TESIS SS14-2501

PENDUGAAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS *BIVARIATE GENERALIZED POISSON REGRESSION*

(Studi Kasus: Faktor-faktor yang Berpengaruh Terhadap Kematian Bayi dan Ibu di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013)

DIAN KUSUMA WARDANI
NRP. 1314201206

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Purhadi, M.Sc
Dr. Wahyu Wibowo, M.Si

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

TESIS SS14-2501

Parameter Estimation and Hypothesis Testing on Bivariate Generalized Poisson Regression

(Case Study: Factors Influencing Infant Death and Mothers Death in East Java 2013)

DIAN KUSUMA WARDANI
NRP. 1314201206

SUPERVISOR
Dr. Purhadi, M.Sc
Dr. Wahyu Wibowo, M.Si

PROGRAM OF MAGISTER
DEPARTMENT OF STATISTICS
FACULTY OF MATEMATICS AND NATURAL SCIENCE
INSTITUT OF TECHNOLOGY SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

PENDUGAAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS
BIVARIATE GENERALIZED POISSON REGRESSION
(Studi Kasus: Faktor-faktor yang Berpengaruh Terhadap Kematian Bayi dan Ibu di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013)

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:
DIAN KUSUMA WARDANI
NRP. 1314201206

Tanggal Ujian : 19 Juli 2016
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh :

1. **Dr. Purhadi, M.Sc.** **(Pembimbing I)**
   NIP. 19620204 198701 1 001

2. **Dr. Wahyu Wibowo, M.Si.** **(Pembimbing II)**
   NIP. 19740328 199802 1 001

3. **Dr. I Nyoman Latra, MS.** **(Penguji)**
   NIP. 19511130 197901 1 001

4. **Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si** **(Penguji)**
   NIP. 19650603 198903 1 003

Direktur Program Pascasarjana,

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
PROGRAM PASCASARJANA

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

PENDUGAAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS *BIVARIATE GENERALIZED POISSON REGRESSION*

(Studi Kasus Jumlah Kematian Bayi dan Kematian Ibu di Provinsi Jawa Timur Tahun 2013)

Nama Mahasiswa	:	Dian Kusuma Wardani
NRP	:	1314201206
Dosen Pembimbing	:	Dr. Purhadi, M.Sc
		Dr. Wahyu Wibowo, M.Si

ABSTRAK

Regresi *Poisson* merupakan metode regresi yang digunakan untuk menganalisis data variabel respon berupa data diskrit. Terdapat asumsi yang harus dipenuhi yaitu nilai rata-rata dan ragam dari variabel respon harus sama. Apabila asumsi ini tidak terpenuhi akan menghasilkan kesimpulan yang tidak valid. Pelanggaran asumsi terjadi jika nilai ragam lebih besar daripada nilai rata-rata sering disebut overdispersi sedangkan nilai ragam kurang dari nilai rata-rata disebut underdispersi. Dalam penelitian ini data yang digunakan adalah data kematian bayi dan kematian ibu di Provinsi Jawa Timur Tahun 2013. Penerapan pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kematian bayi dan jumlah kematian ibu di Provinsi Jawa Timur Tahun 2013 melalui pendekatan *Bivariate Generalized Poisson Regression*. Pendugaan parameter *Bivariate Generalized Poisson Regression* menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan pengujian hipotesis menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Penerapan model *Bivariate Generalized Poisson Regression* yang terbentuk variabel prediktor yang memberikan pengaruh signifikan terhadap jumlah kasus kematian bayi di Jawa Timur tahun 2013 adalah adalah variabel persentase persalinan oleh tenaga kesehatan, persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3, persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 17 tahun dan persentase ibu hamil melaksanakan program K4. Sedangkan model *Bivariate Generalized Poisson Regression* yang terbentuk variabel prediktor yang memberikan pengaruh signifikan terhadap jumlah kasus kematian ibu di Jawa Timur tahun 2013 adalah variabel persentase komplikasi kebidanan yang ditangani dan persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 17 tahun.

Kata Kunci : *overdispersi, bivariate generalized poisson regression, MLE, MLRT*

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

PARAMETER ESTIMATION AND HYPOTHESES TESTING ON *BIVARIATE GENERALIZED POISSON REGRESSION*

(Case Study : Factors Influencing Infant Death and Mothers Death in East Java 2013)

Name	:	Dian Kusuma Wardani
Student Id. Number	:	1314201206
Supervisor	:	Dr. Purhadi, M.Sc
		Dr. Wahyu Wibowo, M.Si

ABSTRACT

Poisson regression is regression method used to analyze response variable which is discrete. Equality of mean and variance (equidispersion) are the assumption that must be fulfilled in this model. If assumption is violated, the conclusion would be not valid. Wrong assumption occurs if variance greater than mean and is often called (overdispersion). But if variance less than mean it is called (underdispersion). There is no data used with excessive zero value on the response variable, therefore this research uses Bivariate Generalized Poisson Regression. Parameter estimation of Bivariate Generalized Poisson Regression is done by using Maximum Likelihood Estimation (MLE) and hypotheses testing is using *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). The application of Bivariate Generalized Poisson Regression model formed predictor variable that has significant impact on the number of cases of infant mortality in East Java 2013 is percentage of deliveries by skilled health personel, the percentage of pregnant women receiving tablets Fe3, the percentage of women married by age of first marriage under the age of 17 year and the percentage of pregnant women used K4 program. While the Bivariate Generalized Poisson Regression model formed predictor variables which has significant impact on the number of maternal deaths in East Java 2013 is variable percentage of obstetric complications addressed and the percentage of women married by age of first marriage under the age of 17 years.

Key Word : *overdispersion, bivariate generalized poisson regression, MLE, MLRT*

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR LAMPIRAN

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR GAMBAR

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi merupakan metode statistika yang paling sering digunakan dalam bidang ilmu pengetahuan. Analisis ini bertujuan untuk memodelkan hubungan antara dua variabel, yang terdiri dari variabel prediktor dan variabel respon. Metode yang sering digunakan dalam pendugaan parameter regresi adalah Metode Kuadrat Terkecil (MKT), yang memiliki prinsip meminimumkan jumlah kuadrat dari sisaan. Pada umumnya analisis regresi digunakan pada variabel respon yang bertipe kontinu, tetapi sering dijumpai variabel respon yang bertipe diskrit. Variabel respon bertipe diskrit berupa data *count* yaitu data yang non-negatif yang menyatakan banyak kejadian dalam interval waktu, ruang atau volume tertentu. Data dari suatu peristiwa akan mengikuti distribusi poisson jika peristiwa tersebut jarang sekali terjadi dalam suatu ruang sampel yang besar (Cameron dan Trivedi, 1998). Pemodelan bertipe diskrit berupa variabel respon data *count* yang berdistribusi *Poisson* disebut regresi *Poisson.*

Regresi *poisson* merupakan metode regresi yang digunakan untuk menganalisis data yang variabel respon berupa data bertipe diskrit. Terdapat asumsi yang harus dipenuhi yaitu nilai rata-rata dan ragam dari variabel respon harus sama (Myers, Montgomey, Vining dan Robinson, 2010). Apabila asumsi ini tidak terpenuhi akan menghasilkan kesimpulan yang tidak valid. Pelanggaran asumsi terjadi jika nilai ragam lebih besar daripada nilai rata-rata disebut overdispersi sedangkan nilai ragam kurang dari nilai rata-rata disebut underdispersi. Analisis regresi *Poisson* terbagi menjadi 3 yaitu regresi *Poisson* univariat, bivariat dan multivariat. Regresi *Poisson* univariat digunakan pada data yang memiliki satu buah variabel respon sedangkan regresi *Poisson* bivariat digunakan pada data yang memiliki dua buah variabel respon dalam bentuk data *count* dengan nilai korelasi yang tinggi. Regresi *Poisson* multivariat digunakan pada data yang memiliki lebih dari dua buah variabel respon dalam bentuk data *count* dengan korelasi tinggi.

Vernic (1997) membahas *Bivariate Generalized Poisson Distribution* membandingkan dengan dua kombinasi distribusi *poisson* lain. Selanjutnya Famoye, Wulu dan Singh (2004) membahas *Generalized Poisson Regression* . Pada pengujian parameter dispersi dan kebaikan model *Generalized Poisson Regression* lebih baik dibandingkan dengan metode regresi lainnya. Ismail dan Jemain (2005) membahas *Generalized Poisson Regression* yang terjadi pelanggaran asumsi rata-rata dan ragam yang sama. Pelanggaran asumsi tersebut yaitu ragam lebih besar daripada rata-rata disebut overdispersi. Hasil dari kebaikan model menunjukkan bahwa *Generalized Poisson Regression* lebih baik daripada regresi *Poisson*.

Menurut Zamani, Faroughi dan Ismail (2013) *Bivariate Generalized Poisson Regression* bisa digunakan tidak hanya pada data *count* bivariat dengan korelasi positif, nol atau negatif tetapi juga data *count* bivariat yang under/over dispersi dengan hubungan antara rata-rata dan ragam yang fleksibel. Selanjutnya AlMuhayfith, Alzaid dan Omair (2015) menduga parameter *Bivariate* and *Zero Inflated Bivariate Poisson Regression Model* menggunakan metode conditional. Kemudian metode ini dibandingkan dengan fungsi peluang bersama. Data simulasi dan penerapan pada kasus real menunjukkan bahwa metode conditional memberikan eksekusi waktu lebih cepat dibandingkan metode lain.

Penelitian mengenai kematian bayi di Jawa Timur telah beberapa kali dilakukan. Winarno (2009) menganalisis angka Kematian Bayi di Jawa Timur dengan pendekatan spasial. Sofro (2009) menerapakan *Generalized Poisson Regression* untuk data yang mengalami overdispersi . Sedangkan Listiani (2010) memodelkan angka Kematian Bayi di Jawa Timur Tahun 2007 dengan metode *Generalized Poisson*. Faktor-faktor yang mempengaruhi adalah jumlah sarana kesehatan, persentase pen rsalinan dengan bantuan tenaga non-medis, rata-rata usia perkawinan pertama dan rata-rata pengeluaran RT perbulan. Kurniawan (2013) menggunakan data Jumlah kematian bayi dan kematian ibu di Propinsi Jawa Timur untuk Penaksiran dan Pengujian Hipotesis Parameter Model Regresi Binomial Negatif Bivariat. Model kematian bayi, variabel yang signifikan hanya ada 3 variabel dan model kematian ibu, variabel yang signifikan hanya ada 2 variabel .

Penelitian oleh Pritasari (2013) memodelkan faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kematian bayi dan kematian ibu menggunakan regresi poisson bivariat. Dari 6 variabel prediktor yang digunakan hanya variabel persentase tenaga kesehatan yang memberi pengaruh. Penelitian yang dilakukan oleh Dhewy (2014) menerapkan pemodelan *Bivariate Poisson Regression* dengan koragam merupakan fungsi dari variabel prediktor pada data jumlah HIV dan AIDS di Provinsi Jawa Timur Tahun 2012. Model *Diagonal Inflated Bivariate Poisson Regression* lebih baik digunakan pada data poisson yang terjadi fenomena overdispersi berdasarkan kriteria kebaikan model yang menghasilkan nilai lebih kecil dari nilai yang dihasilkan oleh model *Bivariate Poisson Regression.*

Angka kematian bayi dan kematian ibu merupakan salah satu indikator penting dalam menentukan tingkat kesehatan masyarakat. Keberhasilan pembangunan di suatu wilayah juga dapat dilihat dari angka kematian bayi (AKB) dan angka kematian ibu (AKI). Salah satu agenda yang harus dipenuhi dalam *Millenium Development Goals* (MDGs) adalah meningkatkan derajat kesehatan ibu dengan indikator turunnya Angka Kematian Ibu (AKI) hingga 102/100.000 KH dan menurunkan Angka Kematian Bayi (AKB) hingga 23/1000 KH pada tahun 2015. Adanya target penurunan AKI dan AKB yang dicantumkan dalam MDG's ini menunjukkan betapa pentingnya untuk menjadi perhatian kalangan pemerintah terhadap upaya-upaya penurunan AKI dan AKB. Provinsi Jawa Timur termasuk 10 besar daerah dengan AKI dan AKB tertinggi di Indonesia. Ironisnya, daerah penyumbang angka kematian ibu terbanyak adalah kota Surabaya dengan 49 kasus kematian ibu (Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur, 2013).

Dalam upaya penurunan AKI dan AKB untuk mempercepat capaian MDGs, Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur telah membentuk Forum PENAKIB (Penurunan Angka Kematian Ibu dan Bayi) yang pada tahun 2012 telah memasuki babak baru dengan terbentuknya 3 (tiga) satuan tugas (satgas) yaitu Satgas Rujukan, Satgas Pelayanan Kesehatan Dasar (Yankesdas) serta Satgas Pemberdayaan Masyarakat. Di mana masing-masing satgas akan menelaah penyebab kematian ibu dan bayi dari 3 (tiga) aspek tersebut. Ketiga satgas tersebut akan membuat upaya yang akan dilakukan secara riil agar AKI dan AKB di Jawa Timur dapat terus menurun (Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur, 2013).

Menurut Famoye, Wulu dan Singh (2004), regresi *Poisson* tidak sesuai untuk memodelkan data yang memiliki overdispersi atau underdispersi. Oleh karena itu, dilakukan pendekatan dengan model regresi lain. Model regresi yang dapat digunakan untuk memodelkan data overdispersi atau underdispersi menggunakan model *Generalized Poisson Regression, Negatif Binomial Regression, Zero-Inflated Poisson Regression* dan *Zero-Inflated Negative Binomial Regression.* Namun model *Zero-Inflated Poisson Regression* dan *Zero-Inflated Negative Binomial Regression* digunakan untuk data yang mengandung overdispersi atau underdispersi dengan banyak nilai nol berlebihan pada variabel respon *(excess zero).* Sebelum melakukan analisis data, pengujian dilakukan terlebih dahulu untuk mengetahui kesamaan antara rata-rata dan ragam data. Apabila diperoleh rata-rata dan ragam yang sama (equidispersi) maka digunakan model regresi *poisson*, akan tetapi jika diperoleh ragam lebih besar dari rata-rata (overdispersi) atau ragam lebih kecil dari rata-rata (underdispersi), maka perlu dilakukan analisis dengan model regresi yang lebih sesuai.

Kematian bayi dan kematian ibu merupakan dua hal yang saling terkait erat karena selama dalam kandungan ibu, janin sangat tergantung pada gizi yang dikonsumsi oleh ibunya. Jumlah kematian bayi dan kematian ibu di Provinsi Jawa Timur mempunyai keterkaitan satu sama lain, sehingga diduga mempunyai korelasi yang tinggi. Data tersebut tidak memiliki nilai nol berlebih pada variabel respon dan diduga terjadi under/over dispersi. Pada penelitian ini akan mengkaji tentang Pendugaan Parameter dan Pengujian Hipotesis *Bivariate Generalized Poisson Regression* pada kasus jumlah kematian bayi dan kematian ibu di Jawa Timur Tahun 2013. Hasil kajian diharapkan dapat menentukan faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian bayi dan kematian ibu di Provinsi Jawa Timur.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka dirumuskan permasalahan dalam penelitian ini adalah bentuk penduga parameter dari model *Bivariate Generalized Poisson Regression*, bentuk uji hipotesis serentak model *Bivariate Generalized Poisson Regression* serta faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kematian bayi dan jumlah kematian ibu di Provinsi Jawa Timur Tahun 2013 menggunakan model *Bivariate Generalized Poisson Regression*.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang dalam penelitian ini adalah

1. Mengkaji penduga parameter model *Bivariate Generalized Poisson Regression*.
2. Mengkaji uji hipotesis serentak untuk model *Bivariate Generalized Poisson Regression*
3. Menentukan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kematian bayi dan jumlah kematian ibu di Provinsi Jawa Timur Tahun 2013 menggunakan model *Bivariate Generalized Poisson Regression.*

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dalam penelitian ini adalah

1. Memberikan wawasan keilmuan yang berkaitan dengan penduga parameter dan pengujian hipotesis model *Bivariate Generalized Poisson Regression*.
2. Memberikan informasi kepada instansi pemerintah khususnya Provinsi Jawa Timur untuk mengevaluasi upaya penurunan angka kematian ibu hamil dan bayi dan bermanfaat untuk pengembangan implementasi statistika dalam bidang kesehatan masyarakat dengan model *Bivariate Generalized Poisson Regression*.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Ruang lingkup penelitian dibatasi pada kasus jumlah kematian bayi dan jumlah kematian ibu di Provinsi Jawa Timur Tahun 2013 yang merupakan Data Profil Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur Tahun 2013.
2. Pendugaan parameter *Bivariate Generalized Poisson Regression* dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan mendapatkan statistik uji menggunakan *Maximum Likelihood Rasio Test* (MLRT).

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

Tinjauan pustaka terdiri dua bagian yaitu tinjauan statistika dan tinjauan non-statistika. Tinjauan statistika membahas tentang Statistika Deskriptif, Distribusi *Poisson*, Regresi *Poisson*, *Bivariate Poisson Regression*, *Generalized Poisson Regression*, *Bivariate Generalized Poisson Regression*, Pemilihan Model Terbaik menggunakan nilai AIC serta Korelasi dan Multikolinieritas. Sedangkan tinjauan non-statistika membahas tentang faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kematian bayi dan kematian ibu.

2.1 Statistika Deskriptif

Analisis statistika deskriptif adalah metode statistika yang berfungsi untuk memberikan gambaran umum tentang penyajian data sampel atau populasi. Analisis statistika deskripif dapat diartikan sebagai metode yang berkaitan dengan mengumpulkan,meringkas dan menyajikan data sehingga memberikan informasi yang berguna. Data dapat dideskripsikan menjadi grafik atau tabel, sedangkan ukuran pemusatan data dan ukuran penyebaran data dideskripsikan secara numerik. Ukuran pemusatan data meliputi rata-rata, nilai tengah dan modus sedangkan ukuran penyebaran data meliputi rentang dan standar deviasi (Walpole, 1995).

Rata-rata adalah nilai yang dapat digunakan untuk memberikan informasi atau gambaran umum dari sekumpulan data. Perhitungan rata-rata dengan menjumlahkan semua nilai data kemudian dibagi banyak data yang dapat dituliskan

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \text{ di mana } n = \text{banyak data} \tag{2.1}$$

Nilai maksimal adalah nilai yang paling tinggi atau besar dari sekumpulan data yang telah diurutkan. Sedangkan nilai minimal adalah nilai yang paling rendah atau kecil dari sekumpulan data yang telah diurutkan.

Ragam adalah ukuran yang digunakan untuk melihat seberapa besar penyimpangan dari data. Perhitungan ragam adalah

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad (2.2)$$

2.2 Distribusi *Poisson*

Distribusi *Poisson* adalah suatu distribusi untuk data peristiwa yang probabilitas kejadiannya kecil, yakni kejadian bergantung pada interval waktu tertentu atau di suatu daerah tertentu dengan hasil pengamatan berupa variabel bertipe data diskrit dan antar variabel prediktor saling bebas. Interval waktu tersebut dapat berupa misal semenit, sehari, seminggu, sebulan dan setahun. Daerah tertentu yang dimaksudkan dapat berupa suatu garis, luasan volume atau sepotong bahan. Distribusi *Poisson* menggambarkan model yang realistis untuk berbagai macam fenomena acak selama nilai dari variabel acak *Poisson* bertipe bilanganpositif, banyak fenomena acak untuk suatu *count* dari beberapa respon merupakan suatu calon untuk pemodelan yang mengasumsikan distribusi *Poisson*. Misal data *count* berupa jumlah kecelakaan lalu lintas setiap minggu, banyak kerusakan per unit dari beberapa material, banyakaliran listrik tiap satuan panjang kabel, banyak kesalahan cetak suatu halaman dalam satu buku, banyak orang dalam suatu populasi yang hidup sampai 100 tahun dan lain-lain. Karakteristik dari percobaan yang mengikuti distribusi *Poisson* sebagai berikut :

1. Kejadian yang terjadi pada populasi yang sangat besar dengan probabilitas yang kecil
2. Kejadian bergantung pada interval waktu tertentu
3. Kejadian yang termasuk ke dalam *counting* prosses
4. Perulangan dari kejadian yang mengikuti sebaran distribusi binomial

2.2.1 Distribusi Univariat *Poisson*

Fungsi probabilitas variabel acak diskrit yang berdistribusi *Poisson* dengan parameter μ adalah

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}, & y=0,1,2,\ldots\\ 0 & , y \text{ yang lain}\end{cases} \quad (2.3)$$

di mana μ adalah rata-rata suatu kejadian yang bernilai lebih besar dari nol. Jika nilai μ yang kecil maka bentuk distribusi sangat menceng dan nilai μ yang besar akan menyebabkan bentuk distribusi mendekati distribusi normal. Mean dan varian dari Y adalah $E(Y) = Var(Y) = \mu$.

