



TUGAS AKHIR - SM141501

**KENDALI SUDUT KEMUDI PADA MOBIL UNTUK  
PELACAKAN LINTASAN DUBINS DENGAN  
MENGUNAKAN MODEL PREDICTIVE  
CONTROL**

DIAN KUSUMA RAHMA PUTRI  
NRP 1212100001

Dosen Pembimbing:  
Subchan, Ph.D  
Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2016



FINAL PROJECT - SM141501

**STEERING ANGLE CONTROL OF CAR FOR  
DUBINS PATH-TRACKING USING MODEL  
PREDICTIVE CONTROL**

DIAN KUSUMA RAHMA PUTRI  
NRP 1212100001

Supervisors:  
Subchan, Ph.D  
Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics and Natural Sciences  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2016

**LEMBAR PENGESAHAN**  
**KENDALI SUDUT KEMUDI PADA MOBIL**  
**UNTUK PELACAKAN LINTASAN DUBINS**  
**DENGAN MENGGUNAKAN MODEL**  
**PREDICTIVE CONTROL**

**STEERING ANGLE CONTROL OF CAR**  
**FOR DUBINS PATH-TRACKING USING**  
**MODEL PREDICTIVE CONTROL**

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada

Bidang Studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

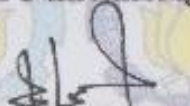
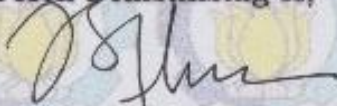
Oleh:

**DIAN KUSUMA RAHMA PUTRI**  
NRP. 1212100001

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,



Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si

Subchan, Ph.D

NIP. 19870728.201404 2 001

NIP. 19710513.199702 1 001

Mengetahui,

Rektor Jurusan Matematika

FMIPA ITS



Dr. Imami Mukhlash, S.Si, MT

NIP. 19700831.199403 1 003

Surabaya, Juli 2016

# KENDALI SUDUT KEMUDI PADA MOBIL UNTUK PELACAKAN LINTASAN DUBINS DENGAN MENGGUNAKAN *MODEL PREDICTIVE CONTROL*

Nama Mahasiswa : Dian Kusuma Rahma Putri  
NRP : 1212100001  
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS  
Pembimbing : 1. Subchan, Ph.D  
2. Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si

## **Abstrak**

*Mobil sebagai salah satu alat transportasi tentu tidak luput dari perkembangan teknologi. Sekitar sepuluh tahun terakhir banyak dilakukan penelitian dan pengembangan tentang lane keeping system (LKS) yang merupakan sistem yang secara otomatis mengendalikan kemudi untuk menjaga agar kendaraan khususnya mobil selalu berada pada jalur. LKS tersebut dapat terus dikembangkan untuk mobil nir awak. Mobil nir awak membutuhkan sistem navigasi, panduan dan kendali yang mampu mengarahkan kendaraan bergerak menuju tujuan yang diinginkan. Sistem panduan direpresentasikan menggunakan Lintasan Dubins yang akan dikendalikan dengan menggunakan Model Predictive Control. Tujuan pengendalian tersebut adalah menjaga pergerakan mobil yang direpresentasikan dengan model dinamik gerak lateral sehingga mobil bergerak sesuai dengan sistem panduan yang diberikan. Selanjutnya dilakukan simulasi menggunakan software MATLAB untuk mengetahui pengaruh jenis lintasan dan pengaruh besar horizon prediksi terhadap hasil kendali.*

**Kata-kunci:** *Kendali Sudut Kemudi Mobil, Lintasan Dubins, Pelacakan Lintasan, Model Predictive Control (MPC)*

# STEERING ANGLE CONTROL OF CAR FOR DUBINS PATH-TRACKING USING MODEL PREDICTIVE CONTROL

Name : Dian Kusuma Rahma Putri  
NRP : 1212100001  
Department : Mathematics FMIPA-ITS  
Supervisors : 1. Subchan, Ph.D  
2. Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si

## Abstract

*Car as one of transportation is inseparable from technological developments. About ten years a lot of research and development on lane keeping systems (LKS), which is a system that automatically controls the steering to keep the car in particular vehicle always on track. This system can be developed for unmanned cars. Unmanned car system requires navigation, guidance and control which is able to direct the vehicle to move towards the desired path. The guidance system is represented by using Dubins-Path that will be controlled by using Model Predictive Control. The control objective is to keep the car's movement that represented by dynamic lateral motion model so car can move according to the path appropriately. Then simulations were carried out using the software MATLAB to study the effect of the trajectory's type and the value of prediction horizon on the results of control.*

**Keywords:** *Steering Angle Control of Car, Dubins Path, Path-Tracking, Model Predictive Control (MPC)*

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
BAB I    PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	4
1.3 Batasan Masalah . . . . .	5
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	5
1.5 Manfaat Penelitian . . . . .	5
1.6 Sistematika Penulisan . . . . .	6
BAB II    TINJAUAN PUSTAKA	9
2.1 Penelitian Terdahulu . . . . .	9
2.2 Lintasan Dubins . . . . .	12
2.2.1 Lintasan RSR . . . . .	16
2.2.2 Lintasan LSL . . . . .	18
2.2.3 Lintasan RSL . . . . .	19
2.2.4 Lintasan LSR . . . . .	20
2.3 Model Dinamik Gerak Lateral . . . . .	21
2.4 Keterkendalian dan Keteramatan Sistem . . . . .	23

2.5	Diskritisasi Sistem .....	23
2.6	<i>Model Predictive Control</i> (MPC) .....	25
BAB III	METODE PENELITIAN	29
3.1	Studi Literatur .....	29
3.2	Penentuan Lintasan .....	29
3.3	Desain Kendali dengan Menggunakan MPC .	29
3.4	Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi .....	30
3.5	Penarikan Kesimpulan .....	30
3.6	Penulisan Laporan Tugas Akhir .....	30
BAB IV	HASIL DAN PEMBAHASAN	33
4.1	Penentuan Lintasan .....	33
4.2	Desain Kendali dengan Menggunakan MPC .	36
4.2.1	Kajian Model .....	37
4.2.2	Diskritisasi Model .....	41
4.2.3	Desain Kendali .....	43
4.3	Hasil Simulasi .....	53
BAB V	PENUTUP	69
5.1	Kesimpulan .....	69
5.2	Saran .....	69
DAFTAR PUSTAKA		71
LAMPIRAN		73
A	Biodata Penulis	75

## DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Tabel Panjang Lintasan Dubins . . . . .	35
Tabel 4.2	Tabel Panjang Lintasan Dubins Simulasi 1	54
Tabel 4.3	Tabel Panjang Lintasan Dubins Simulasi 2	57
Tabel 4.4	Tabel Panjang Lintasan Dubins Simulasi 3	61
Tabel 4.5	Tabel Panjang Lintasan Dubins Simulasi 4	64
Tabel 4.6	Tabel Nilai RMSE serta Waktu Komputasi dari Setiap Nilai $N_p$ . . . . .	68



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Lintasan Dubins CLC dan CCC . . . . .	13
Gambar 2.2	Lintasan Dubins dengan garis singgung luar (kiri) dan dalam (kanan) . . . . .	13
Gambar 2.3	Arah Pembentukan Busur Lingkaran . .	14
Gambar 2.4	Gerak lateral mobil . . . . .	22
Gambar 2.5	Strategi MPC . . . . .	25
Gambar 2.6	Struktur dasar MPC . . . . .	26
Gambar 3.1	Algoritma Perencanaan Lintasan Dubins	31
Gambar 3.2	Diagram Alur Penelitian . . . . .	32
Gambar 4.1	Geometri Putar Mobil . . . . .	34
Gambar 4.2	Lintasan Dubins jenis RSL . . . . .	36
Gambar 4.3	Perbesaran Gambar Lintasan Dubins pada Posisi Awal (kiri) dan Posisi Akhir (kanan) Lintasan . . . . .	36
Gambar 4.4	Gerak lateral mobil . . . . .	37
Gambar 4.5	Lintasan Dubins jenis RSR . . . . .	55
Gambar 4.6	Perbesaran Gambar Lintasan Dubins pada Posisi Awal (kiri) dan Posisi Akhir (kanan) Lintasan . . . . .	55
Gambar 4.7	Hasil Kendali Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins RSR . . . . .	56
Gambar 4.8	Hasil Kendali Perubahan Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins RSR . . .	56

Gambar 4.9	Selisih antara Reference dan Perubahan Sudut Hadap Mobil pada Lintasan Dubins RSR .....	57
Gambar 4.10	Lintasan Dubins jenis RSL .....	58
Gambar 4.11	Perbesaran Gambar Lintasan Dubins pada Posisi Awal (kiri) dan Posisi Akhir (kanan) Lintasan .....	58
Gambar 4.12	Hasil Kendali Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins RSL .....	59
Gambar 4.13	Hasil Kendali Perubahan Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins RSL ...	59
Gambar 4.14	Selisih antara Reference dan Sudut Hadap Mobil pada Lintasan Dubins RSL	60
Gambar 4.15	Lintasan Dubins jenis LSL .....	62
Gambar 4.16	Perbesaran Gambar Lintasan Dubins pada Posisi Awal (kiri) dan Posisi Akhir (kanan) Lintasan .....	62
Gambar 4.17	Hasil Kendali Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins LSL .....	63
Gambar 4.18	Hasil Kendali Perubahan Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins LSL ...	63
Gambar 4.19	Selisih antara Reference dan Sudut Hadap Mobil pada Lintasan Dubins LSL	64
Gambar 4.20	Lintasan Dubins jenis LSR .....	65
Gambar 4.21	Perbesaran Gambar Lintasan Dubins pada Posisi Awal (kiri) dan Posisi Akhir (kanan) Lintasan .....	65
Gambar 4.22	Hasil Kendali Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins LSR .....	66
Gambar 4.23	Hasil Kendali Perubahan Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins LSR ...	66
Gambar 4.24	Selisih antara Reference dan Sudut Hadap Mobil pada Lintasan Dubins LSR	67

# BAB I

## PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang hal-hal yang melatarbelakangi penelitian Tugas Akhir ini. Selain itu juga dijelaskan mengenai batasan masalah dan tujuan dari penelitian beserta manfaat yang diperoleh. Adapun sistematika penulisan laporan dijelaskan pada akhir bab ini.

### 1.1 Latar Belakang

Perkembangan teknologi yang sangat pesat mempengaruhi banyak aspek kehidupan manusia salah satunya adalah bidang transportasi. Mobil sebagai salah satu alat transportasi tentu tidak luput dari perkembangan teknologi ini. Sekitar sepuluh tahun terakhir banyak dilakukan penelitian dan pengembangan tentang *Lane Keeping System* (LKS) yang merupakan sistem yang secara otomatis mengendalikan kemudi untuk menjaga agar kendaraan khususnya mobil selalu berada pada jalur. Sistem ini telah diterapkan oleh beberapa perusahaan otomotif seperti Nissan. LKS telah diperkenalkan di Jepang pada model Nissan *Cima* menggunakan kemudi otomatis parallel dengan pengemudi. Situasi mengendarai yang monoton atau tetap merupakan target dari sistem ini. Selain itu sistem hanya bekerja pada jalan yang relatif lurus dan dengan kecepatan minimum yang ditentukan[1]. LKS tersebut dapat terus dikembangkan untuk mobil nir awak.

Sama halnya dengan pesawat udara nir awak (PUNA), mobil nir awak membutuhkan sistem navigasi, panduan dan kendali yang mampu mengarahkan kendaraan bergerak menuju tujuan yang diinginkan[2]. Sistem navigasi biasanya

dibantu dengan *Global Positioning System* (GPS) yang memberikan letak di permukaan bumi dengan bantuan penyalarsan sinyal satelit. Sistem ini memiliki tujuan untuk menemukan lintasan dari posisi awal ke posisi akhir mobil. Setelah navigasi selesai, sistem selanjutnya adalah sistem panduan. Panduan merupakan proses perencanaan lintasan yang menghasilkan trayektori yang harus diikuti berdasarkan data posisi awal dan posisi akhir hasil navigasi. Perencanaan lintasan dapat diperoleh melalui beberapa metode salah satunya lintasan Dubins. Lintasan Dubins adalah lintasan optimal yang memenuhi kelengkungan maksimum terikat antara dua titik dengan orientasi tertentu dalam sebuah bidang baik jalur CLC (*Circle-Line-Circle*) atau CCC (*Circle-Circle-Circle*), atau bagian dari keduanya, di mana C merupakan busur lingkaran dan L merupakan garis lurus yang bersinggungan dengan C[3]. Lintasan Dubins memiliki beberapa kelebihan diantaranya yaitu perencanaan lintasan menggunakan metode ini dapat dinamis untuk semua sudut di semua kuadran baik di titik awal maupun di titik akhir dan lintasan Dubins lebih optimal terhadap waktu karena dapat membangkitkan kelengkungan lintasan [2]. Selain itu, lintasan Dubins tidak membutuhkan banyak waktu dalam perencanaanya sehingga lebih optimal dan efisien[4] serta membutuhkan waktu yang sedikit untuk mencapai target [5]. Oleh karena itu, perencanaan lintasan dilakukan menggunakan lintasan Dubins.

Setelah panduan, mobil nir awak membutuhkan satu sistem lagi yaitu sistem kendali. Sistem ini bertujuan agar mobil dapat bergerak sesuai dengan lintasan yang telah diberikan sebelumnya. Sistem kendali juga bisa diperoleh dari berbagai metode, salah satunya adalah *Model Predictive Control* (MPC). Saat ini, aplikasi MPC tidak hanya digunakan pada proses industri tetapi juga

digunakan untuk mengendalikan keragaman proses mulai dari manipulator robot hingga anastesi klinis. Pada dasarnya, MPC menggunakan model secara eksplisit untuk memprediksi output proses pada waktu mendatang (horizon) dan perhitungan kendali bertujuan meminimalkan fungsi objektif tertentu. Selain itu MPC merupakan strategi mundur sehingga pada setiap horizon dipindahkan menuju masa mendatang yang melibatkan penerapan sinyal kendali pertama yang dihitung pada setiap langkah. MPC memiliki beberapa kelebihan dibandingkan metode lain diantaranya yaitu dapat digunakan untuk mengendalikan berbagai macam proses mulai dari sistem dengan dinamika yang relatif sederhana hingga sistem yang memiliki kompleksitas lebih tinggi termasuk sistem dengan delay waktu yang lama atau sistem yang tidak stabil, kasus multivariabel dapat dengan mudah diselesaikan, serta peluasannya terhadap perlakuan kendala secara konsep sederhana dan dapat secara sistematis dimasukkan selama proses desain[6]. Berdasarkan kelebihan MPC tersebut, maka pada penelitian ini digunakan metode MPC sebagai sistem kendali mobil nir awak.

Seperti pada penelitian sebelumnya yang berjudul *GPS Waypoint Fitting and Tracking Using Model Predictive Control* yang ditulis oleh Soo Jung Jeon dkk pada tahun 2015 membahas tentang pelacakan lintasan menggunakan MPC. Lintasan yang dibahas pada penelitian tersebut diperoleh dari GPS yang terkadang memberikan *waypoint* yang tidak teratur. Oleh sebab itu digunakan pencocokan kurva (*curve fitting*) berdasarkan data *waypoint* yang tidak teratur tersebut. Setelah mendapatkan lintasan dari hasil *curve fitting*, penerapan kendali disimulasikan pada tiga kasus. Kasus 1, lintasan diperoleh dari *curve fitting* dengan kendali menggunakan MPC. Kasus 2, lintasan juga diperoleh dari *curve fitting* sedangkan kendali menggunakan *linear quadratic*.

