan multi-item dengan kerusakan produk untuk tipe yang berbeda pada laju permintaan.

Grainan dan Essayed (2010)

meneliti kontrol optimal pada model persediaan multi-item dengan kerusakan produk alami.

Dalam paper (Bhattacharya,2005) model sistem persediaan yang digunakan sebagai berikut.

$$\dot{x_1} = \mathrm{x}_1(\mathrm{t})[-(\mathrm{D}_1 + \Theta_1) - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t)] + u_1(t)$$

$$\dot{x_2} = \mathrm{x}_2(\mathrm{t})[-(\mathrm{D}_2 + \Theta_2) - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)] + u_2(t)$$

Dengan $x_i \geq 0, u_i \geq 0$

Pada Graian dan Essayed (2010) digunakan fungsi objektif sebagai berikut.

$$2J = \min \int_0^T \sum_{i=1}^{2} (h_{ii}(x_i - \widehat{x_i})^2 + c_{ii}(u_i - \widehat{u_i})^2 + (\theta + a_{ii}))x_i^2 + 2h\_12(x_1 - \widehat{x_1})(x_2 - \widehat{x_2})dt$$

Dengan $t \in [0, T], h_{11}h_{22} > h_{12}^2,\ h_{ii} > 0, i = 1{,}2$

Persediaan

Menurut Handoko, persediaan merupakan suatu istilah yang digunakan untuk menunjukkan sumber daya yang disimpan sebagai antisipasi terhadap pemenuhan permintaan dari waktu ke waktu.

Macam-macam biaya persediaan

- Biaya pemesanan (ordering cost)
- Biaya penyimpanan (holding cost)
- Biaya penyiapan (setup cost)
- Biaya kerugian (shortage cost) → Stock out
  - backorders
  - Lost sales
  - Partial backorders

Kontrol Optimal

Pada umumnya fungsi objektif pada masalah kontrol optimal dapat diformulasikan sebagai berikut

$$J\big(u(t)\big) = S\big(x(t_f), t_f\big) + \int_0^T V(x(t), u(t), t)\,dt$$

dengan sistem (plant) dinyatakan oleh persamaan berikut,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

serta kondisi batas $x(t_0) = x_0 \,, x\big(t_f\big) = x_f$

Prinsip Maksimum Pontryagin

Langkah-langkah menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut.

- menyelesaikan sekumpulan 2n persamaan

$$\dot{x}^*(t) = +\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_*$$
$$\lambda^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_*$$

  dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f}\delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right]'_{t_f}\delta x_f = 0$$

- untuk memperoleh kontrol optimal, solusi $x^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah 4 disubstitusikan ke dalam ekspresi kontrol optimal u^* pada langkah 2.

$$H^*(t)(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(t)(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

Tahapan Penelitian

1. Memahami Konsep dan Studi Literatur
2. Mengembangkan Model
3. Menentukan Formulasi Masalah Kontrol Optimal
4. Menyelesaikan Permasalahan Kontrol Optimal
5. Pembuatan Program Simulasi
6. Analisis Hasil Simulasi
7. Publikasi Artikel
8. Penyusunan Laporan

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model sistem persediaan multi item:

$$\dot{x_1} = \mathrm{x}_1(\mathrm{t})\left[-\left(\mathrm{D}_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t}\right) - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t)\right] + u_1(t)$$

$$\dot{x_2} = \mathrm{x}_2(\mathrm{t})\left[-\left(\mathrm{D}_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t}\right) - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)\right] + u_2(t)$$

Dengan $x_i \geq 0, u_i \geq 0, D_i \geq 0, 0 \leq \theta_i \leq 1, a_{\mathrm{ij}} \geq 0, a_{ii} \geq 0$

1. Penyelesaian titik kesetimbangan

$$\dot{x_1}(t) = x_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t)] + u_1(t) = 0 \qquad (4.4)$$

$$\dot{x_2}(t) = x_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)] + u_2(t) = 0 \qquad (4.5)$$

sehingga diperoleh,

$$x_{1a,1b} = \frac{(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) \pm \sqrt{(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t})^2 - 4(-a_{11})u_1}}{2(-a_{11})} \qquad (4.6)$$

$$x_{2a,2b} = \frac{(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) \pm \sqrt{(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t})^2 - 4(-a_{22})u_2}}{2(-a_{22})} \qquad (4.7)$$

Pada kasus ini titik setimbang harus bernilai non-negatif karena berupa suatu persediaan barang dan diasumsikan tidak ada kekurangan persediaan sehingga diambil persamaan x_{1b} dan x_{2b} dengan batasan $D_i < u_i$

$$x_{1b} = \frac{(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) - \sqrt{(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t})^2 - 4(-a_{11})u_1}}{2(-a_{11})} \tag{4.8}$$

$$x_{2b} = \frac{(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) - \sqrt{(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t})^2 - 4(-a_{22})u_2}}{2(-a_{22})} \tag{4.9}$$

Persamaan 4.9 disubstitusikan ke dalam Persamaan 4.8 sehingga diperoleh persamaan polinomial berderajat 4

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
x_{1b} \;=\; & ((-2a_{22})^2(-2a_{11})^4 - 4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})^3(a_{12}))x^4 \\
& -(4(-2a_{22})^2(-2a_{11})^3(D_1+\theta_1 e^{-\theta_1 t}) + (-2a_{22})(-2a_{11})^3(a_{12}) \\
& -8(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})^2(a_{12})(D_1+\theta_1 e^{-\theta_1 t}))x^3 \\
& +(4(-2a_{22})^2(-2a_{11})^2(D_1+\theta_1 e^{-\theta_1 t})^2 - 2(-2a_{22})^2(4a_{11}u_1) \\
& (-2a_{11})^2 + 8(-2a_{22})(D_2+\theta_2 e^{-\theta_2 t})(-2a_{11})^2(a_{12}) \\
& (D_1+\theta_1 e^{-\theta_1 t}) + 4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})(a_{12})(4a_{11}u_1) \\
& -4(4a_{22}u_1)(-2a_{11})^2(a_{12})^2)x^2 + (4(-2a_{22})^2(4a_{11}u_1)(-2a_{11}) \\
& (D_1+\theta_1 e^{-\theta_1 t}) + 4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})(a_{12})(4a_{11}u_1))x \\
& +(-2a_{22})^2(4a_{11}u_1)^2. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Langkah-langkah mencari akar-akar persamaan 4.10 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_0 &= (-2a_{22})^2(-2a_{11})^4 - 4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})^3(a_{12}) \\
a_1 &= -(4(-2a_{22})^2(-2a_{11})^3(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) + (-2a_{22})(-2a_{11})^3(a_{12}) \\
&\quad -8(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})^2(a_{12})(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t})) \\
a_2 &= 4(-2a_{22})^2(-2a_{11})^2(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t})^2 - 2(-2a_{22})^2(4a_{11}u_1) \\
&\quad (-2a_{11})^2 + 8(-2a_{22})(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t})(-2a_{11})^2(a_{12})(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) \\
&\quad +4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})(a_{12})(4a_{11}u_1) - 4(4a_{22}u_1)(-2a_{11})^2(a_{12})^2 \\
a_3 &= 4(-2a_{22})^2(4a_{11}u_1)(-2a_{11})(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) \\
&\quad +4(-2a_{22})(a_{21})(-2a_{11})(a_{12})(4a_{11}u_1) \\
a_4 &= (-2a_{22})^2(4a_{11}u_1)^2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Mencari nilai b_i dengan $i = 1,2,3,4$

$$b_1 = \frac{a_1}{a_0}, b_2 = \frac{a_2}{a_0}, b_3 = \frac{a_3}{a_0}, b_4 = a_4/a_0$$

Mencari nilai $c_1, c_2\ dan\ c_3$

$$c_1 = b_2 - \frac{3}{8} b_1^2$$

$$c_2 = \frac{1}{8} b_1^3 - \frac{1}{2} b_1\ b_2 + b_3$$

$$c_3 = b_4 + \frac{1}{16} b_1^2 b_2 - \frac{1}{4} b_1 b_3 - \frac{3}{256} b_1^4$$

Mencari nilai $d_1, d_2\ dan\ d_3$

$$d_1 = \frac{5}{2} c_1$$

$$d_2 = 2c_1^2 - c_3$$

$$d_2 = \frac{1}{2} c_1^3 - \frac{1}{2} c_1 c_3 - \frac{1}{8} c_2^2$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
e_1 &= d_2 - \frac{1}{3} d_1^2 \\
&= 2c_1^2 - c_3 - \frac{1}{3}(\frac{5}{2} c_1)^2 \\
&= 2(b_2 - \frac{3}{8} b_1)^2 - (b_4 + \frac{1}{16} b_1^2 b_2 - \frac{1}{4} b_1 b_3 - \frac{3}{256} b_1^4) - \frac{25}{12}(b_2 - \frac{3}{8} b_1)^2. \\
e_2 &= d_3 - \frac{1}{3} d_1 d_2 + \frac{2}{27} d_1^3 \\
&= \frac{1}{2} c_1^3 - \frac{1}{2} c_1 c_3 - \frac{1}{8} c_2^2 - \frac{1}{3}(\frac{5}{2} c_1)(2c_1^2 - c_3) + \frac{2}{27}(\frac{5}{2} c_1)^3 \\
&= (\frac{1}{3}(b_2 - \frac{3}{8} b_1^2)^3 - \frac{1}{2}(b_2 - \frac{3}{8} b_1)(b_4 + \frac{1}{16} b_1^2 b_2 - \frac{1}{4} b_1 b_3 - \frac{3}{256} b_1^4) \\
&\quad - \frac{1}{8}(\frac{1}{8} b_1^3 - \frac{1}{2} b_1 b_2 + b_3)^2 - \frac{1}{3}(\frac{5}{2}(b_2 - \frac{3}{8} b_1^2))(2(b_2 - \frac{3}{8} b_1^2)^2 \\
&\quad - (b_4 + \frac{1}{16} b_1^2 b_2 - \frac{1}{4} b_1 b_3 - \frac{3}{256} b_1^4)) + \frac{2}{27}(\frac{5}{2} b_2 - \frac{3}{8} b_1^2)^3) \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Selanjutnya mencari nilai k,n,m, dan j untuk memperoleh akar-akar polinomial