2.2.2 Distribusi Bivariat *Poisson*

Misalkan N_1, N_2, N_3 adalah variabel acak saling bebas yang masing-masing berdistribusi *Poisson* dan μ_1, μ_2, μ_0 adalah parameter diberikan variabel acak Y_1, Y_2 adalah

$$Y_1 = N_1 + N_3$$
$$Y_2 = N_2 + N_3$$

Menurut Karlis dan Ntzoufras (2005) variabel acak Y_1, Y_2 bersama-sama berdistribusi bivariat *Poisson* dan fungsi probabilitas bersama sesuai persamaaan (2.4) :

$$f(y_1, y_2)=\begin{cases} e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_0)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\mu_1^{y_1-k}\mu_2^{y_2-k}\mu_0^{k}}{(y_1-k)!(y_2-k)!k!}, & (y_1,y_2)=0,1,2,\ldots\\ 0 & ,(y_1,y_2)\text{ yang lain}\end{cases} \quad (2.4)$$

Sedangkan nilai harapan dan ragam dari variabel acak Y_1 dan Y_2 adalah $E(Y_1) = \mu_1 + \mu_0$ dan $E(Y_2) = \mu_2 + \mu_0$ dengan $Var(Y_1) = E(Y_1)$ dan $Var(Y_2) = E(Y_2)$. Atau dapat dituliskan $Var(Y_1) = \mu_1 + \mu_0$ dan $Var(Y_2) = \mu_2 + \mu_0$. Menurut Kawamura (1973) koefisien korelasi untuk Y_1 dan Y_2 sesuai persamaan (2.4) :

$$\rho_{Y_1Y_2} = \frac{\operatorname{cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_2)}}$$

$$\rho_{Y_1Y_2} = \frac{\mu_0}{\sqrt{(\mu_1 + \mu_0)(\mu_2 + \mu_0)}}$$

Apabila $\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = \mu_0$, μ_0 adalah suatu nilai yang menggambarkan hubungan antara dua variabel acak Y_1 dan Y_2.

2.3 Regresi *Poisson*

Analisis regresi merupakan metode statistika yang paling sering digunakan dalam segala bidang ilmu pengetahuan. Analisis ini bertujuan untuk memodelkan hubungan antara dua variabel, yang terdiri dari variabel prediktor dan variabel respon. Apabila terdapat satu variabel respon berdistribusi *Poisson* dan terdapat satu atau lebih variabel prediktor maka model regresi yang menggambarkan hubungan kedua variabel adalah regresi *Poisson*. Jika Y adalah data diskrit yang berdistribusi *Poisson* dengan parameter μ maka fungsi probabilitas adalah

$$p(y, \mu) = \mu^y \frac{e^{-\mu}}{y!}; y = 0,1,2,3,... \tag{2.5}$$

dengan $E(Y) = Var(Y) = \mu$

$$Y_i \sim poisson(\mu_i) \; i = 1,2,...,n$$

di mana model regresi *Poisson*

$$\mu_i = e^{\mathbf{x_i^T\beta}} \tag{2.6}$$

μ_i adalah rata-rata jumlah kejadian yang terjadi dalam inteval waktu tertentu

$\mathbf{x}$ adalah variabel prediktor yang dinotasikan :

$$\mathbf{x}_i = [1 \quad \mathrm{x_{1i}} \quad ... \quad \mathrm{x_{ki}}]^T$$

$\boldsymbol{\beta}$ adalah parameter regresi *Poisson* yang dinotasikan :

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad ... \quad \beta_k]^T$$

2.3.1Penduga Parameter Regresi *Poisson*

Pendugaan parameter regresi *Poisson* dapat dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) sebagai berikut

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\exp(-\mu_i)\mu_i^{y_i}}{y_i!}\right)$$

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\exp(-\mu_i)\mu_i^{y_i}}{y_i!}\right)$$

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln(e^{-\mu_i}) + \ln(\mu_i^{y_i}) - \ln(y_i!)\right)$$

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}) = \left(-\sum_{i=1}^{n} e^{\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}} + \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta} - \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i!)\right) \tag{2.7}$$

Menggunakan metode MLE maka penduga parameter regresi *Poisson* yang dilambangkan dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ didapatkan dari turunan pertama fungsi ln *likelihood*. Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}^T$:

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} = -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i e^{\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i y_i \tag{2.8}$$

Turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}$:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T \partial \boldsymbol{\beta}} = -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T e^{\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}}$$

Persamaan (2.8) kemudian disamakan dengan nol (persamaan normal), selanjutnya dapat diselesaikan dengan metode iterasi numerik yaitu *Newton Raphson*. Tujuan dari metode iterasi numerik adalah memaksimumkan fungsi ln *likelihood*. Algoritma dituliskan :

1. Menghitung nilai penduga awal parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)}$ yang diperoleh dari metode OLS atau MKT yaitu

   $$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)} = (\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{y}$$

   di mana $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{Y}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$

2. Membentuk vektor gradien $\boldsymbol{g}$ dengan k adalah banyak parameter yang diduga.

   $$\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta}_{(m)})_{(k+1)} = \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0} \quad \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k}\right)_{\beta=\beta_{(m)}}$$

3. Membentuk matriks Hessian **H**:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}_{(m)})_{(k+1)(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathit{simetris} & & & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k^2} \end{bmatrix}$$

4. Memasukkan nilai $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor $\boldsymbol{g}$ dan matriks $\boldsymbol{H}$ sehingga diperoleh vektor $\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)})$ dan matriks $\boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)})$.
5. Mulai dari $m = 0$ dilakukan iterasi pada persamaan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)})\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)})$. Nilai $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}$ merupakan sekumpulan penduga parameter yang konvergen pada iterasi ke-*m*.
6. Penduga parameter yang konvergen diperoleh jika $\| \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)} \| \le \varepsilon$, jika belum diperoleh pendugaan yang konvergen maka dilanjutkan kembali langkah 5 hingga iterasi ke $m = m + 1$.

2.3.2 Pengujian Parameter Regresi *Poisson*

Pengujian parameter model regresi *Poisson* dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dengan hipotesis :

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_l \neq 0$ dengan $l = 1, 2, ..., k$

Himpunan parameter dibawah populasi adalah

$\Omega = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k \mid -\infty < \beta_l < \infty\}$

Himpunan parameter dibawah H_0 adalah

$\omega = \{\beta_0 \mid -\infty < \beta_0 < \infty\}$

$L(\hat{\Omega})$ adalah nilai *Maximum Likelihood* untuk model lengkap di mana melibatkan variabel prediktor. $L(\hat{\omega})$ adalah nilai *Maximum Likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor. Menurut Agresti (2002) , *Likelihood Ratio Test* dapat ditulis dalam persamaan (2.9):

$$\mathrm{D}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}\right) = -2\left(\ln(L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})\right) \quad (2.9)$$

di mana

$$L(\hat{\omega}) = \frac{\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\exp(\hat{\beta}_0)\right]\left[\exp(\hat{\beta}_0)\sum_{i=1}^{n} y_i\right]}{\prod_{i=1}^{n} y_i\,!} \quad (2.10)$$

$$L(\hat{\Omega}) = \frac{\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\exp(\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}})\right]\left[\prod_{i=1}^{n}\exp(\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}})^{y_i}\right]}{\prod_{i=1}^{n} y_i\,!} \quad (2.11)$$

Sehingga didapatkan

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = 2\sum_{i=1}^{n}((y_i\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \exp(\mathbf{x_i^T}\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \ln y_i\,!) - (y_i\hat{\beta}_0 - \exp(\hat{\beta}_0) - \ln y_i\,!))$$

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = 2\sum_{i=1}^{n}((y_i\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \exp(\mathbf{x_i^T}\hat{\boldsymbol{\beta}}) - (y_i\hat{\beta}_0 - \exp(\hat{\beta}_0)) \quad (2.12)$$

$\mathrm{D}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ merupakan pendekatan dari distribusi χ^2 dengan derajat bebas *v*, di mana *v* adalah jumlah parameter dibawah populasi dikurangi jumlah parameter dibawah H_0. Sehingga kriteria pengujian adalah Tolak H_0 apabila $D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) > \chi^2_{\alpha,v}$.

Menurut Agresti (2002), apabila H_0 ditolak maka langkah selanjutnya adalah melakukan pengujian parameter secara parsial untuk mengidentifikasi parameter yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model. Hipotesis yang digunakan adalah

$H_0 : \beta_l = 0$

$H_1 : \beta_l \neq 0$ dengan $l = 1, 2, ..., k$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$Z = \frac{\hat{\beta}_1}{SE(\hat{\beta}_1)} \quad (2.13)$$

H_0 akan ditolak apabila $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ di mana α adalah tingkat signifikansi yang digunakan. $SE(\hat{\beta}_l)$ merupakan elemen diagonal ke $(i+1)$ pada matriks $\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$. Nilai $\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ yaitu $\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -E\left(H^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)$.

2.4 *Bivariate Poisson Regression*

Menurut Karlis dan Ntzoufras (2005) dalam Umami (2015), suatu metode yang digunakan untuk memodelkan sepasang data *count* yang memilki korelasi dengan beberapa variabel prediktor adalah *Bivariate Poisson Regression.* Model dapat dituliskan :

$$(Y_{1i}, Y_{2i}) \sim PB(\mu_{1i}, \mu_{2i}, \mu_0) \tag{2.14}$$

di mana

$\mu_{ji} + \mu_0 = e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_j}; j = 1, 2$

$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & \ldots & x_{ki} \end{bmatrix}^T$

$\boldsymbol{\beta}_j = \begin{bmatrix} \beta_{j0} & \beta_{j1} & \beta_{j2} & \ldots & \beta_{jk} \end{bmatrix}^T$

$i = 1, 2, ..., n$ merupakan banyak pengamatan

2.4.1 Penduga Parameter *Bivariate Poisson Regression*

Menurut Jung dan Winkelmann (1993), metode pendugaan yang digunakan pada *Bivariate Poisson Regression* adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan fungsi *likelihood* sebagai berikut

$$L(\mu_0, \mu_{1i}, \mu_{2i}) = \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-(\mu_0 + \mu_{1i} + \mu_{2i})} \sum_{k=0}^{\min(y_1, y_2)} \frac{\mu_{1i}^{y_{1i}-k} \mu_{2i}^{y_{2i}-k} \mu_0^k}{(y_{1i}-k)!(y_{2i}-k)!(k)!} \right) \tag{2.15}$$

kemudian ditransformasi dengan $\mu_{ji} + \mu_0 = e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_j}$ sehingga diperoleh fungsi *likelihood* yang baru yaitu

$$L(\mu_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = \prod_{i=1}^{n} \left(\exp(-\mu_0) - \exp(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0) - \exp(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0) \right) W_i$$

dengan $W_i = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right)^{y_{1i}-k} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right)^{y_{2i}-k} (\mu_0)^k}{\left(y_{1i}-k\right)!\left(y_{2i}-k\right)!(k)!}$

sehingga fungsi ln *likelihood* diperoleh

$$Q = \ln L(\mu_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = -n\mu_0 - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}} - \mu_0\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_2}} - \mu_0\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln W_i \qquad (2.16)$$

dengan rumus $W_i = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} W_{1i}, W_{2i}$

$$W_{1i} = \left(\frac{(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}} - \mu_0)^{y_{1i}-k}(\mu_0)^k}{(y_{1i}-k)!k!}\right) \text{dan } W_{2i} = \left(\frac{(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_2}} - \mu_0)^{y_{2i}-k}}{(y_{2i}-k)!}\right)$$

Kemudian Q diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_j} = -\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}\right)\mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_j}$$

W_{1i} diturunkan terhadap μ_0 dan W_{2i} diturunkan terhadap μ_0 ,

$$\frac{\partial W_i}{\partial \mu_0} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})}\left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \mu_0}W_{2i} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \mu_0}W_{1i}\right)$$

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \mu_0} = \frac{\mu_0^{k-1}}{k!}\frac{(\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_1) - \mu_0)^{y_{1i}-k-1}}{(y_{1i}-k)!}(k(\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_1) - \mu_0))$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \mu_0} = \frac{(y_{2i}-k)(\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_2) - \mu_0)^{y_{2i}-k-1}}{(y_{2i}-k)!}$$

W_i diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})}\left(\frac{\mu_0^k}{k!}\frac{(y_{1i}-k)(\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}) - \mu_0)^{y_{1i}-k-1}\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1})\mathbf{x}_i}{(y_{1i}-k)!} \times \frac{(\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_2}) - \mu_0)^{y_{2i}-k}}{(y_{2i}-k)!}\right)$$

W_i diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})}\left(\frac{\mu_0^k}{k!}\frac{(y_{1i}-k)(\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}) - \mu_0)^{y_{1i}-k-1}}{(y_{1i}-k)!} \times \frac{(\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_2}) - \mu_0)^{y_{2i}-k-1}\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_j})\mathbf{x_i}}{(y_{2i}-k)!}\right)$$

Kemudian dicari turunan kedua karena hasil turunan kedua tidak memberikan suatu persamaan yang *close form* (masih mengandung parameter) maka digunakan suatu metode iterasi numerik yaitu *Newton Raphson* dengan langkah-langkah :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$$

di mana $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix}\mu_0 & \boldsymbol{\beta}_1^T & \boldsymbol{\beta}_2^T\end{pmatrix}$

1. Menghitung nilai penduga awal parameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ dengan $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \mu_0 & \boldsymbol{\beta}_1^T & \boldsymbol{\beta}_2^T \end{pmatrix}$ .Penentuan perhitungan nilai awal $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{j(0)}$ menggunakan MKT atau OLS yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{j(0)} = (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^T \mathbf{y}_j ;\ j = 1, 2$
2. Membentuk vektor gradien ***g*** di mana *k* adalah banyaknya parameter yang diduga.

$$\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\theta}_{(m)})_{(k+1)} = \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_0} \quad \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T{}_1} \quad \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T{}_2} \right)_{\theta=\theta_{(m)}}$$

3. Membentuk matriks Hessian ***H***:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}_{(m)})_{(k+1)(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_0^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2} \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \\ \textit{simetris} & & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \end{bmatrix}$$

4. Memasukkan nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor ***g*** dan matriks **H** sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)})$ dan matriks $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)})$.
5. Mulai dari $m = 0$ dilakukan iterasi pada persamaan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})$. Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$ merupakan sekumpulan penduga parameter yang konvergen pada iterasi ke-*m*.
6. Penduga parameter yang konvergen diperoleh jika $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$, jika belum diperoleh pendugaan yang konvergen maka dilanjutkan kembali langkah 5 hingga iterasi ke $m = m + 1$.

2.4.2 Pengujian Parameter *Bivariate Poisson Regression*

Menghitung nilai statistik uji kemudian menentukan dua buah fungsi *likelihood* yang berhubungan dengan model regresi yang diperoleh. Fungsi-fungsi *likelihood* yang dimaksud adalah $L(\hat{\Omega})$ yang merupakan nilai *Maximum Likelihood* untuk model yang melibatkan variabel prediktor. Sedangkan $L(\hat{\omega})$

adalah nilai *Maximum Likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor. Salah satu metode untuk menghitung statistik uji dalam pengujian parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) :

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}\right) = -2\left(\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})\right) \tag{2.17}$$

di mana

$$L(\hat{\Omega}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\exp(-\mu_0 - e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1} - e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_2})W_i\right)$$

$$L(\hat{\omega}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\exp(-\mu_0 - e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{1.0}} - e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{2.0}})W_{i.0}\right)$$

Pengujian parameter regresi *Poisson* dilakukan dengan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dengan hipotesis :

$H_0 : \beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{jk} = 0; j = 1, 2$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{jl} \neq 0$ dengan $j = 1, 2; l = 1, 2, ..., k$

Himpunan parameter dibawah populasi adalah

$\Omega = \left\{\mu_0, \beta_{j0}, \beta_{j1}, ..., \beta_{jk} \,|; j = 1, 2\right\}$

Himpunan parameter dibawah H_0 adalah

$\omega = \{\mu_0; \beta_{1.0}; \beta_{2.0}\}$

$D(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ merupakan pendekatan dari distribusi χ^2 dengan derajat bebas *v*, di mana *v* adalah jumlah parameter dibawah populasi dikurangi jumlah parameter dibawah H_0.Kriteria penggujian adalah Tolak H_0 apabila $D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) > \chi^2_{\alpha,v}$ .Jika keputusan Tolak H_0 maka langkah selanjutnya adalah pengujian secara parsial untuk mengetahui parameter yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model. Hipotesis yang digunakan adalah

$H_0 : \beta_{jl} = 0$

$H_1 : \beta_{jl} \neq 0$ dengan $j = 1, 2; l = 1, 2, ..., k$

Statistik uji yang digunakan

$$Z = \frac{\hat{\beta}_{jl}}{SE(\hat{\beta}_{jl})} \tag{2.18}$$

Apabila $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ maka Tolak H_0 dengan α adalah taraf signifikansi yang digunakan. $(SE(\hat{\beta}_{jl}))^2$ merupakan elemen diagonal ke $(i+1)$ pada matriks $\hat{\text{var}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$. Nilai $\hat{\text{var}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ yaitu $\hat{\text{var}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -E\left(H^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)$.

2.5 *Generalized Poisson Regression*

Regresi *Poisson* termasuk dalam *Generalized Linear Model* (GLM) karena variabel respon memiliki sebaran keluarga eksponensial yaitu sebaran *Poisson*. Regresi *Poisson* mengasumsikan variabel respon menyebar *Poisson*, tidak ada multikolinieritas antar variabel prediktor dan memiliki ragam yang sama dengan rata-rata. Asumsi multikolinieritas dapat dilihat dari nilai korelasi antar variabel prediktor.

Pada data overdispersi atau underdispersi regresi *Poisson* tidak dapat digunakan karena pendugaan dalam regresi *Poisson* menjadi tidak efisien. Oleh karena itu digunakan pendekatan model yang lebih sesuai untuk mengatasi kondisi overdispersi atau underdispersi. Salah satu model yang sesuai untuk mengatasi overdispersi atau underdispersi adalah *Generalized Poisson Regression* (Famoye *et al*, 2004).

Menurut Ismail dan Jemain (2005), distribusi *Generalized Poisson* mempunyai fungsi probabilitas :

$$f(y_i, \mu_i, \alpha) = \left(\frac{\mu_i}{1+\alpha\mu_i}\right)^{y_i} \frac{(1+\alpha y_i)^{y_i - 1}}{y!} \exp\left(\frac{-\mu_i(1+\alpha y_i)}{1+\alpha\mu_i}\right) \tag{2.19}$$

dengan $i = 1, 2, ...$ dan $\mu_i = \mu_i(x_i) = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$

di mana

$\mathbf{x}_i$: vektor dari variabel prediktor

$\boldsymbol{\beta}$: vektor dari parameter regresi

rata-rata dan ragam dari Y adalah

$E(Y_i) = \mu_i$ dan $Var(Y_i) = \mu_i(1+\alpha\mu_i)^2$

Model *Generalized Poisson Regression* adalah model generalisasi dari model regresi *Poisson*. Pada model *Generalized Poisson Regression* apabila nilai α=1 maka sama dengan model regresi *Poisson*. Kondisi overdispersi pada data ditunjukkan dengan nilai α>1, sedangkan kondisi underdispersi pada data ditunjukkan dengan nilai α<1.

2.5.1 Model *Generalized Poisson Regression*

Model *Generalized Poisson Regression* merupakan suatu model yang sesuai diterapkan pada data *count* yang terjadi pelanggaran asumsi rata-rata sampel sama dengan ragam sampel pada distribusi *Poisson* dengan kata lain jika terjadi over/under dispersi. Sehingga selain μ dalam *Generalized Poisson* terdapat juga α sebagai parameter dispersi.