Kasus 3, lintasan diperoleh dari menghubungkan secara langsung *waypoint* yang diperoleh dari GPS dengan metode kendali yang digunakan yaitu *linear quadratic*. Kasus 1 dan 2 dilakukan untuk menguji kinerja dari MPC ketika dibandingkan dengan *linear quadratic* sedangkan kasus 2 dan 3 dilakukan untuk menguji kinerja *curve fitting* ketika dibandingkan dengan penggunaan *waypoint* secara langsung. Penelitian tersebut memberikan hasil bahwa nilai osilasi dari sudut kemudi secara signifikan menurun dengan metode MPC dibandingkan dengan metode *linear quadratic*, terutama di bagian lintasan melengkung yang membentuk kurva. Penurunan nilai osilasi dari sudut kemudi juga terjadi saat penggunaan metode *curve fitting* dibandingkan dengan penerapan *waypoint* secara langsung terutama saat *waypoint* tidak teratur[7].

Berdasarkan beberapa hal yang telah dikemukakan di atas, penulis bermaksud membahas topik Kendali Sudut Kemudi pada Mobil untuk Pelacakan Lintasan Dubins dengan Menggunakan *Model Predictive Control* pada tugas akhir ini. Penelitian ini bermaksud untuk mengendalikan sudut kemudi mobil agar bergerak sesuai dengan lintasan yang diinginkan terutama lintasan yang tidak lurus.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan diatas, penulis merumuskan beberapa permasalahan yang dibahas dalam penelitian Tugas Akhir sebagai berikut:

1. Bagaimana kendali sudut kemudi pada mobil untuk pelacakan lintasan Dubins dengan menggunakan MPC?
2. Bagaimana hasil simulasi kendali sudut kemudi pada mobil untuk pelacakan lintasan Dubins dengan menggunakan MPC?

### 1.3 Batasan Masalah

Beberapa batasan masalah yang digunakan oleh penulis dalam penelitian Tugas Akhir sebagai berikut:

1. Model yang digunakan adalah model dinamik gerak lateral.
2. Nilai parameter yang akan digunakan dalam simulasi diperoleh dari [1] dengan rincian sebagai berikut:  $m = 1573$ ,  $I_z = 2873$ ,  $l_f = 1.1$ ,  $l_r = 1.58$ ,  $C_{\alpha f} = 80000$ ,  $C_{\alpha r} = 80000$ . Nilai-nilai ini parameter representatif untuk sedan penumpang.
3. Simulasi dilakukan menggunakan program MATLAB.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian Tugas Akhir ini adalah mengendalikan sudut kemudi pada mobil untuk pelacakan lintasan Dubins dengan menggunakan MPC sehingga kendaraan dapat bergerak sesuai dengan lintasan yang direpresentasikan oleh waypoint dan memperoleh simulasi dari hasil kendali.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh setelah penelitian Tugas Akhir adalah sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan tentang kendali sistem menggunakan metode model predictive control (MPC).
2. Menambah referensi penelitian tentang pelacakan lintasan menggunakan metode model predictive control (MPC).

## 1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

### 1. BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

### 2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini berisi tentang penelitian terdahulu, model dinamik gerak lateral, lintasan Dubins beserta eksistensinya, dan *Model Predictive Control*.

### 3. BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi pendahuluan tentang model dinamik gerak lateral, lintasan Dubins, metode *model predictive control* (MPC) dan hal-hal lain yang berkaitan dengan topik Tugas Akhir. Selanjutnya akan dilakukan penentuan lintasan menggunakan lintasan Dubins dan dilanjutkan dengan tahap desain kendali menggunakan MPC yang meliputi diskritisasi model dan desain kendali. Kemudian hasilnya disimulasikan dengan menggunakan *software* MATLAB. Setelah itu dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil simulasi dan analisis hasil simulasi. Tahap yang terakhir yaitu penulisan laporan Tugas Akhir.

### 4. BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada Bab ini dibahas mengenai penerapan MPC untuk pengendalian sudut kemudi pada mobil untuk pelacakan lintasan Dubins dan selanjutnya akan diperoleh hasil



kendali sudut kemudi dari penerapan MPC yang telah dilakukan.

## 5. BAB V PENUTUP

Pada bab ini berisi mengenai kesimpulan akhir yang diperoleh dari hasil simulasi beserta analisisnya dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

*"Halaman ini sengaja dikosongkan."*

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai penelitian-penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan topik Tugas Akhir ini. Selain itu juga diuraikan mengenai model dinamik gerak lateral, lintasan Dubins beserta eksistensinya dan *model predictive control* (MPC).

#### 2.1 Penelitian Terdahulu

Dalam Tugas Akhir ini penulis merujuk pada beberapa penelitian sebelumnya yang sesuai dengan topik yang diambil. Salah satu penelitian yang digunakan adalah tugas akhir dengan judul Perencanaan Lintasan Menggunakan Geometri Dubins pada Pesawat Udara Nir Awak (PUNA) yang ditulis oleh Norma Kumala Dewi pada tahun 2010. Penelitian tersebut membahas tentang perencanaan lintasan menggunakan lintasan Dubins serta implementasi dan simulasi dalam perangkat lunak MATLAB yang dapat membantu mengarahkan pergerakan PUNA. Penentuan lintasan dilakukan dengan menghitung jarak antara posisi awal dan akhir pada setiap bentuk lintasan. Bentuk lintasan yang mungkin dari lintasan Dubins berdasarkan klasifikasinya yaitu *Right-Straight-Right*(RSR), *Left-Straight-Left*(LSL), *Right-Straight-Left*(RSL) dan *Left-Straight-Right*(LSR). Setelah mendapatkan jarak untuk setiap bentuk lintasan, dilakukan perbandingan dan diambil bentuk lintasan dengan jarak terpendek yang disebut sebagai lintasan optimal. Berdasarkan simulasi dan analisis pembahasan yang dilakukan pada penelitian tersebut diperoleh kesimpulan

bahwa perencanaan lintasan dengan metode tersebut dinamis untuk semua sudut di semua kuadran baik di titik awal maupun di titik akhir, lintasan Dubins lebih optimal terhadap waktu karena dapat membangkitkan kelengkungan lintasan dan menghasilkan lintasan yang optimal diantara empat model lintasan Dubins yang ada sehingga PUNA dapat mengikuti rencana lintasan sesuai keinginan user/pengguna[2].

Selain itu, pada penelitian lain yang berjudul "Perencanaan Lintasan Dubins-Geometri pada Kapal Tanpa Awak untuk Menghindari Halangan Statis" oleh Nur Mu'alifah, Iis Herisman dan Subchan pada tahun 2013 mengadopsi metode Dubins-Geometri untuk merancang lintasan pelayaran kapal tanpa awak dengan halangan statis. Penelitian tersebut memberikan hasil beberapa contoh simulasi lintasan Dubins meliputi lintasan RSR, LSL, RSL, dan LSR yang berhasil menghindari halangan statis. Pada penelitian tersebut diperoleh kesimpulan bahwa lintasan Dubins-Geometri merupakan lintasan yang dinamis untuk semua sudut di sebarang kuadran yang memberikan kemudahan dalam perencanaannya, dan lintasan Dubins-Geometri tidak membutuhkan banyak waktu dalam proses perencanaan sehingga lebih efisien dan optimal.[4]

Penelitian lain dengan judul " *Vehicle Collision Avoidance System*" oleh Eivind Hope Sorbo pada tahun 2013 mensimulasikan beberapa kasus dari kendali perilaku *Null-Space-Based*(NSB) dan metode Dubins untuk menghindari tabrakan menggunakan kendaraan simulator. Kasus-kasus yang disimulasikan meliputi kasus 1 simulasi dengan beberapa halangan statis, kasus 2 simulasi dengan halangan dinamis yang mendekat dari arah samping kiri dan kanan, kasus 3 simulasi dengan halangan dinamis yang mendekat dari arah depan dan kasus 4 simulasi dengan halangan dinamis

yang mendekat dari arah belakang. Penelitian tersebut memberikan hasil bahwa kedua metode bekerja sangat baik untuk halangan statis dan dinamis serta kedua metode mampu mencapai target pada setiap kasus. Selain itu, diperoleh hasil bahwa metode Dubins lebih cepat dari pada metode NSB berdasarkan rata-rata waktu komputasi dan waktu yang dibutuhkan untuk mencapai target.[5]

Selain itu, terdapat penelitian lain berupa tugas akhir yang ditulis oleh Dimas Avian Maulana pada tahun 2011 dengan judul Penerapan Model Prediktif Kontrol (MPC) Pada Desain Pengendalian Robot Mobil Beroda Empat. Penelitian tersebut membahas tentang kendali robot mobil agar bergerak sesuai lintasan menggunakan MPC dengan model yang digunakan adalah model dinamik kinematika robot mobil. Penelitian tersebut menyebutkan bahwa MPC linear menghasilkan hasil yang cukup baik. Pada setiap percobaan, robot mobil selalu mengikuti lintasan pada iterasi kedua. Horizon prediksi diambil sebesar  $N = 3$  dengan waktu sampling  $t = 1s$  dan iterasi sebanyak 10 kali sehingga diperoleh hasil bahwa posisi robot mobil ( $x(k)$ ) mendekati nilai dari posisi referensi ( $x_r(k)$ ). Pada hasil simulasi diperoleh hasil bahwa robot mobil dapat mengikuti lintasan dengan baik pada beberapa lintasan terutama lintasan lurus dengan sudut kemudi referensi  $\phi_r(k) = 0$ . Penelitian tersebut memberikan saran untuk penelitian selanjutnya dengan menggunakan simulasi yang dinamis, tambahan variasi lintasan dan memperbesar nilai horizon prediksi[8].

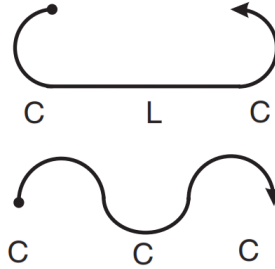
Pada penelitian lain berjudul *GPS Waypoint Fitting and Tracking Using Model Predictive Control* yang ditulis oleh Soo Jung Jeon dkk pada tahun 2015 membahas tentang pelacakan lintasan menggunakan MPC. Lintasan yang dibahas pada penelitian tersebut diperoleh dari GPS yang terkadang memberikan *waypoint* yang tidak teratur.

Oleh sebab itu digunakan pencocokan kurva (*curve fitting*) berdasarkan data *waypoint* yang tidak teratur tersebut. Setelah mendapatkan lintasan dari hasil *curve fitting*, penerapan kendali disimulasikan pada tiga kasus. Kasus 1, lintasan diperoleh dari *curve fitting* dengan kendali menggunakan MPC. Kasus 2, lintasan juga diperoleh dari *curve fitting* sedangkan kendali menggunakan *linear quadratic*. Kasus 3, lintasan diperoleh dari menghubungkan secara langsung *waypoint* yang diperoleh dari GPS dengan metode kendali yang digunakan yaitu *linear quadratic*. Kasus 1 dan 2 dilakukan untuk menguji kinerja dari MPC ketika dibandingkan dengan *linear quadratic* sedangkan kasus 2 dan 3 dilakukan untuk menguji kinerja *curve fitting* ketika dibandingkan dengan penggunaan *waypoint* secara langsung. Penelitian tersebut memberikan hasil bahwa nilai osilasi dari sudut kemudi secara signifikan menurun dengan metode MPC dibandingkan dengan metode *linear quadratic*, terutama di bagian lintasan melengkung yang membentuk kurva. Penurunan nilai osilasi dari sudut kemudi juga terjadi saat penggunaan metode *curve fitting* dibandingkan dengan penerapan *waypoint* secara langsung terutama saat *waypoint* tidak teratur[7].

## 2.2 Lintasan Dubins

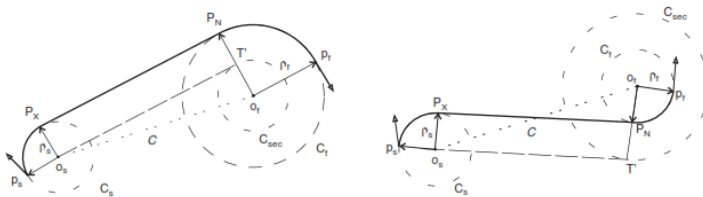
Lintasan Dubins adalah lintasan terpendek yang menghubungkan dua titik yang telah dibuktikan secara matematis oleh Lester Eli Dubins pada 1957. Definisi sederhana dari lintasan Dubins[3] yaitu lintasan sesingkat mungkin yang memenuhi kelengkungan maksimum terikat antara dua titik dengan orientasi tertentu dalam sebuah bidang baik jalur CLC atau CCC, atau bagian dari keduanya, di mana C merupakan busur lingkaran dan L merupakan garis lurus yang bersinggungan dengan C. Lintasan CLC dibentuk dengan menghubungkan dua busur lingkaran dengan sebuah

garis yang menyinggung keduanya sedangkan lintasan CCC dibentuk dengan tiga busur lingkaran yang berurutan dan saling bersinggungan seperti pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1: Lintasan Dubins CLC dan CCC

Lintasan Dubins diilustrasikan pada Gambar 2.2 dengan garis hitam menyatakan lintasan,  $P_s$  menyatakan posisi awal dan  $P_f$  menyatakan posisi akhir.

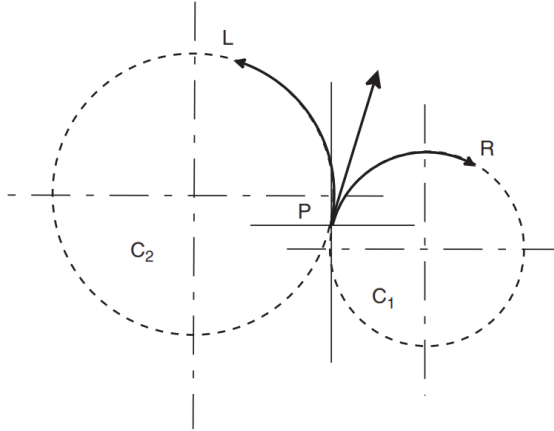


Gambar 2.2: Lintasan Dubins dengan garis singgung luar (kiri) dan dalam (kanan)

Pada Gambar 2.2 dapat dilihat bahwa arah garis dari  $P_x$  ke  $P_n$  sama dengan garis singgung dari dua lingkaran pada titik  $P_x$  dan  $P_n$ .  $P_x$  merupakan titik akhir dari busur lingkaran pertama dan  $P_n$  merupakan titik awal dari busur lingkaran kedua.

Bentuk Lintasan Dubins juga dipengaruhi oleh pergerakan mobil. Terdapat dua jenis pergerakan yang mungkin terjadi

saat membentuk busur lingkaran yaitu kendaraan berbelok ke kiri berlawanan arah jarum jam (L) dan berbelok ke kanan searah jarum jam (R) sesuai pada Gambar 2.3[3].