$$k = \left(-\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27} e_1^3 + \frac{1}{4} e_2^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Dengan k=r

$$
\begin{aligned}
n &= c_1 + k + r - \frac{1}{3}d_1 \\
&= \left(b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right) + \left(-\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad -\frac{5}{6}\left(b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right). \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j &= c_1 + 2k + 2r - \frac{2}{3}d_1 \\
&= \left(b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right) + 2\left(-\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\left(-\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad -\frac{5}{3}\left(b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right). \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Sehingga nilai m sebagai berikut,

$$m = \frac{c_2}{2j}$$

Maka diperoleh formula akar-akar polinomial derajat 4 sebagai berikut,

$$x_{1b1} = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4(n + m\sqrt{j})}}{2} - \frac{1}{4}b_1. \qquad (4.20)$$

$$x_{1b2} = \frac{\sqrt{j}}{2} - \frac{\sqrt{j - 4(n + m\sqrt{j})}}{2} - \frac{1}{4}b_1. \qquad (4.21)$$

$$x_{1b3} = -\frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4(n + m\sqrt{j})}}{2} - \frac{1}{4}b_1. \qquad (4.22)$$

$$x_{1b4} = -\frac{\sqrt{j}}{2} - \frac{\sqrt{j - 4(n + m\sqrt{j})}}{2} - \frac{1}{4}b_1. \qquad (4.23)$$

Sehingga titik kesetimbangannya sebagai berikut:

$(x_{1b1}, x_{2b}), (x_{1b2}, x_{2b}), (x_{1b3}, x_{2b})$ dan (x_{1b4}, x_{2b})

Dari ke empat titik tersebut, harus dipilih titik yang bernilai positif.

Penyelesaian linierisasi

$$A = \begin{bmatrix} -(D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - 2(a_{11}x_1(t)) & -a_{12}x_1(t) \\ -a_{21}x_2(t) & -(D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - 2(a_{22}x_2(t)) \end{bmatrix}$$

Penyelesaian kestabilan

$\det(\mu I - A) = 0$ dengan matriks A,

$$A = \begin{bmatrix} -(D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - 2(a_{11}x_1(t)) & -a_{12}x_1(t) \\ -a_{21}x_2(t) & -(D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - 2(a_{22}x_2(t)) \end{bmatrix}$$

Misal,

$$\begin{aligned} aa &= -(D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - 2(a_{11}x_1(t)) \\ bb &= -a_{12}x_1(t) \\ cc &= -a_{21}x_2(t) \\ dd &= -(D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - 2(a_{22}x_2(t)) \end{aligned}$$

Jadi,

$$\det\begin{bmatrix}\mu + aa & bb \\ cc & \mu + dd\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&(\mu + (D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t) + 2(a_{11}x_1(t))) \\
&(\mu + (D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) + 2(a_{22}x_2(t))) - (a_{12}x_1(t))(a_{21}x_2(t)) &= 0 \\
&\mu^2 + (D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) + 2a_{22}x_2(t) + D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t) \\
&+ 2a_{11}x_1(t))\mu + D_1(t)\theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t)D_1(t) + 2D_1(t)a_{22}(t)x_2(t) \\
&+ D_2(t)\theta_1 e^{-\theta_1 t} + (\theta_1 e^{-\theta_1 t})(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) + \theta_1 e^{-\theta_1 t}a_{21}x_1(t) + 2\theta_1 e^{-\theta_1 t}a_{22}x_2(t) \\
&+ D_2(t)a_{12}x_2(t) + a_{12}x_2(t)(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) + a_{12}x_2(t)a_{21}x_1(t) + a_{12}x_2(t)a_{22}x_2(t) \\
&+ 2a_{11}x_1(t)D_2(t) + 2a_{11}x_1(t)(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) + 2a_{11}x_1(t)a_{21}x_1(t) \\
&+ 4a_{11}x_1(t)2a_{22}x_2(t) &= 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

misal:

$$\begin{aligned}
A &= 1, \\
B &= (D_2(t) + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) + 2a_{22}x_2(t) + D_1(t) + \theta_1 e^{-\theta_1 t} \\
&\quad +a_{12}x_2(t) + 2a_{11}x_1(t)) \\
C &= D_1(t)\theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t)D_1(t) + 2D_1(t)a_{22}(t)x_2(t) \\
&\quad +D_2(t)\theta_1 e^{-\theta_1 t} + (\theta_1 e^{-\theta_1 t})(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) + \theta_1 e^{-\theta_1 t}a_{21}x_1(t) \\
&\quad +2\theta_1 e^{-\theta_1 t}a_{22}x_2(t) + D_2(t)a_{12}x_2(t) + a_{12}x_2(t)(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) \\
&\quad +a_{12}x_2(t)a_{21}x_1(t) + a_{12}x_2(t)a_{22}x_2(t) + 2a_{11}x_1(t)D_2(t) \\
&\quad +2a_{11}x_1(t)(\theta_2 e^{-\theta_2 t}) + 2a_{11}x_1(t)a_{21}x_1(t) + 4a_{11}x_1(t)2a_{22}x_2(t)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

sehingga akar-akar persamaannya diperoleh,

$$\mu_{12} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{4.27}$$

dimana,

$$\mu_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{4.28}$$

$$\mu_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{4.29}$$

Di dalam B dan C masih memuat variabel $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ sebingga untuk memenuhi kriteria kestabilan $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ haruslah positif atau $x_1(t), x_2(t) > 0$. Dari hasil yang diperoleh, maka $\mu_2 < 0$ (stabil asimptotik) dan μ_1 agar diperoleh stabil maka $\mu_1 < 0$ dengan syarat,

$$\begin{aligned}
\sqrt{B^2 - 4AC} &< B \\
(\sqrt{B^2 - 4AC})^2 &< B^2 \\
B^2 - 4AC &< B^2 \\
-4AC &< 0 \\
4AC &> 0 \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

dengan syarat $4AC > 0$ maka μ_1 stabil.

Penyelesaian Keterkontrolan

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -69.7082 & -0.2017 \\ 0 & 1 & -0.1069 & -69.7937 \end{bmatrix}$$

Mc mempunyai rank yang sama dengan 2 maka sistem terkontrol

Penyelesaian Keteramatan

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -69.7082 & -0.2017 \\ -0.1069 & -69.7937 \end{bmatrix}$$

Mo mempunyai rank yang sama dengan 2 maka sistem teramati

Fungsi objektif sistem persediaan Multi item

$$2J = \min \int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{2} (h_{ii}(x_i - \widehat{x_i})^2 + c_{ii}(u_i - \widehat{u_i})^2 + (\theta + a_{ii}))x_i^2 + 2h\_12(x_1 - \widehat{x_1})(x_2 - \widehat{x_2})dt$$

Dengan $t \in [0, T], h_{11}h_{22} > h_{12}^2, h_{ii} > 0, i = 1,2$

Penyelesaian Kontrol Optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin

$$\begin{aligned} H \;=\; & [-\frac{1}{2}e^{-\rho t}[h_{11}(x_1 - \hat{x_1})^2 + c_{11}(u_1(t) - \hat{u_1})^2 + (\theta_1 + a_{11})x_1^2 + h_{22}(x_2 - \hat{x_2})^2 \\ & + c_{22}(u_2(t) - \hat{u_2})^2 + (\theta_2 + a_{22})x_2^2 + 2h_{12}(x_1 - \hat{x_1})(x_2 - \hat{x_2})]] \\ & + \lambda_1(t)(x_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t))] + u_1(t)) \\ & + \lambda_2(t)(x_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))] + u_1(t)) \qquad (4.32) \end{aligned}$$

Meminimumkan H terhadap semua vektor kontrol persamaan u(t)

$$u_i(t) = \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \widehat{u_i}$$

Maka diperoleh $u_i(t)$ yang optimal $u_i^*(t)$

$$u_i^*(t) = \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \widehat{u_i}$$

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i < 0 \\ \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i & 0 \leq \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i \leq u_{max} \\ u_{max} & \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i > u_{max} \end{cases} \qquad (4.34)$$

Sehingga H optimal,

$$\begin{aligned} H &= [-\frac{1}{2}e^{-\rho t}[h_{11}(x_1-\hat{x_1})^2 + c_{11}(u_1^*(t)-\hat{u_1})^2 + (\theta_1+a_{11})x_1^2 + h_{22}(x_2-\hat{x_2})^2 \\ &\quad + c_{22}(u_2^*(t)-\hat{u_2})^2 + (\theta_2+a_{22})x_2^2 + 2h_{12}(x_1-\hat{x_1})(x_2-\hat{x_2})]] \\ &\quad + \lambda_1(t)(x_1(t)[-(D_1+\theta_1 e^{-\theta_1 t} - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t))] + u_1^*(t)) \\ &\quad + \lambda_2(t)(x_2(t)[-(D_2+\theta_2 e^{-\theta_2 t} - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))] + u_2^*(t)) \qquad (4.35) \end{aligned}$$

Persamaan state,

$$\dot{x}_1^*(t) = (x_1(t))[-(D_1+\theta_1 e^{-\theta_1 t} + a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t))] + u_1^*(t) \quad (4.36)$$

$$\dot{x}_2^*(t) = (x_2(t))[-(D_2+\theta_2 e^{-\theta_2 t} + a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))] + u_2^*(t) \quad (4.37)$$