Model *Generalized Poisson Regression* mirip dengan model *Poisson Regression* merupakan suatu model GLM. Model *Generalized Poisson Regression* mengasumsikan bahwa komponen acak berdistribusi *Generalized Poisson*. Fungsi probabalitas sesuai persamaan (2.19) dan mempunyai model *Generalized Poisson Regression* mempunyai bentuk yang sama dengan model *Poisson Regression* yaitu

$$\begin{aligned} \ln(\mu_i) &= \mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta} = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki} \\ \mu_i &= \exp(\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.5.2 Penduga Parameter *Generalized Poisson Regression*

Metode *Maximum Likelihood Estimation* digunakan untuk menduga parameter dalam *Generalized Poisson Regression* yaitu dengan cara memaksimalkan fungsi *likelihood* dari parameter $(\alpha, \boldsymbol{\beta})$. Menurut Ismail dan Jemain (2005), fungsi *likelihood* dari *Generalized Poisson Regression* adalah :

$$L(\alpha,\mu) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\mu_i}{1+\alpha\mu_i}\right]^{y_i} \frac{1+\alpha y_i^{\,y_i-1}}{y_i\,!} \exp\frac{-\mu_i(1+\alpha y_i)}{1+\alpha\mu_i} \quad (2.21)$$

Fungsi ln *likelihood* dari *GeneralizedPoisson Regression* adalah

$$\ln L(\alpha,\mu) = \sum_{i=1}^{n}\left\{ y_i \ln\left[\frac{\mu_i}{1+\alpha\mu_i}\right] + (y_i-1)\ln(1+\alpha y_i) - \ln(y_i\,!) - \frac{\mu_i(1+\alpha y_i)}{1+\alpha\mu_i}\right\}$$

$$\ln L(\alpha, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i \ln(\exp(\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})) - y_i \ln(1+\alpha \exp(\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})) + (y_i - 1)\ln(1+\alpha y_i) \right)$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left(\ln(y_i !) - \frac{\exp(\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})(1+\alpha y_i)}{1+\alpha \exp(\mathbf{x_i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})} \right) \qquad (2.22)$$

(Ismail dan Jemain, 2005)

Metode iterasi *Newton Raphson* merupakan metode yang digunakan untuk memaksimalkan fungsi *likelihood*. Menurut Agresti (2002), algoritma dengan metode *Newton Raphson* adalah:

1. Menghitung nilai duga awal parameter. Nilai dugaan awal dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS) :

   $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)} = (\boldsymbol{X^T X})^{-1} \boldsymbol{X^T} \mathbf{y}$

2. Membentuk vektor gradien $\boldsymbol{g}$ di mana k adalah banyak parameter yang diduga

$$\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{\beta}_{(m)})_{(k+1)} = \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0} \quad \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \right)_{\beta = \beta_{(m)}}$$

3. Membentuk Matriks Hessian $\boldsymbol{H}$

   Matriks Hessian dari *Generalized Poisson* adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}_{(m)})_{(k+1)(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \alpha} \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1 \partial \alpha} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k \partial \alpha} \\ \textit{simetris} & & & & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha \partial \alpha^T} \end{bmatrix}$$

4. Memasukkan nilai $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)}$ kedalam elemen-elemen vektor $\boldsymbol{g}$ dan matriks $\mathbf{H}$ sehingga diperoleh vektor $\hat{\mathbf{g}}_{(0)}$ dan matriks $\hat{\mathbf{H}}_{(0)}$

5. Melakukan iterasi dari m=0 yaitu nilai dugaan awal dilakukan iterasi pada persamaan : $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{m+1} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_m - \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_m)\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_m)$

6. Nilai $\hat{\boldsymbol{\beta}}_m$ merupakan kumpulan dari pendugaan parameter pada iterasi ke-m. Proses iterasi pada langkah 5 dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh pendugaan parameter yang konvergen, yaitu $\left\|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{m+1} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_m\right\| \le \varepsilon$

2.6 *Bivariate Generalized Poisson Regression*

Menurut Vernic (1997) misalkan N_1, N_2, N_3 adalah variabel acak saling bebas yang masing-masing berdistribusi *Generalized Poisson* dan $N_i \sim GPD(\mu_i, \alpha_i)\ i = 1, 2, 3$. $Y_1 = N_1 + N_3$ dan $Y_2 = N_2 + N_3$ maka fungsi probabilitas bersama dari Y_1, Y_2 adalah

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} f_1(y_{1i} - k) f_2(y_{2i} - k) f_3(k) \qquad (2.23)$$

di mana $f_i(n)$ adalah fungsi probabilitas dari variabel acak X_i. Consul dan Shoukri(1985)dalam Vernic (1997) menjelaskan bahwa $X_i \sim GDP(\mu, \alpha)$ maka fungsi probabilitas sesuai persamaan (2.19). Fungsi probabilitas bersama dari *Bivariate Generalized Poisson Distribution* adalah

$$f(y_{1i}, y_{2i}) = \mu_{1i}\mu_{2i}\mu_0 \exp\left\{-(\mu_{1i} + \mu_{2i} + \mu_0) - y_{1i}\alpha_1 - y_{2i}\alpha_2\right\}$$
$$\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \frac{1}{(y_{1i} - k)!(y_{2i} - k)!k!} (\mu_{1i} + (y_{1i} - k)\alpha_1)^{y_1 - k - 1})(\mu_{2i} + (y_{2i} - k)\alpha_2)^{y_2 - k - 1})(\mu_0 + k\alpha_0)^{k-1})$$
$$\exp\left\{k(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0)\right\} \qquad (2.24)$$

Jika $(Y_{1i}, Y_{2i}) \sim GPB(\mu_{1i}, \mu_{2i}, \alpha_1, \alpha_2)$ maka model dari *Bivariate Generalized Poisson Regression* adalah

$$\ln(\mu_{ji}) = \mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\mathbf{j} = \beta_{j0} + \beta_{j1}x_{1i} + \beta_{j2}x_{2i} + \ldots + \beta_{jk}x_{ki}$$
$$\mu_{ji} = \exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_\mathbf{j}) = \exp(\beta_{j0} + \beta_{j1}x_{1i} + \beta_{j2}x_{2i} + \ldots + \beta_{jk}x_{ki}) \qquad (2.25)$$

di mana

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix}1 & x_{1i} & x_{2i} & \ldots & x_{ki}\end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{\beta}_j = \begin{bmatrix}\beta_{j0} & \beta_{j1} & \beta_{j2} & \ldots & \beta_{jk}\end{bmatrix}^T \quad j = 1, 2$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ merupakan banyak pengamatan

2.7 Pemilihan Model Terbaik

Akaike Information Criterion (AIC) adalah kriteria kesesuaian model dalam menduga model secara statistik. Kriteria AIC digunakan apabila pemodelan regresi bertujuan untuk mengidentifikasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model.

Tujuan dari penelitian adalah pemilihan model terbaik. Pemilihan model terbaik dari *Bivariate Generalized Poisson Regression* menggunakan nilai AIC. Metode AIC adalah metode yang dapat digunakan untuk memilih model regresi terbaik yang ditemukan oleh Akaike. Metode ini didasarkan pada metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Perhitungan nilai AIC menggunakan persamaan (2.26) :

$$\text{AIC} = -2\ \mathit{ln}\ (\textit{maximum likelihood}) + 2\ (\textit{number of parameters}) \qquad (2.26)$$

Model regresi terbaik adalah model regresi yang menghasilkan nilai AIC terkecil (Akaike, 1978).

2.8 Korelasi

Korelasi merupakan indikator dalam hubungan linear antara dua variabel (Draper & Smith, 1992). Koefisien dari korelasi didefinisikan sebagai berikut

$$r_{(y_1,y_2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}-\bar{y}_1)(y_{2i}-\bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}-\bar{y}_1)^2\sum_{i=1}^{n}(y_{2i}-\bar{y}_2)^2}} \qquad (2.27)$$

Koefisien korelasi dapat menunjukkan dua hubungan, yaitu positif dan negatif. Nilai positif dan negatif dikarenakan nilai korelasi berkisar antara -1 hingga 1 atau dapat ditulis $-1 \le r_{y_1,y_2} \le 1$. Apabila nilai korelasi mendekati 1, baik positif maupun negatif berarti kedua variabel memiliki hubungan yang erat secara linier. Nilai korelasi nol menunjukkan bahwa kedua variabel tidak memiliki hubungan erat secara linier. Nilai korelasi yang positif menunjukkan adanya hubungan yang berbanding lurus pada dua variabel, sedangkan nilai korelasi yang negatif menunjukkan hubungan yang berbanding terbalik. Pengujian korelasi untuk variabel respon dilakukan dengan dasar hipotesis :

$H_0 : \rho^* = 0;$ Tidak terdapat hubungan antara Y_1 dan Y_2

$H_1 : \rho^* \neq 0;$ Terdapat hubungan antara Y_1 dan Y_2

Statistik uji yang digunakan pada pengujian ini adalah

$$t = \frac{r_{(y_1,y_2)}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r_{(y_1,y_2)})^2}} \qquad (2.28)$$

Kriteria keputusan adalah tolak H_0 apabila $|t_{hitung}| > t_{(\frac{\alpha}{2},n-2)}$ (McClave, Benson dan Sincich, 2010)

2.9 Multikolinieritas

Multikolinieritas adalah hubungan di antara beberapa atau semua variabel yang menjelaskan model regresi. Terdapat dua jenis multikolinieritas yaitu multikolinieritas sempurna dan multikolinieritas tidak sempurna. Pada multikolinieritas sempurna terdapat hubungan linier di antara variabel prediktor di mana satu variabel prediktor adalah fungsi linier dari variabel prediktor yang lain, sedangkan multikolinieritas tidak sempurna terjadi apabila terdapat hubungan linier yang tidak sempurna antar variabel prediktor (Gujarati, 1991).

Menurut Li (2000), pendeteksian multikolinieritas dapat dilakukan menggunakan nilai *Variance Inflation Factor* (VIF). Untuk regresi dengan lebih dari dua variabel definisi VIF adalah

$$VIF_j = \frac{1}{1-R_j^2} \qquad (2.29)$$

di mana :

R_j^2 : koefisien determinasi dari *auxiliary regression*

Auxiliary regression adalah regresi dengan X_j sebagai variabel respon, dan X selainnya sebagai variabel prediktor. Nilai R_j^2 berkisar antara 0 sampai dengan 1 sehingga nilai VIF akan naik seiring dengan kenaikan koefisien determinasi dari *auxiliary regression.* Nilai VIF yang lebih dari 10 merupakan bukti cukup untuk mendeteksi adanya multikolinieritas (Li, 2000).

Multikolinieritas sempurna yang terjadi dalam data menyebabkan koefisien regresi menjadi *undetermined* (tidak dapat diduga), sedangkan pada multikolinieritas tidak sempurna dapat menyebabkan ragam dari penduga kuadrat terkecil menjadi relatif besar walaupun penduga tersebut masih tetap dapat diduga dan bersifat BLUE *(Best Linear Unbiased Estimators)* serta tetap efisien (ragam dari penduga paling kecil dari semua penduga yang mungkin). Selain itu multikolinieritas tidak sempurna juga dapat menyebabkan selang kepercayaan menjadi lebih lebar sehingga koefisien regresi menjadi tidak nyata (Gujarati, 1991).

2.10 Tinjauan Non Statistika

2.10.1 Angka Kematian (Mortalitas)

Peristiwa kematian pada dasarnya merupakan proses akumulasi akhir dari berbagai penyebab kematian langsung maupun tidak langsung. Kejadian kematian di suatu wilayah dari waktu ke waktu dapat memberikan gambaran perkembangan derajat kesehatan masyarakat, di samping digunakan sebagai indikator dalam penilaian keberhasilan program pembangunan dan pelayanan kesehatan.Data kematian di komunitas pada umumnya diperoleh melalui data survai karena sebagian besar kejadian kematian terjadi di rumah, sedangkan data kematian di fasilitas kesehatan hanya memperlihatkan kasus rujukan.

2.10.2 Angka Kematian Ibu (AKI)

Kematian ibu (*maternal death*) menurut definisi WHO adalah kematian selama kehamilan atau dalam periode 42 hari setelah berakhirnya kehamilan, yang disebabkan oleh kehamilan atau penanganannya, tetapi bukan disebabkan oleh kecelakaan atau cedera. Definisi kematian ibu secara eksplisit menjelaskan bahwa ruang lingkup kematian ibu sangatlah luas, yaitu tidak hanya kematian yang terjadi pada saat persalinan, tapi juga meliputi kematian ibu pada masa kehamilan dan nifas. Definisi tersebut memberikan dua kategori yang berbeda terhadap kematian ibu. Kategori pertama adalah kematian ibu yang diakibatkan oleh penyebab langsung, yaitu kematian akibat kehamilannya. Sedangkan kategori kedua yaitu kematian akibat penyebab tidak langsung, yaitu kematian bumil akibat penyakit yang dialaminya dan bukan merupakan akibat dari kehamilan dan persalinannya. Penyebab utama kematian ibu secara global yaitu pendarahan, hipertensi dalam kehanilan (HDK), infeksi, partus lama/macet dan abortus. Di Indonesia sendiri kematian ibu didominasi akibat pendarahan, hipertensi dalam kehamilan (HDK) dan infeksi. Penyakit yang merupakan penyebab tidak langsung kematian ibu meliputi Tuberkulosis, Anemia, Malaria, Penyakit Jantungdan lain-lain (Kemenkes RI, 2013).

Di Jawa Timur, capaian Angka Kematian Ibu (AKI) cenderung meningkat dalam 5 tahun terakhir, yaitu berkisar antara 7-11 point dengan data yang bersumber dari Laporan Kematian Ibu (LKI) Kabupaten/Kota. Capaian AKI dapat digambarkan sebagai berikut : pada tahun 2008 sebesar 83 per 100.000 kelahiran hidup (kh); tahun 2009 sebesar 90,7 per 100.000 kh; tahun 2010 sebesar 101,4 per 100.000 kh; tahun 2011 sebesar 104,3 per 100.000 kh; dan di tahun 2012 mencapai 97,43 per 100.000 kh. Capaian AKI Jawa Timur tahun 2012 keadaanya berada 5 point di bawah dari target MDGs tahun 2015 sebesar 102 per 100.000 kh.Keadaan ini memacu untuk terus menelaah penyebab kematian ibu agar arget MDGs dapat tercapai.

Dalam upaya penurunan AKI dan AKB untuk mempercepat capaian MDGS, Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur telah membentuk Forum PENAKIB (Penurunan Angka Kematian Ibu dan Bayi), yang pada Tahun 2012 telah memasuki babak baru dengan terbentuknya 3 satuan tugas (satgas) yaitu Satgas Rujukan, Satgas Pelayanan Kesehatan Dasar (Yankesdas) serta Satgas Pemberdayaan Masyarakat. Di mana masing-masing satgas akan menelaah penyebab kematian ibu dan bayi dari 3 aspek tersebut. Pada tahun 2013, ketiga satgas tersebut akan mengupayakan secara riil agar Angka Kematian Ibu dan Angka Kematian Bayi di Jawa Timur dapat terus menurun.

2.10.3 Angka Kematian Bayi (AKB)

Kematian bayi adalah kematian yang terjadi saat setelah bayi lahir sampai bayi belum berusia tepat satu tahun. Kematian bayi dapat dibedakan menjadi dua yaitu kematian bayi endogen dan kematian bayi eksogen. Kematian bayi endogen adalah kematian bayi yang terjadi pada bulan pertama setelah dilahirkan dan sebagian besar disebabkan oleh faktor yang dibawa anak sejak lahir yang diperoleh dari orang tuanya pada saat konsepsi atau didapat selama bulan kehamilan. Kematian eksogen adalah kematian bayi yang terjadi setelah usia satu bulan sampai menjelang satu tahun yang disebabkan oleh faktor yang berhubungan dengan lingkungan luar.Indikator yang digunakan untuk kematian bayi adalah AKB. Pengertian AKB adalah angka kematian per 1000 kelahiran hidup yang terjadi pada bayi dengan usia kurang dari satu tahun atau dengan kata lain probabilitas bayi meninggal sebelum mencapai usia satu tahun yang dinyatakan per 1000 kelahiran hidup.

Penelitian tentang kematian bayi telah banyak dilakukan baik dalam negeri maupun luar negeri. Faktor-faktor dari kematian bayi eksogen yaitu keadaan social ekonomi, jumlah sarana medis, penolong pertama pada kelahiran dan jumlah air bersih (Puspitasari , 2012). Butz (1984) dalam studi tentang *Infant Mortality* di Malaysia mengungkapkan bahwa pemberian ASI eksklusif dapat menurunkan angka kematian bayi. Kematian bayi sangat dipengaruhi oleh kondisi kesehatan perumahan dan keadaan sosial ekonomi orang tua. Anak yang berada dalam rumah tangga miskin umumnya memiliki angka kematian balita lebih dari dua kali lipat dari kematian balita di kelompok keluarga sejahtera.

Menurut Mosley & Chen (1984), faktor sosial ekonomi dan budaya merupakan faktor penentu morbiditas dan kematian bayi, namun pengaruh ini bersifat tidak langsung karena harus melalui mekanisme biologi tertentu (variabel antara) yang kemudian akan menimbulkan resiko morbilitas, kemudian bayi sakit dan apabila tidak sembuh maka bayi akan cacat atau meninggal. Dalam masalah ini morbilitas dan kematian bayi sebagai masalah pokok sedangkan sosial ekonomi dan budaya serta variabel-variabel antara sebagai faktor yang mempengaruhi kematian bayi.

Tinggi rendahnya kematian bayi sangat dipengaruhi oleh beberapa faktor, yaitu

1. Faktor individu, yaitu :

a. Tradisi persalinan dengan tenaga nonmedis

Kejadian komplikasi pada ibu dan bayi baru lahir sebagian besar terjadi pada masa sekitar persalinanan sehingga pemeriksaan kesehatan pada saat hamil dan kehadiran serta pertolongan serta tenaga kesehatan yang terampil pada masa persalinan sangat penting.

b. Banyaknya wanita yang berumah tangga di bawah umur 17 tahun

Semakin banyak wanita berkeluarga yang belum cukup umur, maka semakin banyak bayi yang rentan terhadap segala penyakit dan gangguan lain karena ketidakpastian ibu

c. Kurangnya kesadaran akan pentingnya ASI

Bayi yang tidak diberi ASI lebih muda terserang penyakit daripada bayi yang diberi ASI, karena pemberian ASI pada bayi sangat berpengaruh dalam kekebalan terhadap penyakit.

d. Tingkat pendidikan wanita

Semakin tinggi tingkat pendidikan wanita maka kesadaran terhadap kesehatan semakin tinggi sehingga perawatan bayi akan semakin baik.Tingkat pendidikan ibu memiliki korelasi yang kuat dengan tingkat kematian anak. Studi di Peru menunjukkan bahwa pendidikan ibu secara signifikan dapat menurunkan kematian anak dan gizi buruk pada anak (Bappenas, 2009). Anak yang dilahirkan dari ibu yang kurang berpendidikan memiliki angka kematian yang lebih tinggi daripada mereka yang lahir dari ibu yang berpendidikan. AKB pada anak dari ibu yang tidak berpendidikan adalah 73 per 1.000 kelahiran hidup, sedangkan AKB pada anak dari ibu yang berpendidikan menengah atau lebih tinggi adalah 24 per 1.000 kelahiran hidup selama kurun waktu 1998-2007

2. Faktor rumah tangga, pendapatan dan kekayaan, yaitu penduduk golongan sosial ekonomi menengah ke bawah memiliki keterbatasan biaya dalam mengupayakan kesehatan bayi mereka miliki

3. Faktor masyarakat, lingkungan dan sistem masyarakat, yaitu :

a. Jumlah tenaga kesehatan di suatu wilayah

Semakin banyak jumlah tenaga medis di suatu wilayah, maka penduduk setempat akan lebih mudah dalam mencari pertolongan kesehatan.

b. Jumlah fasilitas kesehatan yang tersedia

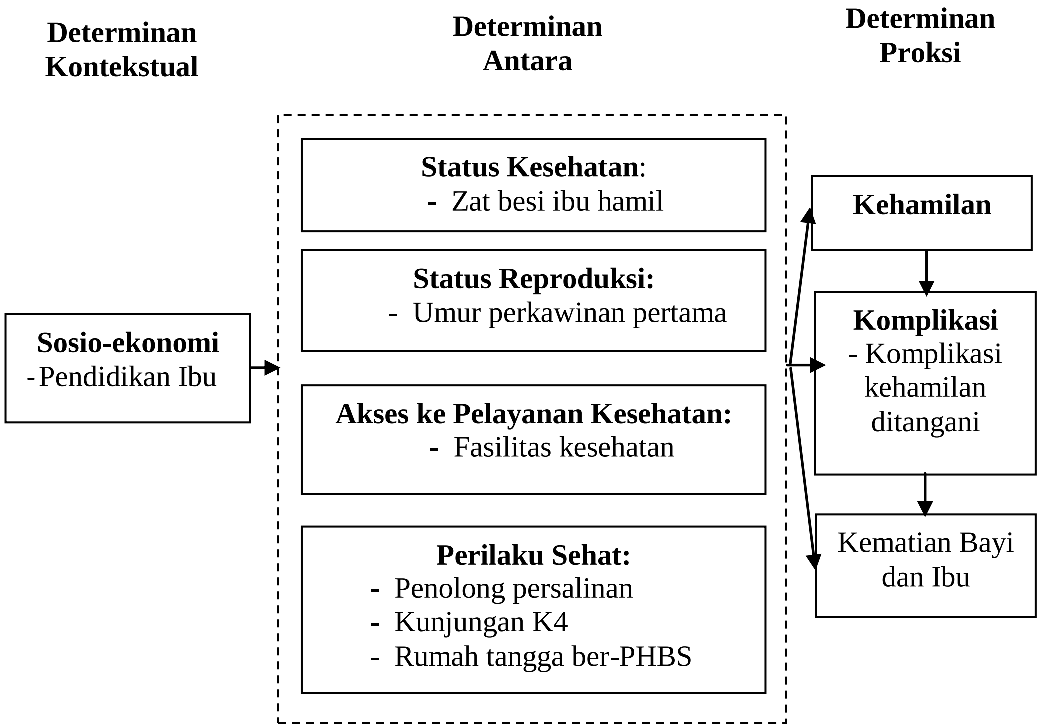
Keberadaan fasilitas kesehatan yang cukup lengkap akan mempermudah masyarakat dalam memperoleh pelayanan kesehatan yang memadai.