Gambar 2.3: Arah Pembentukan Busur Lingkaran

Kemungkinan lintasan geometri Dubins yang terbentuk ada empat macam lintasan yaitu *Right-Straight-Right* (RSR), *Left-Straight-Left* (LSL), *Right-Straight-Left* (RSL) dan *Left-Straight-Right* (LSR)[2]. Perancangan lintasan Dubins membutuhkan parameter input berikut ini:

1. Posisi awal  $P_s(x_s, y_s, \psi_s)$
2. Posisi akhir  $P_f(x_f, y_f, \psi_f)$
3. Jari-jari kelengkungan awal  $\rho_s$
4. Jari-jari kelengkungan akhir  $\rho_f$

Adapun proses menghitung lintasan Dubins sebagai berikut [3]:

1. Menentukan parameter input posisi awal dan akhir mobil



2. Menentukan koordinat titik pusat lingkaran awal  $O_s(x_{cs}, y_{cs})$  dan lingkaran akhir  $O_f(x_{cf}, y_{cf})$  menggunakan

$$(x_{cs}, y_{cs}) = \left( x_s - \rho_s \cos\left(\psi_s \pm \frac{\pi}{2}\right), y_s - \rho_s \sin\left(\psi_s \pm \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$(x_{cf}, y_{cf}) = \left( x_f - \rho_f \cos\left(\psi_f \pm \frac{\pi}{2}\right), y_f - \rho_f \sin\left(\psi_f \pm \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

3. Garis  $c$  yang menghubungkan antara titik pusat  $O_s$  dan  $O_f$  disebut garis pusat. Panjang garis pusat diperoleh dari

$$|c| = \sqrt{(x_{cs} - x_{cf})^2 + (y_{cs} - y_{cf})^2}$$

4. Menentukan posisi koordinat tangent entry  $P_N(x_{P_N}, y_{P_N})$  dan tangent exit  $P_X(x_{P_X}, y_{P_X})$ . Tangent entry adalah titik dari akhir lintasan garis dan awal dari busur lingkaran kedua yang akan dibentuk, sedangkan tangent exit adalah titik keluar dari lintasan busur lingkaran dan awal dari lintasan garis. Sebelum menentukan koordinat tersebut perlu dilakukan perhitungan sudut entry  $\theta_{en}$  dan sudut exit  $\theta_{ex}$ .
5. Berdasarkan nilai-nilai parameter yang diperoleh di atas, panjang lintasan Dubins dapat dihitung sebagai:

$$L_{Dubins} = L_{arc, start} + L_{garis singgung} + L_{arc, finish}$$

$$L_{Dubins} = f(\rho_s, \rho_f)$$

Proses perhitungan panjang masing-masing lintasan Dubins diberikan sebagai berikut:

### 2.2.1 Lintasan RSR

Lintasan RSR adalah lintasan yang terbentuk sebagai akibat dari mobil berbelok ke kanan (searah jarum jam) membentuk busur lingkaran pertama kemudian bergerak membentuk garis lurus dan berbelok ke kanan kembali membentuk busur lingkaran kedua. Adapun proses perhitungan panjang lintasan RSR sebagai berikut[2]:

1. Menentukan posisi awal  $P_s$  dan posisi akhir  $P_f$  pada koordinat kartesius  $(x, y)$ , sudut hadap mobil  $\psi$  dan jari-jari minimum kelengkungan lingkaran  $\rho$  yang akan dibentuk.

$$P_s = [x_s, y_s, \psi_s, \rho_s]$$

$$P_f = [x_f, y_f, \psi_f, \rho_f]$$

2. Menentukan titik pusat busur lingkaran yang dibentuk dengan batas jari-jari minimum dengan arah belok mobil ke kanan pada busur lingkaran awal  $(x_{cs}, y_{cs})$  dan busur lingkaran akhir  $(x_{cf}, y_{cf})$  menggunakan rumus berikut:

$$(x_{cs}, y_{cs}) = \left( x_s - \rho_s \cos \left( \psi_s + \frac{\pi}{2} \right), y_s - \rho_s \sin \left( \psi_s + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$(x_{cf}, y_{cf}) = \left( x_f - \rho_f \cos \left( \psi_f + \frac{\pi}{2} \right), y_f - \rho_f \sin \left( \psi_f + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

3. Menghitung jarak pusat lingkaran dengan geometri euclidean berikut :

$$\|c\| = \sqrt{(x_{cs} - x_{cf})^2 + (y_{cs} - y_{cf})^2}$$

4. Menganalisis eksistensi lintasan Dubins yang berbentuk RSR dengan syarat batas berikut :

$$|\rho_s - c| < \rho_f \text{ dan } |\rho_f - c| < \rho_s$$

Jika syarat terpenuhi maka lintasan yang terbentuk tidak *feasible* sedangkan jika syarat tidak terpenuhi maka lintasan yang terbentuk *feasible*.

- Menentukan sudut kemiringan garis yang dibentuk dari pusat lingkaran awal ke pusat lingkaran akhir yang selanjutnya disebut dengan  $\gamma$  dengan rumus sebagai berikut:

$$\gamma = \arctan \left( \frac{y_{cf} - y_{cs}}{x_{cf} - x_{cs}} \right)$$

Kemudian menentukan sudut yang dibentuk oleh garis c dan selisih jari-jari kedua lingkaran sebagai berikut:

$$\theta_e = \arctan \left( \frac{|\rho_f - \rho_s|}{\sqrt{c^2 - (|\rho_f - \rho_s|)^2}} \right)$$

- Menentukan titik akhir dari busur lingkaran awal sebelum membentuk garis yang disebut *tangen exit* ( $P_X$ ) dan titik akhir dari lintasan garis sebelum membentuk lintasan busur lingkaran akhir disebut *tangen entry* ( $P_N$ ). Sebelum menentukan kedua titik tersebut harus ditentukan terlebih dulu sudut *entry* ( $\theta_{en}$ ) dan sudut *exit* ( $\theta_{ex}$ ) dari sudut hadap mobil ketika melalui kedua titik tersebut. Perhitungan kedua sudut tersebut diberikan sebagai berikut:

$$\theta_{en} = \theta_e + \frac{\pi}{2} + \gamma \text{ dan } \theta_{ex} = \theta_e + \frac{\pi}{2} + \gamma$$

Sehingga perhitungan koordinat  $P_X$  dan  $P_N$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_X &= (x_{cs} + \rho_s \cos(\theta_{ex}), y_{cs} + \rho_s \sin(\theta_{ex})) \\ P_N &= (x_{cf} + \rho_f \cos(\theta_{en}), y_{cf} + \rho_f \sin(\theta_{en})) \end{aligned}$$

- Panjang lintasan garis atau jarak antara titik *tangen entry* dan *tangen exit* dihitung menggunakan rumus

berikut :

$$|P_X P_N| = \sqrt{(x_{P_X} - x_{P_N})^2 - (y_{P_X} - y_{P_N})^2}$$

8. Selanjutnya panjang busur lingkaran awal dan akhir dihitung menggunakan rumus berikut:

$$\text{Panjang busur} = \text{keliling lingkaran} \times \frac{\text{sudut}}{360}$$

Untuk panjang busur lingkaran awal dihitung menggunakan rumus berikut:

$$L_{arc,start} = \pi \times \rho_s \times \frac{\left(\left(\psi_s + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \theta_{ex}}{180^\circ}$$

Untuk panjang busur lingkaran akhir dihitung menggunakan rumus berikut:

$$L_{arc,finish} = \pi \times \rho_f \times \frac{\left(\left(\psi_f + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \theta_{en}}{180^\circ}$$

9. Panjang lintasan total dirumuskan sebagai berikut:

$$L_{Dubins} = L_{arc,start} + L_{garissingung} + L_{arc,finish}$$

## 2.2.2 Lintasan LSL

Lintasan LSL adalah lintasan yang terbentuk sebagai akibat dari mobil berbelok ke kiri (berlawanan arah jarum jam) membentuk busur lingkaran pertama kemudian bergerak membentuk garis lurus dan berbelok ke kiri kembali membentuk busur lingkaran kedua. Adapun proses perhitungan panjang lintasan LSL hampir sama dengan perhitungan panjang lintasan RSR namun terdapat perbedaan dalam perhitungan pusat masing-masing busur lingkaran yang dibentuk dan perhitungan sudut *tangen entry*

dan sudut *tangen exit*. Adapun perhitungan pusat busur lingkaran sebagai berikut[2]:

$$\begin{aligned}(x_{cs}, y_{cs}) &= \left( x_s - \rho_s \cos\left(\psi_s - \frac{\pi}{2}\right), y_s - \rho_s \sin\left(\psi_s - \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ (x_{cf}, y_{cf}) &= \left( x_f - \rho_f \cos\left(\psi_f - \frac{\pi}{2}\right), y_f - \rho_f \sin\left(\psi_f - \frac{\pi}{2}\right) \right)\end{aligned}$$

dan perhitungan sudut *tangen entry* dan sudut *tangen exit* sebagai berikut :

$$\theta_{en} = \theta_e - \frac{\pi}{2} + \gamma \text{ dan } \theta_{ex} = \theta_e - \frac{\pi}{2} + \gamma$$

Perhitungan yang lain sama dengan perhitungan lintasan RSR.

### 2.2.3 Lintasan RSL

Lintasan RSL adalah lintasan yang terbentuk sebagai akibat dari mobil berbelok ke kanan (searah jarum jam) saat membentuk busur lingkaran pertama kemudian bergerak membentuk garis lurus dan berbelok ke kiri saat membentuk busur lingkaran kedua. Adapun proses perhitungan panjang lintasan RSL sebagai berikut[2]:

1. Menentukan pusat busur lingkaran yang terbentuk dengan menggunakan batas jari-jari minimum dengan mobil berbelok ke arah kanan saat membentuk busur lingkaran pertama dan berbelok ke arah kiri saat membentuk busur lingkaran kedua dengan rumus sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(x_{cs}, y_{cs}) &= \left( x_s - \rho_s \cos\left(\psi_s + \frac{\pi}{2}\right), y_s - \rho_s \sin\left(\psi_s + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ (x_{cf}, y_{cf}) &= \left( x_f - \rho_f \cos\left(\psi_f - \frac{\pi}{2}\right), y_f - \rho_f \sin\left(\psi_f - \frac{\pi}{2}\right) \right)\end{aligned}$$

2. Menganalisis eksistensi lintasan Dubins yang berbentuk RSL dengan syarat sebagai berikut:

$$|\rho_s + \rho_f| > c$$

Jika syarat tersebut terpenuhi maka lintasan yang terbentuk tidak *feasible* sedangkan jika syarat tidak terpenuhi maka lintasan *feasible*. Jari-jari kedua busur lingkaran dipastikan tidak beririsan dengan adanya syarat tersebut.

3. Menentukan sudut yang dibentuk oleh garis c dan selisih jari-jari lingkaran sebagai berikut:

$$\theta_e = \arctan \left( \frac{\sqrt{c^2 - (|\rho_f + \rho_s|)}}{|\rho_f + \rho_s|} \right)$$

4. Menentukan sudut *tangen entry* dan sudut *tangen exit* sebagai berikut:

$$\theta_{en} = \theta_e + \pi + \gamma \text{ dan } \theta_{ex} = \theta_e + \gamma$$

Untuk perhitungan yang lain sama dengan perhitungan lintasan RSR.

## 2.2.4 Lintasan LSR

Lintasan LSR adalah lintasan yang terbentuk sebagai akibat dari mobil berbelok ke kiri (berlawanan arah jarum jam) saat membentuk busur lingkaran pertama kemudian bergerak membentuk garis lurus dan berbelok ke kanan saat membentuk busur lingkaran kedua. Adapun proses perhitungan panjang lintasan LSR sebagai berikut[2]:

1. Menentukan pusat busur lingkaran yang terbentuk dengan menggunakan batas jari-jari minimum dengan mobil berbelok ke arah kiri (berlawanan arah jarum jam) saat membentuk busur lingkaran pertama dan berbelok ke arah kanan saat membentuk busur lingkaran kedua dengan rumus sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (x_{cs}, y_{cs}) &= \left( x_s - \rho_s \cos \left( \psi_s - \frac{\pi}{2} \right), y_s - \rho_s \sin \left( \psi_s - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ (x_{cf}, y_{cf}) &= \left( x_f - \rho_f \cos \left( \psi_f + \frac{\pi}{2} \right), y_f - \rho_f \sin \left( \psi_f + \frac{\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

2. Menganalisis eksistensi lintasan Dubins yang berbentuk LSR dengan syarat sebagai berikut:

$$|\rho_s + \rho_f| > c$$

Jika syarat tersebut terpenuhi maka lintasan yang terbentuk tidak *feasible* sedangkan jika syarat tidak terpenuhi maka lintasan *feasible*. Jari-jari kedua busur lingkaran dipastikan tidak beririsan dengan adanya syarat tersebut.

3. Menentukan sudut yang dibentuk oleh garis  $c$  dan selisih jari-jari lingkaran sebagai berikut:

$$\theta_e = \arctan \left( \frac{\sqrt{c^2 - (|\rho_f + \rho_s|)}}{|\rho_f + \rho_s|} \right)$$

4. Menentukan sudut *tangen entry* dan sudut *tangen exit* sebagai berikut:

$$\theta_{en} = \gamma - \theta_e + \pi \text{ dan } \theta_{ex} = \gamma - \theta_e$$

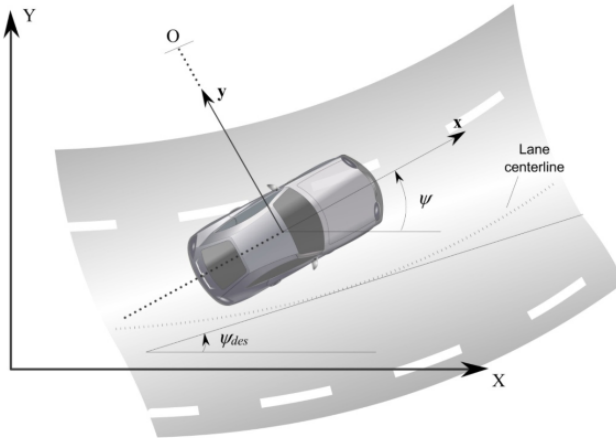
Untuk perhitungan yang lain sama dengan perhitungan lintasan RSR.

### 2.3 Model Dinamik Gerak Lateral

Model dinamik gerak lateral yang diilustrasikan pada gambar Gambar 4.4 dengan posisi lateral mobil  $y$  dan sudut yaw mobil  $\psi$ . Posisi lateral mobil dihitung sepanjang sumbu lateral mobil ke titik O dengan titik tersebut merupakan pusat rotasi mobil. Sudut yaw mobil dihitung terhadap sumbu  $X$  global dan kecepatan longitudinal mobil pada pusat massa dinotasikan sebagai  $V_x$ .

Model dinamik gerak lateral [1, 9] dinyatakan dengan ruang keadaan berikut:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} & -\frac{2C_{\alpha f} - 2C_{\alpha r}}{mV_x} - V_x \\ -\frac{2l_f C_{\alpha f} - 2l_r C_{\alpha r}}{I_z V_x} & -\frac{2l_f^2 C_{\alpha f} + 2l_r^2 C_{\alpha r}}{I_z V_x} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{2C_{\alpha f}}{I_z} \\ \frac{2l_f C_{\alpha f}}{I_z} \end{bmatrix} u \quad (2.1)$$



Gambar 2.4: Gerak lateral mobil

dengan

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, u = \delta$$

Kemudian dengan output sistem adalah  $\dot{\psi}$  yang dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\dot{y} = Cx = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \quad (2.2)$$

dengan

- $\{XYZ\}$  : bidang koordinat global
- $\{xyz\}$  : bidang koordinat kendaraan (lokal)
- $m$  : massa total kendaraan
- $I_z$  : momen inersia yaw dari kendaraan
- $l$  : ( $l_f, l_r$ ) jarak longitudinal dari pusat masa ke ban
- $\alpha$  : ( $\alpha_f, \alpha_r$ ) sudut slip pada roda ban  
(depan, belakang)
- $C$  : ( $C_{\alpha_f}, C_{\alpha_r}$ ) kekakuan menikung dari ban
- $\delta$  : sudut kemudi



## 2.4 Keterkendalian dan Keteramatan Sistem

Sistem linear invarian-waktu diberikan sebagai berikut [10]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \bar{y}(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Jika  $x(t)$  merupakan vektor berukuran  $n \times 1$  maka sistem tersebut dikatakan terkontrol jika matriks keterkontrolan  $M_c$  memiliki nilai rank sama dengan  $n$  dengan

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

sedangkan suatu sistem dikatakan teramati jika matriks keteramatan  $M_o$  memiliki nilai rank sama dengan  $n$  dengan

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

## 2.5 Diskritisasi Sistem

Diberikan persamaan keadaan waktu kontinu sebagai berikut [11]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.3)$$

Vektor masukan  $u(t)$  pada setiap selang pencacahan diasumsikan tetap. Selanjutnya digunakan notasi  $kT$  dan  $(k+1)T$ . Penyajian waktu diskrit dari persamaan (2.3) akan mempunyai bentuk :

$$x((k+1)T) = A_d(T)x(kT) + B_d(T)u(kT) \quad (2.4)$$

terlihat bahwa matriks  $A_d$  dan  $B_d$  bergantung pada waktu *sampling*  $T$ . Setelah periode cacah ditetapkan, maka matriks  $A_d$  dan  $B_d$  akan menjadi matriks konstan.