Persamaan costate,

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1^* &= -(-e^{-\rho t}(h_{11}(x_1-\hat{x_1}) + c_{11}(u_1^*(t)-\hat{u_1})) + 2h_{12}(x_2-\hat{x_2}) \\ &\quad + \lambda_1(t)[-((D_1+\theta_1 e^{-\theta_1 t}) - a_{12}x_2(t) - 2a_{11}x_1(t))] \\ &\quad - \lambda_2(t)a_{21}x_2(t))) \\ \dot{\lambda}_2^* &= -(-e^{-\rho t}(h_{22}(x_2-\hat{x_2}) + c_{22}(u_2^*(t)-\hat{u_2})) + 2h_{12}(x_1-\hat{x_1}) \\ &\quad + \lambda_2(t)[-((D_2+\theta_2 e^{-\theta_2 t}) - a_{21}x_1(t) - 2a_{22}x_2(t))] \\ &\quad - \lambda_1(t)a_{12}x_1(t))) \qquad (4.38) \end{aligned}$$

Penyelesaian numerik

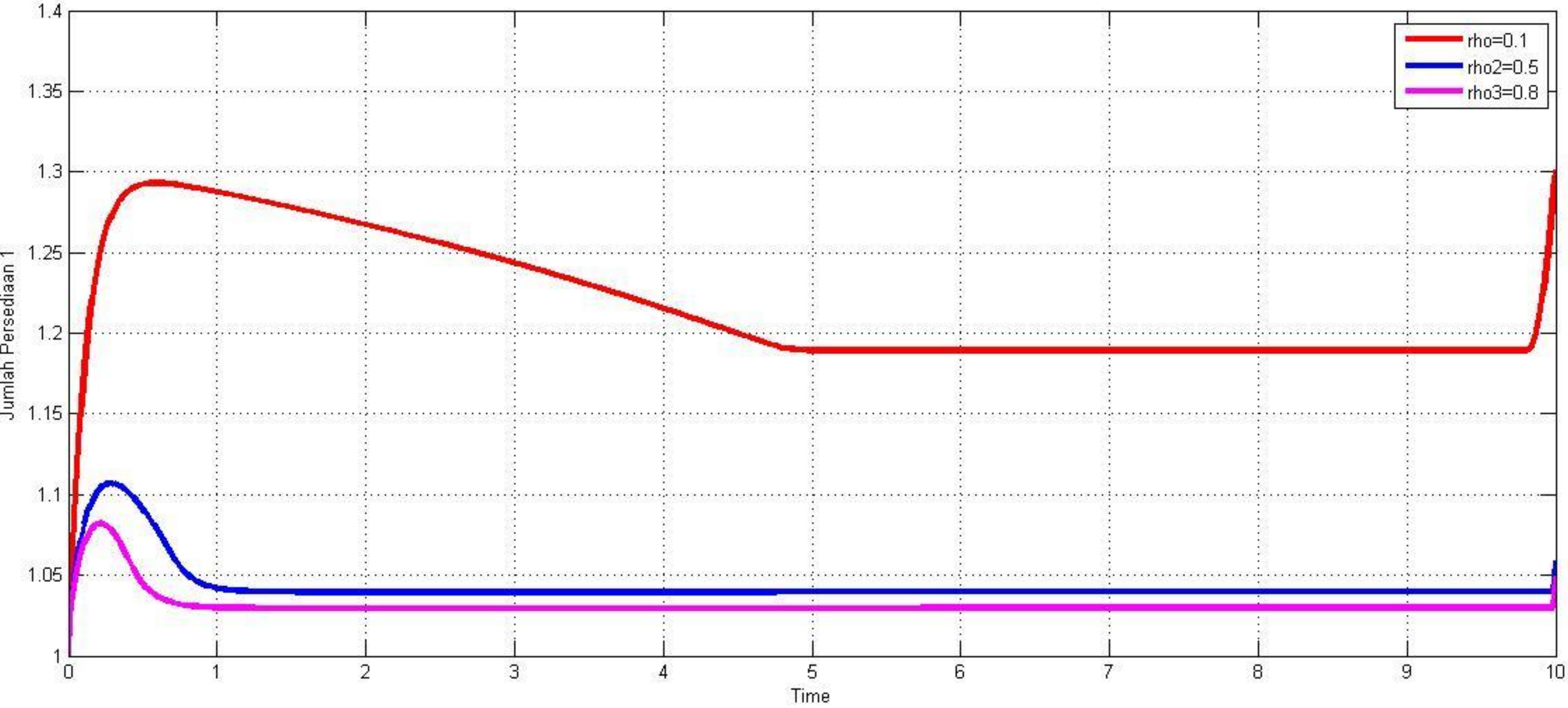
Penyelesaian numerik pada penelitian ini menggunakan metode Runge Kutta Orde 4

Tabel 4.1: Nilai Parameter (Ahmad Alshamrani dan El-Gohary,2011)

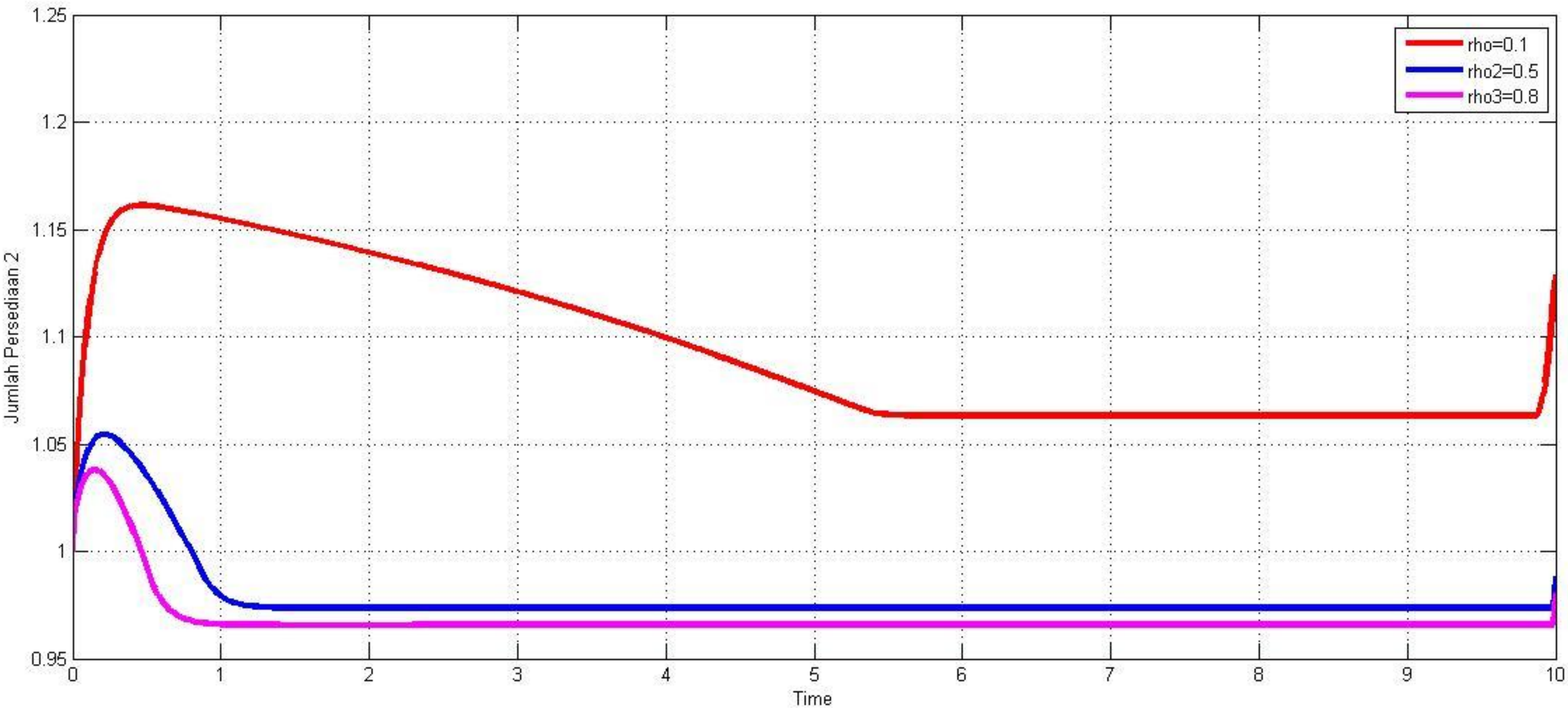
par.	a_{11}	a_{22}	a_{12}	a_{21}	h_{11}	h_{12}	h_{22}	c_{11}	c_{22}	θ_1	θ_2	α_1	α_2	d_1	d_2
val.	0.04	0.05	0.2	0.1	2	4	5	6	5	0.02	0.03	0.6	0.8	3	4

Diberikan nilai parameter untuk nilai awal $x10 = 1$, $x20 = 1$, $x\ 1 = 3$, $x\ 2 = 5$, $u\ 1 = 9$, $u\ 2 = 5$, $\rho = 0.1$. Untuk jumlah permintaan mengikuti fungsi permintaan linier $di.xi + \alpha i = 0$ dengan αi dan di adalah konstan.