Keadaan Angka Kematian Bayi (AKB) dan Angka Kematian Neonatal (AKN) yang diperoleh dari laporan rutin relatif sangat kecil, sehingga data AKB yang dikeluarkan oleh Badan Pusat Statistik (Provinsi Jawa Timur) diharapkan mendekati kondisi di lapangan. Berdasarkan data Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia (SDKI), AKB tahun 2007 sebesar 35 per 1.000 kelahiran hidup (kh). Sedangkan menurut data BPS Provinsi Jawa Timur, AKB tahun 2009 sebesar 31,41 per 1.000 kh; tahun 2010 mencapai 29,99 per 1.000 kh; tahun 2011 mencapai 29,24 per 1.000 kh; dan di tahun 2012 penduga AKB telah mencapai 28,31 per 1.000 kh. Dalam kurun waktu 2 (dua) tahun ke depan, diharapkan mencapai target MDGs yaitu 23 per 1.000 kh pada tahun 2015.Untuk mencapai target MDGs, dukungan lintas program dan lintas sektor sertaorganisasi profesi yang terkait upaya peningkatan pelayanan kesehatan ibu dan bayi sangat diharapkan.

2.10.4 Faktor-Faktor yang Diduga Mempengaruhi Kematian Bayi dan Kematian Ibu di Propinsi Jawa Timur

Kerangka konsep kematian bayi oleh Mosley dan Chen dan kematian ibu oleh McCarthy dan Maine, Thaddeus dan Mainemenyajikan dasar bagi analisis lebih jauh mengenai hubungan antar variabel independen dan dependen dalam hal kematian bayi dan ibu di Provinsi Jawa Timur.

Dalam penelitian ini dilakukan beberapa modifikasi terhadap model McCarthy and Maine (1992) berikut ini:



Gambar 2.1 Model Konseptual Hubungan Kematian Bayi dan Ibu dengan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi di Provinsi Jawa Timur Tahun 2013

Faktor-faktor yang diduga mempengaruhi kematian bayi dan kematian ibu di Provinsi Jawa Timur sebagai berikut:

1. Determinan Proksi yaitu komplikasi kehamilan resiko tinggi

   Komplikasi kehamilan dan persalinan, merupakan penyebab langsung kematian ibu, yaitu perdarahan, infeksi, eklamsia, partus macet dan ruptura uterus.Intervensi yang dilakukan untuk mengatasi komplikasi obstetri ini merupakan intervensi jangka pendek yang hasilnya dapat segera terlihat dalam bentuk penurunan AKI (Dinkes, 2013).

2. Determinan Antara

   a. Ibu hamil mendapatkan tablet Fe3

      Upaya pencegahan dan penanggulangan Anemia Gizi Besi dilaksanakan melalui pemberian Tablet Tambah Darah (TTD) yang diprioritaskan pada ibu hamil, karena prevalensi Anemia pada kelompok ini cukup tinggi.Di samping itu, kelompok ibu hamil merupakan kelompok rawan yang sangat berpotensi memberi kontribusi terhadap tingginya Angka Kematian Ibu (AKI). Mencegah Anemia Gizi pada ibu hamil dilakukan suplementasi TTD dengan dosis pemberian sehari sebanyak 1 (satu) tablet (60 mg Elemental Iron dan 0,25 mg Asam Folat) berturut-turut minimal 90 hari selama masa kehamilan (Dinkes, 2013). Peran tablet besi sangat penting selama kehamilan karena dapat membantu proses pembentukan sel darah merah sehingga mencegah anemia pada bumil. Bumil merupakan kelompok yang rentan akan masalah gizi terutama anemia akibat kekurangan zat besi (Fe). Hasil Survei Kesehatan Rumah Tangga (SKRT) di Indonesia menyatakan bahwa secara nasional prevalensi anemia bumil cukup tinggi yaitu 50,9%. Kekurangan zat besi (anemia defisiensi zat besi) selama hamil berdampak tidak baik bagi ibu maupun janin. Perdarahan yang banyak sewaktu melahirkan berefek lebih buruk pada bumil yang anemia.

b. Umur perkawinan pertama wanita di bawah 17 tahun

Usia perkawinan pertama bagi seorang wanita berpengaruh terhadap risiko kehamilan dan kelahiran anaknya. Semakin muda usia perkawinannya semakin besar risiko yang diihadapi selama kehamilan dan kelahiran baik bagi ibu maupun anaknya. Anak yang dilahirkan oleh ibu yang terlalu muda cenderung memiliki risiko sakit dan meninggal lebih besar. Hal ini dapat terjadi karena belum matangnya rahim wanita muda untuk proses berkembangnya janin dan melahirkan. Ada hubungan yang kuat antara pola fertilitas ibu dengan resiko kelangsungan hidup anak.Pada umumnya, bayi mempunyai probabilitas kematian yang lebih tinggi jika mereka dilahirkan oleh ibu yang terlalu muda dan terlalu tua.

c. Fasilitas kesehatan

Menurut Maine dan Thaddeus (1994) penyebab kematian tiga terlambat berkaitan dengan fasilitas layanan kesehatan.McCarthy dan Maine (1992) mengemukakan bahwa salah satu determinan kontekstual kematian ibu adalah status masyarakat yaitu ketersediaan pelayanan kesehatan.Disamping penolong persalinan, kematian ibu terkait erat dengan tempat/fasilitas persalinan. Persalinan di fasilitas kesehatan terbukti berkontribusi terhadap turunnya risiko kematian ibu (Dinkes, 2013).

d. Penolong persalinan oleh tenaga kesehatan

McCarthy dan Maine (1992) salah satu determinan kontekstual adalah perilaku sehat yaitu penolong persalinan.Persalinan yang ditolong tenaga kesehatan terbukti berkontribusi terhadap turunnya risiko kematian ibu (Dinkes, 2013).

e. Kunjungan Ibu Hamil K4

Ibu hamil yang mendapatkan pelayanan antenatal sesuai standar paling sedikit empat kali, dengan distribusi pemberian pelayanan yang dianjurkan adalah minimal satu kali pada triwulan pertama, satu kali pada triwulan kedua dan dua kali pada triwulan ketiga umur kehamilan. Pelayanan yang mencakup minimal : (1) Timbang badan dan ukur tinggi badan, (2) Ukur tekanan darah, (3) Nilai status gizi (ukur lingan lengan atas), (4) (ukur) tinggi fundus uteri, (5) Tentukan presentasi janin & denyut jantung janin(DJJ), (6) Skrining status imunisasi tetanus dan pemberian Tetanus Toksoid,(7) Pemberian tablet besi (90 tablet selama kehamilan), (8) Test laboratorium sederhana (Hb, Protein Urine) dan atau berdasarkan indikasi (HbsAg, Sifilis, HIV, Malaria, TBC), (9) Tata laksana kasus, (10) Temu wicara (pemberian komunikasi interpersonal dan konseling(Dinkes, 2013).

f. Rumah Tangga ber PHBS (Perilaku Hidup Bersih dan Sehat)

Rumah tangga yang seluruh anggotanya berperilaku hidup bersih dan sehat, yang meliputi 10 indikator, yaitu pertolongan persalinan oleh tenaga kesehatan, bayi diberi ASI eksklusif, balita ditimbang setiap bulan, menggunakan air bersih, *mencuci*tangan dengan air bersih dansabun, menggunakan jamban sehat, memberantas jentik di rumah sekali seminggu, makan sayur dan buah setiap hari, melakukan aktivitas fisik setiap hari, dan tidak merokok di dalam rumah (Dinkes, 2013).

3. Determinan Kontekstual yaitu pendidikan ibu

Tingkat pendidikan ibu dapat mempengaruhi kelangsungan hidup anak karena mempengaruhi pilihan dan kemampuan dalam pemeliharaan kesehatan terkait dengan kontrasepsi, gizi, kebersihan pencegahan penyakit dan perawatan anak saat sakit (Mosley dan Chen, 1984). Karakteristik rumah tangga yang meliputi pendapatan, faktor pendidikan dan sumber air bersih rumah tangga. Efek pendapatan/kekayaan akan berpengaruh pada pemilihan makanan, air, pakaian, rumah, pelayanan preventif, pengobatan penyakitdan informasi. Angka kematian dimasa kanak-kanak tergolong rendah pada masyarakat dengan tingkat kuintil kekayaan yang tinggi, namun sebaliknya angka kematian tinggi pada masyarakat dengan tingkat kuintil kekayaan yang rendah.

Tingkat pendapatan rumah tangga berkaitan dengan kesejahteraan dan kemiskinan. Tingkat pendapatan yang rendah menunjukkan pula tingkat pengeluaran yang rendah pula dan erat kaitannya dengan kemiskinan. Anak yang berada dalam rumah tangga miskin umumnya memiliki angka kematian balita lebih dari dua kali lipat dari kematian balita di kelompok kuintil paling sejahtera (Unicef Indonesia, 2012).

BAB 3

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder didapatkan dari Profil Kesehatan Provinsi JawaTimur yang dikeluarkan Dinas Kesehatan Provinsi JawaTimur dan Publikasi hasil Survai Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) dari BPS JawaTimur. Unit pengamatan sebanyak 38 unit pengamatan terdiri dari 29 kabupaten dan 9 kota. Pemilihan variabel predictor berdasarkan buku pedoman KIA dan Four Pillars of Safe Motherhood

3.2 Variabel Penelitian

Variabel penelitian yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari dua yaitu variabel respon (Y) dan lima variabel prediktor (X).Tabel 3.1 menyajikanuraian dari setiapvariabel :

Tabel 3.1 Variabel Penelitian

Variabel	**Keterangan**
Y_1	Jumlah kematian bayi
Y_2	Jumlah kematian ibu
X_1	Persentase persalinan oleh tenaga kesehatan
X_2	Persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3
X_3	Persentase komplikasi kebidanan yang ditangani
X_4	Persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 17 tahun
X_5	Persentase ibu hamil melaksanakan program K4

Sumber : Profil Kesehatan Propinsi Jawa Timur dan BPS Provinsi Jawa Timur

Adapun definisi operasional variabel penelitian adalah

1. Jumlah kematian bayi adalah jumlah kematian yang terjadi pada bayi sebelum mencapai usia satu tahun di tiap kabupaten dan kota di Jawa Timur.
2. Jumlah kematian ibu adalah jumlah kematian perempuan pada saat hamil atau kematian dalam kurun waktu 42 hari sejak terminasi kehamilan tanpa memandang lama kehamilan atau tempat persalinan, yakni kematian yang disebabkan karena kehamilan atau pengelolaan, tetapi bukan karena sebab-sebab lain seperti kecelakaan, terjatuhdan lain-lain di setiap kabupaten/kota di Jawa Timur.
3. Persentase persalinan oleh tenaga kesehatan adalah jumlah ibu bersalin yang ditolong oleh tenaga kesehatan yang memiliki kompetensi kebidanan (dokter kandungan dan kebidanan, dokter umum, dan bidan) di satu wilayah kerja pada kurun waktu tertentu dibagi dengan jumlah ibu bersalin di satu wilayah kerja pada kurun waktu yang sama dikali 100%.
4. Persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 adalah jumlah ibu hamil yang mendapat (90) tablet Fe3 selama periode kehamilannya pada wilayah dankurun waktu tertentu dibagi jumlah ibu hamil pada wilayah dan kurun waktu yang sama dikali 100%.
5. Persentase komplikasi kebidanan ditangani adalah jumlah ibu hamil, ibu bersalin dan ibu nifas dengan komplikasi yang ditangani oleh tenaga kesehatan dibagi 20% dari jumlah sasaran ibu hamil dalam 1 tahun dikali 100%.
6. Persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 17 tahun adalah jumlah wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 17 tahun dibagi jumlah wanita kawin dikali 100%.
7. Persentase ibu hamil melaksanakan program K4 adalah jumlah ibu hamil yang memperoleh pelayanan antenatal K4 sesuai standar di satu wilayah kerja pada kurun waktu tertentu dibagi jumlah seluruh ibu hamil di satu wilayah kerja dalam kurun waktu yang sama dikali 100%.

Struktur data untuk penelitian ini ditunjukkan pada Tabel 3.2

Tabel 3.2 Struktur Data dalam Penelitian

Wilayah	$\mathbf{Y_1}$	$\mathbf{Y_2}$	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$	$\mathbf{X_5}$
1	$y_{1.1}$	$y_{2.1}$	$x_{1.1}$	$x_{2.1}$	$x_{3.1}$	$x_{4.1}$	$x_{5.1}$
2	$y_{1.2}$	$y_{2.2}$	$x_{1.2}$	$x_{2.2}$	$x_{3.2}$	$x_{4.2}$	$x_{5.2}$
3	$y_{1.3}$	$y_{2.3}$	$x_{1.3}$	$x_{2.3}$	$x_{3.3}$	$x_{4.3}$	$x_{5.3}$
4	$y_{1.4}$	$y_{2.4}$	$x_{1.4}$	$x_{2.4}$	$x_{3.4}$	$x_{4.4}$	$x_{5.4}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
38	$y_{1.38}$	$y_{2.38}$	$x_{1.38}$	$x_{2.38}$	$x_{3.38}$	$x_{4.38}$	$x_{5.38}$

3.3 Metode Analisis

Langkah-langkah dalam analisis data untuk setiap tujuan penelitian sebagai berikut :

1. Langkah-langkah untuk mendapatkan penduga parameter pada model *Bivariate Generalized Poisson Regression* adalah
   1) Membentuk fungsi *likelihood* dari model *Bivariate Generalized Poisson* yaitu

   $$L\left(\mu_0, \mu_{1i}, \mu_{2i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu_0 \mu_{1i} \mu_{2i} \exp\left\{-\left(\mu_0 + \mu_{1i} + \mu_{2i}\right) - y_{1i}\alpha_1 - y_{2i}\alpha_2\right\} W_i$$

   dengan $W_i = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} W_{1i}, W_{2i}$

   dimana

   $$W_{1i} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i} - k\right)!} \left(\exp k\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0\right)\right)$$

   dan

   $$W_{2i} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + \left(y_{2i} - k\right)\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i} - k\right)!} \frac{\left(\mu_0 + k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}$$

   2) Membentuk fungsi ln *likelihood* dari model *Bivariate Generalized Poisson* yaitu

$$Q=\ln L\left(\mu_0,\mu_{1i},\mu_{2i}\right)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_0\mu_{1i}\mu_{2i}\exp\left\{-\left(\mu_0+\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)-y_{1i}\alpha_1-y_{2i}\alpha_2\right\}W_i\right)$$

3) Transformasi fungsi ln *likelihood* ke dalam bentuk $\mu_{ji}+\mu_0=e^{\mathbf{x_i^T\beta_j}}$

$$Q=\ln\prod_{i=1}^{n}\left\{\mu_0\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_1}}-\mu_0\right)\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_2}}-\mu_0\right)\exp\begin{bmatrix}-\left(\mu_0+\left(\exp\left(\mathbf{x_i^T\beta_1}\right)-\mu_0\right)\right)+\\ \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T\beta_2}\right)-\mu_0\right)-y_{1i}\alpha_1-y_{2i}\alpha_2\end{bmatrix}\right\}W_i$$

4) Mencari turunan parsial pertama dari fungsi ln *likelihood*

$$\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{\theta}_{(m)})_{(k+1)}=\left(\frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0}\quad\frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\quad\frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}^T{}_2}\quad\frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_1}\quad\frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_2}\frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_0}\right)_{\theta=\theta_{(m)}}$$

dimana

$$\boldsymbol{\theta}=\left(\mu_0\quad\boldsymbol{\beta}_1^T\quad\boldsymbol{\beta}_2^T\quad\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_0\right)$$

5) Mencari turunan parsial kedua dari fungsi ln *likelihood*

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}_{(m)})_{(k+1)(k+1)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0^2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0\partial\boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0\partial\alpha_1} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0\partial\alpha_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0\partial\alpha_0}\\ & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\boldsymbol{\beta}_1} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\boldsymbol{\beta}_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\alpha_1} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\alpha_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\alpha_0}\\ & & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\boldsymbol{\beta}_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\alpha_1} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\alpha_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\alpha_0}\\ & & & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_1\partial\alpha_1^T} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_1\partial\alpha_0}\\ & & & & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_2\partial\alpha_2^T} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_2\partial\alpha_0^T}\\ \text{simetris} & & & & & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_0\partial\alpha_0^T}\end{bmatrix}$$

6) Mendapatkan nilai parameter menggunakan iterasi *Newton Raphson*

2. Langkah-langkah untuk mendapatkan uji hipotesis pada model *Bivariate Generalized Poisson Regression* adalah

   Pengujian hipotesis secara serentak :

   1) Membentuk hipotesis untuk menguji model regresi *Bivariate Generalized Poisson Regression*

$H_0 : \beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{jk} = 0$

H_1 : Paling tidak terdapat satu $\beta_{jl} \neq 0; j = 1,2; l = 1,2,...,k$

dan

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 = 0$

H_1 : Paling tidak terdapat satu $\alpha_j \neq 0$;

2) Membuat himpunan parameter di bawah populasi

$$(\Omega) = \left\{\mu_0, \boldsymbol{\beta}_{j1}, \boldsymbol{\beta}_{j2}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0; j = 1,2\right\}$$

3) Membuat fungsi *likelihood* di bawah populasi

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_{1i}, y_{2i} \mid \Omega\right)$$

4) Membuat himpunan parameter di bawah H_0

$$(\omega) = \left\{\mu_0, \beta_{1.0}, \beta_{2.0}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0\right\}$$

5) Membuat fungsi *likelihood* di bawah H_0

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_{1i}, y_{2i} \mid \omega\right)$$

$$L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} L\left(\omega\right)$$

6) Mendapatkan penduga parameter yaitu $(\hat{\omega})$ dan $(\hat{\Omega})$

7) Mendapatkan statistik uji dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) :

$$\mathrm{D}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = 2\left(\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})\right) \sim \chi^2_{\alpha,v}$$

8) Menentukan daerah penolakan H_0

Kriteria Tolak H_0 apabila $\mathrm{D}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) > \chi^2_{\alpha,v}$ di mana v adalah derajat bebas yang diperoleh dari jumlah parameter di bawah populasi dikurangi jumlah parameter di bawah H_0.

Pengujian hipotesis secara parsial parameter β :

1) Hipotesis untuk menguji signifikan parameter β

$H_0 : \beta_{jl} = 0$

$H_1 : \beta_{jl} \neq 0; j = 1,2; l = 1,2,...,k$

2) Menentukan statistik uji

$$Z = \frac{\hat{\beta}_{jl}}{SE(\hat{\beta}_{jl})}$$

3) Menentukan daerah penolakan H_0

Tolak H_0 apabila

$|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ di mana α adalah tingkat signifikansi yang digunakan.

Pengujian hipotesis secara parsialparameter α :

1) Hipotesis untuk menguji signifikan parameter α

$H_0 : \alpha_j = 0$

$H_1 : \alpha_j \neq 0;$

2) Menentukan statistik uji

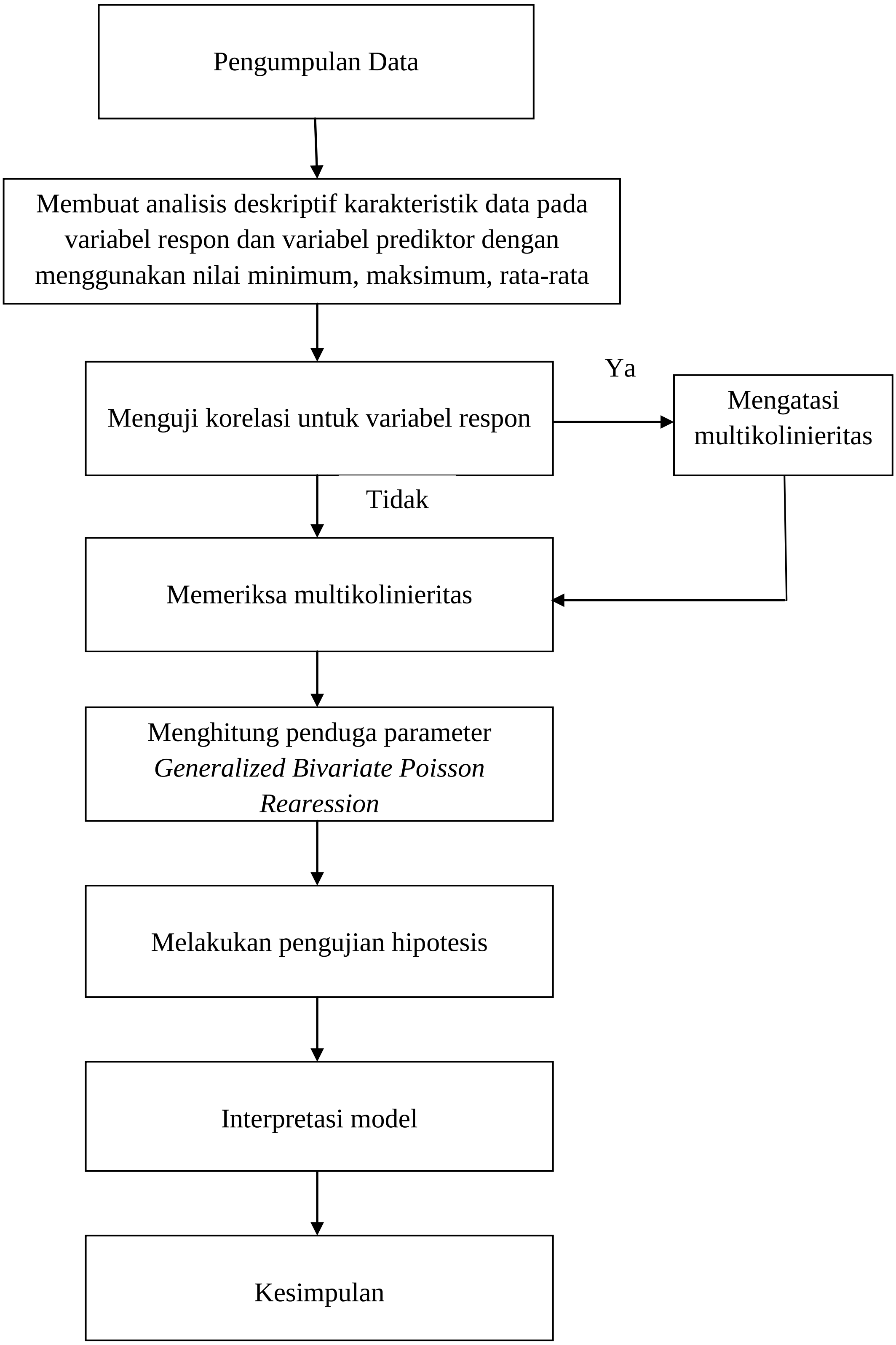
$$Z = \frac{\hat{\alpha}_j}{SE(\hat{\alpha}_j)}$$

3) Menentukan daerah penolakan H_0

Tolak H_0 apabila $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ dimana α adalah tingkat signifikansi yang digunakan.