Selanjutnya untuk menentukan  $A_d(T)$  dan  $B_d(T)$ , dengan mengalikan  $e^{-At}$  di kedua sisi pada persamaan (2.3) diperoleh:

$$\begin{aligned} e^{-At}\dot{x}(t) &= e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t) \\ e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) &= e^{-At}Bu(t) \\ \frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) &= e^{-At}Bu(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

dengan mengintegrasikan persamaan (2.5) diperoleh:

$$\begin{aligned} e^{-At}x(t) &= x(0) + e^{-At} \int_0^t e^{-Av}Bu(v)dv \\ x(t) &= e^{At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-Av}Bu(v)dv \end{aligned} \quad (2.6)$$

substitusi  $t = kT$  pada persamaan (2.6) diperoleh:

$$x((kT)) = e^{AkT}x(0) + e^{AkT} \int_0^{kT} e^{-Av}Bu(v)dv$$

dan

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= e^{A(k+1)T}x(0) + e^{A(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-Av}Bu(v)dv \\ &= e^{AT}x(kT) + e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-Av}Bu(v)dv \end{aligned}$$

dengan  $\lambda = T - v$  diperoleh:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A\lambda}Bu(kT)d\lambda \quad (2.7)$$

Berdasarkan persamaan (2.7) diperoleh:

$$A_d(T) = e^{AT}$$

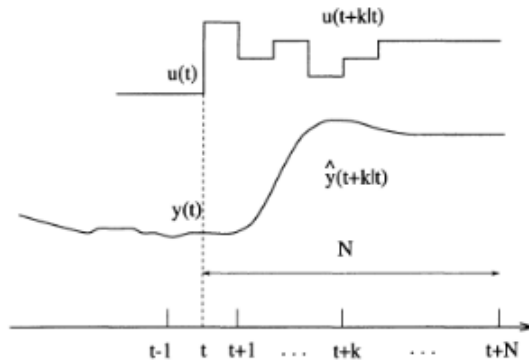
$$B_d(T) = \left( \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B$$

dengan matriks eksponensial diberikan sebagai berikut:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \dots$$

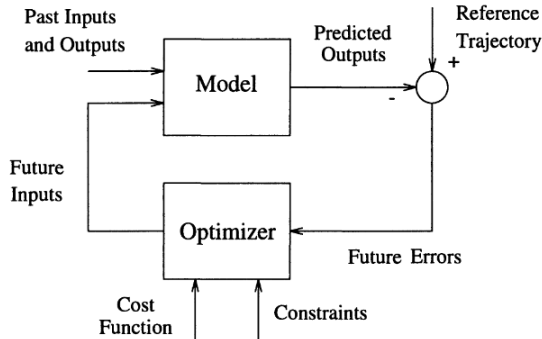
## 2.6 Model Predictive Control (MPC)

Metodologi dari MPC ditunjukkan pada Gambar 2.5[6]. Output N prediksi horizon ke depan diprediksi pada setiap t menggunakan proses model. Prediksi output ini bergantung pada nilai yang diketahui pada t (input dan output sebelumnya) dan sinyal kendali ke depan u yang dikirim pada sistem dan dihitung kembali. Sinyal kendali u diperoleh dari hasil optimasi fungsi objektif yang biasanya menyatakan eror antara sinyal prediksi output dan prediksi lintasan referensi.



Gambar 2.5: Strategi MPC

Struktur dasar MPC yang digunakan dalam implementasi strategi tersebut diberikan sesuai Gambar 2.6.



Gambar 2.6: Struktur dasar MPC

Model digunakan untuk memprediksi output sistem ke depan, berdasarkan nilai yang sebelumnya dan nilai sekarang. Optimizer dinyatakan dengan fungsi objektif yang diminimumkan untuk mendapatkan input yang optimal sehingga dapat digunakan kembali pada model untuk perhitungan selanjutnya.

Model ruang keadaan waktu diskrit diberikan sebagai berikut[12]:

$$\begin{aligned}x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k) + B_g \omega(k) \\ \bar{y}(k) &= C_m x_m(k)\end{aligned}$$

dengan  $\omega(k)$  adalah input gangguan dan bentuk umum dari fungsi objektif diberikan sebagai berikut:

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} \|\hat{r}(k+i|k) - \hat{y}(k+i|k)\|_{Q(i)}^2 + \sum_{i=0}^{N_c-1} \|\Delta \hat{u}(k+i|k)\|_{R(i)}^2$$

dengan  $\hat{y}(k+i|k)$  adalah prediksi output plant secara internal,  $\Delta \hat{u}(k+i|k)$  adalah selisih variabel input pada waktu ke depan,  $k+i$ , yang diprediksi pada waktu ke  $k$ .  $Q(i)$  dan  $R(i)$  adalah matriks simetri definit positif dalam bentuk

kuadrat yang bisa menjadi fungsi waktu. Parameter untuk adaptasi kendali adalah prediksi horizon  $N_p$ , kendali horizon  $N_c$  dengan  $N_p > N_c > 1$ , matriks  $Q$  dan  $R$  serta referensi trayektori  $r$ .

Jika terdapat lebih dari satu input, maka kendala dispesifikan masing-masing input. Kendala-kendala tersebut yaitu :

1. Kendala pada variasi pertambahan variabel kendali  $\Delta U$   
Misal diberikan batas atas  $\Delta U^{max}$  dan batas bawah  $\Delta U^{min}$  maka constraint dispesifikan dalam bentuk

$$\Delta U^{min} \leq \Delta U \leq \Delta U^{max}$$

2. Kendala pada amplitude variabel kendali  $u$

$$U^{min} \leq U \leq U^{max}$$

3. Kendala output

$$Y^{min} \leq Y \leq Y^{max}$$

Penyelesaian masalah sistem dengan kendala berupa pertidaksamaan linier menggunakan metode *quadratic programming* sehingga diperoleh fungsi objektif dalam bentuk lain, yaitu:

minimum

$$J = \frac{1}{2} x^T E x + x^T F$$

Subject to

$$P x \leq h$$

$$Y j = b$$

dimana matriks  $E, F, P, h, Y$  dan  $b$  merupakan matriks dan vektor yang cocok dalam masalah *quadratic programming*.

## BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan tahapan-tahapan sistematis yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas enam tahap, yaitu studi literatur; penentuan lintasan; desain kendali menggunakan MPC; simulasi dan analisis hasil; penarikan kesimpulan; penulisan laporan tugas akhir.

### 3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan studi referensi mengenai model dinamik gerak lateral, lintasan Dubins dan metode model predictive control (MPC). Referensi yang digunakan adalah buku-buku, skripsi, thesis dan paper-paper dalam jurnal ilmiah yang berkaitan dengan topik pada Tugas Akhir ini.

### 3.2 Penentuan Lintasan

Pada tahap ini akan dilakukan penentuan lintasan yang akan dilalui kendaraan menggunakan algoritma lintasan Dubins yang diberikan pada Gambar 3.1. Lintasan yang dihasilkan akan digunakan sebagai *set point* pada penerapan MPC

### 3.3 Desain Kendali dengan Menggunakan MPC

Pada tahap ini dilakukan beberapa langkah dalam penerapan MPC. Langkah pertama adalah pengkajian penurunan model dinamik gerak lateral. Selanjutnya dilakukan pendiskritan model dinamik gerak lateral menggunakan *software* MATLAB dengan waktu *sampling* 0.1 detik. Setelah itu, langkah yang dilakukan adalah penentuan

fungsi objektif yang akan digunakan dalam penerapan MPC sebagai fungsi tujuan dan penentuan kendala batas yang akan digunakan dalam penerapan MPC. Langkah selanjutnya adalah penyusunan fungsi objektif dan kendala batas yang ditentukan sebelumnya ke dalam bentuk *quadratic programming*. Kendala batas yang disusun terdiri dari kendala batas pertidaksamaan dan persamaan.

### **3.4 Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi**

Pada tahap ini dilakukan simulasi hasil penerapan MPC pada model dinamik gerak lateral yang diperoleh dengan menggunakan *software* MATLAB dan menganalisis hasil simulasi yang diperoleh.

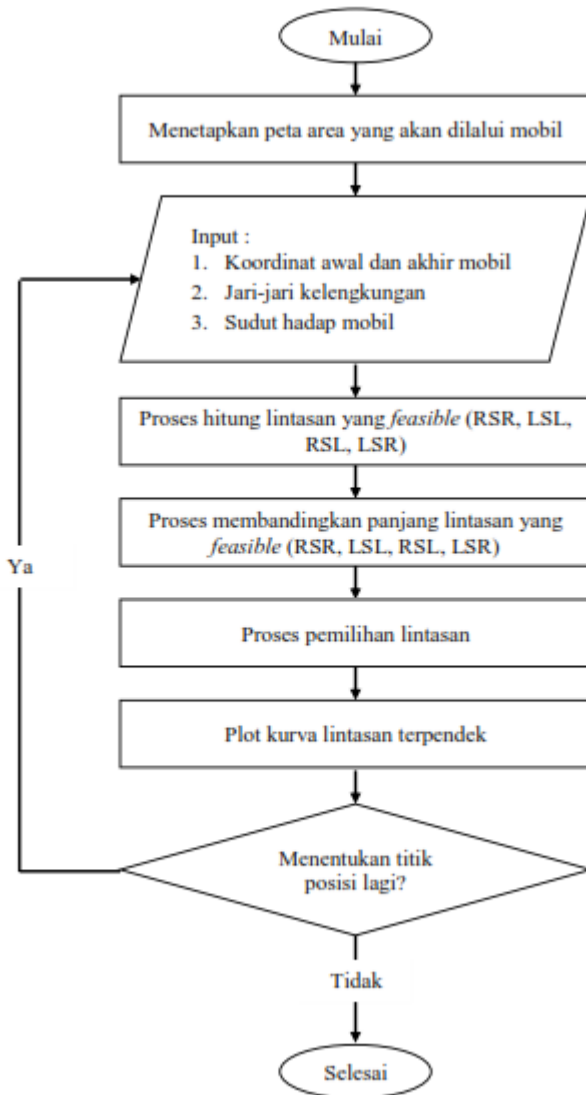
### **3.5 Penarikan Kesimpulan**

Setelah simulasi dilakukan, pada langkah ini adalah penarikan kesimpulan berdasarkan hasil simulasi dan analisisnya dan dari hasil kesimpulan tersebut diberikan saran untuk penelitian selanjutnya.

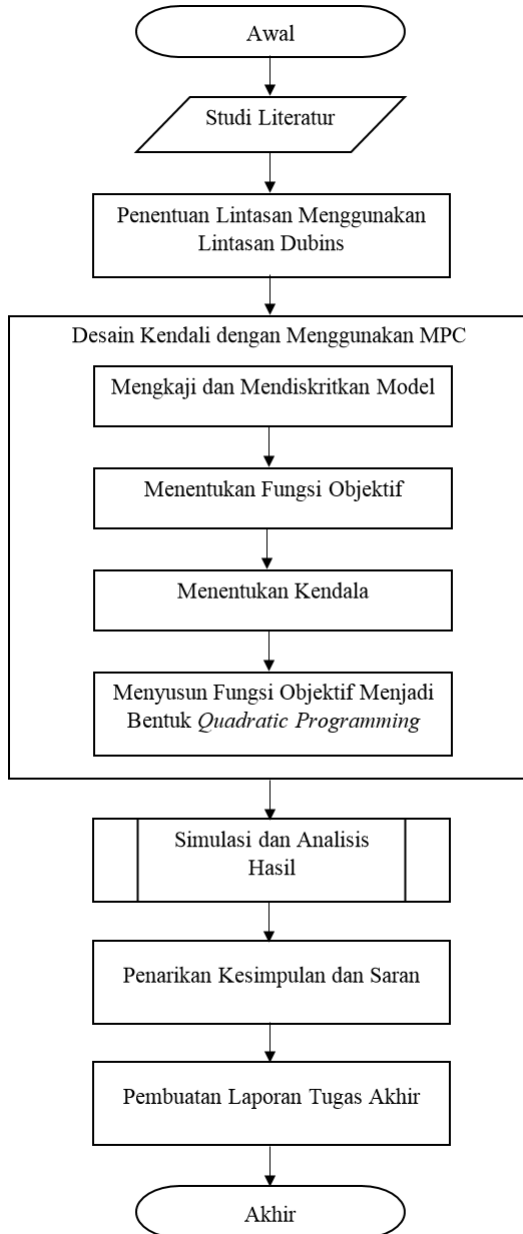
### **3.6 Penulisan Laporan Tugas Akhir**

Pada tahap ini dilakukan penulisan laporan Tugas Akhir setelah melakukan simulasi dan menjawab permasalahan yang ada pada topik Tugas Akhir.





Gambar 3.1: Algoritma Perencanaan Lintasan Dubins



Gambar 3.2: Diagram Alur Penelitian

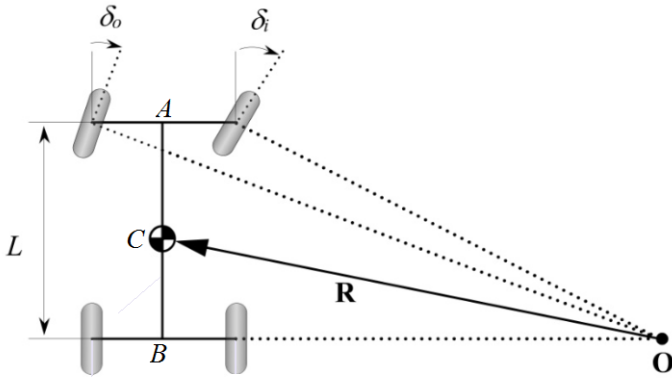
## BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai penerapan MPC pada pelacakan lintasan Dubins. Pembahasan diawali dengan perancangan lintasan Dubins. Selanjutnya dilakukan proses mengkaji model dan menganalisis sifat sistem yang direpresentasikan oleh model dan penerapan MPC. Pada penerapan MPC terdapat dua proses yaitu diskritisasi model dan desain kendali. Penyelesaian penerapan MPC disimulasikan menggunakan *software* MATLAB. Setelah itu akan dilakukan analisis dari hasil simulasi.

### 4.1 Penentuan Lintasan

Penentuan lintasan Dubins membutuhkan posisi awal mobil dan posisi akhir mobil. Kedua posisi tersebut terdiri atas posisi pada koordinat kartesius  $(x, y)$ , sudut hadap mobil  $(\psi)$  dan jari-jari minimum kelengkungan lintasan yang dalam penelitian ini dinyatakan dengan  $R$ .  $R$  diperoleh dari jari-jari putar minimum mobil yang akan ditentukan.