$$\theta_1 = \theta_2 = 0.01$$

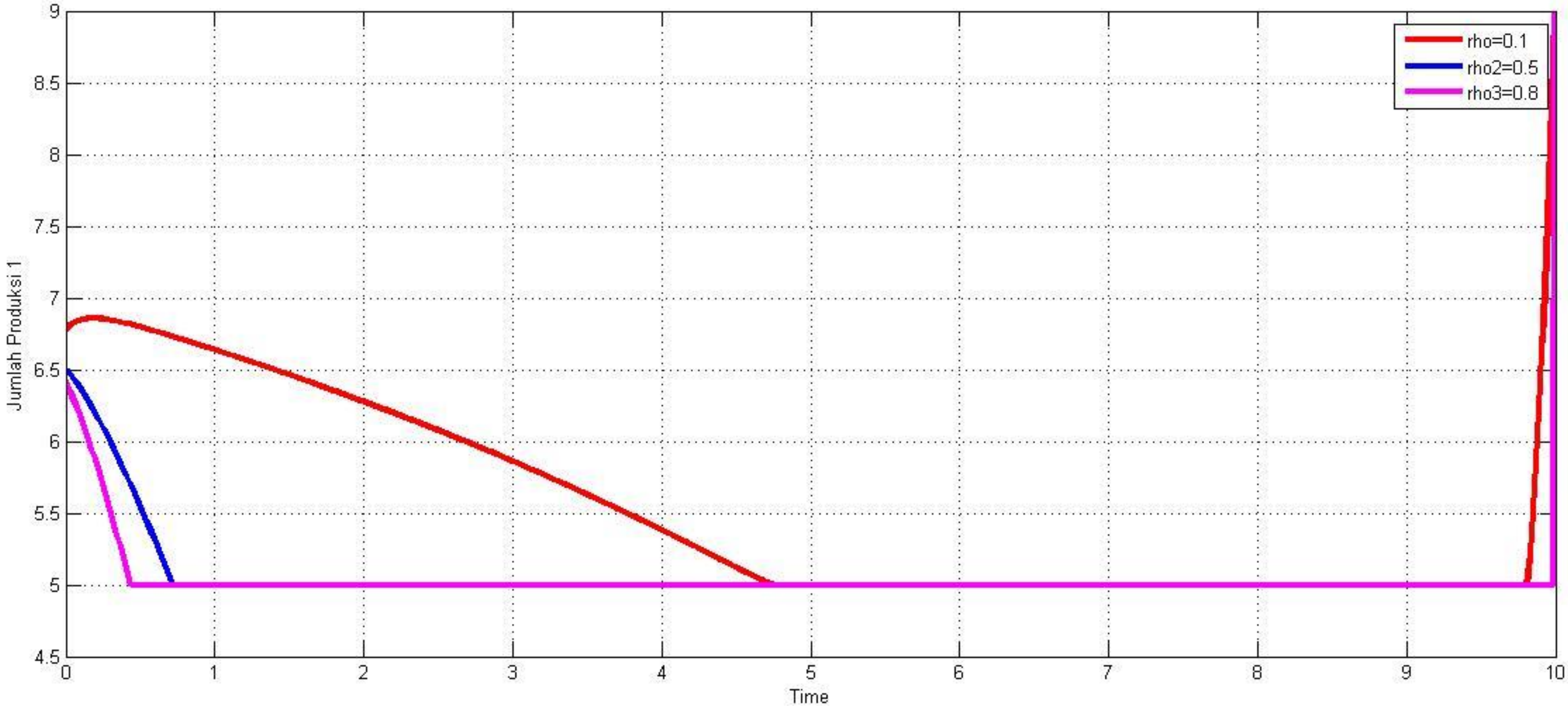


Gambar 4.1: Tingkat persediaan 1 terhadap waktu *t*

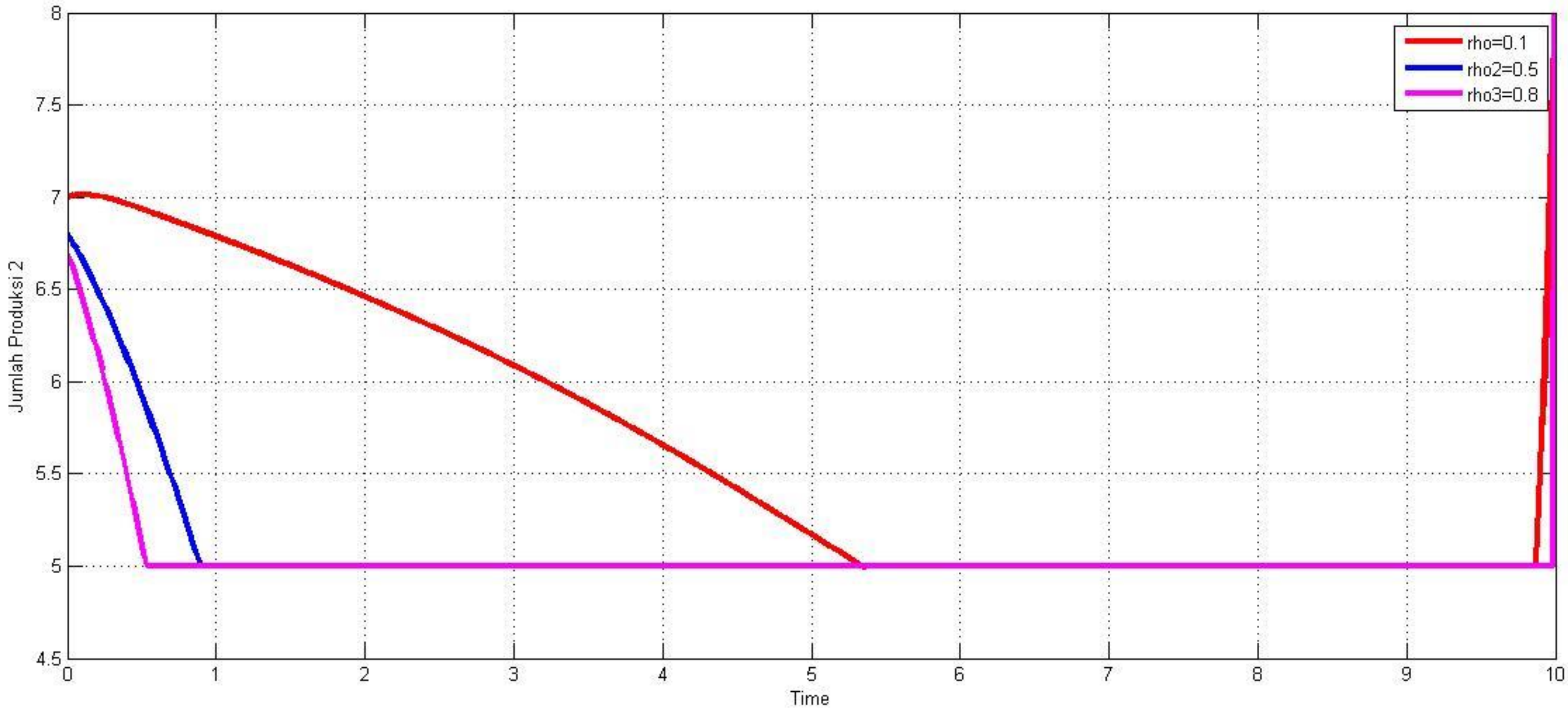


Gambar 4.2: Tingkat persediaan 2 terhadap waktu *t*

$$\theta_1 = \theta_2 = 0.01$$

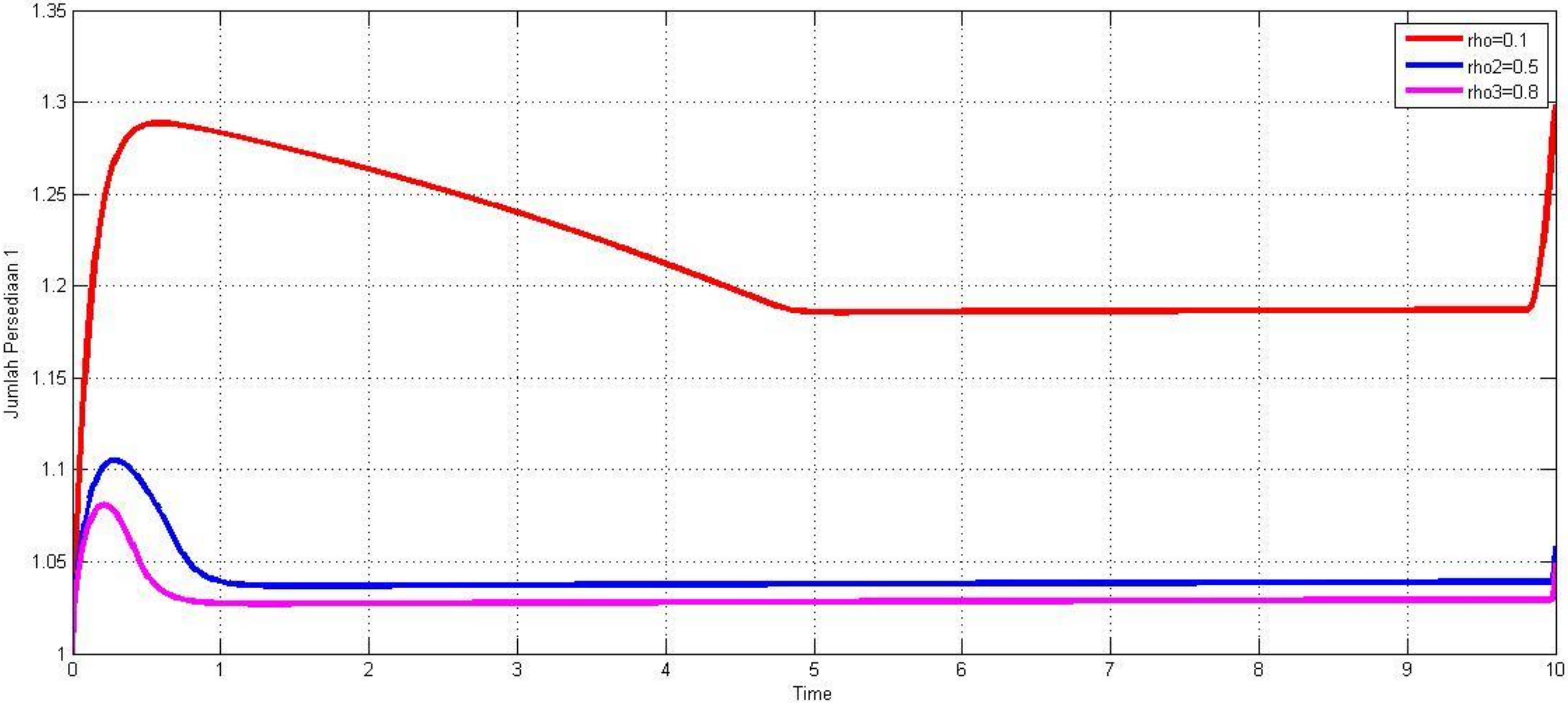


Gambar 4.3: Tingkat produksi 1 terhadap waktu *t*

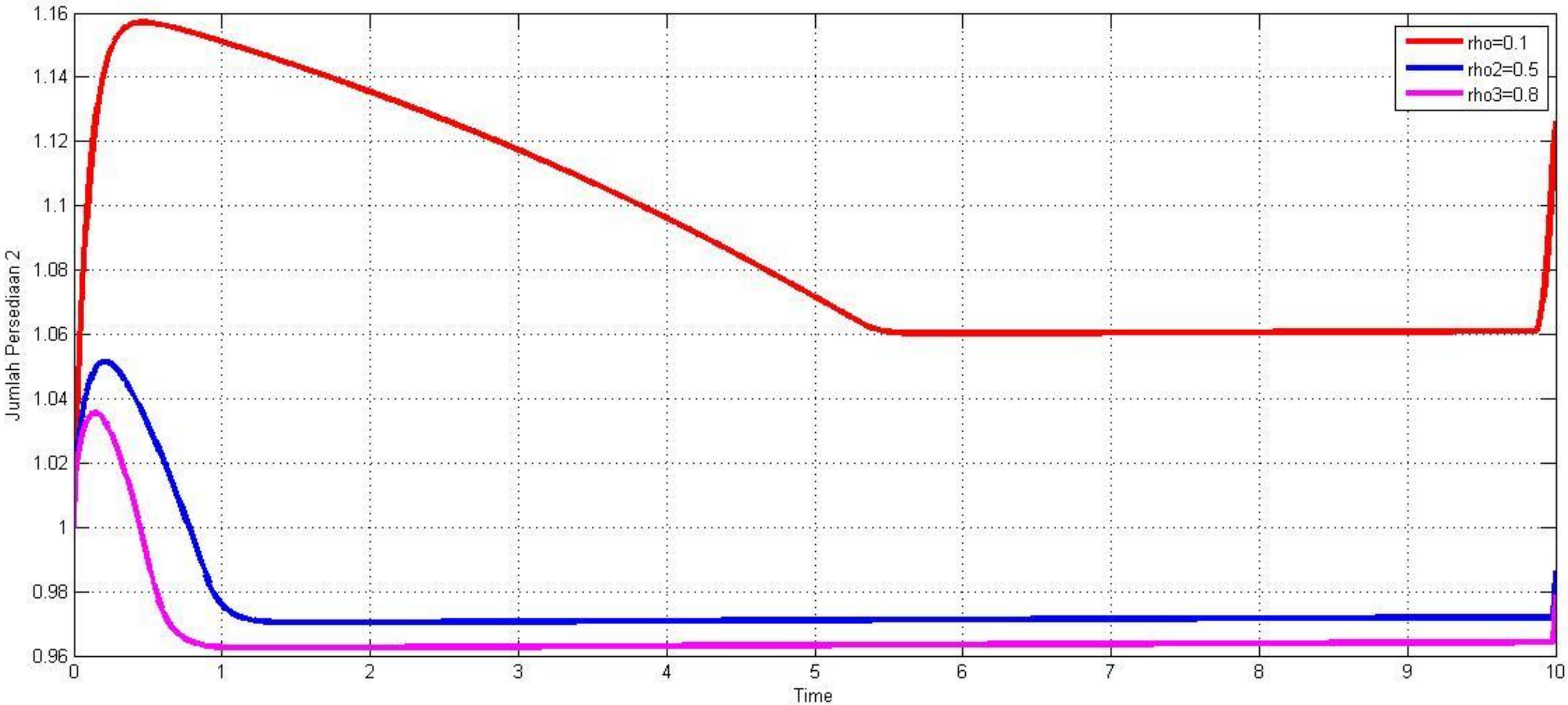


Gambar 4.4: Tingkat produksi 2 terhadap waktu *t*

$$\theta_1 = \theta_2 = 0.05$$

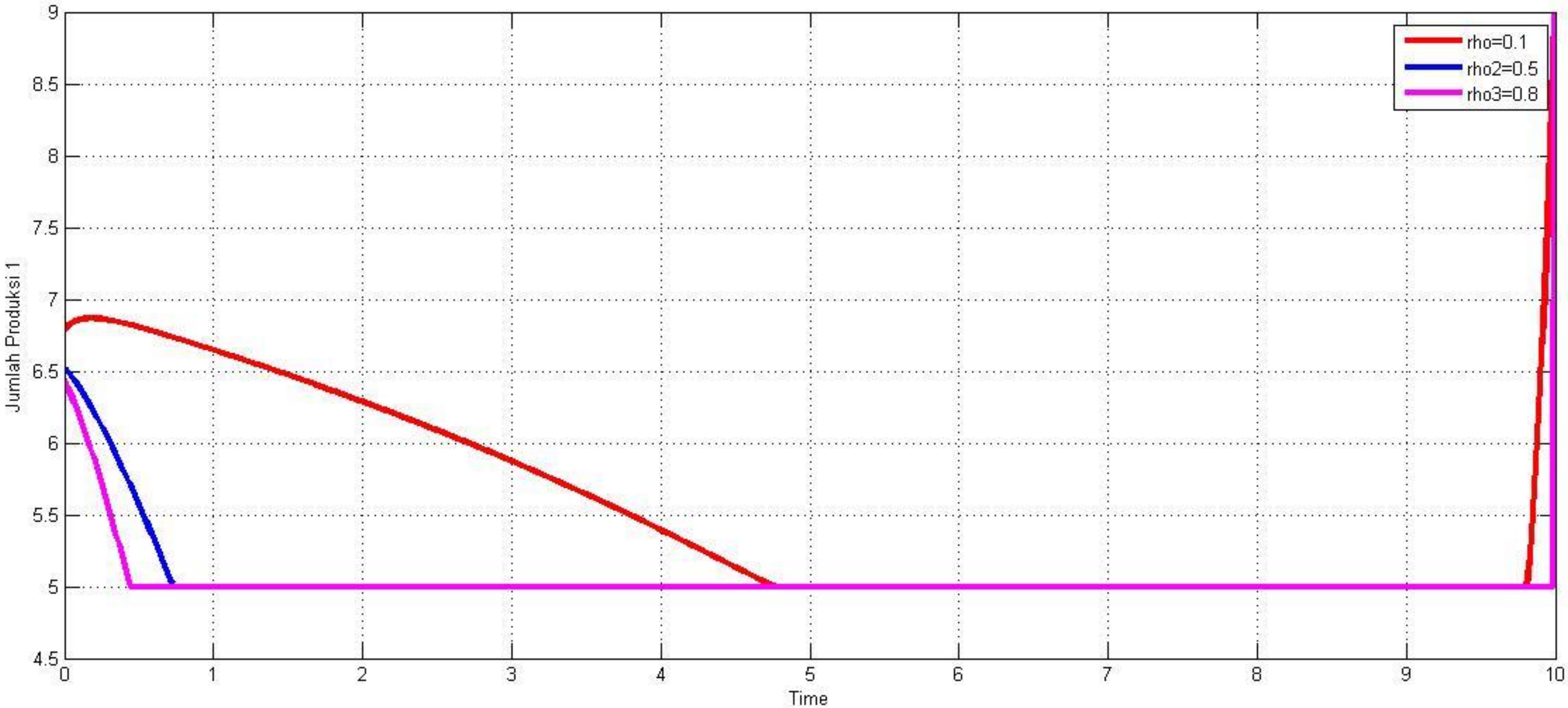


Gambar 4.5: Tingkat persediaan 1 terhadap waktu *t*

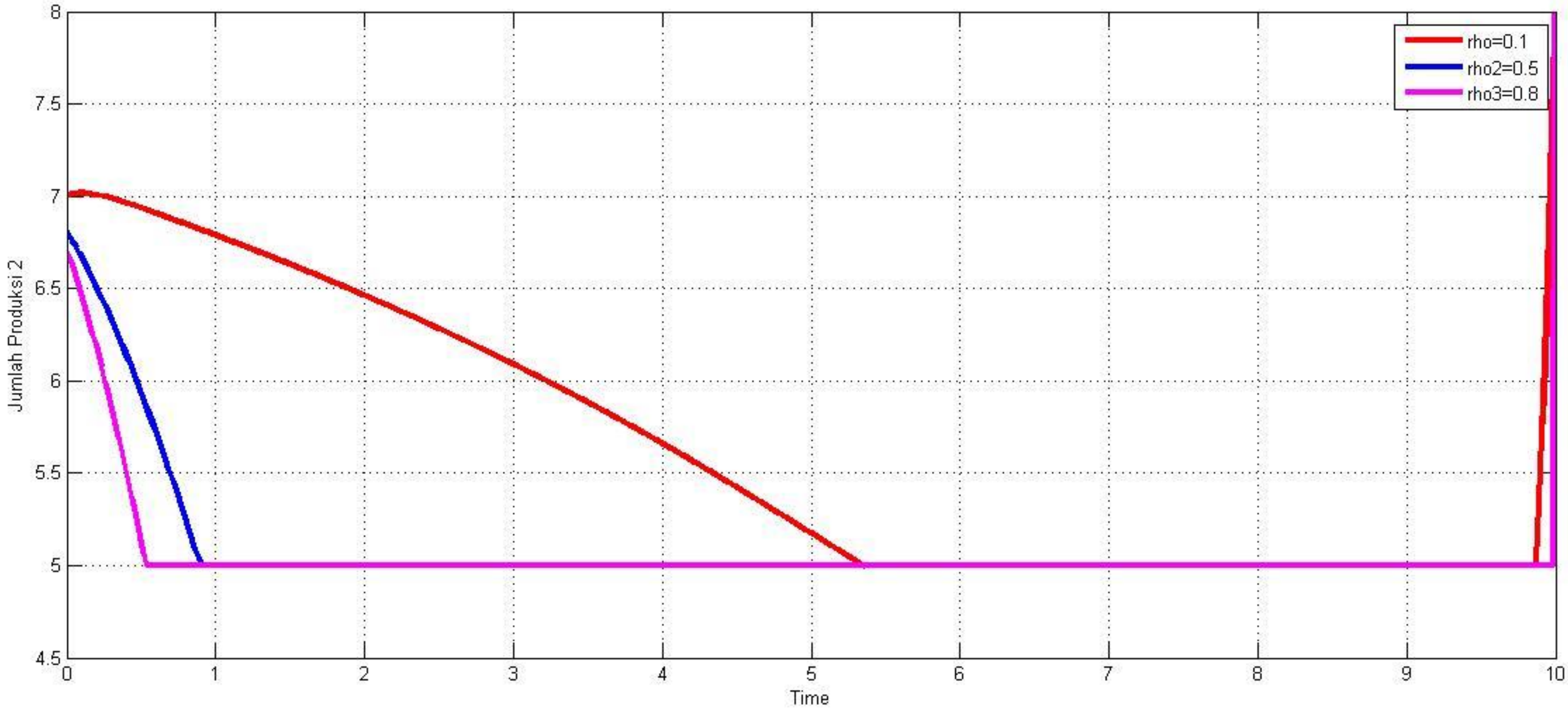