3. Langkah-langkah untuk mengidentifkasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kematian bayi dan kematian ibu dengan pendekatan model *Bivariate Generalized Poisson Regression*adalah
   1) Melakukan analisis deskriptif terhadap variabel respon dan variabel prediktor
   2) Menguji hipotesis untuk korelasi antarvariabel respon
   3) Mendeteksi multikolinieritas dari variabel prediktor dengan menggunakan kriteria uji VIF

4) Mendapatkan penduga parameter model *Bivariate Generalized Poisson Regression* dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)
5) Melakukan pengujian hipotesis untuk *Bivariate Generalized Poisson Regression*
6) Melakukan interpretasi model
7) Membuat kesimpulan dari hasil analisis



Gambar 3.2 Langkah-langkah Menganalisis Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap Jumlah Kematian Bayi dan Kematian Ibu

BAB 4
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai proses pendugaan parameter pada model *Bivariate Generalized Poisson Regression* (BGPR) menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Selanjutnya model BGPR digunakan untuk memodelkan jumlah kematian bayi dan jumlah kematian ibu di Provinsi Jawa Timur Tahun 2013 serta mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi.

4.1 Pendugaan Parameter *Bivariate Generalized Poisson Regression*

Metode pendugaan parameter *Bivariate Generalized Poisson Regression* adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan fungsi probabilitas sebagai berikut:

$$f\left(y_{1i},y_{2i}\right)=\mu_0\mu_{1i}\mu_{2i}\exp\left\{-\left(\mu_0+\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)-y_{1i}\alpha_1-y_{2i}\alpha_2\right\}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\frac{(\mu_{1i}+(y_{1i}-k)\alpha_1)^{y_{1i}-k-1}}{(y_{1i}-k)!}$$
$$\frac{(\mu_{2i}+(y_{2i}-k)\alpha_2)^{y_{2i}-k-1}}{(y_{2i}-k)!}\times\frac{(\mu_0+k\alpha_0)^{k-1}}{k!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right) \qquad (4.1)$$

Kemudian dibentuk fungsi *likelihood* dari *Bivariate Generalized Poisson* yaitu

$$L\left(\mu_0,\mu_{1i},\mu_{2i},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_0\right)=\prod_{i=1}^{n}\mu_0\mu_{1i}\mu_{2i}\exp\left\{-\left(\mu_0+\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)-y_{1i}\alpha_1-y_{2i}\alpha_2\right\}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\frac{(\mu_{1i}+(y_{1i}-k)\alpha_1)^{y_{1i}-k-1}}{(y_{1i}-k)!}$$
$$\frac{(\mu_{2i}+(y_{2i}-k)\alpha_2)^{y_{2i}-k-1}}{(y_{2i}-k)!}\times\frac{(\mu_0+k\alpha_0)^{k-1}}{k!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)$$

setelah itu dibentuk fungsi ln *likelihood* dari *Bivariate Generalized Poisson* yaitu

$$Q=\ln L\left(\mu_0,\mu_{1i},\mu_{2i},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_0\right)=\ln\prod_{i=1}^{n}\mu_0\mu_{1i}\mu_{2i}\exp\left\{-\left(\mu_0+\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)-y_{1i}\alpha_1-y_{2i}\alpha_2\right\}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\frac{(\mu_{1i}+(y_{1i}-k)\alpha_1)^{y_{1i}-k-1}}{(y_{1i}-k)!}$$
$$\frac{(\mu_{2i}+(y_{2i}-k)\alpha_2)^{y_{2i}-k-1}}{(y_{2i}-k)!}\times\frac{(\mu_0+k\alpha_0)^{k-1}}{k!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)$$

ditransformasikan kedalam $\mu_{ji}+\mu_0=e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}$ sehingga didapatkan fungsi ln *likelihood* yaitu

$$Q=\ln\left(\mu_0,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\alpha_1,\alpha_2\right)=\ln\prod_{i=1}^{n}\mu_0\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)\exp\left(-a+b\right)W_i \qquad (4.2)$$

di mana

$$a=\left(\mu_0+\left(\exp\left(\mathbf{x_i^T\beta_1}\right)-\mu_0\right)\right)$$
$$b=\left(\exp\left(\mathbf{x_i^T\beta_1}\right)-\mu_0\right)-y_{1i}\alpha_1-y_{2i}\alpha_2$$

$$W_i=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}W_{1i}W_{2i}$$

$$W_{1i}=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)\text{ dan}$$

$$W_{2i}=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_2}}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i}-k\right)!}\frac{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}$$

Sehingga didapatkan fungsi ln *likelihood* dari *Bivariate Generalized Poisson* :

$$Q=\ln L\left(\mu_0,\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_0\right)=\sum_{i=1}^{n}\ln\mu_0+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_1}}-\mu_0\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_2}}-\mu_0\right)-n\mu_0+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_1}}-\mu_0\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_2}}-\mu_0\right)-\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\alpha_1-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}\alpha_2+\sum_{i=1}^{n}\ln W_i$$

turunan pertama dari logaritma fungsi ln *likelihood* terhadap μ_0

$$\frac{\partial Q}{\partial\mu_0}=-\frac{n}{\mu_0}-n-2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial\mu_0} \tag{4.3}$$

W_i diturunkan terhadap μ_0 di mana $\frac{\partial W_i}{\partial\mu_0}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left\{\frac{\partial W_{1i}}{\partial\mu_0}W_{2i}+\frac{\partial W_{2i}}{\partial\mu_0}W_{1i}\right\}$ (4.4)

kemudian W_{1i} diturunkan terhadap μ_0

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial\mu_0}=\frac{-\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right) \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial\mu_0}=\frac{-\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2}}{\left(y_{1i}-k\right)\left(y_{1i}-k-2\right)!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)$$

kemudian W_{2i} diturunkan terhadap μ_0

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial\mu_0}=u'v+uv'\text{ dengan}$$

$$u=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i}-k\right)!},$$

$$u^{'}=\frac{-\left(y_{2i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-2}}{\left(y_{2i}-k\right)!}$$

$$v=\frac{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}\,\mathrm{dan}\,v^{'}=\frac{\left(k-1\right)\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-2}}{k!}$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial\mu_0}=\left[\frac{-\left(y_{2i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i}-k\right)!}\frac{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}\right]+$$

$$\left[\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i}-k\right)!}\frac{\left(k-1\right)\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-2}}{k!}\right]$$

$$=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i}-k\right)!}\frac{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}$$

$$\left[\frac{-\left(y_{2i}-k-1\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)}+\frac{k-1}{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)}\right] \tag{4.6}$$

Persamaan (4.5) dan persamaan (4.6) disubstitusikan kedalam persamaan (4.4):

$$\frac{\partial W_i}{\partial\mu_0}=\frac{-\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)+$$

$$\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i}-k\right)!}\frac{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}\left[\frac{-\left(y_{2i}-k-1\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)}+\frac{k-1}{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)}\right]$$

$$=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i}-k\right)!}\frac{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}$$

$$\left[\frac{-\left(y_{1i}-k-1\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)}\left(\exp\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)+\left(\frac{-\left(y_{2i}-k-1\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)}+\frac{k-1}{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)}\right)\right] \tag{4.7}$$

turunan pertama dari Q terhadap μ_0 adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu_0}=-\frac{n}{\mu_0}-n-2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \mu_0}$$

$$=\frac{-n}{\mu_0}-n-2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left\{\frac{-\left(y_{1i}-k-1\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)}+\left(\frac{-\left(y_{2i}-k-1\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)}+\frac{k-1}{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)}\right)\right\} \tag{4.8}$$

Turunan pertama dari logaritma fungsi ln *likelihood* persamaan (4.4) terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}$$

W_i diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ di mana $\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left\{\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}W_{2i}+\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}W_{1i}\right\}$ (4.9)

kemudian W_{1i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2}\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(y_{1i}-k\right)\left(y_{1i}-k-2\right)!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right) \tag{4.10}$$

kemudian W_{2i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=0$$

sehingga $\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}W_{2i}$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2}\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)}{\left(y_{1i}-k\right)\left(y_{1i}-k-2\right)!}$$

$$\times\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}}{\left(y_{2i}-k\right)!k!} \tag{4.11}$$

maka didapatkan turunan pertama dari Q terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\mathbf{x}_i\right)+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i \qquad (4.12)$$

Turunan pertama dari logaritma fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}$$

W_i diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ di mana $\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left\{\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}W_{2i}+\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}W_{1i}\right\}$ (4.13)

kemudian W_{1i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=0$$

kemudian W_{2i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-2}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i\left(\mu_0+k\alpha_0\right)}{\left(y_{2i}-k\right)\left(y_{2i}-k-2\right)!k!} \qquad (4.14)$$

sehingga $\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}W_{1i}$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-2}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i\left(\mu_0+k\alpha_0\right)}{\left(y_{2i}-k\right)\left(y_{2i}-k-2\right)!k!}\times\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!}$$

(4.15)

maka didapatkan turunan pertama dari Q terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2\right)\mathbf{x}_i\right)+\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_2}}}\left(\exp\left(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_2}\right)\mathbf{x}_i\right)+\left(\exp\left(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_2}\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(y_{2i}-k-1\right)$$
$$\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_2}}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_2}}\right)\mathbf{x}_i \tag{4.16}$$

Turunan pertama dari logaritma fungsi ln *likelihood* terhadap α_1

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1}=-\sum_{i=1}^{n}y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_1}$$

W_i diturunkan terhadap α_1 di mana $\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_1}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_2}W_{2i}+\frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_1}W_{1i}\right)$

kemudian W_{1i} diturunkan terhadap α_1

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_1}=u'v+uv' \tag{4.17}$$

di mana

$$u=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\qquad u'=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2}}{\left(y_{1i}-k-2\right)!}$$

$$v=\exp k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\qquad v'=\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)$$

sehingga didapatkan $\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_1}$ adalah

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_1}=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2}}{\left(y_{1i}-k-2\right)!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)+$$
$$\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)$$

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_1}=\left\{\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)\right\}\left[\frac{1}{\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k}}+\frac{1}{\left(y_{1i}-k\right)!}\right] \tag{4.18}$$

kemudian W_{2i} diturunkan terhadap α_1

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_1} = 0$$

sehingga $\dfrac{\partial W_i}{\partial \alpha_1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})} \frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_1} W_{2i}$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_1} = \left\{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1} \exp\left(k\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0\right)\right)\right\}\left[\frac{1}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k}} + \frac{1}{\left(y_{1i} - k\right)!}\right]$$

$$\times \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + \left(y_{2i} - k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(\mu_0 + k\alpha_0\right)^{k-1}}{\left(y_{2i} - k\right)!k!} \tag{4.19}$$

maka didapatkan turunan pertama dari Q terhadap α_1

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = -\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})} \frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = -\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})} \left(\left(y_{1i} - k - 1\right)\left(y_{1i} - k\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1} + 1\right) \tag{4.20}$$

Turunan pertama dari logaritma fungsi ln *likelihood* terhadap α_2

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = -\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_2}$$

W_i diturunkan terhadap α_2 di mana $\dfrac{\partial W_i}{\partial \alpha_2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\min(y_1, y_2)} \left\{\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_2} W_{2i} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_2} W_{1i}\right\}$ (4.21)

kemudian W_{1i} diturunkan terhadap α_2

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_2} = 0$$

kemudian W_{2i} diturunkan terhadap α_1

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_2} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + \left(y_{2i} - k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-2}\left(\mu_0 + k\alpha_0\right)^{k-1}}{\left(y_{2i} - k - 2\right)!k!} \tag{4.22}$$

sehingga $\dfrac{\partial W_i}{\partial \alpha_2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})} \frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_2} W_{1i}$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_2}=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-2}\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}}{\left(y_{2i}-k-2\right)!k!}\times\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!} \quad (4.23)$$

maka didapatkan turunan pertama dari Q terhadap α_2

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2}=-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2}=-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(y_{2i}-k\right)\left(y_{2i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1} \quad (4.24)$$

Turunan pertama dari logaritma fungsi ln *likelihood* terhadap α_0

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_0}$$

W_i diturunkan terhadap α_0 di mana $\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_0}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left\{\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_0}W_{2i}+\frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_0}W_{1i}\right\}$ (4.25)

kemudian W_{1i} diturunkan terhadap α_0

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_0}=-\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)$$

kemudian W_{2i} diturunkan terhadap α_0

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_0}=\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-2}\left(k-1\right)k\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-2}}{\left(y_{2i}-k-2\right)!k!} \quad (4.26)$$

sehingga $\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_0}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_0}W_{2i}+\frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_0}W_{1i}\right)$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_0}=\frac{-\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)}{\left(y_{1i}-k\right)!}\times\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k}}{\left(y_{2i}-k\right)!k!}$$

$$\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}+\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i}-k\right)!}\frac{\left(k-1\right)\left(k\right)\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-2}}{k!}$$

$$\times\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)$$

maka didapatkan turunan pertama dari Q terhadap α_0

$$\frac{\partial Q}{\partial\alpha_0}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial\alpha_0}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\alpha_0}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(-1+\frac{k\left(k-1\right)}{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)}\right) \tag{4.27}$$

Pada turunan pertama diperoleh persamaan yang eksplisit maka diselesaikan menggunakan iterasi *Newton Rahpson* dengan menggunakan persamaan (4.28) :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}-\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right) \tag{4.28}$$

di mana

$$\boldsymbol{\theta}=\left(\mu_0,\boldsymbol{\beta}_1^T,\boldsymbol{\beta}_2^T,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_0\right)^T \tag{4.29}$$

$$\mathbf{g}^T\left(\boldsymbol{\theta}_{(m)}\right)_{(k+1)}=\left(\frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0}\ \frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\ \frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}\ \frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_1}\ \frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_2}\ \frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_0}\right)_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{(m)}}$$

(4.30)

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}_{(m)})_{(k+1)(k+1)}=\begin{bmatrix}
\frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0^2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0\partial\boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0\partial\alpha_1} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0\partial\alpha_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_0\partial\alpha_0} \\
 & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\boldsymbol{\beta}_1} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\boldsymbol{\beta}_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\alpha_1} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\alpha_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\alpha_0} \\
 & & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\boldsymbol{\beta}_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\alpha_1} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\alpha_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\alpha_0} \\
 & & & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_1\partial\alpha_1^T} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_1\partial\alpha_0} \\
 & & & & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_2\partial\alpha_2^T} & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_2\partial\alpha_0^T} \\
\text{simetris} & & & & & \frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\alpha_0\partial\alpha_0^T}
\end{bmatrix}$$

(4.31)

Matriks Hessian merupakan matriks yang berisi turunan kedua dari fungsi $\ln L\left(Q\right)$ terhadap parameter $\left(\mu_0, \boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0\right)$. Adapun langkah-langkah pendugaan parameter dengan iterasi *Newton-Raphson* adalah

1. Menentukan nilai penduga awal parameter $L\left(\hat{\omega}\right)$ dengan $\boldsymbol{\theta} = \left(\mu_0\ \boldsymbol{\beta}_1^T\ \boldsymbol{\beta}_2^T\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_0\right)^T$, iterasi pada saat $m = 0$. Nilai penduga awal $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{j(0)}$ diperoleh dengan metode OLS yaitu

   $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{j(0)} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{y}_j\right); j = 1, 2$
2. Membentuk vektor gradien $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ dengan mensubtitusikan persamaan (4.8),(4.12),(4.16),(4.20) ,(4.24) dan (4.27) kedalam persamaan (4.30).
3. Membentuk matriks Hessian dengan memsubtistusikan persamaan yang dihasilkan dari turunan kedua pada (Lampiran 1) kedalam persamaan (4.31).
4. Memasukkan nilai ke dalam $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ elemen-elemen vektor $\mathbf{g}$ dan matriks $\mathbf{H}$ sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}\right)$.
5. Mulai dari $m = 0$ dilakukan iterasi pada persamaan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{j(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{j(m)} - H\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right) g\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$. Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$ merupakan kumpulan penduga parameter yang konvergen saat iterasi ke-m.
6. Apabila belum mendapatkan penduga parameter yang konvergen, maka dilanjutkan ke langkah 5 hingga iterasi ke $m = m + 1$. Iterasi akan berhenti jika nilai dari $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right\| \le \varepsilon$.

4.2 Pengujian Hipotesis Parameter *Bivariate Generalized Poisson Regression*

Fungsi *likelihood* yang berhubungan dengan model *Bivariate Generalized Poisson Regression* yaitu $L\left(\hat{\Omega}\right)$ dan $L\left(\hat{\omega}\right)$. $L\left(\hat{\Omega}\right)$ adalah nilai *maximum likelihood* untuk model dengan melibatkan variabel prediktor dan $L\left(\hat{\omega}\right)$ adalah nilai *maximum likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor. Metode yang digunakan dalam pengujian hipotesis adalah *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dinotasikan dengan

$$\mathrm{D}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}\right)$$

4.2.1 Pengujian Serentak Parameter Model *Bivariate Generalized Poisson Regression*

Pengujian serentak parameter pada model *Bivariate Generalized Poisson Regression* dilakukan untuk mengetahui signifikansi parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan $\boldsymbol{\alpha}$ secara bersama-sama dengan hipotesis sebagai berikut :

a. Parameter $\boldsymbol{\beta}$

$$\mathrm{H}_0 : \beta_{j1} = \beta_{j2} = \ldots = \beta_{jk} = 0; j = 1,2$$

$$\mathrm{H}_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{jk} \neq 0; j = 1,2 \text{ dengan } l = 1,2,\ldots,k$$

b. Parameter $\boldsymbol{\alpha}$

$$\mathrm{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\mathrm{H}_1 : \text{ada salah satu } \alpha_j \neq 0; j = 1,2$$

Himpunan parameter di bawah populasi $(\Omega) = \left\{\mu_0, \boldsymbol{\beta}_{j1}, \boldsymbol{\beta}_{j2}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0\right\}$

Fungsi *likelihood* di bawah populasi $L(\Omega)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} \Bigg(& \mu_0 \left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right)\exp\left\{-\left(\mu_0 + \left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right)\right) - y_{1i}\alpha_1 - y_{2i}\alpha_2\right\}\Bigg) \\
& \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}}{(y_{1i}-k)!} \times \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + (y_{2i}-k)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{(y_{2i}-k)!} \\
& \times \frac{(\mu_0 + k\alpha_0)^{k-1}}{k!}\exp\left(k\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln L(\Omega) = & \sum_{i=1}^{n}\ln\mu_0 + \sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) - n\mu_0 + \\
& \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) - \sum_{i=1}^{n} y_{1i}\alpha_1 - \sum_{i=1}^{n} y_{2i}\alpha_2 + \sum_{i=1}^{n}\ln W_i
\end{aligned}$$

di mana

$$W_i = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} W_{1i}, W_{2i}$$

$$W_{1i} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i} - k\right)!} \exp\left(k\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0\right)\right) \text{dan}$$

$$W_{2i} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + \left(y_{2i} - k\right)\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i} - k\right)!} \frac{\left(\mu_0 + k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}$$

dengan nilai $\left(\mu_0, \boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0\right)$ merupakan nilai penduga parameter yang diperoleh dari persamaan (4.28).