Sebelum menentukan  $R$ , hal yang dilakukan adalah mengidentifikasi hal-hal yang berkaitan seperti sudut kemudi untuk roda depan dan belakang diberikan oleh  $\delta_f$  dan  $\delta_r$  dengan pusat massa mobil diberikan oleh titik  $C$ . Sudut  $\delta_o$  dan  $\delta_i$  pada Gambar 4.1 berturut-turut merupakan sudut kemudi luar dan sudut kemudi dalam roda depan yang pada penelitian ini dianggap sama sehingga dapat dinyatakan dengan  $\delta_f$  saja. Jarak masing-masing antara titik  $A$  dan  $B$  ke titik  $C$  diberikan oleh  $l_f$  dan  $l_r$ . Jadi panjang  $L$  yang didefinisikan sebagai jarak antara roda belakang dan



Gambar 4.1: Geometri Putar Mobil

roda depan adalah  $L = l_f + l_r$ . Kecepatan kendaraan pada pusat massa diberikan oleh  $V$  yang membentuk sudut slip  $\beta$ . Pada penelitian ini diasumsikan tidak terjadi slip atau  $\beta = 0$  sehingga kecepatan mobil searah dengan sudut hadap mobil. Misalkan bahwa  $L$  lebih kecil bila dibandingkan dengan  $R$  maka kecepatan sudut dapat didekati dengan

$$\frac{\dot{\psi}}{V} \approx \frac{1}{R} = \frac{\delta}{L}$$

atau

$$\delta = \frac{L}{R}$$

Untuk input sudut kemudi maksimal  $\delta = 0.5386 \text{ rad}$  dengan  $l_f = 1.1 \text{ m}$  dan  $l_r = 1.58 \text{ m}$  diperoleh  $L = 2.68 \text{ m}$  sehingga

$$R = \frac{L}{\delta} = \frac{2.68}{0.5386} = 4.9759 \approx 5 \text{ m}$$

Setelah diperoleh R maka didefinisikan posisi awal dan akhir sebagai berikut:

$$p_s = [1100 \quad 1150 \quad 180 \quad 5]$$

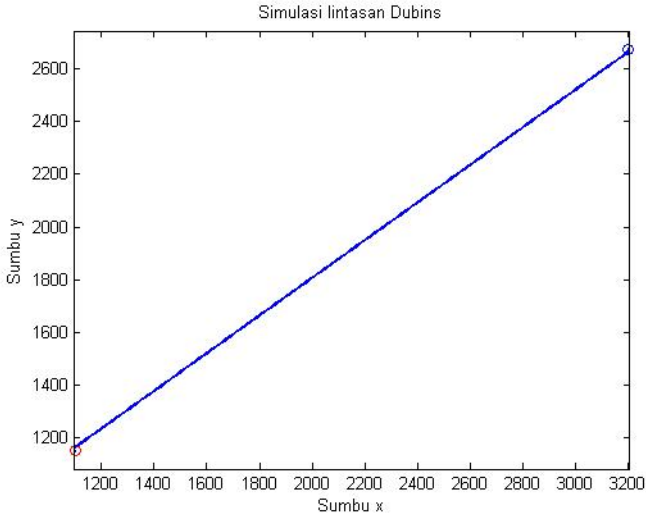
$$p_f = [3200 \quad 2675 \quad 180 \quad 5]$$

dengan menggunakan algoritma pada bab 2 diperoleh panjang masing-masing jenis lintasan Dubins seperti pada Tabel 4.1.

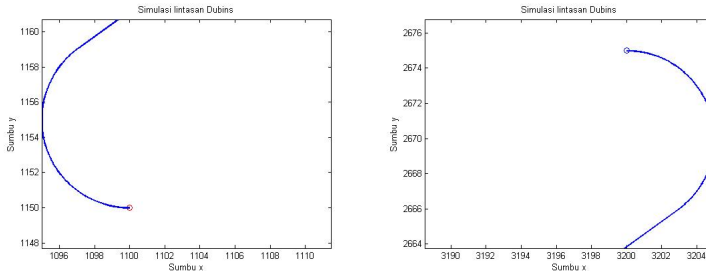
Tabel 4.1: Tabel Panjang Lintasan Dubins

jenis lintasan	panjang lintasan (m)
RSR	2626.7
LSL	2626.7
RSL	2614.6
LSR	2664

Berdasarkan tabel Tabel 4.1 diperoleh lintasan terpendek yaitu lintasan RSL dengan panjang 2664 m yang dianggap sebagai lintasan optimal. Adapun bentuk lintasan diberikan pada Gambar 4.2. Jari-jari putar minimum mobil bernilai kecil jika dibandingkan dengan panjang lintasan sehingga tidak terlihat bentuk lintasan di awal. Oleh karena itu dilakukan perbesaran gambar pada posisi awal dan akhir yang ditunjukkan pada Gambar 4.3. Pada gambar tersebut terlihat bahwa lintasan dimulai dengan berbelok ke kanan searah jarum jam(R) kemudian membentuk garis lurus(S) dan berbelok ke kiri berlawanan arah jarum jam(L) sehingga diperoleh lintasan RSL.



Gambar 4.2: Lintasan Dubins jenis RSL



Gambar 4.3: Perbesaran Gambar Lintasan Dubins pada Posisi Awal (kiri) dan Posisi Akhir (kanan) Lintasan

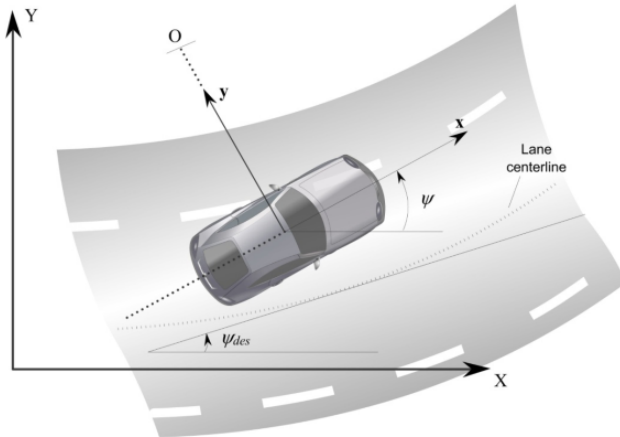
## 4.2 Desain Kendali dengan Menggunakan MPC

Desain kendali menggunakan MPC dilakukan mula-mula dengan melakukan diskritisasi model. Setelah diperoleh model sistem diskrit, desain kendali dimulai dengan membentuk fungsi objektif dan kendala batas ke dalam bentuk *quadratic programming*. Kemudian bentuk tersebut akan diselesaikan

menggunakan *software* MATLAB.

#### 4.2.1 Kajian Model

Model dinamik gerak lateral yang diilustrasikan pada Gambar 4.4 dengan posisi lateral mobil  $y$  yang dihitung sepanjang sumbu lateral mobil ke titik O dengan titik tersebut merupakan pusat rotasi mobil dan sudut yaw mobil  $\psi$  yang dihitung terhadap sumbu  $X$  global dan kecepatan longitudinal mobil pada pusat massa dinotasikan sebagai  $V_x$ .



Gambar 4.4: Gerak lateral mobil

Hukum Newton II diterapkan untuk gerak sepanjang sumbu  $y$  sebagai berikut:

$$ma_y = F_{yf} + F_{yr} \quad (4.1)$$

dengan  $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$  adalah percepatan inersial dari mobil pada pusat massa sepanjang sumbu  $y$ .  $a_y$  dipengaruhi oleh percepatan sepanjang sumbu  $y$  yaitu  $\ddot{y}$  dan percepatan sentripetal  $V_x\dot{\psi}$  sehingga diperoleh

$$a_y = \ddot{y} + V_x\dot{\psi} \quad (4.2)$$

Berdasarkan persamaan (4.2) maka persamaan (4.1) menjadi

$$m(\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) = F_{yf} + F_{yr} \quad (4.3)$$

dengan  $F_{yf}$  dan  $F_{yr}$  berturut-turut merupakan gaya lateral ban depan dan belakang yang bergantung pada sudut slip roda. Sudut slip roda depan dan belakang berturut-turut diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \delta - \theta_{vf} \\ \alpha_r &= -\theta_{vr} \end{aligned}$$

dengan  $\theta_{vf}$  merupakan sudut antara vektor kecepatan dengan sumbu longitudinal mobil pada roda depan,  $\delta$  merupakan sudut kemudi roda depan dan  $\theta_{vr}$  merupakan sudut antara vektor kecepatan dengan sumbu longitudinal mobil pada roda belakang.

Kemudian diberikan gaya lateral ban depan dan belakang masing-masing sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F_{yf} &= 2C_{\alpha f}(\delta - \theta_{vf}) \\ F_{yr} &= 2C_{\alpha r}(-\theta_{vr}) \end{aligned}$$

dengan  $C_{\alpha f}$  dan  $C_{\alpha r}$  berturut-turut merupakan kekakuan menikung ban depan dan belakang.  $\theta_{vf}$  dan  $\theta_{vr}$  dihitung dengan menggunakan relasi berikut:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_{vf}) &= \frac{V_y + l_f \dot{\psi}}{V_x} \\ \tan(\theta_{vr}) &= \frac{V_y - l_r \dot{\psi}}{V_x} \end{aligned}$$



dengan pendekatan sudut yang kecil dan notasi  $V_y = \dot{y}$  maka diperoleh

$$\begin{aligned}\theta_{vf} &= \frac{\dot{y} + l_f \dot{\psi}}{V_x} \\ \theta_{vr} &= \frac{\dot{y} - l_r \dot{\psi}}{V_x}\end{aligned}$$

sehingga persamaan (4.3) menjadi

$$\begin{aligned}\ddot{y} + V_x \dot{\psi} &= \frac{F_{yf} + F_{yr}}{m} \\ \ddot{y} &= \frac{F_{yf}}{m} + \frac{F_{yr}}{m} - V_x \dot{\psi} \\ \ddot{y} &= \frac{2C_{\alpha f}(\delta - \theta_{vf})}{m} + \frac{2C_{\alpha r}(-\theta_{vr})}{m} - V_x \dot{\psi} \\ \ddot{y} &= \frac{2C_{\alpha f}}{m} \delta - \frac{2C_{\alpha f}}{m} \left( \frac{\dot{y} + l_f \dot{\psi}}{V_x} \right) - \frac{2C_{\alpha r}}{m} \left( \frac{\dot{y} - l_r \dot{\psi}}{V_x} \right) - \\ &\quad V_x \dot{\psi} \\ \ddot{y} &= - \left( \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} \right) \dot{y} - \left( \frac{2C_{\alpha f} l_f - 2C_{\alpha r} l_r}{mV_x} + V_x \right) \dot{\psi} + \\ &\quad \frac{2C_{\alpha f}}{m} \delta\end{aligned}\tag{4.4}$$

Momen inersia di sekitar sumbu  $z$  diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}I_z \ddot{\psi} &= l_f F_{yf} - l_r F_{yr} \\ \ddot{\psi} &= \frac{l_f F_{yf} - l_r F_{yr}}{I_z} \\ \ddot{\psi} &= \frac{l_f (2C_{\alpha f}(\delta - \theta_{vf})) - l_r (2C_{\alpha r}(-\theta_{vr}))}{I_z} \\ \ddot{\psi} &= \frac{2C_{\alpha f} l_f}{I_z} \delta - \frac{2C_{\alpha f} l_f}{I_z} \theta_{vf} + \frac{2C_{\alpha r} l_r}{I_z} \theta_{vr}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi} &= \frac{2C_{\alpha f}l_f}{I_z}\delta - \frac{2C_{\alpha f}l_f}{I_z}\left(\frac{\dot{y} + l_f\dot{\psi}}{V_x}\right) + \frac{2C_{\alpha r}l_r}{I_z}\left(\frac{\dot{y} - l_r\dot{\psi}}{V_x}\right) \\
\ddot{\psi} &= -\left(\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{I_zV_x}\right)\dot{y} - \left(\frac{2C_{\alpha f}l_f^2 + 2C_{\alpha r}l_r^2}{I_zV_x}\right)\dot{\psi} + \\
&\quad \frac{2C_{\alpha f}l_f}{I_z}\delta
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Berdasarkan persamaan (4.4) dan (4.5) dibentuk ruang keadaan dari model dinamik gerak lateral dengan

$$x = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, u = \delta$$

maka diperoleh ruang keadaan sebagai berikut:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} & -\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{mV_x} - V_x \\ -\frac{2l_fC_{\alpha f} - 2l_rC_{\alpha r}}{I_zV_x} & -\frac{2l_f^2C_{\alpha f} + 2l_r^2C_{\alpha r}}{I_zV_x} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{2C_{\alpha f}}{I_z} \\ \frac{2l_fC_{\alpha f}}{I_z} \end{bmatrix} u \tag{4.6}$$

dengan nilai parameter diperoleh dari [1] sebagai berikut:  $m = 1573$ ,  $I_z = 2873$ ,  $l_f = 1.1$ ,  $l_r = 1.58$ ,  $C_{\alpha f} = 80000$ ,  $C_{\alpha r} = 80000$  persamaan (4.6) menjadi

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6.7811 & -28.3725 \\ 0.8911 & -6.8804 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 101.7165 \\ 61.26 \end{bmatrix} u \tag{4.7}$$

dengan output sistem diberikan sebagai berikut:

$$\bar{y} = Cx = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \tag{4.8}$$

### Analisis Sifat Model

Sebelum melakukan kendali pada sistem yang direpresentasikan oleh model, analisis sifat sistem dilakukan terlebih dahulu untuk mengetahui sifat keterkendalian dan keterampilan sistem.

### Keterkendalian Sistem

Berdasarkan persamaan (4.7) diperoleh berturut-turut matriks  $A$  dan  $B$  sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -6.7811 & -28.3725 \\ 0.8911 & -6.8804 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 101.7165 \\ 61.26 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks keterkendalian  $M_c$  sebagai berikut:

$$M_c = \begin{bmatrix} 101.7 & -2427.8 \\ 61.3 & -330.9 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan matlab diperoleh bahwa  $rank(M_c) = 2$  sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem ini terkendali.

### Keteramatan Sistem

Berdasarkan persamaan (4.7) dan (4.8) diperoleh berturut-turut matriks  $A$  dan  $C$  sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -6.7811 & -28.3725 \\ 0.8911 & -6.8804 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$$

sehingga diperoleh matriks keteramatan  $M_o$  sebagai berikut:

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.8911 & -6.8804 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan matlab diperoleh bahwa  $rank(M_o) = 2$  sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem ini teramati.

#### 4.2.2 Diskritisasi Model

Penyajian model waktu diskrit memerlukan matriks  $A_d$  dan  $B_d$  yang dicari sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A_d(T) &= e^{AT} \\ &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \dots \\ &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_d(T) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6.7811 & -28.3725 \\ 0.8911 & -6.8804 \end{bmatrix} T + \\
&\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 20.7006 & 387.6109 \\ -12.1738 & 22.0572 \end{bmatrix} T^2 + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 205.0 & -3254.2 \\ 102.2 & 193.6 \end{bmatrix} T^3 + \\
&\quad \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -4290 & 16573 \\ -521 & -4232 \end{bmatrix} T^4 + \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 43861 & 7691 \\ -242 & -43888 \end{bmatrix} T^5 + \\
&\quad \frac{1}{720} \begin{bmatrix} -290600 & -1297400 \\ 40700 & -295100 \end{bmatrix} T^6 + \dots
\end{aligned}$$

dengan  $T = 0.1$  detik dan pemotongan pada  $n > 6$  maka diperoleh

$$A_d(0.1) = \begin{bmatrix} 0.4449 & -1.3737 \\ 0.0431 & 0.4401 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
B_d(T) &= \left( \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B \\
&= \left( \int_0^T A_d(\lambda) d\lambda \right) \begin{bmatrix} 101.7165 \\ 61.26 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101.7165 \\ 61.26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3.3906T^2 & -14.1862T^2 \\ 0.4456T^2 & -3.4402T^2 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} 101.7165 \\ 61.26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.4501T^3 & 64.6018T^3 \\ -2.02896T^3 & 3.67619T^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101.7165 \\ 61.26 \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} 8.54281T^4 & -135.594T^4 \\ 4.25861T^4 & 8.06825T^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101.7165 \\ 61.26 \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} -35.7514T^5 & 138.111T^5 \\ -4.33769T^5 & -35.268T^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101.7165 \\ 61.26 \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} 60.9175T^6 & 10.6825T^6 \\ -0.335507T^6 & 60.9549T^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101.7165 \\ 61.26 \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} -57.6526T^7 & -257.412T^7 \\ 8.08457T^7 & -58.5535T^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101.7165 \\ 61.26 \end{bmatrix} + \dots
\end{aligned}$$

dengan  $T = 0.1$  detik dan pemotongan pada  $n > 6$  maka diperoleh

$$B_d(0.1) = \begin{bmatrix} 1.5734 \\ 4.5608 \end{bmatrix}$$

Pendiskritan model juga dilakukan menggunakan *software* MATLAB yang menggunakan metode yang sama seperti di atas dengan waktu *sampling* 0.1 detik sehingga diperoleh ruang keadaan pada waktu diskrit sebagai berikut:

$$A_d(0.1) = \begin{bmatrix} 0.4450 & -1.3734 \\ 0.0431 & 0.4402 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$B_d(0.1) = \begin{bmatrix} 1.6503 \\ 4.5607 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Karena perhitungan analitik mengalami pemotongan pada  $n > 6$  maka digunakan hasil perhitungan MATLAB untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat sehingga diperoleh model pada waktu diskrit berdasarkan persamaan (4.9) dan (4.10) sebagai berikut:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.4450 & -1.3734 \\ 0.0431 & 0.4402 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1.6503 \\ 4.5607 \end{bmatrix} u(k) \quad (4.11)$$

### 4.2.3 Desain Kendali

Pada sub bab ini akan dijelaskan tentang formulasi fungsi objektif dan kendala batas dalam bentuk *quadratic programming*. Setelah diperoleh bentuk *quadratic programming*, akan dicari penyelesaian fungsi objektif beserta kendala menggunakan *software* MATLAB.