Gambar 4.6: Tingkat persediaan 2 terhadap waktu *t*

$$\theta_1 = \theta_2 = 0.05$$

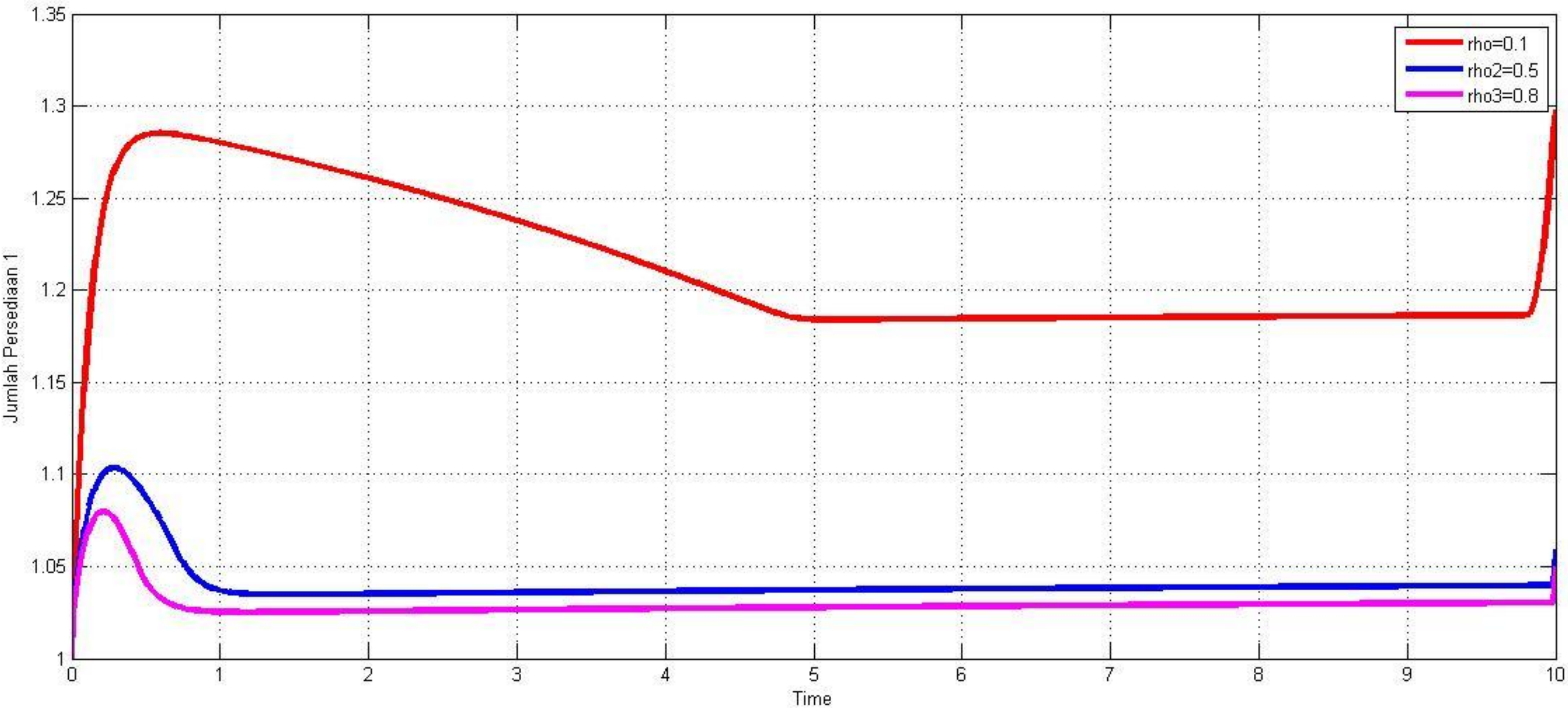


Gambar 4.7: Tingkat produksi 1 terhadap waktu *t*

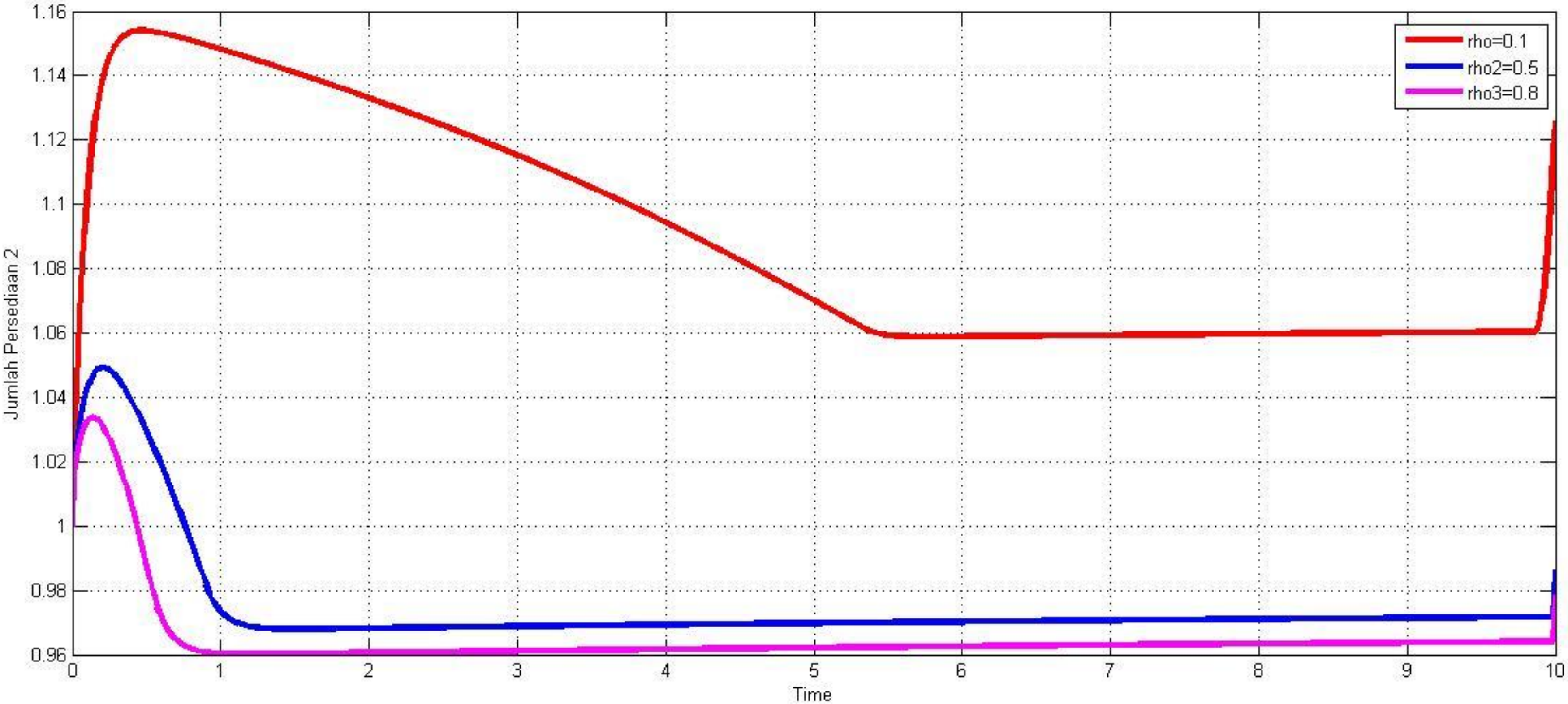


Gambar 4.8: Tingkat produksi 2 terhadap waktu *t*

$$\theta_1 = \theta_2 = 0.08$$

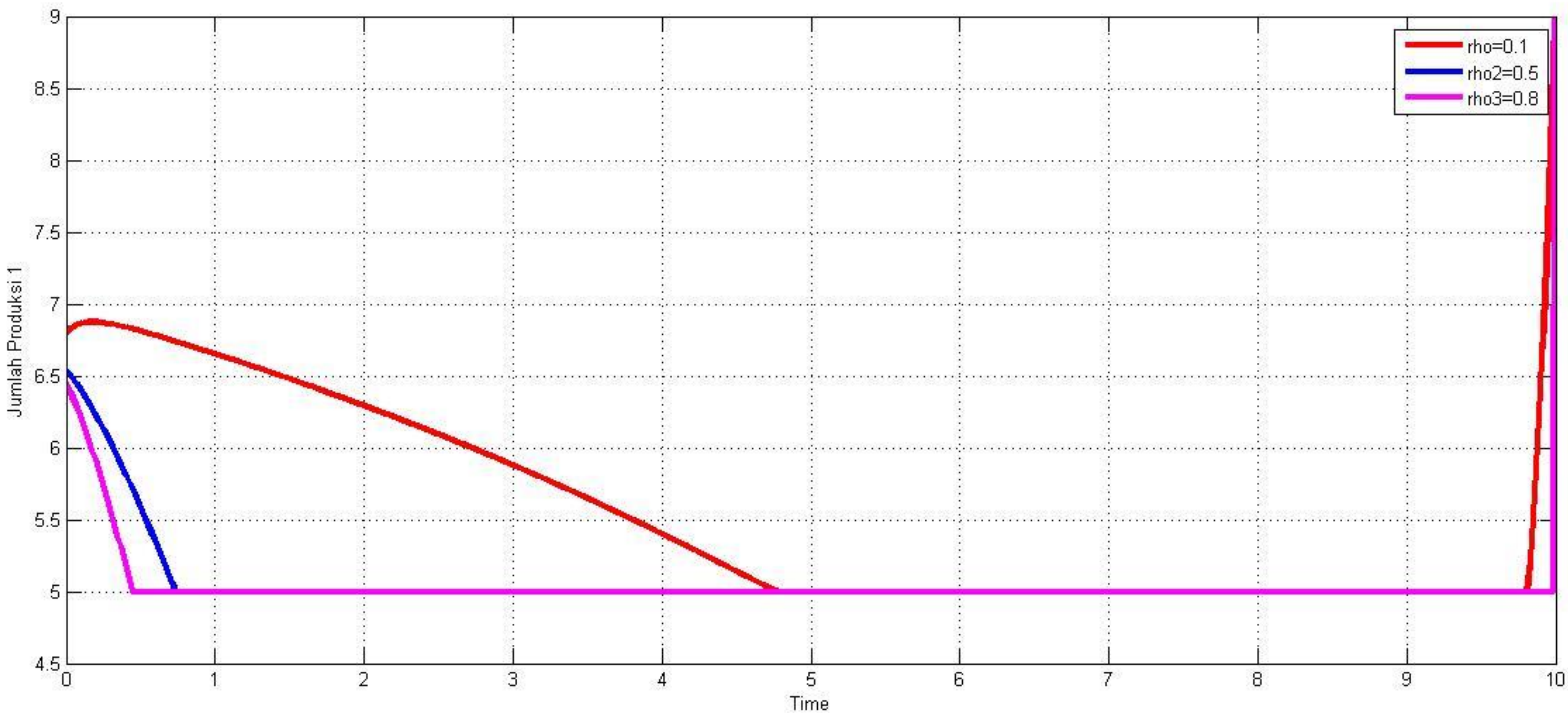


Gambar 4.9: Tingkat persediaan 1 terhadap waktu t

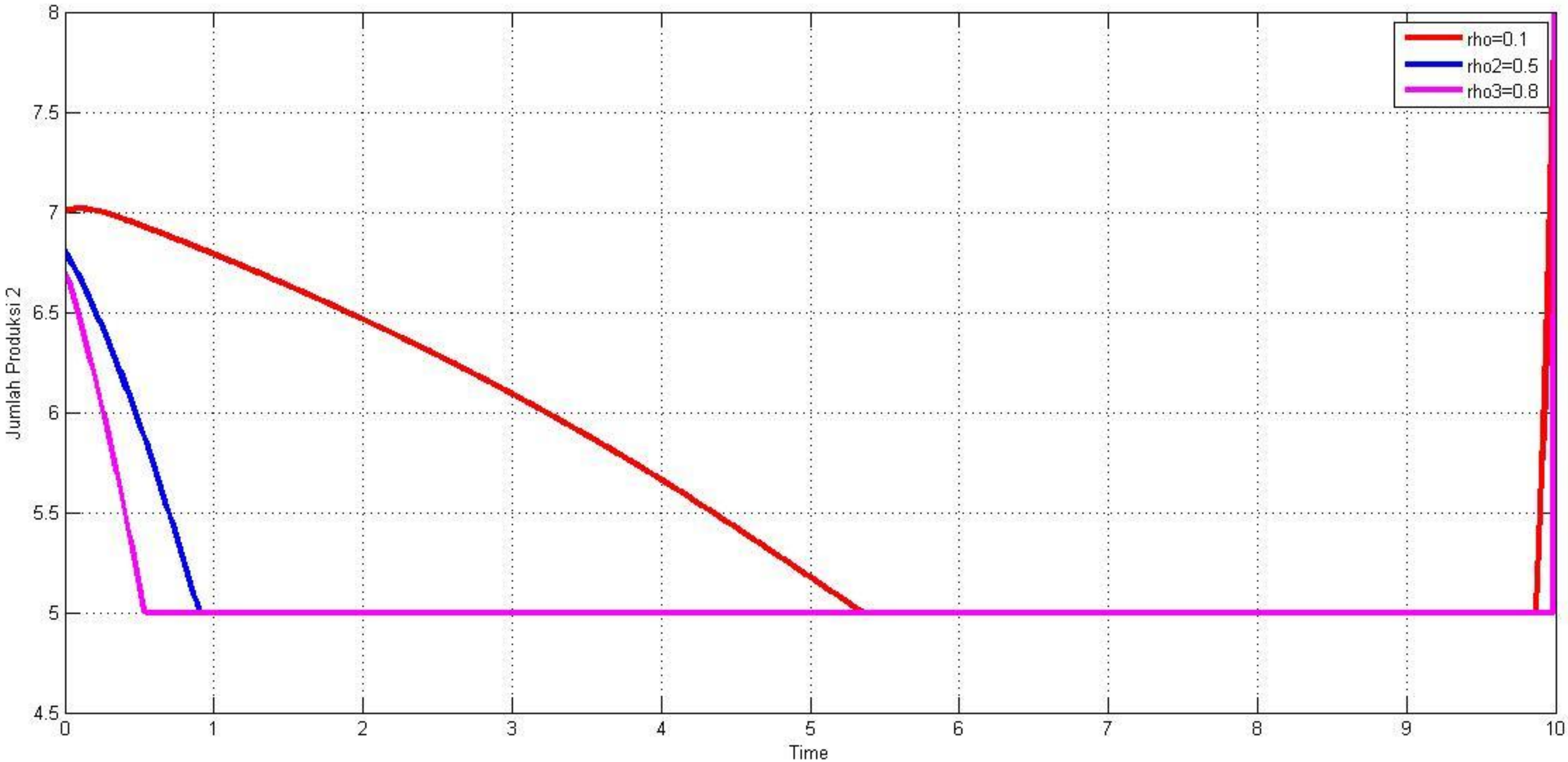


Gambar 4.10: Tingkat persediaan 1 terhadap waktu *t*

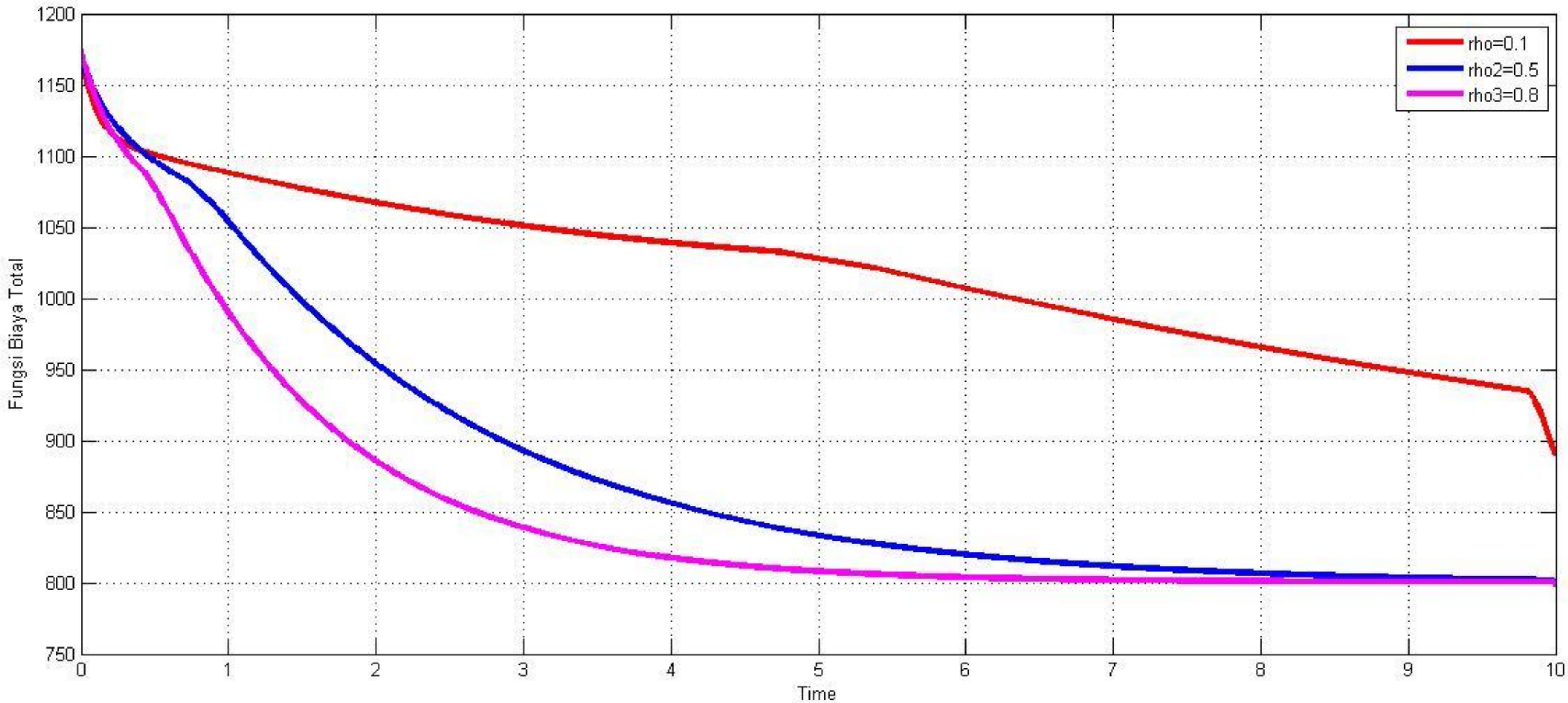
$$\theta_1 = \theta_2 = 0.08$$



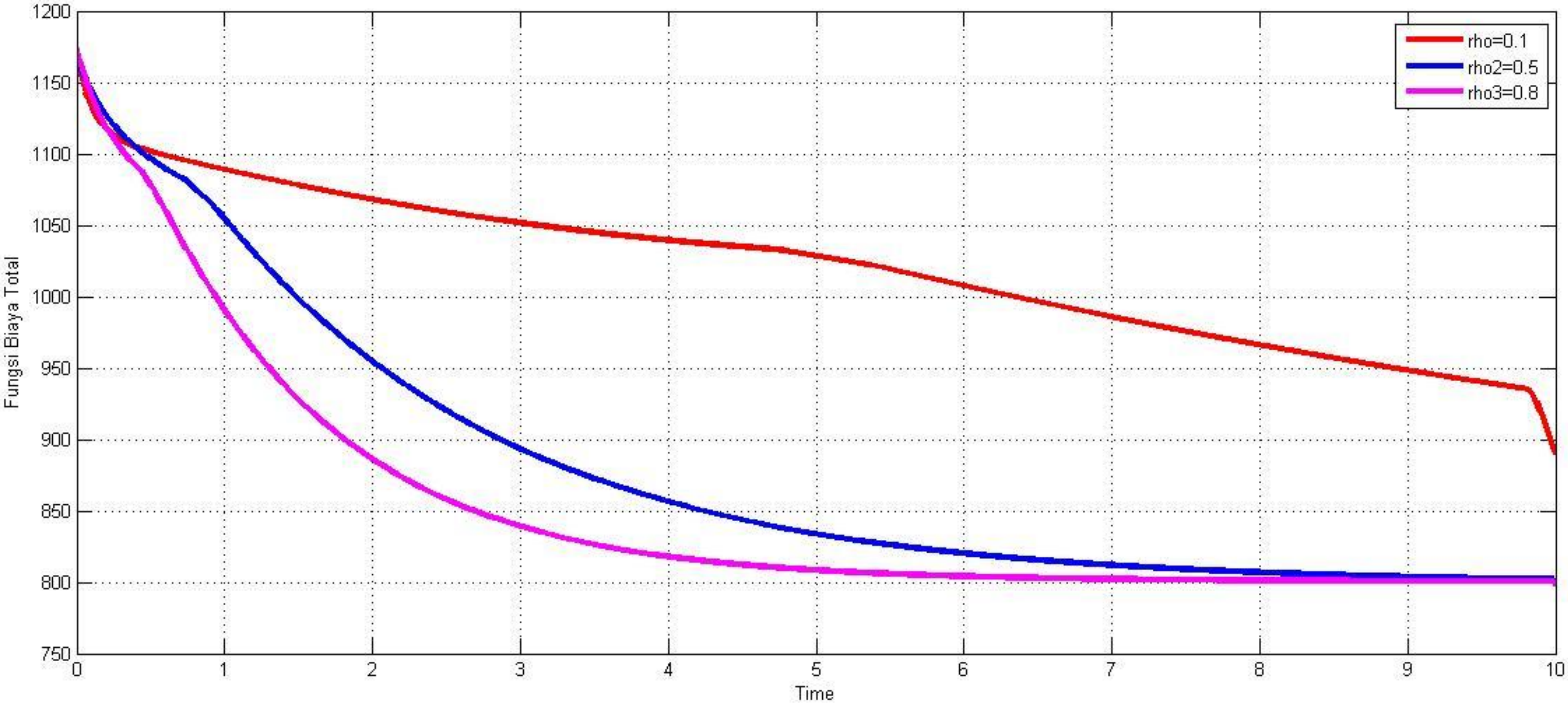
Gambar 4.11: Tingkat produksi 1 terhadap waktu *t*