Himpunan parameter di bawah H_0 $(\omega) = \left\{\mu_0, \beta_{1.0}, \beta_{2.0}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0\right\}$ Sedangkan fungsi ln *likelihood* untuk model yang tidak melibatkan variabel prediktor dibentuk pada himpunan di bawah H_0 dan dimaksimalkan sehingga diperoleh $L\left(\omega\right)$. Fungsi *likelihood* di bawah H_0 sebagai berikut

$$L\left(\hat{\omega}\right) = \prod_{i=1}^{n} \hat{\mu}_0 \left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) \exp\left(-\left(\hat{\mu}_0 + \left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + \left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right)\right) - y_{1i}\alpha_1 - y_{2i}\alpha_2\right)$$
$$\frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i} - k\right)!} \times \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) + \left(y_{2i} - k\right)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i} - k\right)!} \times \frac{\left(\hat{\mu}_0 + k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}$$
$$\times \exp\left(k\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0\right)\right)$$

$$\ln L\left(\hat{\omega}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln \mu_0 + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1.0}} - \mu_0\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2.0}} - \mu_0\right) - n\mu_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1.0}} - \mu_0\right) +$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2.0}} - \mu_0\right) - \sum_{i=1}^{n} y_{1i}\alpha_1 - \sum_{i=1}^{n} y_{2i}\alpha_2 + \sum_{i=1}^{n} \ln W_{i.0}$$

di mana

$$W_{i.0} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \left\{W_{1i.0}, W_{2i.0}\right\}$$

$$W_{1i.0} = \frac{\left(\left(e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1.0}} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i} - k\right)!} \exp\left(k\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0\right)\right) \text{dan}$$

$$W_{2i.0} = \frac{\left(\left(e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2.0}} - \mu_0\right) + \left(y_{2i} - k\right)\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i} - k\right)!} \frac{\left(\mu_0 + k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}$$

Setelah fungsi ln *likelihood* di bawah H_0 terbentuk maka langkah selanjutnya persamaan $\ln L(\hat{\omega})$ di turunkan terhadap masing-masing parameter di bawah H_0 yaitu $(\mu_0, \beta_{1.0}, \beta_{2.0}, \alpha_1, \alpha_2)$ Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

turunan pertama fungsi $\ln L(\hat{\omega})$ terhadap μ_0

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \mu_0} = \frac{-n}{\mu_0} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left\{ \frac{-(y_{1i}-k-1)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)} + \left(\frac{-(y_{2i}-k-1)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \mu_0\right) + (y_{2i}-k)\alpha_2\right)} + \frac{k-1}{(\mu_0 + k\alpha_0)} \right) \right\} \tag{4.32}$$

turunan pertama fungsi $\ln L(\hat{\omega})$ terhadap $\hat{\beta}_{1.0}$

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\beta}_{1.0}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e^{\hat{\beta}_{1.0}}} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{1i}-k-1) \left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1} \left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}\right) \tag{4.33}$$

turunan pertama fungsi $\ln L(\hat{\omega})$ terhadap $\hat{\beta}_{2.0}$

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\beta}_{2.0}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e^{\hat{\beta}_{2.0}}} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right) + \left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{2i}-k-1) \left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \mu_0\right) + (y_{2i}-k)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1} \left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right) \tag{4.34}$$

turunan pertama fungsi $\ln L(\hat{\omega})$ terhadap $\hat{\alpha}_1$

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\alpha}_1} = -\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left((y_{1i}-k-1)(y_{1i}-k) \left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1} + 1 \right) \tag{4.35}$$

turunan pertama fungsi $\ln L(\hat{\omega})$ terhadap $\hat{\alpha}_2$

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\alpha}_2} = -\sum_{i=1}^{n} y_{2i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{2i}-k)(y_{2i}-k-1) \left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \mu_0\right) + (y_{2i}-k)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1} \tag{4.36}$$

turunan pertama fungsi $\ln L(\hat{\omega})$ terhadap $\hat{\alpha}_0$

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\alpha}_0} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(-1 + \frac{(k-1)(k)}{(\mu_0 + k\alpha_0)} \right) \tag{4.37}$$

Pada turunan pertama diperoleh persamaan yang eksplisit maka diselesaikan menggunakan iterasi *Newton Rahpson* dengan menggunakan persamaan (4.38) :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right) \qquad (4.38)$$

di mana

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\mu_0\ \beta_{1.0}\ \beta_{2.0}\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_0\right)^T$$

$$\mathbf{g}^T\left(\boldsymbol{\theta}_{(m)}\right)_{(k+1)} = \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_0}\ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{1.0}}\ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{2.0}}\ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1}\ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_2}\ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0}\right)_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{(m)}} \qquad (4.39)$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}_{(m)})_{(k+1)(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_0^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_0 \partial \boldsymbol{\beta}_{1.0}^T} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_0 \partial \boldsymbol{\beta}_{2.0}^T} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_0 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_0 \partial \alpha_2} & \partial \mu_0 \partial \alpha_0 \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{1.0}^T \partial \beta_{1.0}} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{1.0}^T \partial \beta_{2.0}} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{1.0}^T \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{1.0}^T \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{1.0}^T \partial \alpha_0} \\ & & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{2.0}^T \partial \beta_{2.0}} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{2.0}^T \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{2.0}^T \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{2.0}^T \partial \alpha_0} \\ & & & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1^T} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0} \\ & & & & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_2^T} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_0^T} \\ \text{simetris} & & & & & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0^T} \end{bmatrix}$$

(4.40)

Matriks hessian merupakan matriks yang berisi turunan kedua dari fungsi $\ln L\left(\hat{\omega}\right)$ terhadap parameter$\left(\mu_0\ \beta_{1.0}\ \beta_{2.0}\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_0\right)$. Adapun langkah-langkah pendugaan parameter dengan iterasi *Newton-Raphson* adalah

1. Menentukan nilai penduga awal parameter
2. Membentuk vektor gradien $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ dengan mensubtitusikan persamaan (4.32),(4.33),(4.34),(4.35) ,(4.36) dan (4.37) kedalam persamaan (4.39).
3. Membentuk matriks Hessian dengan memsubtistusikan persamaan yang dihasilkan dari turunan kedua (Lampiran 2) kedalam persamaan (4.40).
4. Memasukkan nilai ke dalam $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ elemen-elemen vektor $\mathbf{g}$ dan matriks $\mathbf{H}$ sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}\right)$.

5. Mulai dari $m=0$ dilakukan iterasi pada persamaan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{j(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{j(m)} - H\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right) g\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$. Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$ merupakan kumpulan penduga parameter yang konvergen saat iterasi ke-m.
6. Apabila belum mendapatkan penduga parameter yang konvergen, maka dilanjutkan ke langkah 5 hingga iterasi ke $m = m+1$. Iterasi akan berhenti jika nilai dari $\left\|\hat{\theta}_{(m+1)} - \hat{\theta}_{(m)}\right\| \le \varepsilon$.

Setelah mendapatkan penduga parameter $\left(\mu_0, \beta_{1.0}, \beta_{2.0}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0\right)$ maka dapat dilakukan perhitungan untuk memperoleh statistik uji dengan persamaan sebagai berikut

$$\frac{L(\hat{\omega})}{L\left(\hat{\Omega}\right)} < k$$

$$\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L\left(\hat{\Omega}\right)}\right) < \ln k$$

$$-2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L\left(\hat{\Omega}\right)}\right) > -2\ln k$$

sehingga didapatkan

$$D\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \sim \chi^2_v$$

$$\mathrm{D}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L\left(\hat{\Omega}\right)}\right) = -2\left(\ln L\left(\hat{\Omega}\right) - \ln L(\hat{\omega})\right) \sim \chi^2_v$$

di mana

$$\ln L(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \ln \mu_0 + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) - \sum_{i=1}^{n}\mu_0 - \sum_{i=1}^{n} y_{1i}\alpha_1 - \sum_{i=1}^{n} y_{2i}\alpha_2 +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(\frac{(y_{1i}-k-1)\ln\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)}{(y_{1i}-k)!}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(\frac{(y_{2i}-k-1)\ln\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + (y_{2i}-k)\alpha_2\right)}{(y_{2i}-k)!}\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(\frac{(k-1)(\mu_0 + k\alpha_0)}{k!}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \exp\left(k\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0\right)\right)$$

$$\ln L(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\ln\mu_0+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{\boldsymbol{\beta}_{1,0}}-\mu_0\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{\boldsymbol{\beta}_{2,0}}-\mu_0\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\boldsymbol{\beta}_{1,0}}-\mu_0\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\boldsymbol{\beta}_{2,0}}-\mu_0\right)-\sum_{i=1}^{n}\mu_0-\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\alpha_1-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}\alpha_2+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(\frac{(y_{1i}-k-1)\ln\left(\left(e^{\boldsymbol{\beta}_{1,0}}-\mu_0\right)+(y_{1i}-k)\alpha_1\right)}{(y_{1i}-k)!}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(\frac{(y_{2i}-k-1)\ln\left(\left(e^{\boldsymbol{\beta}_{2,0}}-\mu_0\right)+(y_{2i}-k)\alpha_2\right)}{(y_{2i}-k)!}\right)+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(\frac{(k-1)(\mu_0+k\alpha_0)}{k!}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)$$

$D(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ merupakan pendekatan dari distribusi χ^2 dengan derajat bebas *v*, di mana *v* adalah jumlah parameter dibawah populasi dikurangi jumlah parameter dibawah H_0. Kriteria Tolak H_0 apabila $D\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)>\chi^2_{(\alpha,v)}$ maka terdapat variabel prediktor yang berpengaruh terhadap variabel respon dengan α adalah taraf signifikansi (Agresti, 2002).

4.3 Penerapan *Bivariate Generalized Poisson Regression*

Variabel respon yang digunakan pada penelitian ini adalah jumlah kematian bayi dan jumlah kematian ibu di Provinsi Jawa Timur tahun 2013. Sedangkan variabel prediktor yang digunakan adalah persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_1), persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_2), persentase komplikasi kebidanan yang ditangani (X_3), persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 18 tahun (X_4) dan persentase ibu hamil melaksanakan program K4 (X_5).

4.3.1 Analisis Deskriptif Variabel Penelitian

Secara rinci statistik deskriptif sesuai persamaan (2.1) dari semua variabel disajikan pada Tabel 4.1 sebagai berikut :

Tabel 4.1 Statistika Deskriptif Variabel Respon dan Variabel Prediktor

Variabel	Rata-rata	Varian	Minimal	Maksimal
Y_1	152,45	9792,90	23	420
Y_2	16,89	126,20	1	49
X_1	91,88	24,65	82	100
X_2	84,76	45.36	68	99
X_3	86,60	118,72	61	100
X_4	15,09	39,98	5	29
X_5	87,57	51,81	70	100

Berdasarkan Tabel 4.1 menunjukkan bahwa rata-rata jumlah kematian bayi di setiap kabupaten/kota di Jawa Timur sebesar 152 kematian selama tahun 2013 dengan kematian tertinggi sebesar 420 kematian di kabupaten Jember dan terendah 23 kematian di kota Batu. Nilai ragam sebesar 9793 menunjukkan bahwa terdapat kabupaten/kota dengan jumlah kematian bayi ratusan dan ada kabupaten/kota dengan jumlah kematian bayi puluhan. Sedangkan jumlah kematian ibu di setiap kabupaten/kota di Jawa Timur sebesar 17 kematian selama tahun 2013 dengan kematian tertinggi sebesar 49 kematian di kota Surabaya dan terendah 1 kematian di kota Batu, Mojokerto dan Blitar. Nilai ragam sebesar 126 menunjukkan bahwa terdapat kabupaten/kota dengan jumlah kematian ibu yang cukup tinggi dan ada yang sangat rendah.

Rata-rata persentase persalinan oleh tenaga medis sebesar 91,88 persen di mana kota Kediri dan kabupaten Sidoarjo memiliki persentase tertinggi sebesar 100 persen dan kota Blitar dan kabupaten Situbondo memiliki persentase terendah sebesar 82 persen. Rata-rata persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 sebesar 84,76 persen di mana kota Malang memiliki persentase tertinggi sebesar 99,14 persen dan kota Pasuruan memiliki persentase terendah sebesar 68 persen. Rata-rata komplikasi kebidanan yang ditangani sebesar 100 persen di mana kabupaten Lumajang, Bondowoso, Probolinggo, Bojonegoro dan kota Madiun memiliki persentase tertinggi sedangkan kabupaten Bangkalan memiliki persentase terendah sebesar 61 persen. Rata-rata persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 18 tahun sebesar 15,09 persen di mana kabupaten Bondowoso memiliki persentase tertinggi yaitu sebesar 29 persen sedangkan kota Kediri memiliki persentase terendah sebesar 5 persen. Rata-rata persentase ibu hamil yang melaksanakan program K4 sebesar 87,57 persen di mana kota Kediri memiliki persentase tertinggi sebesar 100 persen sedangkan kabupaten Jember memiliki persentase terendah sebesar 70 persen.

4.3.2 Pengujian Korelasi

Analisis regresi bivariat mengasumsikan ada hubungan keeratan antar peubah respon sesuai persamaan (2.27). Pemeriksaan korelasi antar variabel respon jumlah kematian bayi dan jumlah kematian ibu dilakukan untuk mengetahui hubungan keeratan antar variabel respon. Korelasi antar variabel respon $r_{(y_1,y_2)}$ = 0,74. Hipotesis yang digunakan untuk pengujian korelasi :

H_0 : Tidak ada hubungan antara Y_1 dan Y_2

H_1 : Terdapat hubungan antara Y_1 dan Y_2

Statistik uji yang digunakan pada pengujian ini adalah

$$t = \frac{0,74\sqrt{38-2}}{\sqrt{1-(0,74)^2}} = 6,6011$$

Berdasarkan nilai t_{hitung} =6,6011 lebih besar dibandingkan $t_{\left(\frac{0,05}{2},38-2\right)} = 2,028$ dan *p-value* sebesar 0,001< α = 0,05 dapat disimpulkan bahwa Tolak H_0. Sehingga dapat dikatakan bahwa terdapat hubungan keeratan antara variabel jumlah kematian bayi dan variabel jumlah kematian ibu. Untuk hasil pemeriksaan korelasi secara lengkap dapat dilihat pada (Lampiran 5).

4.3.3 Pemeriksaan Multikolinieritas

Pemeriksaan multikolinieritas dilakukan untuk mengetahui hubungan antar variabel prediktor. Nilai yang digunakan sebagai acuan untuk pemeriksaan multikolinieritas adalah nilai korelasi antar variabel prediktor dan nilai VIF (*Variance Inflation Factor*). Cara pertama adalah dengan melihat koefisien korelasi antar variabel prediktor, apabila nilai tersebut melebihi ± 0,95 maka dikatakan terjadi multikolinieritas.

Tabel 4.2 Koefisien Korelasi Antar Variabel Prediktor

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_2	0,385				
	0.009				
X_3	-0,037	0,043			
	0,412	0,399			
X_4	-0,284	-0,186	0,050		
	0,042	0,131	0,383		
X_5	0,867	-0,475	-0,129	-0,463	
	0,000	0,001	0,220	0,002	

Berdasarkan Tabel 4.2 menunjukkan bahwa tidak ada koefisien korelasi antar variabel prediktor yang melebihi angka ± 0,95. Namun untuk melihat multikolinearitas yang lebih valid menggunakan kriteria VIF.

Persamaan (2.29) yang digunakan untuk menghitung nilai VIF. Menurut Li (2000) nilai VIF yang lebih dari 10 merupakan bukti untuk mendeteksi adanya multikolinieritas. Hasil pemeriksaan multikolinieritas disajikan pada Tabel 4.3. Untuk hasil pemeriksaan multikolinieritas secara lengkap dapat dilihat pada (Lampiran 5A).

Tabel 4.3 Hasil Pemeriksaan Multikolinieritas

Variabel Prediktor	Nilai VIF	Kesimpulan
X_1	4,478	
X_2	1,324	Tidak terjadi multikolinieritas antar variabel prediktor
X_3	1,062	
X_4	1,381	
X_5	5,869	

Hasil pemeriksaan multikolinieritas pada Tabel 4.3 menunjukkan bahwa tidak terjadi multikolinieritas antar variabel prediktor karena VIF kurang dari 10. Sehingga semua variabel prediktor yang digunakan dalam penelitian ini telah memenuhi asumsi non-multikolinieritas.

4.3.4 Pemodelan *Bivariate Generalized Poisson Regression*

Model *Bivariate Generalized Poisson Regression* adalah model regresi yang dapat digunakan untuk memodelkan data dengan dua variabel respon yang memiliki korelasi. Variabel respon berupa data count dan tidak memiliki nilai nol yang berlebih. Model ini merupakan pengembangan dari model *Generalized Poisson Regression* yang digunakan untuk memodelkan data dengan satu variabel respon berupa data *count*.

Data yang digunakan untuk penerapan *Bivariate Generalized Poisson Regression* adalah data jumlah kematian bayi dan kematian ibu di Provinsi Jawa Timur tahun 2013. Variabel respon memiliki korelasi dan tidak mengandung nilai nol berlebih. Sehingga pemodelan kasus kematian bayi dan ibu di Jawa Timur tahun 2013 menggunakan *Bivariate Generalized Poisson Regression* dengan lima variabel prediktor yang diduga mempengaruhi. Variabel prediktor yaitu persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_1), persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_2), persentase komplikasi kebidanan yang ditangani (X_3), persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 17 Tahun (X_4), persentase ibu hamil melaksanakan program K4 (X_5). Pendugaan parameter menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) di mana membutuhkan iterasi *Newton Raphson*. Berikut disajikan hasil pendugaan parameter dari *Bivariate Generalized Poisson Regression* pada Tabel 4.4

Tabel 4.4 Hasil Penduga Parameter BGPR

Parameter	**Nilai Penduga**	**SE**	**Z**	**P-value**
$\beta_{1.0}$	4,6192	3,1532	1,4649	0,1429
$\beta_{1.1}$	-0,0819	0,0354	-2,3121	0,0208*
$\beta_{1.2}$	0,1816	0,0383	4,7446	2,09E-06*
$\beta_{1.3}$	-0,0091	0,0138	-0,6649	0,5061
$\beta_{1.4}$	0,0965	0,0176	5,4927	3,96E-08*
$\beta_{1.5}$	-0,1471	0,0235	-6,2603	3,84E-10*
$\beta_{2.0}$	-0,2441	11,6987	-0,0209	0,9834
$\beta_{2.1}$	0,0656	0,2095	0,3133	0,7541
$\beta_{2.2}$	-0,0443	0,1670	-0,2655	0,7906
$\beta_{2.3}$	0,2347	0,0854	2,7495	0,0060*
$\beta_{2.4}$	-0,0870	0,0488	-1,7831	0,0746*
$\beta_{2.5}$	-0,2838	0,1912	-1,4838	0,1379
μ_0	823,6875	0,6221	1324,1	0,0000*
α_0	4,0929	14,0848	0,2906	0,7714
α_1	0,0102	0,0023	4,3971	1,10E-05*
α_2	0,0142	0,0059	2,3958	0,0166

*) signifikansi dengan taraf signifikansi 10%

Untuk menentukan model yang digunakan maka dicari nilai AIC yang paling kecil. Berikut disajikan pada Tabel 4.5 Nilai AIC model *Bivariate Generalized Poisson Regression*

Tabel 4.5 Nilai AIC dari model *Bivariate Generalized Poisson Regression*

Model	**AIC**
X_1, X_2, X_3, X_4, X_5	62389
X_3, X_4, X_5	61489
X_3, X_4	59093
X_4, X_5	46621
X_4	59590

Berdasarkan Tabel 4.5 terlihat bahwa nilai AIC yang paling kecil yaitu model yang mengandung variabel X_4, X_5, akan tetapi mempertimbangkan teori yang ada maka model yang akan digunakan untuk memodelkan dan interpretasi model yang mengandung semua variabel prediktor. Oleh karena itu dilakukan pengujian parameter secara serentak dengan menggunakan hipotesis sebagai berikut:

a. Parameter $\boldsymbol{\beta}$

$$\text{H}_0 : \beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{j5} = 0; j = 1,2$$

$$\text{H}_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{j5} \neq 0; j = 1,2 \text{ dengan } l = 1,2,...,5$$

b. Parameter α

$$\text{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0;$$

$$\text{H}_1 : \text{ada salah satu } \alpha_j \neq 0; j = 1,2$$

Hasil penggujian hipotesis secara serentak dengan menggunakan statistik uji *G* diperoleh sebesar 5791. Nilai statistik uji *G* lebih besar dibandingkan dengan $\chi^2_{10} = 1,812$. Hal ini menunjukkan bahwa secara serentak variabel prediktor memberikan pengaruh signifikan pada model yang terbentuk. Untuk melihat variabel yang signifikan dalam pendugaan parameter model *Bivariate Generalized Poisson Regression* maka dilanjutkan dengan penggujian parameter secara parsial. Adapun hipotesis dalam pengujian parameter secara parsial sebagai berikut :

1. Parameter $\boldsymbol{\beta}_{jl}$

$$H_0 : \beta_{jl} = 0$$

$$H_1 : \beta_{jl} \neq 0; j = 1,2; l = 1,2,...,5$$

Berdasarkan hasil pada Tabel 4.5 parameter yang signifikan untuk jumlah kematian bayi adalah $\beta_{1.1}, \beta_{1.2}, \beta_{1.4}, \beta_{1.5}$. Hal ini terlihat dari nilai p-value masing-masing parameter kurang dari alpha (0,05). Sedangkan untuk jumlah kematian ibu parameter yang signifikan adalah $\beta_{2.3}, \beta_{2.4}$ dengan nilai *p-value* masing-masing parameter yang lebih kecil dari alpha (0,05).