### Formulasi Plan Model

Suatu sistem diskrit diberikan sebagai berikut:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.12)$$

$$\bar{y}(k) = Cx(k) \quad (4.13)$$

Kendali dilakukan pada sudut kemudi sehingga perubahan sudut kemudi perlu diketahui dari waktu ke waktu selama proses perjalanan kendaraan (mobil). Oleh karena itu didefinisikan *increment input* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= u(k) - u(k-1) \\ u(k) &= u(k-1) + \Delta u(k)\end{aligned}\quad (4.14)$$

sehingga persamaan (4.12) menjadi

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + B(u(k-1) + \Delta u(k)) \\ x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-1) + B\Delta u(k)\end{aligned}$$

Diberikan horizon prediksi  $N_p$  dan horizon kontrol  $N_c$  dengan  $N_c = N_p$  maka diperoleh

$$\begin{aligned}x(k+1|k) &= Ax(k|k) + Bu(k|k) \\ &= Ax(k|k) + B(u(k-1|k) + \Delta u(k|k)) \\ &= Ax(k|k) + Bu(k-1|k) + B\Delta u(k|k) \\ x(k+2|k) &= Ax(k+1|k) + Bu(k+1|k) \\ &= Ax(k+1|k) + Bu(k|k) + B\Delta u(k+1|k) \\ &= Ax(k+1|k) + Bu(k-1|k) + B\Delta u(k|k) + \\ &\quad B\Delta u(k+1|k) \\ &\vdots \\ x(k+N_p|k) &= Ax(k+N_p-1|k) + Bu(k+N_p-1|k) \\ &= Ax(k+N_p-1|k) + Bu(k-1|k) + \\ &\quad B\Delta u(k|k) + \cdots + B\Delta u(k+N_p-1|k)\end{aligned}$$

dengan prediksi output sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(k|k) &= Cx(k|k) \\
 \hat{y}(k+1|k) &= Cx(k+1|k) \\
 \hat{y}(k+2|k) &= Cx(k+2|k) \\
 &\vdots \\
 \hat{y}(k+N_p|k) &= Cx(k+N_p|k)
 \end{aligned}$$

### Formulasi Fungsi Objektif

Bentuk umum dari fungsi objektif diberikan sebagai berikut:

$$J = \sum_{i=1}^{N_p} \|\hat{r}(k+i|k) - \hat{y}(k+i|k)\|_{Q(i)}^2 + \sum_{i=0}^{N_c-1} \|\Delta\hat{u}(k+i|k)\|_{R(i)}^2$$

dengan  $N_c = N_p$ , sehingga diperoleh bentuk fungsi objektif sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{i=1}^{N_p} \|\hat{r}(k+i|k) - \hat{y}(k+i|k)\|_{Q(i)}^2 + \sum_{i=0}^{N_p-1} \|\Delta\hat{u}(k+i|k)\|_{R(i)}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{N_p} \|\hat{r}(k+i|k) - \hat{y}(k+i|k)\|_{Q(i)}^2 + \|\Delta\hat{u}(k+i-1|k)\|_{R(i)}^2 \\
 &= \|\hat{r}(k+1|k) - \hat{y}(k+1|k)\|_{Q(1)}^2 + \|\hat{r}(k+2|k) - \hat{y}(k+2|k)\|_{Q(2)}^2 \\
 &\quad + \cdots + \|\hat{r}(k+N_p|k) - \hat{y}(k+N_p|k)\|_{Q(N_p)}^2 + \|\Delta\hat{u}(k|k)\|_{R(0)}^2 + \\
 &\quad \|\Delta\hat{u}(k+1|k)\|_{R(1)}^2 + \cdots + \|\Delta\hat{u}(k+N_p-1|k)\|_{R(N_p-1)}^2
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\|\hat{r}(k+i|k) - \hat{y}(k+i|k)\|_{Q_{(i)}}^2 &= (\hat{r}(k+i|k) - \hat{y}(k+i|k))^T Q_{(i)} \\
&\quad (\hat{r}(k+i|k) - \hat{y}(k+i|k)) \\
&= \hat{r}(k+i|k)^T Q_{(i)} \hat{r}(k+i|k) - \\
&\quad 2\hat{y}(k+i|k)^T Q_{(i)} \hat{r}(k+i|k) + \\
&\quad \hat{y}(k+i|k)^T Q_{(i)} \hat{y}(k+i|k)
\end{aligned}$$

maka fungsi objektif menjadi

$$\begin{aligned}
J &= \hat{r}(k+1|k)^T Q_{(1)} \hat{r}(k+1|k) - 2\hat{y}(k+1|k)^T Q_{(1)} \hat{r}(k+1|k) + \\
&\quad \hat{y}(k+1|k)^T Q_{(1)} \hat{y}(k+1|k) + \hat{r}(k+2|k)^T Q_{(2)} \hat{r}(k+2|k) - \\
&\quad 2\hat{y}(k+2|k)^T Q_{(2)} \hat{r}(k+2|k) + \hat{y}(k+2|k)^T Q_{(2)} \hat{y}(k+2|k) \\
&\quad + \cdots + \hat{r}(k+N_p|k)^T Q_{(N_p)} \hat{r}(k+N_p|k) - 2\hat{y}(k+2|k)^T \\
&\quad Q_{(N_p)} \hat{r}(k+N_p|k) + \hat{y}(k+N_p|k)^T Q_{(N_p)} \hat{y}(k+N_p|k) + \\
&\quad \Delta\hat{u}(k|k)^T R_{(0)} \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k)^T R_{(1)} \Delta\hat{u}(k+1|k) \\
&\quad + \cdots + \Delta\hat{u}(k+N_p-1|k)^T R_{(N_p-1)} \Delta\hat{u}(k+N_p-1|k) \\
&= \hat{r}(k+1|k)^T Q_{(1)} \hat{r}(k+1|k) - 2(Cx(k+1|k))^T Q_{(1)} \hat{r}(k+1|k) + \\
&\quad (Cx(k+1|k))^T Q_{(1)} Cx(k+1|k) + \hat{r}(k+2|k)^T Q_{(2)} \hat{r}(k+2|k) - \\
&\quad 2(Cx(k+2|k))^T Q_{(2)} \hat{r}(k+2|k) + (Cx(k+2|k))^T Q_{(2)} C \\
&\quad x(k+2|k) + \cdots + \hat{r}(k+N_p|k)^T Q_{(N_p)} \hat{r}(k+N_p|k) - 2 \\
&\quad (Cx(k+2|k))^T Q_{(N_p)} \hat{r}(k+N_p|k) + (Cx(k+N_p|k))^T Q_{(N_p)} \\
&\quad Cx(k+N_p|k) + \Delta\hat{u}(k|k)^T R_{(0)} \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k)^T R_{(1)} \\
&\quad \Delta\hat{u}(k+1|k) + \cdots + \Delta\hat{u}(k+N_p-1|k)^T R_{(N_p-1)} \\
&\quad \Delta\hat{u}(k+N_p-1|k)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
J = & \hat{r}(k+1|k)^T Q_{(1)} \hat{r}(k+1|k) + \hat{r}(k+2|k)^T Q_{(2)} \hat{r}(k+2|k) + \cdots + \\
& \hat{r}(k+N_p|k)^T Q_{(N_p)} \hat{r}(k+N_p|k) + \Delta \hat{u}(k|k)^T R_{(0)} \Delta \hat{u}(k|k) + \\
& x(k+1|k)^T C^T Q_{(1)} C x(k+1|k) + \Delta \hat{u}(k+1|k)^T R_{(1)} \\
& \Delta \hat{u}(k+1|k) + x(k+2|k)^T C^T Q_{(2)} C x(k+2|k) + \cdots + \\
& \Delta \hat{u}(k+N_p-1|k)^T R_{(N_p-1)} \Delta \hat{u}(k+N_p-1|k) + x(k+N_p|k)^T \\
& C^T Q_{(N_p)} C x(k+N_p|k) - 2x(k+1|k)^T C^T Q_{(1)} \hat{r}(k+1|k) - \\
& 2x(k+2|k)^T C^T Q_{(2)} \hat{r}(k+2|k) - 2x(k+2|k)^T C^T Q_{(N_p)} \\
& \hat{r}(k+N_p|k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J = & \begin{bmatrix} \hat{r}(k+1|k) \\ \hat{r}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{r}(k+N_p|k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{N_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}(k+1|k) \\ \hat{r}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{r}(k+N_p|k) \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ x(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_p-1|k) \\ x(k+N_p|k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C^T Q_1 C & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{N_p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C^T Q_{N_p} C \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ x(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_p-1|k) \\ x(k+N_p|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ x(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_p-1|k) \\ x(k+N_p|k) \end{bmatrix}^T \\
& \begin{bmatrix} 0 \\ -2C^T Q_1 \hat{r}(k+1|k) \\ \vdots \\ 0 \\ -2C^T Q_{N_p} \hat{r}(k+N_p|k) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Misalkan bahwa

$$j_{3N_p \times 1} = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ x(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_p-1|k) \\ x(k+N_p|k) \end{bmatrix}, F_{3N_p \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2C^T Q_1 \hat{r}(k+1|k) \\ \vdots \\ 0 \\ -2C^T Q_{N_p} \hat{r}(k+N_p|k) \end{bmatrix}$$

$$E_{3N_p \times 3N_p} = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C^T Q_1 C & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{N_p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C^T Q_{N_p} C \end{bmatrix},$$

$$r_{N_p \times 1} = \begin{bmatrix} \hat{r}(k+1|k) \\ \hat{r}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{r}(k+N_p|k) \end{bmatrix}, \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{N_p} \end{bmatrix}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} J_{min} &= r^T \bar{Q} r + j^T E j + j^T F \\ &= r^T \bar{Q} r + \frac{1}{2} j^T (2E) j + j^T F \\ &= r^T \bar{Q} r + \frac{1}{2} j^T E' j + j^T F \end{aligned}$$

$r^T \bar{Q} r$  menghasilkan suatu konstanta yang jika diturunkan menghasilkan nilai nol maka fungsi objektif dapat hanya diwakili dengan:

$$J_{min} = \frac{1}{2} j^T E' j + j^T F$$

## Formulasi Kendala Batas

Diketahui suatu fungsi objektif

$$J_{min} = \frac{1}{2} j^T E' j + j^T F$$

dengan kendala batas diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Delta u^{min} &\leq \Delta u \leq \Delta u^{max} \\ u^{min} &\leq u \leq u^{max} \end{aligned}$$

Kendala-kendala batas tersebut akan diformulasikan ke dalam bentuk *quadratic programming* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Pj &\leq h \\ Yj &= b \end{aligned}$$

Formulasi kendala batas diberikan sebagai berikut:

1. Formulasi kendala *increment input*

$$\begin{aligned} \Delta u^{min} &\leq \Delta u(k + i|k) \leq \Delta u^{max} \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u(k + i|k) &\leq \begin{bmatrix} -\Delta u^{min} \\ \Delta u^{max} \end{bmatrix} \\ M_1 \Delta u(k + i|k) &\leq N_1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

dengan

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}, N_1 = \begin{bmatrix} -\Delta u^{min} \\ \Delta u^{max} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

## 2. Formulasi kendala input

Diketahui bahwa  $\Delta u(k|k) = u(k|k) - u(k-1|k)$  maka

$$\begin{aligned}
 u(k|k) &= \Delta u(k|k) + u(k-1|k) \\
 u(k+1|k) &= \Delta u(k+1|k) + u(k|k) \\
 &= \Delta u(k+1|k) + \Delta u(k|k) + u(k-1|k) \\
 u(k+2|k) &= \Delta u(k+2|k) + \Delta u(k+1|k) + \Delta u(k|k) + \\
 &\quad u(k-1|k) \\
 &\quad \vdots \\
 u(k+N_p-1|k) &= \Delta u(k+N_p-1|k) + \Delta u(k+N_p-2|k) \\
 &\quad + \cdots + \Delta u(k+1|k) + \Delta u(k|k) + \\
 &\quad u(k-1|k)
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+N_p-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k-1|k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} j$$

Misalkan bahwa

$$U = \begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+N_p-1|k) \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh

$$U = C_1 u(k-1|k) + C_2 j$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 u^{\min} &\leq u(k+i|k) \leq u^{\max} \\
 u^{\min} &\leq C_1 u(k-1|k) + C_2 j \leq u^{\max} \\
 \begin{bmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{bmatrix} & \quad j \leq \begin{bmatrix} -u^{\min} + C_1 u(k-1|k) \\ u^{\max} - C_1 u(k-1|k) \end{bmatrix} \\
 M_2 & \quad j \leq N_2 \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

dengan

$$M_2 = \begin{bmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -u^{\min} + C_1 u(k-1|k) \\ u^{\max} - C_1 u(k-1|k) \end{bmatrix}$$

Pertidaksamaan (4.15) dan(4.16) dapat dibentuk menjadi satu pertidaksamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_1 & 0 \\ M_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ x(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k|k + N_p - 1) \\ x(k + N_p|k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} N_1 \\ N_1 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

$$Pj \leq h \quad (4.17)$$

dengan

$$P = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_1 & 0 \\ M_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_1 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

Kendala batas persamaan akan dibentuk dari persamaan (4.15) dengan horizon prediksi  $N_p$  maka persamaan kendala diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} -B & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -B & -A & -B & I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -B & 0 & -B & -A & -B & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -B & 0 & -B & 0 & -B & 0 & \cdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ x(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_p-1|k) \\ x(k+N_p|k) \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} Ax(k|k) + Bu(k-1|k) \\ Bu(k-1|k) \\ Bu(k-1|k) \\ \vdots \\ Bu(k-1|k) \end{bmatrix} \\
 Yj = b \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{bmatrix} -B & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -B & -A & -B & I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -B & 0 & -B & -A & -B & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -B & 0 & -B & 0 & -B & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}, \\
 b &= \begin{bmatrix} Ax(k|k) + Bu(k-1|k) \\ Bu(k-1|k) \\ Bu(k-1|k) \\ \vdots \\ Bu(k-1|k) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Pada tugas akhir ini, diberikan nilai kendala batas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 -0.4987(rad) &\leq \Delta u \leq 0.4987(rad) \\
 -0.5386(rad) &\leq u \leq 0.5386(rad)
 \end{aligned}$$

### 4.3 Hasil Simulasi

Pada tahap ini dilakukan simulasi dengan nilai koefisien bobot  $Q = 100$  dan  $R = 1$ . Hal itu berarti bahwa fungsi objektif lebih mengutamakan prediksi output hasil kendali sesuai dengan referensi yang diberikan dan mengabaikan kenyamanan pengemudi meskipun terjadi perubahan sudut kemudi yang besar dalam waktu yang singkat. Selanjutnya akan disimulasikan beberapa kasus pada permasalahan kendali sudut kemudi pada mobil. Pada simulasi yang dilakukan, nilai awal variabel keadaan didefinisikan  $x_1(1) = -0.5$  m/s dan  $x_2(1) = 0$  rad/s. Selain itu juga didefinisikan nilai awal sudut kemudi yaitu  $u(1) = 0$  rad.

#### Pengaruh Jenis Lintasan dengan Nilai Horizon Prediksi yang Sama

Untuk mengetahui pengaruh jenis lintasan terhadap hasil pengendalian MPC dilakukan uji simulasi dengan lintasan yang berbeda. Parameter-parameter yang lain bernilai tetap. Simulasi dilakukan selama 60 detik dengan waktu *sampling* 0.1 detik.