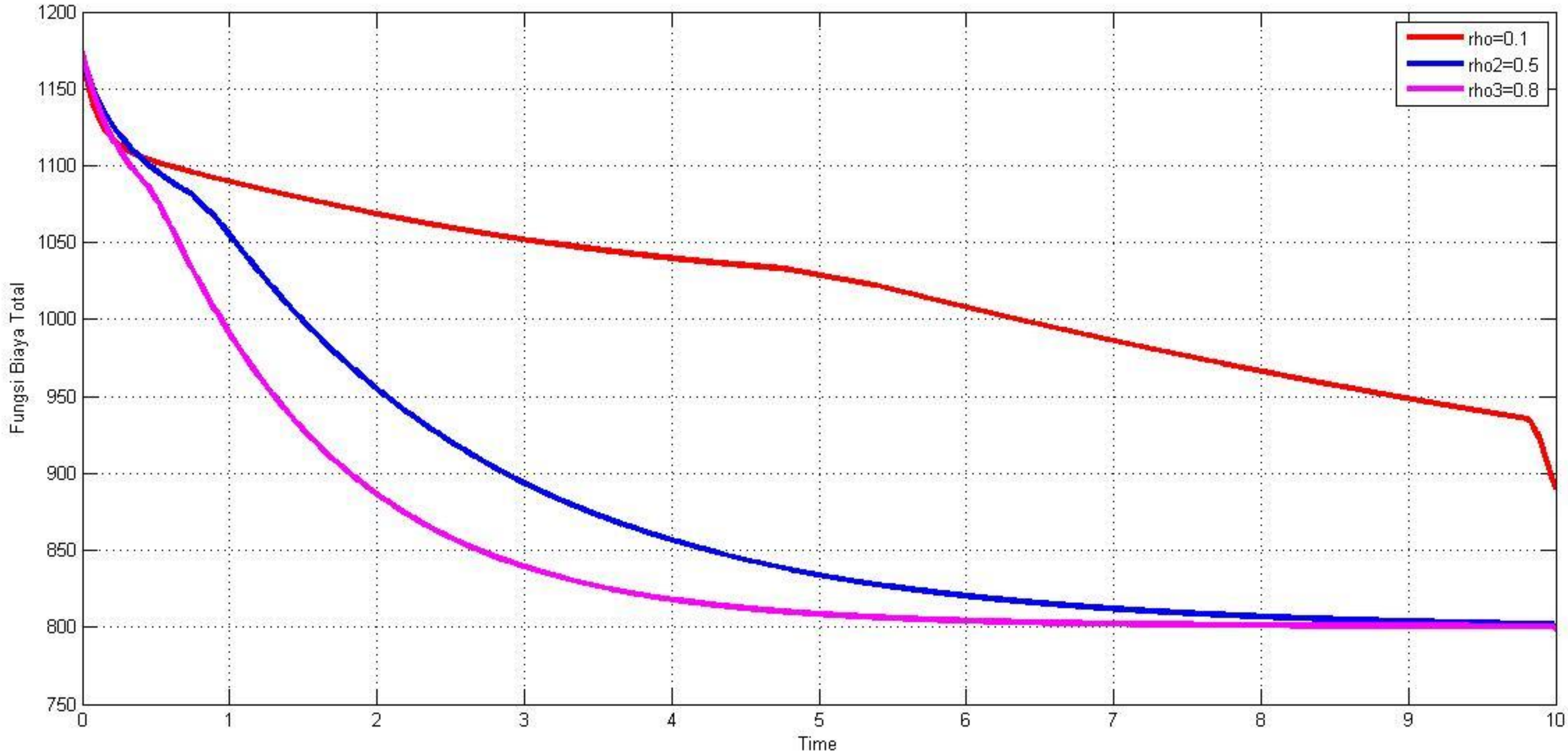
Gambar 4.12: Tingkat produksi 2 terhadap waktu *t*



Gambar 4.5: Fungsi biaya total $\theta_1 = \theta_2 = 0.01$



Gambar 4.10 Fungsi biaya total $\theta_1 = \theta_2 = 0.05$



Gambar 4.10 Fungsi biaya total $\theta_1 = \theta_2 = 0.08$

KESIMPULAN

1. Model sistem persediaan *multi-item* adalah sebagai berikut.

$$\dot{x_1}(t) = x_1(t)[-(D_1 + \theta_1 e^{-\theta_1 t}) - a_{12}x_2(t) - a_{11}x_1(t)] + u_1(t)$$
$$\dot{x_2}(t) = x_2(t)[-(D_2 + \theta_2 e^{-\theta_2 t}) - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)] + u_2(t)$$