2. Parameter α

$H_0 : \alpha_j = 0$

$H_1 : \alpha_j \neq 0;$

Berdasarkan hasil pada Tabel 4.5 untuk parameter α_1 signifikan. Hal ini terlihat dari nilai *p-value* yang nilainya lebih kecil dari alpha(0,05). Sedangkan untuk parameter α_2 tidak signifikan terlihat dari nilai *p-value* yang nilainya lebih lebih dari alpha (0,05) .

Berdasarkan hasil pengujian parameter maka variabel prediktor yang signifikan untuk jumlah kematian bayi adalah variabel persentase persalinan oleh tenaga kesehatan, persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3, persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 17 tahun dan persentase ibu hamil melaksanakan program K4. Sedangkan untuk jumlah kematian ibu adalah variabel persentase komplikasi kebidanan yang ditangani dan persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 17 tahun. Model yang terbentuk dari *Bivariate Generalized Poisson Regression* sebagai berikut :

a) Model untuk μ_1

$$\ln \hat{\mu}_1 = 4,6192 - 0,0819X_1 + 0,1816X_2 - 0,0091X_3 + 0,0965X_4 - 0,1471X_5$$

Interpretasi model *Poisson* untuk $\hat{\mu}_1$ sebagai berikut:

1) Setiap kenaikan 1 persen persentase persalinan oleh tenaga kesehatan maka akan menurunkan ln rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $4,6192$ menjadi $4,5373$ dengan asumsi bahwa variabel lain tidak berubah.
2) Setiap kenaikan 1 persen persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 maka akan meningkatkan ln rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $4,6192$ menjadi $4,8008$ dengan asumsi bahwa variabel yang lain tidak berubah.
3) Setiap kenaikan 1 persen persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 17 tahun maka akan meningkatkan ln rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $4,6192$ menjadi $4,7157$ dengan asumsi bahwa variabel lain tidak berubah.

4) Setiap kenaikan 1 persen persentase ibu hamil melaksanakan program K4 maka akan menurunkan ln rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $4,6192$ menjadi $4,4721$ dengan asumsi bahwa variabel lain tidak berubah.

b) Model untuk μ_2

$$\ln \hat{\mu}_2 = -0,2441 + 0,06563X_1 - 0,0443X_2 + 0,2347X_3 - 0,0870X_4 - 0,2838X_5$$

Interpretasi model *Poisson* untuk $\hat{\mu}_2$ sebagai berikut:

1) Setiap kenaikan 1 persen persentase komplikasi kebidanan yang ditangani maka akan meningkatkan ln rata-rata jumlah kasus kematian ibu sebesar $0,234$ dengan asumsi bahwa variabel lain tidak berubah.
2) Setiap kenaikan 1 persen persentase wanita kawin dengan umur perkawinan pertama dibawah usia 17 tahun maka akan menurunkan ln rata-rata jumlah kasus kematian ibu sebesar $0,087$ kali dengan asumsi bahwa variabel lain tidak berubah.

Berdasarkan model *Poisson* dari $\ln \hat{\mu}_1$ dan $\ln \hat{\mu}_2$ yang terbentuk terdapat perbedaan tanda antara teori dan model. Variabel yang memiliki tanda berbeda adalah variabel persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 pada model $\hat{\mu}_1$ dan persentase komplikasi kebidanan yang ditangani serta persentase wanita kawin pertama dibawah usia 17 tahun pada model $\hat{\mu}_2$. Hasil model *Bivariate Generalized Poisson Regression* menunjukkan tanda dari koefisien regresi yang berkebalikan dengan teori. Perbedaan ini kemungkinan disebabkan karena nilai korelasi antar variabel yang tinggi dan adanya variabel prediktor lain yang lebih menjelaskan variabel respon namun tidak dimasukkan dalam pemodelan ini, sehingga diperoleh hasil yang tandanya berbeda dengan teori.

Lampiran 1. Penurunan Fungsi *Likelihood* BGPR (dibawah populasi)

$$f\left(y_{1i},y_{2i}\right)=\left(\mu_0,\mu_{1i},\mu_{2i}\right)\exp\left\{-\left(\mu_0+\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)-y_{1i}\alpha_1-y_{2i}\alpha_2\right\}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\frac{\left(\mu_{1i}+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\times\frac{\left(\mu_{2i}+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{\left(y_{2i}-k\right)!}\times$$
$$\frac{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}\times\left(\exp\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)\right)$$

$$L\left(\mu_0,\mu_{1i},\mu_{2i},y_{1i},y_{2i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left[\mu_0\mu_{1i}\mu_{2i}\right]\exp\left\{-\left(\mu_0+\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)-y_{1i}\alpha_1-y_{2i}\alpha_2\right\}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\frac{\left(\mu_{1i}+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\times\frac{\left(\mu_{1i}+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}}{\left(y_{1i}-k\right)!}\times$$
$$\frac{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)^{k-1}}{k!}\times\left(k\left(\exp\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)\right)$$

$$\ln L\left(\mu_0,\mu_{1i},\mu_{2i},y_{1i},y_{2i}\right)=n\ln\mu_0+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\mu_{1i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\mu_{1i}\right)-\sum_{i=1}^{n}\mu_{1i}-\sum_{i=1}^{n}\mu_{2i}-n\mu_0-\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\alpha_1-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}\alpha_2+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\left(\frac{\left(y_{1i}-k-1\right)\ln\left(\mu_{1i}+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)}{\left(y_{1i}-k\right)!}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\left(\frac{\left(y_{2i}-k-1\right)\ln\left(\mu_{2i}+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)}{\left(y_{2i}-k\right)!}\right)+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\left(\frac{\left(k-1\right)\left(\mu_0+k\alpha_0\right)}{k!}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\left(k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)$$

Turunan pertama terhadap μ_0 adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial\mu_0}=\frac{-n}{\mu_0}-n-2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i}y_{2i}\right)}\left\{\frac{-\left(y_{1i}-k-1\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)}+\left(\frac{-\left(y_{2i}-k-1\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)}+\frac{k-1}{\left(\mu_0+k\alpha_0\right)}\right)\right\}$$

Lampiran 1. (Lanjutan)

kemudian diubah kedalam bentuk

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu_0} = -n\left(\mu_0\right)^{-1} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i}, y_{2i}\right)} -\left(y_{1i} - k - 1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\alpha_1\right)^{-1} + \left(-\left(y_{2i} - k - 1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + \left(y_{2i} - k\right)\alpha_2\right)^{-1} + \left(k-1\right)\left(\mu_0 + k\alpha_0\right)^{-1}\right)$$

sehingga untuk mencari turunan kedua adalah

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial {\mu_0}^2} = \frac{-n\left(\mu_0\right)^{-1} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i}, y_{2i}\right)} -\left(y_{1i} - k - 1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\alpha_1\right)^{-1} + \left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + \left(y_{2i} - k\right)\alpha_2\right)^{-1} + \left(k-1\right)\left(\mu_0 + k\alpha_0\right)^{-1}}{\partial \mu_0}$$

turunan kedua adalah

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial {\mu_0}^2} = \frac{n}{\mu_0^2} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i}, y_{2i}\right)} \left\{ \frac{-\left(y_{1i} - k - 1\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\alpha_1\right)^2} - \frac{\left(y_{2i} - k - 1\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + \left(y_{2i} - k\right)\alpha_2\right)^2} - \frac{\left(k-1\right)}{\left(\mu_0 + k\alpha_0\right)^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{-n\left(\mu_0\right)^{-1} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i}, y_{2i}\right)} -\left(y_{1i} - k - 1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\alpha_1\right)^{-1}\left(\exp k\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0\right)\right) + \left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + \left(y_{2i} - k\right)\alpha_2\right)^{-1} + \left(k-1\right)\left(\mu_0 + k\alpha_0\right)^{-1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i}, y_{2i}\right)} \frac{\left(y_{1i} - k - 1\right)\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_1\right)\right)\left(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\right)\left(\exp k\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0\right)\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + \left(y_{1i} - k\right)\alpha_1\right)^2}$$

Lampiran 1. (Lanjutan)

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{-n(\mu_0)^{-1} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} -(y_{1i} - k - 1)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + (y_{1i} - k)\alpha_1\right)^{-1} (\exp k(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0)) + \left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + (y_{2i} - k)\alpha_2\right)^{-1} + (k-1)(\mu_0 + k\alpha_0)^{-1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \frac{(y_{2i} - k - 1)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}\right)\left(\mathbf{x}_i^T\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + (y_{2i} - k)\alpha_2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \alpha_1} = \frac{-n(\mu_0)^{-1} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} -(y_{1i} - k - 1)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + (y_{1i} - k)\alpha_1\right)^{-1} (\exp k(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0)) + \left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + (y_{2i} - k)\alpha_2\right)^{-1} + (k-1)(\mu_0 + k\alpha_0)^{-1}}{\partial \alpha_1}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \alpha_1} = u'v + uv'$$

di mana

$$u = -(y_{1i} - k - 1)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + (y_{1i} - k)\alpha_1\right)^{-1}$$

$$u' = (y_{1i} - k - 1)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + (y_{1i} - k)\alpha_1\right)^{-2} (y_{1i} - k)$$

$$v = \exp(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0)$$

$$v' = \exp(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0)$$

Lampiran 1. (Lanjutan)

sehingga didapatkan

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \alpha_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\frac{(y_{1i}-k-1)(\exp k(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0))}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+(y_{1i}-k)\alpha_1\right)}\left[\frac{(y_{1i}-k)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+(y_{1i}-k)\alpha_1\right)}-1\right]$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \alpha_2}=\frac{-n(\mu_0)^{-1}-n-2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}-(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+(y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{-1}(\exp k(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0))+\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+(y_{2i}-k)\alpha_2\right)^{-1}+(k-1)(\mu_0+k\alpha_0)^{-1}}{\partial \alpha_2}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \alpha_2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\frac{-(y_{1i}-k-1)(\exp k(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0))}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+(y_{1i}-k)\alpha_1\right)}+\frac{(y_{2i}-k-1)(y_{2i}-k)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+(y_{2i}-k)\alpha_2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \alpha_0}=\frac{-n(\mu_0)^{-1}-n-2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}-(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+(y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{-1}(\exp k(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0))+\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+(y_{2i}-k)\alpha_2\right)^{-1}+(k-1)(\mu_0+k\alpha_0)^{-1}}{\partial \alpha_0}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0 \partial \alpha_0}=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}-\frac{k(k-1)}{(\mu_0+k\alpha_0)^2}$$

Lampiran 1. (Lanjutan)

Turunan pertama terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(\exp k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\right)\mathbf{x}_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(\exp k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right)\right\}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\right)\left(\mathbf{x}_i^T\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}u'v+uv'$$

di mana

$$u=\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}$$

$$u'=\left(y_{1i}-k-1\right)^2\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\left(\mathbf{x}_i^T\right)$$

$$v=\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i$$

$$v=\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i^T$$

Lampiran 1. (Lanjutan)

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T \beta_1}\right)\right) \mathbf{x}_i^T \left\{ 1 + \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \begin{matrix} (y_{1i}-k-1)^2 \left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2} \left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}}\right)\left(\exp k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right) + \\ (y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1} \left(\exp k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right) \end{matrix} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T \beta_1}\right)\right) \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} (y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1} \left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}}\right) \mathbf{x}_i \left(\exp k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right) \right\}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \alpha_1} = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T \beta_1}\right)\right) \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} (y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1} \left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}}\right) \mathbf{x}_i \left(\exp k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right) \right\}}{\partial \alpha_1}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T \partial \alpha_1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k-0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} (y_{1i}-k-1)^2 (y_{1i}-k)\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \alpha_2} = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T \beta_1}\right)\right) \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} (y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}} - \mu_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1} \left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}}\right) \mathbf{x}_i \left(\exp k\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0\right)\right) \right\}}{\partial \alpha_2}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T \partial \alpha_2} = 0$$

Lampiran 1. (Lanjutan)

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \alpha_0} = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T \beta_1} \right) \right) \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} (y_{1i} - k - 1) \left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}} - \mu_0 \right) + (y_{1i} - k)\alpha_1 \right)^{y_{1i}-k-1} \left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}} \right) \mathbf{x}_i \left(\exp k \left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0 \right) \right) \right\}}{\partial \alpha_0}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T \partial \alpha_0} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{1i} - k - 1) \left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_1}} - \mu_0 \right) + (y_{1i} - k)\alpha_1 \right)^{y_{1i}-k-1} (\mathbf{x}_i) \left(\exp\left(k \left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0 \right) \right) \right)$$

Turunan pertama terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e^{\mathbf{x_i^T \beta_2}}} \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T \beta_2} \right) \mathbf{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T \beta_2} \right) \mathbf{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{2i} - k - 1) \left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_2}} - \mu_0 \right) + (y_{2i} - k)\alpha_2 \right)^{y_{2i}-k-1} \left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_2}} \right) \mathbf{x}_i \right\}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e^{\mathbf{x_i^T \beta_2}}} \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T \beta_2} \right) \mathbf{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T \beta_2} \right) \mathbf{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{2i} - k - 1) \left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_2}} - \mu_0 \right) + (y_{2i} - k)\alpha_2 \right)^{y_{2i}-k-1} \left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_2}} \right) \mathbf{x}_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \left(\exp\left(\mathbf{x_i^T \beta_2} \right) \right) \mathbf{x}_i^T + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} u'v + uv'$$

di mana

Lampiran 1. (Lanjutan)

$$u=\left(y_{2i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}$$

$$u^{'}=\left(y_{2i}-k-1\right)^2\left(\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-2}\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}\right)\left(\mathbf{x}_i^T\right)$$

$$v=\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i$$

$$v^{'}=\mathbf{x}_i^T\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{x}_i\right)\left(\exp\left(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2\right)\right)\mathbf{x}_i^T+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\left(y_{2i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(\mathbf{x}_i^T\right)\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}\right)\left[\frac{\left(y_{2i}-k-1\right)\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k}}+1\right]$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\alpha_1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}}\left(\exp\left(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min\left(y_1 y_2\right)}\left(y_{2i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i}{\partial\alpha_1}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\alpha_1}=0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\alpha_2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}}\left(\exp\left(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2\right)\mathbf{x}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i} y_{2i}\right)}\left(y_{2i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i}{\partial\alpha_2}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\alpha_2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min\left(y_{1i},y_{2i}\right)}\left(y_{2i}-k-1\right)\left(y_{2i}-k\right)\left(\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-2}\left(e^{\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_2}\right)\left(\mathbf{x}_i\right)$$

Lampiran 1. (Lanjutan)

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \alpha_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e^{\mathbf{x_i^T\beta_2}}}\left(\exp\left(\mathbf{x_i^T\beta_2}\right)\mathbf{x}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\mathbf{x_i^T\beta_2}\right)\mathbf{x}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(y_{2i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_2}}-\mu_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\alpha_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_2}}\right)\mathbf{x}_i}{\partial \alpha_0}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \alpha_0} = 0$$

Turunan pertama terhadap α_1 adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = \sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(\frac{\left(y_{1i}-k-1\right)\left(y_{1i}-k\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k}}+1\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(\frac{\left(y_{1i}-k-1\right)\left(y_{1i}-k\right)}{\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k}}+1\right)}{\partial \alpha_1^T}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k-0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(\left(y_{1i}-k\right)\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1}+1\right)}{\partial \alpha_1^T}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1^T} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(y_{1i}-k\right)^2\left(y_{1i}-k-1\right)^2\left(\left(e^{\mathbf{x_i^T\beta_1}}-\mu_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-2}$$

Lampiran 1. (Lanjutan)

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(\frac{(y_{1i} - k - 1)(y_{1i} - k)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + (y_{1i} - k)\alpha_1\right)^{y_{1i} - k}} + 1 \right)}{\partial \alpha_2^T}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^T} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(\frac{(y_{1i} - k - 1)(y_{1i} - k)}{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + (y_{1i} - k)\alpha_1\right)^{y_{1i} - k}} + 1 \right)}{\partial \alpha_0^T}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0^T} = 0$$

Turunan pertama terhadap α_2 adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = \sum_{i=1}^{n} y_{2i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{2i} - k)(y_{2i} - k - 1)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + (y_{2i} - k)\alpha_2\right)^{y_{2i} - k - 1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_2^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{2i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{2i} - k)(y_{2i} - k - 1)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \mu_0\right) + (y_{2i} - k)\alpha_2\right)^{y_{2i} - k - 1}}{\partial \alpha_2^T}$$

Lampiran 1. (Lanjutan)

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} (y_{2i} - k)^2 (y_{2i} - k - 1)^2 \left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_2}} - \mu_0 \right) + (y_{2i} - k)\alpha_2 \right)^{y_{2i} - k - 2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_0^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{2i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{2i} - k)(y_{2i} - k - 1) \left(\left(e^{\mathbf{x_i^T \beta_2}} - \mu_0 \right) + (y_{2i} - k)\alpha_2 \right)^{y_{2i} - k - 1}}{\partial \alpha_0^T}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_0^T} = 0$$

Turunan pertama terhadap α_0 adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(-1 + \frac{k(k-1)}{(\mu_0 + k\alpha_0)} \right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = \frac{\sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(-1 + \frac{k(k-1)}{(\mu_0 + k\alpha_0)} \right)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0^T}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0^T} = -\sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(\frac{k^2 (k-1)}{(\mu_0 + k\alpha_0)^2} \right)$$

Lampiran 2. Penurunan Fungsi Likelihood BGPR (dibawah H_0)

Turunan pertama terhadap μ_0 adalah

$$\frac{\partial \ln(\hat{\omega})}{\partial \hat{\mu}_0} = \frac{-n}{\hat{\mu}_0} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left\{ \frac{-(y_{1i}-k-1)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)} + \left(\frac{-(y_{2i}-k-1)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)} + \frac{k-1}{(\hat{\mu}_0 + k\alpha_0)} \right) \right\}$$

kemudian diubah kedalam bentuk

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\mu}_0} = -n(\hat{\mu}_0)^{-1} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} -(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{-1} + \left(-(y_{2i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{-1} + (k-1)(\hat{\mu}_0 + k\alpha_0)^{-1}\right)$$

sehingga untuk mencari turunan kedua adalah

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \mu_0{}^2} = \frac{-n(\hat{\mu}_0)^{-1} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} -(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{-1} + \left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{-1} + (k-1)(\hat{\mu}_0 + k\alpha_0)^{-1}}{\partial \hat{\mu}_0}$$

turunan kedua adalah

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\mu}_0{}^2} = \frac{n}{\hat{\mu}_0^2} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \left\{ \frac{-(y_{1i}-k-1)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^2} - \frac{(y_{2i}-k-1)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^2} - \frac{(k-1)}{(\hat{\mu}_0 + k\alpha_0)^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\mu}_0 \partial \hat{\beta}_{1.0}^T} = \frac{-n(\hat{\mu}_0)^{-1} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} -(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{1i}-k)\alpha_1\right)^{-1}\left(\exp k(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0)\right) + \left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{-1} + (k-1)(\hat{\mu}_0 + k\alpha_0)^{-1}}{\partial \hat{\beta}_{1.0}^T}$$

Lampiran 2. (Lanjutan)

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\mu}_0 \partial\hat{\beta}_{1.0}^T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \frac{(y_{1i}-k-1)\left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0}\right)\right)\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\hat{\alpha}_1\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\mu}_0 \partial\hat{\beta}_{2.0}^T} = \frac{-n(\hat{\mu}_0)^{-1}-n-2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} -(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{-1}\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right)+\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{-1}+(k-1)\left(\hat{\mu}_0+k\alpha_0\right)^{-1}}{\partial\hat{\beta}_{2.0}^T}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\hat{\mu}_0 \partial\hat{\beta}_{2.0}^T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \frac{(y_{2i}-k-1)\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+\left(y_{2i}-k\right)\hat{\alpha}_2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\mu}_0 \partial\hat{\alpha}_{1.0}} = \frac{-n(\hat{\mu}_0)^{-1}-n-2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} -(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{-1}\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right)+\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{-1}+(k-1)\left(\hat{\mu}_0+k\alpha_0\right)^{-1}}{\partial\hat{\alpha}_{1.0}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\mu}_0 \partial\hat{\alpha}_{1.0}} = u'v+uv'$$

di mana

$$u = -(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{-1}$$

$$u' = (y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{-2}(y_{1i}-k)$$

Lampiran 2. (Lanjutan)

$$v = \exp k\left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 - \alpha_0\right)$$
$$v' = \exp k\left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 - \alpha_0\right)$$

sehingga didapatkan

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\mu}_0 \partial\hat{\alpha}_{1.0}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \frac{(y_{1i}-k-1)\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right)}{\left(\left(e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)} \left[\frac{(y_{1i}-k)}{\left(\left(e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)} - 1\right]$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\mu}_0 \partial\hat{\alpha}_{2.0}} = \frac{-n(\hat{\mu}_0)^{-1} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} -(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{-1}\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right) + \left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{-1} + (k-1)(\hat{\mu}_0+k\alpha_0)^{-1}}{\partial\hat{\alpha}_{2.0}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\mu}_0 \partial\hat{\alpha}_{2.0}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \frac{-(y_{1i}-k-1)\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)} + \frac{(y_{2i}-k-1)(y_{2i}-k)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\mu}_0 \partial\hat{\alpha}_0} = \frac{-n(\hat{\mu}_0)^{-1} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} -(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{-1}\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right) + \left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{-1} + (k-1)(\hat{\mu}_0+k\alpha_0)^{-1}}{\partial\hat{\alpha}_0}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\mu}_0 \partial\hat{\alpha}_0} = -\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})} \frac{k(k-1)}{(\mu_0+k\alpha_0)^2}$$