#### Simulasi 1

Lintasan yang pertama menggunakan posisi awal dan akhir mobil yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_s &= [10 \quad 10 \quad 180 \quad 5] \\ p_f &= [1000 \quad 1500 \quad 0 \quad 5] \end{aligned}$$

dengan menggunakan algoritma pada bab 2 diperoleh panjang masing-masing jenis lintasan Dubins pada Tabel 4.2.

Berdasarkan tabel Tabel 4.2 diperoleh lintasan terpendek yaitu lintasan RSR dengan panjang 1796.3 m yang dianggap sebagai lintasan optimal. Adapun bentuk lintasan diberikan

Tabel 4.2: Tabel Panjang Lintasan Dubins Simulasi 1

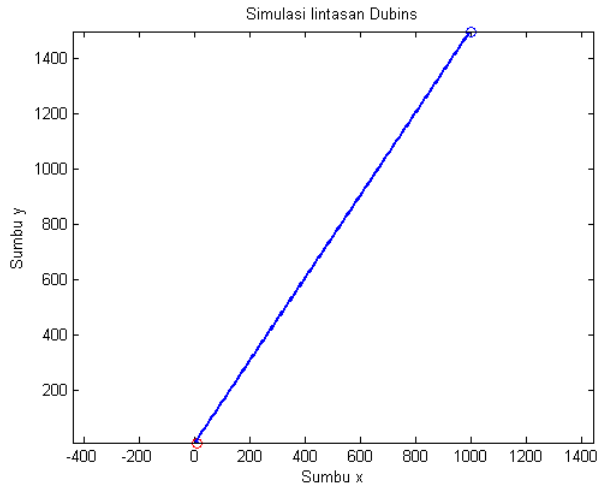
jenis lintasan	panjang lintasan (m)
RSR	1796.3
LSL	1844.4
RSL	1826.2
LSR	1814.5

pada Gambar 4.5. Jari-jari putar minimum mobil bernilai kecil jika dibandingkan dengan panjang lintasan sehingga tidak terlihat bentuk lintasan di awal. Oleh karena itu dilakukan perbesaran gambar pada posisi awal dan akhir yang ditunjukkan pada Gambar 4.6. Pada gambar tersebut terlihat bahwa lintasan dimulai dengan berbelok ke kanan searah jarum jam(R) kemudian membentuk garis lurus(S) dan berbelok ke kanan searah arah jarum jam(R) sehingga diperoleh lintasan RSR.

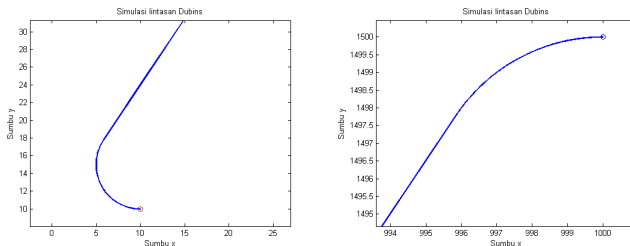
Hasil uji simulasi untuk nilai horizon prediksi  $N_p = 10$  menunjukkan bahwa sudut kemudi dan perubahan sudut kemudi mobil tidak melebihi batas yang diberikan seperti pada Gambar 4.7 dan Gambar 4.8. Pada Gambar 4.7 terlihat bahwa nilai sudut kemudi  $u$  bernilai mendekati 0 yang merepresentasikan mobil bergerak lurus dan pada beberapa nilai akhir sudut kemudi  $u$  bernilai negatif yang menunjukkan bahwa mobil berbelok ke kanan. Berdasarkan nilai sudut kemudi diperoleh bahwa mobil bergerak lurus kemudian berbelok ke kanan sesuai dengan referensi lintasan Dubins RSR.

Berdasarkan Gambar 4.9 terlihat bahwa selisih antara nilai reference perubahan sudut hadap mobil dan perubahan sudut hadap mobil hasil kendali bernilai kecil atau dapat dikatakan hampir sama namun pada beberapa titik di awal





Gambar 4.5: Lintasan Dubins jenis RSR



Gambar 4.6: Perbesaran Gambar Lintasan Dubins pada Posisi Awal (kiri) dan Posisi Akhir (kanan) Lintasan

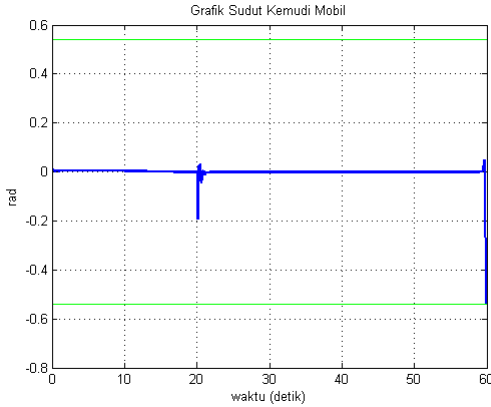
terdapat selisih yang cukup besar karena adanya pengaruh *tracking* lintasan.

## Simulasi 2

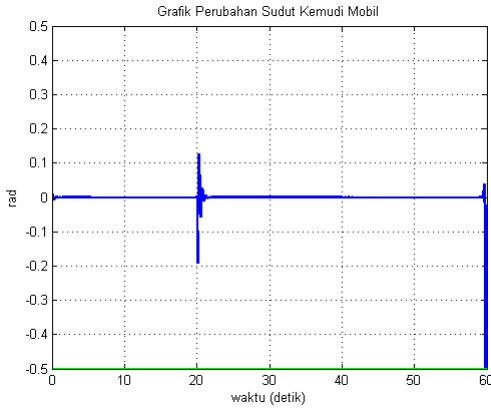
Lintasan yang kedua menggunakan posisi awal dan akhir mobil yang didefinisikan sebagai berikut:

$$p_s = [1100 \quad 1150 \quad 180 \quad 5]$$

$$p_f = [2600 \quad 2065 \quad 180 \quad 5]$$



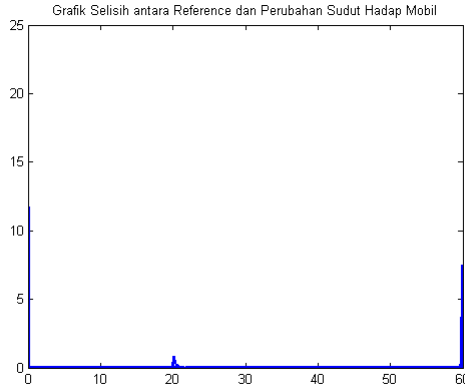
Gambar 4.7: Hasil Kendali Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins RSR



Gambar 4.8: Hasil Kendali Perubahan Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins RSR

dengan menggunakan algoritma pada bab 2 diperoleh panjang masing-masing jenis lintasan Dubins pada Tabel 4.3.

Berdasarkan tabel Tabel 4.3 diperoleh lintasan terpendek

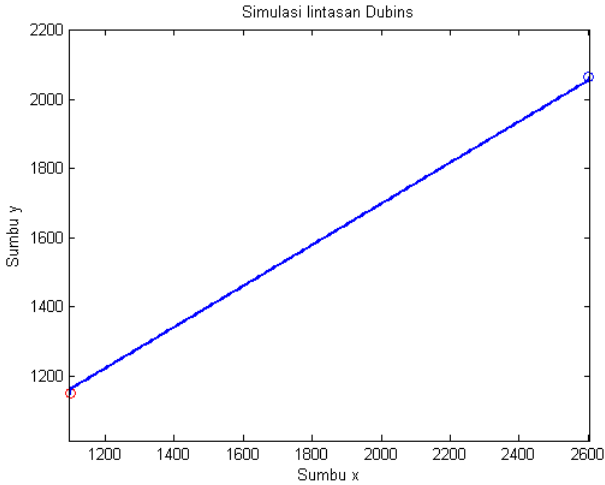


Gambar 4.9: Selisih antara Reference dan Perubahan Sudut Hadap Mobil pada Lintasan Dubins RSR

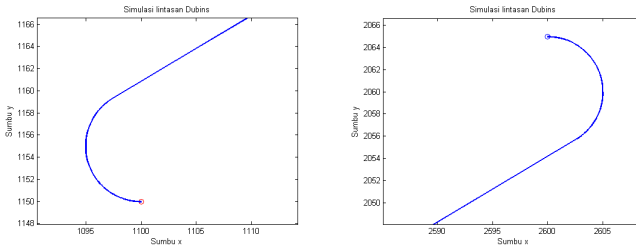
Tabel 4.3: Tabel Panjang Lintasan Dubins Simulasi 2

jenis lintasan	panjang lintasan (m)
RSR	1788.5
LSL	1788.5
RSL	1777.9
LSR	1825.1

yaitu lintasan RSL dengan panjang 1777.9 m yang dianggap sebagai lintasan optimal. Adapun bentuk lintasan diberikan pada Gambar 4.10. Jari-jari putar minimum mobil bernilai kecil jika dibandingkan dengan panjang lintasan sehingga tidak terlihat bentuk lintasan di awal. Oleh karena itu dilakukan perbesaran gambar pada posisi awal dan akhir yang ditunjukkan pada Gambar 4.11. Pada gambar tersebut terlihat bahwa lintasan dimulai dengan berbelok ke kanan searah jarum jam(R) kemudian membentuk garis lurus(S) dan berbelok ke kiri berlawanan arah jarum jam(L) sehingga



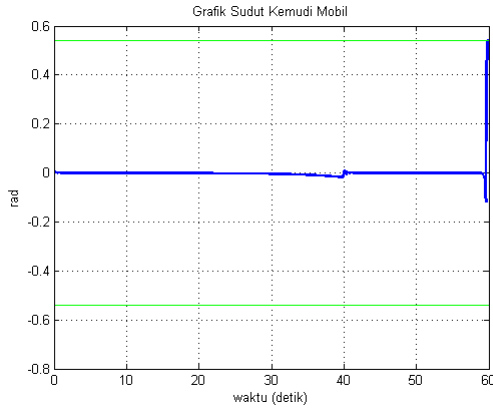
Gambar 4.10: Lintasan Dubins jenis RSL



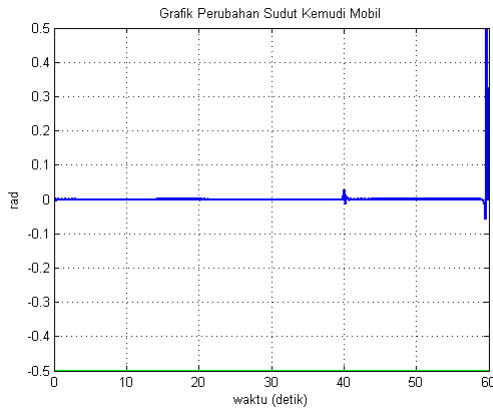
Gambar 4.11: Perbesaran Gambar Lintasan Dubins pada Posisi Awal (kiri) dan Posisi Akhir (kanan) Lintasan

diperoleh lintasan RSL.

Hasil uji simulasi untuk nilai horizon prediksi  $N_p = 10$  menunjukkan bahwa sudut kemudi dan perubahan sudut kemudi mobil tidak melebihi batas yang diberikan seperti pada Gambar 4.12 dan Gambar 4.13. Pada Gambar 4.12 terlihat bahwa nilai sudut kemudi  $u$  bernilai mendekati 0 yang merepresentasikan mobil bergerak lurus dan pada beberapa nilai akhir sudut kemudi  $u$  bernilai positif yang menunjukkan



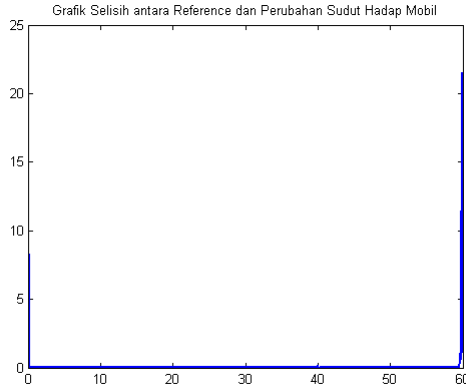
Gambar 4.12: Hasil Kendali Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins RSL



Gambar 4.13: Hasil Kendali Perubahan Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins RSL

bahwa mobil berbelok ke kiri. Berdasarkan nilai sudut kemudi diperoleh bahwa mobil bergerak lurus dan kemudian berbelok ke kiri sesuai dengan referensi lintasan Dubins RSL.

Berdasarkan Gambar 4.14 terlihat bahwa selisih antara



Gambar 4.14: Selisih antara Reference dan Sudut Hadap Mobil pada Lintasan Dubins RSL

nilai reference perubahan sudut hadap mobil dan perubahan sudut hadap mobil hasil kendali bernilai kecil atau dapat dikatakan hampir sama namun pada beberapa titik di awal terdapat selisih yang cukup besar karena adanya pengaruh *tracking* lintasan.

### Simulasi 3

Lintasan yang ketiga menggunakan posisi awal dan akhir mobil yang didefinisikan sebagai berikut:

$$p_s = [10 \quad 1200 \quad 120 \quad 5]$$

$$p_f = [200 \quad 10 \quad 45 \quad 5]$$

dengan menggunakan algoritma pada bab 2 diperoleh panjang masing-masing jenis lintasan Dubins pada Tabel 4.4.

Berdasarkan tabel Tabel 4.4 diperoleh lintasan terpendek yaitu lintasan LSL dengan panjang 1224.1 m yang dianggap sebagai lintasan optimal. Adapun bentuk lintasan diberikan pada Gambar 4.15. Jari-jari putar minimum mobil bernilai

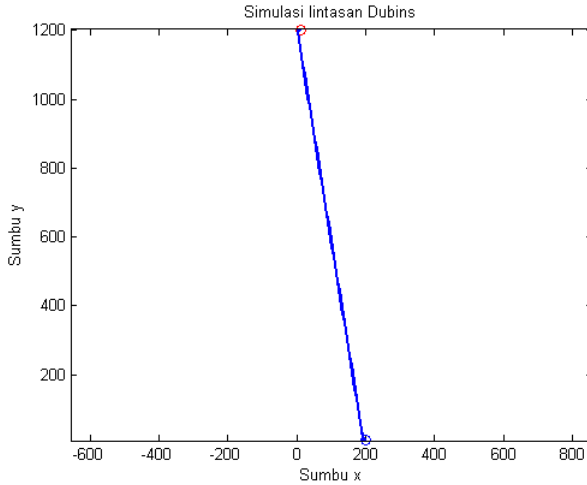
Tabel 4.4: Tabel Panjang Lintasan Dubins Simulasi 3

jenis lintasan	panjang lintasan (m)
RSR	1248.9
LSL	1224.1
RSL	1231.5
LSR	1263.6

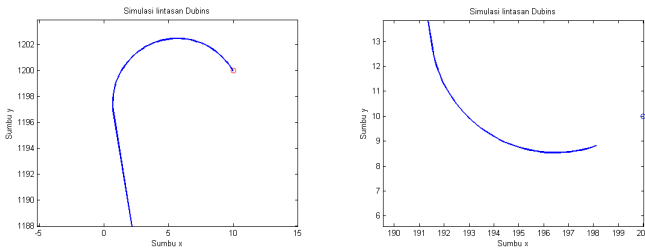
kecil jika dibandingkan dengan panjang lintasan sehingga tidak terlihat bentuk lintasan di awal. Oleh karena itu dilakukan perbesaran gambar pada posisi awal dan akhir yang ditunjukkan pada Gambar 4.16. Pada gambar tersebut terlihat bahwa lintasan dimulai dengan berbelok ke kiri berlawanan arah jarum jam(L) kemudian membentuk garis lurus(S) dan berbelok ke kiri berlawanan arah jarum jam(L) sehingga diperoleh lintasan LSL.

Hasil uji simulasi untuk nilai horizon prediksi  $N_p = 10$  menunjukkan bahwa sudut kemudi dan perubahan sudut kemudi mobil tidak melebihi batas yang diberikan seperti pada Gambar 4.17 dan Gambar 4.18. Pada Gambar 4.17 terlihat bahwa nilai sudut kemudi  $u$  bernilai mendekati 0 yang merepresentasikan mobil bergerak lurus dan pada beberapa nilai akhir sudut kemudi  $u$  bernilai positif yang menunjukkan bahwa mobil berbelok ke kiri. Berdasarkan nilai sudut kemudi diperoleh bahwa mobil bergerak lurus dan kemudian berbelok ke kiri sesuai dengan referensi lintasan Dubins LSL.