dengan kendala variabel sebagai berikut:

$$x_i(t) \geq 0, u_i(t) \geq 0, D_i \geq 0, 0 \leq \theta_i \leq 1, a_{ij} \geq 0, a_{ii} \geq 0$$

2. Fungsi objektif dari sistem perawatan produksi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2J \;\; = \;\; & \min_{u_i(t)\geq 0} \int_0^T e^{-\rho t}\Sigma_{i=1}^2 (h_{ii}(x_i - \widehat{x_i})^2 + c_{ii}(u_i - \widehat{u_i})^2 + (\theta_i + a_{ii}))x_i^2 + \\ & 2h_{12}(x_1 - \widehat{x_1})(x_2 - \widehat{x_2})dt \end{aligned} \tag{5.1}$$

dengan $t \in [0, T]$,$h_{11}h_{22} > h_{12}^2$, $h_{ii} > 0$,$c_{ii} > 0$, $i = 1, 2$

3. Diperoleh $u_i(t)$ yang optimal yaitu $u_i^*(t)$

$$u_i^*(t) = \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i$$

Sehingga persamaan $u_i^*(t)$ diperoleh batasan sebagai berikut.

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i < 0 \\ \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i & 0 \leq \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i \leq u_{max} \\ u_{max} & \frac{\lambda_i(t)}{e^{-\rho t} c_{ii}} + \hat{u}_i > u_{max} \end{cases} \tag{5.2}$$

KONTROL OPTIMAL MODEL PERSEDIAAN *MULTI-ITEM* DENGAN TINGKAT KERUSAKAN MENGIKUTI FUNGSI EKSPONENSIAL DAN TINGKAT DISKON

Disusun oleh:

Desy Putma Handayani 1214201014

Dosen Pembimbing:

Dr. Dra. Mardlijah, MT