Berdasarkan Gambar 4.19 terlihat bahwa selisih antara nilai reference perubahan sudut hadap mobil dan perubahan sudut hadap mobil hasil kendali bernilai kecil atau dapat dikatakan hampir sama namun pada beberapa titik di awal terdapat selisih yang cukup besar karena adanya pengaruh *tracking* lintasan.



Gambar 4.15: Lintasan Dubins jenis LSL



Gambar 4.16: Perbesaran Gambar Lintasan Dubins pada Posisi Awal (kiri) dan Posisi Akhir (kanan) Lintasan

#### Simulasi 4

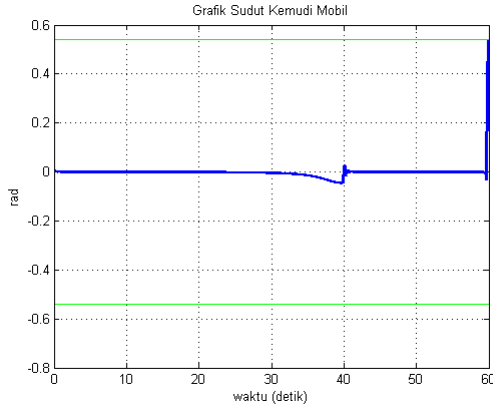
Lintasan yang ketiga menggunakan posisi awal dan akhir mobil yang didefinisikan sebagai berikut:

$$p_s = [1500 \ 0 \ 90 \ 5]$$

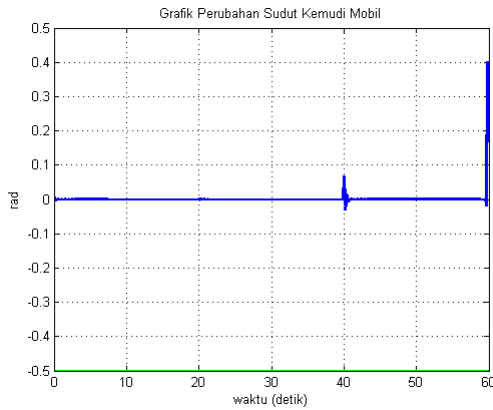
$$p_f = [0 \ 0 \ 30 \ 5]$$

dengan menggunakan algoritma pada bab 2 diperoleh panjang masing-masing jenis lintasan Dubins pada Tabel 4.5.



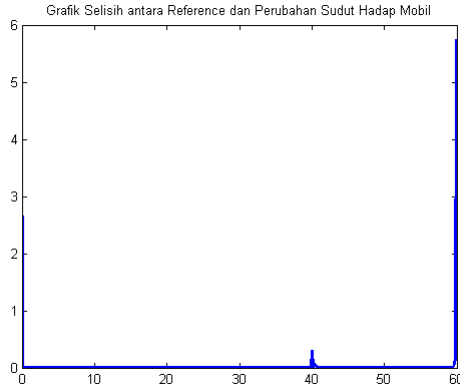


Gambar 4.17: Hasil Kendali Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins LSL



Gambar 4.18: Hasil Kendali Perubahan Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins LSL

Berdasarkan tabel Tabel 4.5 diperoleh lintasan terpendek yaitu lintasan LSR dengan panjang 1513.5 m yang dianggap sebagai lintasan optimal. Adapun bentuk lintasan diberikan



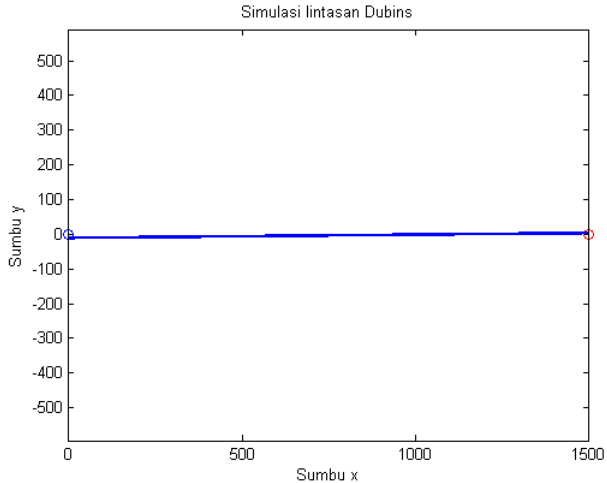
Gambar 4.19: Selisih antara Reference dan Sudut Hadap Mobil pada Lintasan Dubins LSL

Tabel 4.5: Tabel Panjang Lintasan Dubins Simulasi 4

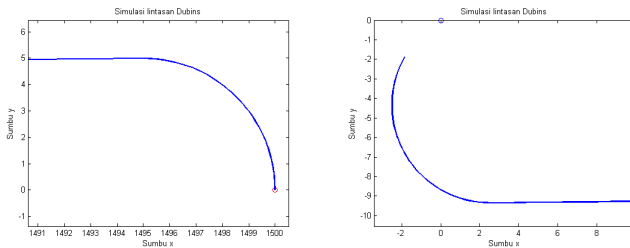
jenis lintasan	panjang lintasan (m)
RSR	1539.2
LSL	1523.7
RSL	1549.5
LSR	1513.5

pada Gambar 4.20. Jari-jari putar minimum mobil bernilai kecil jika dibandingkan dengan panjang lintasan sehingga tidak terlihat bentuk lintasan di awal. Oleh karena itu dilakukan perbesaran gambar pada posisi awal dan akhir yang ditunjukkan pada Gambar 4.21. Pada gambar tersebut terlihat bahwa lintasan dimulai dengan berbelok ke kiri berlawanan arah jarum jam(L) kemudian membentuk garis lurus(S) dan berbelok ke kanan searah jarum jam(R) sehingga diperoleh lintasan LSR.

Hasil uji simulasi untuk nilai horizon prediksi  $N_p =$



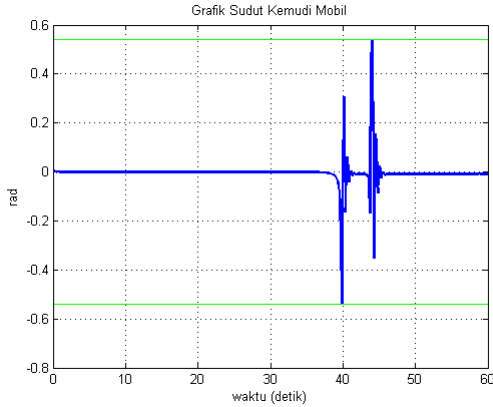
Gambar 4.20: Lintasan Dubins jenis LSR



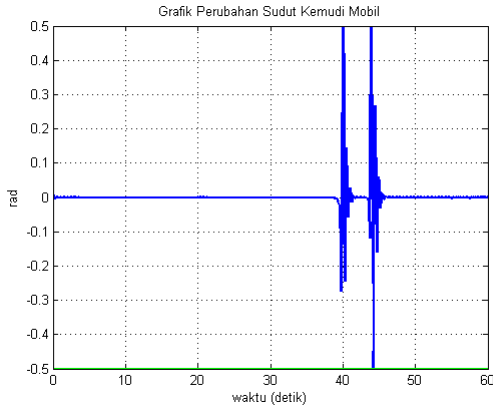
Gambar 4.21: Perbesaran Gambar Lintasan Dubins pada Posisi Awal (kiri) dan Posisi Akhir (kanan) Lintasan

10 menunjukkan bahwa sudut kemudi dan perubahan sudut kemudi mobil tidak melebihi batas yang diberikan seperti pada Gambar 4.22 dan Gambar 4.23. Pada Gambar 4.22 terlihat bahwa terjadi osilasi pada nilai sudut kemudi  $u$  hal ini disebabkan adanya perbedaan antara reference dan perubahan sudut hadap mobil sebenarnya. Pada kasus ini mobil bergerak sesuai dengan lintasan LSR pada bagian yang lurus saja.

Berdasarkan Gambar 4.24 terlihat bahwa selisih antara

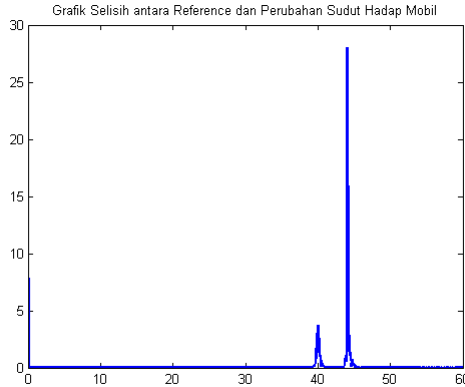


Gambar 4.22: Hasil Kendali Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins LSR



Gambar 4.23: Hasil Kendali Perubahan Sudut Kemudi pada Lintasan Dubins LSR

nilai reference perubahan sudut hadap mobil dan perubahan sudut hadap mobil hasil kendali bernilai kecil atau dapat dikatakan hampir sama namun pada beberapa titik di waktu  $t = 40$  terdapat selisih yang cukup besar karena adanya



Gambar 4.24: Selisih antara Reference dan Sudut Hadap Mobil pada Lintasan Dubins LSR

pengaruh *tracking* lintasan.

### Pengaruh Nilai Horizon Prediksi pada Jenis Lintasan yang Sama

Untuk mengetahui pengaruh nilai horizon prediksi terhadap hasil pengendalian MPC dilakukan uji simulasi dengan nilai horizon prediksi yang berbeda yaitu 10, 50 dan 100. Setiap nilai horizon prediksi disimulasikan dengan jenis lintasan yang sama yaitu lintasan dengan posisi awal dan akhir mobil didefinisikan sebagai berikut:

$$p_s = [1100 \quad 1150 \quad 180 \quad 5]$$

$$p_f = [2600 \quad 2065 \quad 180 \quad 5]$$

yang menghasilkan bentuk dan panjang lintasan seperti pada Simulasi 2 sebelumnya. Parameter-parameter yang lain bernilai tetap. Simulasi dilakukan selama 60 detik dengan waktu *sampling* 0.1 detik. Untuk mengetahui pengaruh perubahan nilai  $N_p$  maka dihitung nilai *Root-Mean-Square-Error*(RMSE) dan waktu komputasi masing-masing nilai  $N_p$ .

Hasilnya diberikan pada Tabel 4.6 yang menunjukkan

Tabel 4.6: Tabel Nilai RMSE serta Waktu Komputasi dari Setiap Nilai  $N_p$

$N_p$	RMSE	Waktu Komputasi
10	0.00704210296467999	17.6487602346906 detik
50	0.00706729399940004	244.029521069138 detik
100	0.00706729399939593	357.740033058028 detik

bahwa terjadi perbedaan nilai RMSE dan waktu komputasi antara  $N_p = 10$  dan  $N_p = 50$  sedangkan untuk  $N_p = 50$  dan  $N_p = 100$  hanya terjadi perbedaan nilai yang kecil sedangkan perbedaan waktu komputasi cukup besar. Jika dilihat dari besar kecil nilai RMSE dan waktu komputasi maka pada penelitian ini  $N_p = 10$  lebih baik dibanding dua nilai  $N_p$  yang lain.

## BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari analisis kendali sudut kemudi pada mobil untuk pelacakan lintasan Dubins dengan menggunakan metode *Model Predictive Control* (MPC) beserta simulasinya. Selain itu diberikan saran atau rekomendasi untuk penelitian selanjutnya.

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis kendali menggunakan MPC dan simulasinya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Kendali dengan menggunakan metode *Model Predictive Control* (MPC) dapat diterapkan dengan baik pada kendali sudut kemudi mobil untuk pelacakan lintasan Dubins. Hal tersebut dapat dilihat dari simulasi kendali pada keempat jenis lintasan yang menghasilkan nilai sudut kemudi dan perubahan sudut kemudi berada pada selang yang ditentukan.
2. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pada penelitian ini yang menggunakan koefisien bobot  $Q = 100$  dan  $R = 1$ , nilai  $N_p = 10$  lebih baik dibandingkan dengan nilai  $N_p = 50$  dan  $N_p = 100$  jika dilihat dari besar kecil nilai RMSE dan waktu komputasi masing-masing  $N_p$ .

### 5.2 Saran

Saran yang penulis berikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Pada tugas akhir ini, penulis menggunakan lintasan Dubins yang bebas dari hambatan sehingga untuk penelitian selanjutnya bisa ditambahkan berbagai hambatan dalam penentuan lintasan Dubins.
2. Reference lintasan menggunakan reference  $x$ ,  $y$  dan  $\psi$  yang menyatakan posisi dan sudut hadap untuk merepresentasikan lintasan yang digunakan serta menggunakan model non linear untuk merepresentasikan gerak mobil yang lebih baik.



## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Rajamani, R. (2012). **Vehicle Dynamic and Control**. Springer.
- [2] Dewi, N. K. (2010). **Perencanaan Lintasan Menggunakan Geometri Dubins Pada Pesawat Udara Nir Awak (PUNA)**. Tugas Akhir Jurusan Matematika. Surabaya, Jawa Timur, Indonesia: ITS.
- [3] Tsourdos, A., White, B., and Shanmugavel, M. (2011). **Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles**. WILEY.
- [4] Mu'alifah, N., Herisman, I., dan Subchan (2013). **Perencanaan Lintasan Dubins-Geometri pada Kapal Tanpa Awak untuk Menghindari Halangan Statis**. JURNAL SAINS DAN SENI Vol. 1, No. 1, halaman:1-6.
- [5] Sorbo, H. E. (2013). **Vehicle Collision Avoidance System**. Thesis Department of Engineering Cybernetics. Norwegian: NTNU.
- [6] Camacho, E. F. and Bordous, C. (1995). **Model Predictive Control in the Process Industry**. Springer: Verlag London.
- [7] S.J. Jeon, C.M. Kang, S. -H. Lee and C. C. Chung. (2015). **GPS Waypoint Fitting and Tracking Using Model Predictive Control**. IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV), pages: 298-303.

- [8] Maulana, D. A. (2011). **Penerapan Model Prediktif Kontrol MPC Pada Desain Pengendalian Robot Mobil Beroda Empat**. Tugas Akhir Jurusan Matematika. Surabaya, Jawa Timur, Indonesia: ITS.
- [9] Jazar, R., N. (2009). **Vehicle Dynamics:Theory and Applications**. Springer: Australia.
- [10] Subiono. (2013). **Sistem Linear**. Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Sukolilo, Surabaya, Indonesia.
- [11] Ogata, K. (1995). **Discrete-Time Control System:Second Edition**. Prentice-Hall, Inc:New Jersey.
- [12] Wang, L. (2009). **Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB**. Springer Book, ISBN 978-1-84882-330-3.

## LAMPIRAN A

### Biodata Penulis



Penulis bernama Dian Kusuma Rahma Putri, yang biasa dikenal sebagai Puput. Penulis dilahirkan di Sidoarjo, 23 Maret 1994. Penulis merupakan putri pertama dari pasangan Rahmat Teguh Widjayanto dan Didik Marsumi. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Thoriqussalam (1998-2000), SDN Sidokare II (2000-2002), SDN Kedung Bendo I (2002-2006), SMP Negeri 1 Candi Sidoarjo (2006-2009) dan SMA Negeri 1 Sidoarjo (2009-2012). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya pada tahun 2012 dengan NRP 1212 100 001. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selama kuliah, penulis memiliki pengalaman berorganisasi di KM ITS sebagai staf Departemen Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa HIMATIKA ITS (2013-2015). Selain itu, penulis juga aktif dalam pelatihan kemahasiswaan, yaitu LKMM Pra-TD FMIPA ITS dan LKMM TD HIMATIKA ITS. Disamping itu, sejak semester V penulis terdaftar sebagai asisten dosen mata kuliah Kalkulus I dan Kalkulus II.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: [diankrp23@gmail.com](mailto:diankrp23@gmail.com)