Lampiran 2. (Lanjutan)

Turunan pertama terhadap $\beta_{1.0}$ adalah

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\beta}_{1.0}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e^{\hat{\beta}_{1.0}}} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0} \right) \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0} \right) \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{1i} - k - 1) \left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0 \right) + (y_{1i} - k) \hat{\alpha}_1 \right)^{y_{1i}-k-1} \left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} \right) \left(\exp k \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 - \alpha_0 \right) \right) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\beta}_{1.0} \partial \hat{\beta}_{1.0}^T} = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0} \right) \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} (y_{1i} - k - 1) \left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0 \right) + (y_{1i} - k) \hat{\alpha}_1 \right)^{y_{1i}-k-1} \left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} \right) \left(\exp k \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 - \alpha_0 \right) \right) \right\}}{\partial \hat{\beta}_{1.0}^T}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\beta}_{1.0} \partial \hat{\beta}_{1.0}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0} \right) \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} u' v + u v'$$

di mana

$$u = (y_{1i} - k - 1) \left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0 \right) + (y_{1i} - k) \hat{\alpha}_1 \right)^{y_{1i}-k-1}$$

$$u' = (y_{1i} - k - 1)^2 \left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0 \right) + (y_{1i} - k) \hat{\alpha}_1 \right)^{y_{1i}-k-2} \left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} \right)$$

$$v = \left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} \right)$$

$$v = \left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\beta}_{1.0} \partial \hat{\beta}_{1.0}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0} \right) \right) \left\{ 1 + \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \begin{array}{l} (y_{1i} - k - 1)^2 \left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0 \right) + (y_{1i} - k) \hat{\alpha}_1 \right)^{y_{1i}-k-2} \left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} \right) \left(\exp k \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 - \alpha_0 \right) \right) + \\ (y_{1i} - k - 1) \left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0 \right) + (y_{1i} - k) \hat{\alpha}_1 \right)^{y_{1i}-k-1} \left(\exp k \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 - \alpha_0 \right) \right) \end{array} \right\}$$

Lampiran 2. (Lanjutan)

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{1.0}\partial\hat{\beta}_{2.0}^T}=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k-1}\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}\right)\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right)\right\}}{\partial\beta_{2.0}^T}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{1.0}\partial\hat{\beta}_{2.0}^T}=0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{1.0}\partial\hat{\alpha}_{1.0}}=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\beta_{1.0}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k-1}\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}\right)\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right)\right\}}{\partial\hat{\alpha}_{1.0}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{1.0}^T\partial\hat{\alpha}_{1.0}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k-0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(y_{1i}-k-1\right)^2\left(y_{1i}-k\right)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k-2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{1.0}\partial\hat{\alpha}_{2.0}}=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k-1}\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}\right)\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right)\right\}}{\partial\hat{\alpha}_{2.0}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{1.0}^T\partial\alpha_{2.0}}=0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{1.0}\partial\hat{\alpha}_0}=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\hat{\beta}_{1.0}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(y_{1i}-k-1\right)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+\left(y_{1i}-k\right)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k-1}\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}\right)\left(\exp k\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2-\alpha_0\right)\right)\right\}}{\partial\hat{\alpha}_0}$$

Lampiran 2. (Lanjutan)

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\beta}_{1.0}^T \partial \alpha_0} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{1i} - k - 1)\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \mu_0\right) + (y_{1i} - k)\alpha_1\right)^{y_{1i}-k-1} (\mathbf{x}_i)\exp\left(k(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0)\right)$$

Turunan pertama terhadap $\beta_{2.0}$ adalah

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\beta}_{2.0}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e^{\hat{\beta}_{2.0}}} \left(\exp\left(\hat{\beta}_2\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{2i} - k - 1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{2i} - k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1} \left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\beta}_{2.0} \partial \hat{\beta}_{2.0}^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e^{\hat{\beta}_2}} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} (y_{2i} - k - 1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{2i} - k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1} \left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)}{\partial \beta_{2.0}^T}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\beta}_{2.0} \partial \hat{\beta}_{2.0}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} u' v + u v'$$

di mana

$$u = (y_{2i} - k - 1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{2i} - k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1}$$

$$u' = (y_{2i} - k - 1)^2 \left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{2i} - k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-2} \left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)$$

$$v = \left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)$$

$$v' = \left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)$$

Lampiran 2. (Lanjutan)

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{2.0}\partial\hat{\beta}_{2.0}^T} = \sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}(y_{2i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)\left[\frac{(y_{2i}-k-1)\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k}}+1\right]$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{2.0}\partial\hat{\alpha}_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\hat{\beta}_{2.0}}}\left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}(y_{2i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)}{\partial\hat{\alpha}_1}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{2.0}\partial\hat{\alpha}_{1.0}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{2.0}\partial\hat{\alpha}_{2.0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\hat{\beta}_{2.0}}}\left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}(y_{2i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)}{\partial\hat{\alpha}_{2.0}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{2.0}\partial\hat{\alpha}_{2.0}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}(y_{2i}-k-1)(y_{2i}-k)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-2}\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{2.0}\partial\hat{\alpha}_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{\hat{\beta}_{2.0}}}\left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\hat{\beta}_{2.0}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}(y_{2i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1}\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}\right)}{\partial\hat{\alpha}_0}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\beta}_{2.0}\partial\hat{\alpha}_0} = 0$$

Lampiran 2. (Lanjutan)

Turunan pertama terhadap α_1 adalah

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\alpha}_{1.0}} = \sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(\frac{(y_{1i}-k-1)(y_{1i}-k)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{1i}-k)\hat{\alpha}_{1.0}\right)^{y_{1i}-k}} + 1 \right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\alpha}_{1.0} \partial \hat{\alpha}_{1.0}^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(\frac{(y_{1i}-k-1)(y_{1i}-k)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k}} + 1 \right)}{\partial \hat{\alpha}_{1.0}^T}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\alpha}_{1.0} \partial \hat{\alpha}_{1.0}^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k-0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \left((y_{1i}-k)(y_{1i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k-1} + 1 \right)}{\partial \hat{\alpha}_{1.0}^T}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\alpha}_{1.0} \partial \hat{\alpha}_{1.0}^T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} (y_{1i}-k)^2 (y_{1i}-k-1)^2 \left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k-2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\alpha}_{1.0} \partial \hat{\alpha}_{2.0}^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(\frac{(y_{1i}-k-1)(y_{1i}-k)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}} - \hat{\mu}_0\right) + (y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k}} + 1 \right)}{\partial \hat{\alpha}_{2.0}^T}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\alpha}_{1.0} \partial \hat{\alpha}_{2.0}^T} = 0$$

Lampiran 2. (Lanjutan)

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\alpha}_{1.0}\partial\hat{\alpha}_0^T}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}\left(\frac{(y_{1i}-k-1)(y_{1i}-k)}{\left(\left(e^{\hat{\beta}_{1.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{1i}-k)\hat{\alpha}_1\right)^{y_{1i}-k}}+1\right)}{\partial\hat{\alpha}_0^T}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\alpha}_{1.0}\partial\hat{\alpha}_0^T}=0$$

Turunan pertama terhadap α_2 adalah

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\alpha}_{2.0}}=\sum_{i=1}^{n} y_{2i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}(y_{2i}-k)(y_{2i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1}$$

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\alpha}_{2.0}\partial\hat{\alpha}_{2.0}^T}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{2i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}(y_{2i}-k)(y_{2i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{\partial\hat{\alpha}_2^T}$$

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\alpha}_{2.0}\partial\hat{\alpha}_{2.0}^T}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}(y_{2i}-k)^2(y_{2i}-k-1)^2\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-2}$$

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial\hat{\alpha}_{2.0}\partial\hat{\alpha}_0^T}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{2i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\min(y_{1i}y_{2i})}(y_{2i}-k)(y_{2i}-k-1)\left(\left(e^{\hat{\beta}_{2.0}}-\hat{\mu}_0\right)+(y_{2i}-k)\hat{\alpha}_2\right)^{y_{2i}-k-1}}{\partial\hat{\alpha}_0^T}$$

Lampiran 2. (Lanjutan)

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\omega})}{\partial \hat{\alpha}_{2.0} \partial \hat{\alpha}_0^T} = 0$$

Turunan pertama terhadap α_0 adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(-1 + \frac{k(k-1)}{(\mu_0 + k\alpha_0)} \right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0^T} = \frac{\sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \left(-1 + \frac{k(k-1)}{(\mu_0 + k\alpha_0)} \right)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0^T}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0^T} = -\sum_{k=0}^{\min(y_{1i} y_{2i})} \frac{k^2 (k-1)}{(\mu_0 + k\alpha_0)^2}$$

Lampiran 3. Data Jumlah Kematian Bayi dan Ibu di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013

Kabupaten / Kota	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1. Pacitan	79	10	87,6	81,92	96,81	11,21	82
2. Ponorogo	170	12	87,77	84,45	91,73	11,83	86,93
3. Trenggalek	70	10	93,5	83,63	94,21	16,2	84,81
4. Tulungagung	124	17	89,03	84,71	68,45	13,85	86,68
5. Blitar	251	16	86,52	82,02	65,14	13,3	82,6
6. Kediri	227	34	91,78	88,73	84,61	11,35	91,01
7. Malang	193	39	99,99	90,52	80,18	16,25	95,25
8. Lumajang	237	23	98,98	88,44	100	21,19	89,32
9. Jember	420	36	82,92	77,94	81,57	22,83	69,78
10. Banyuwangi	191	33	89,34	84,64	82,06	17,76	82,58
11. Bondowoso	187	22	91,39	85,57	100	29,18	86,92
12. Situbondo	136	17	81,63	76	87,28	28	76,99
13. Probolinggo	201	12	87,11	78,92	100	25,7	78,52
14. Pasuruan	206	28	89,99	85,73	86,51	17,62	85,86
15. Sidoarjo	316	26	100	85,07	68,4	5,84	97,39
16. Mojokerto	129	22	87,99	76,36	89,7	13,57	81,16
17. Jombang	277	18	88,19	85,79	95,11	12,86	85,79
18. Nganjuk	365	24	87,82	77,69	92,68	13,66	78,98
19. Madiun	97	11	90,46	88,77	76,38	13,28	88,82
20. Magetan	100	8	91,87	90,2	90,29	14,28	90,39
21. Ngawi	85	12	92,95	90,58	94,69	15,1	90,58
22. Bojonegoro	219	20	97,35	87,04	100	21,39	87,59
23. Tuban	171	12	93,45	90,02	80,38	18,69	89,61
24. Lamongan	91	17	96,84	85,26	91,31	18,87	95,4
25. Gresik	97	22	89,39	81,67	98,07	11,44	82,56
26. Bangkalan	123	11	97,63	77,6	60,81	15,16	93,2
27. Sampang	216	19	92,35	80,76	89,7	22,92	79,98
28. Pamekasan	69	13	88,5	87,54	72,63	20,42	87,93
29. Sumenep	57	9	91,85	82,98	70,16	25,17	86,84
30. Kota Kediri	28	4	100	79,13	83,89	5,22	100
31. Kota Blitar	25	1	81,53	71,72	96,22	8,3	71,42
32. Kota Malang	209	20	92,25	99,14	89,41	7,71	90,32
33. Kota Probo	72	8	92,69	90,64	78,53	11,46	93,3
34. Kota Pasuruan	26	2	97,63	67,6	94,4	9,25	98,88
35. Kota Mojokerto	33	1	93,16	85,8	81,14	6,1	92,23
36. Kota Madiun	24	3	98,33	97,73	100	6,23	97,73
37. Kota Surabaya	249	49	96,03	98,23	98,73	7,05	98,11
38. Kota Batu	23	1	95,54	90,22	79,67	13,01	90,22

Lampiran 4. Statistika Deskriptif

Statistics

		Y1	Y2	X1	X2	X3	X4	X5
N	Valid	38	38	38	38	38	38	38
	Missing	0	0	0	0	0	0	0
Mean		152,45	16,89	91,8776	84,7568	86,6013	15,0855	87,5705
Variance		9792,903	126,205	24,655	45,367	118,726	39,983	51,818
Minimum		23	1	81,53	67,60	60,81	5,22	69,78
Maximum		420	49	100,00	99,14	100,00	29,18	100,00

Lampiran 5. Uji Korelasi antar Variabel Respon

Correlations

		Y1	Y2
Y1	Pearson Correlation	1	,740**
	Sig, (2-tailed)		,000
	N	38	38
Y2	Pearson Correlation	,740**	1
	Sig, (2-tailed)	,000	
	N	38	38

**, Correlation is significant at the 0,01 level (2-tailed),

Lampiran 5A. Uji Korelasi antar Variabel Prediktor

Correlations

		X1	X2	X3	X4	X5
Pearson Correlation	X1	1,000	,385	-,037	-,284	,867
	X2	,385	1,000	,043	-,186	,475
	X3	-,037	,043	1,000	,050	-,129
	X4	-,284	-,186	,050	1,000	-,463
	X5	,867	,475	-,129	-,463	1,000
Sig, (1-tailed)	X1	,	,009	,412	,042	,000
	X2	,009	,	,399	,131	,001
	X3	,412	,399	,	,383	,220
	X4	,042	,131	,383	,	,002
	X5	,000	,001	,220	,002	,
N	X1	38	38	38	38	38
	X2	38	38	38	38	38
	X3	38	38	38	38	38
	X4	38	38	38	38	38
	X5	38	38	38	38	38

Lampiran 5B. Uji VIF Variabel Prediktor

Coefficients[a]

Model		Collinearity Statistics	
		Tolerance	VIF
1	X1	,223	4,478
	X2	,755	1,324
	X3	,941	1,062
	X4	,724	1,381
	X5	,170	5,869

a, Dependent Variable: Y1

Lampiran 6. Syntax R untuk Pendugaan Parameter dan Pengujian Hipotesis

```
GBP=function(data,alfa0)
{
 library(pracma)
 library(MASS)
 options(digits=4)
 data=data,frame((data))
 maxit=1000
 y1=as,matrix((data[,1]))
 y2=as,matrix((data[,2]))
 x=as,matrix((data[,-c(1,2)]))


 f1=glm(formula=y1~x,family=poisson)
 f2=glm(formula=y2~x,family=poisson)

 n=nrow(data)
 x=as,matrix(cbind(rep(1,n),(data[,-c(1,2)])))
 p=ncol(x);pp=p

 beta10=f1$coefficients
 beta20=f2$coefficients
 alfa1=summary(f1)$dispersion
 alfa2=summary(f2)$dispersion
 alfa=c(alfa0,alfa1,alfa2)
 alfa=as,matrix(alfa)
 miu0=cov(y1,y2)
 rownames(alfa)<-c('alfa1', 'alfa2','alfa3')
 start=as,matrix(c(beta10,beta20,miu0,alfa))

 param=matrix(nrow=2*p+4,ncol=1)
 param=start
 Q=function(param)
 {
  be1=as,matrix(param[1:p])
  miu1=exp((x)%*%be1)
  be2=as,matrix(param[(p+1):(2*p)])
  miu2=exp(x%*%be2)
  miu0=param[(2*p+1)]
  alfa0=param[(2*p+2)];
  alfa1=param[(2*p+3)]
  alfa2=param[(2*p+4)]
  A=matrix(nrow=n,ncol=1)
  for(i in 1:n)
  {
   A1=log(miu0*miu1[i]*miu2[i])+((-(miu0+miu1[i]+miu2[i])-(y1[i]*alfa1)-(y2[i]*alfa2)))
   kk=min(y1[i],y2[i])
   B4=matrix(ncol=1,nrow=kk+1)
   for (k in 0:kk)
   {
    B1=(lfactorial(y1[i]-k))+log((factorial(y2[i]-k))*(factorial(k)))
```

Lampiran 6. (Lanjutan)

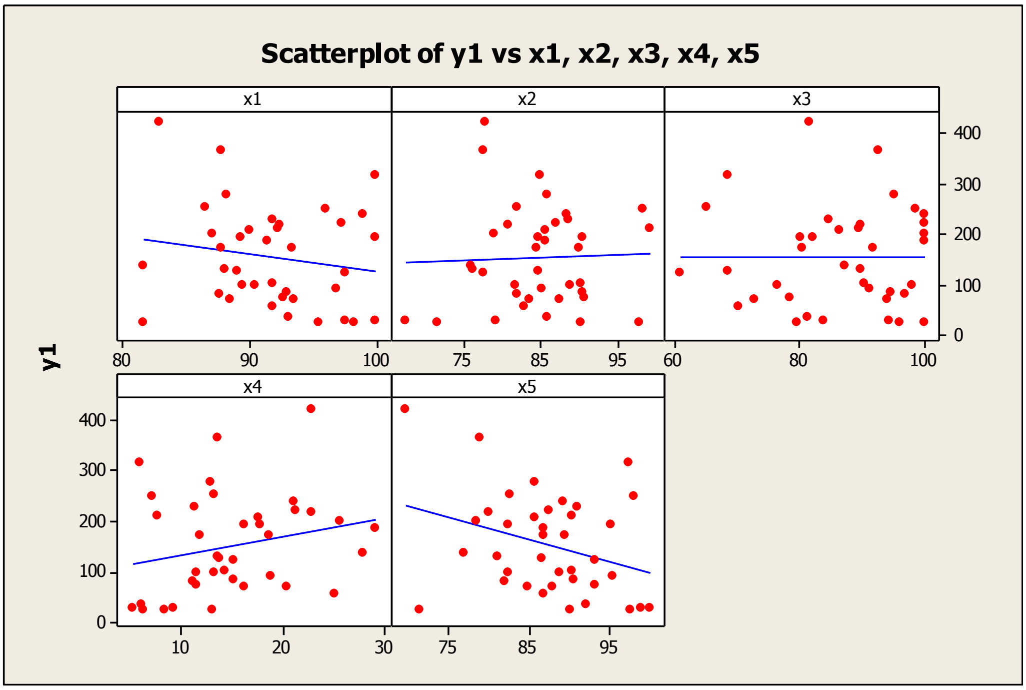
```
      B2=((y1[i]-k-1)*log(miu1[i]+(y1[i]-k)*alfa1))+((y2[i]-k-1)*log(miu2[i]+(y2[i]-k)*alfa2))
      B3=((k-1)*log(miu0+k*alfa0))+((k*(alfa1+alfa2-alfa0)))
      B4[k+1]=(B2+B3)/B1
     }
    A[i]=A1+sum(B4)
   }
  Q=sum(A);#print(A)
  return(Q)
 }

 #fit=optim(start,Q,control = list(fnscale = -1,maxit = maxit,reltol=1e-
                        4),method="BFGS",hessian=TRUE)
 fit=optim(start,Q,control = list(fnscale = -1,maxit = maxit,abstol=10^-10),hessian=TRUE)
 parameter=as,matrix(fit$par)
 hes=fit$hessian
 inv=diag(pinv(-hes))
 se=as,matrix(sqrt(abs(inv)))
 z=parameter/se
 con1=fit$convergence
 if (con1==0) con='TRUE, iteration convergence ' else con='FALSE, iteration reach maximum
                        limit'
 pv=2*pnorm(abs(z),lower,tail=FALSE)
 colnames(parameter)<-"Estimate"
 colnames(se)<-"Std, Error"
 colnames(z)<-"Z value"
 colnames(pv)<-"P-value"
 show=cbind(parameter,se,z,pv)
 cat("Coefficients : ","\n")
 print(show)
 cat("Convergence =",con,"\n")
 write,csv(show,"d:/ hasil estimasi parameter GBP4,csv")
 #MLRT
 x=as,matrix(rep(1,n));p=1
 par0=parameter[-c((2:(pp)),((pp+2):(pp*2)))]
 valuefit_h0=Q(par0)
 G=2*((fit$value)-(valuefit_h0))
 v=2*(ncol(data)-2)
 pvalF=pchisq((G),v,lower,tail=FALSE)
 cat("MLRT : ","\n")
 cat("D (beta) =",G,"\n")
 cat("pvalue_D (beta) =",pvalF,"\n")
 aic=-2*(fit$value)+2*length(parameter)
 cat("AIC =",aic,"\n")

 list(z=z,parameter=parameter,konvergensi=con)
}
```

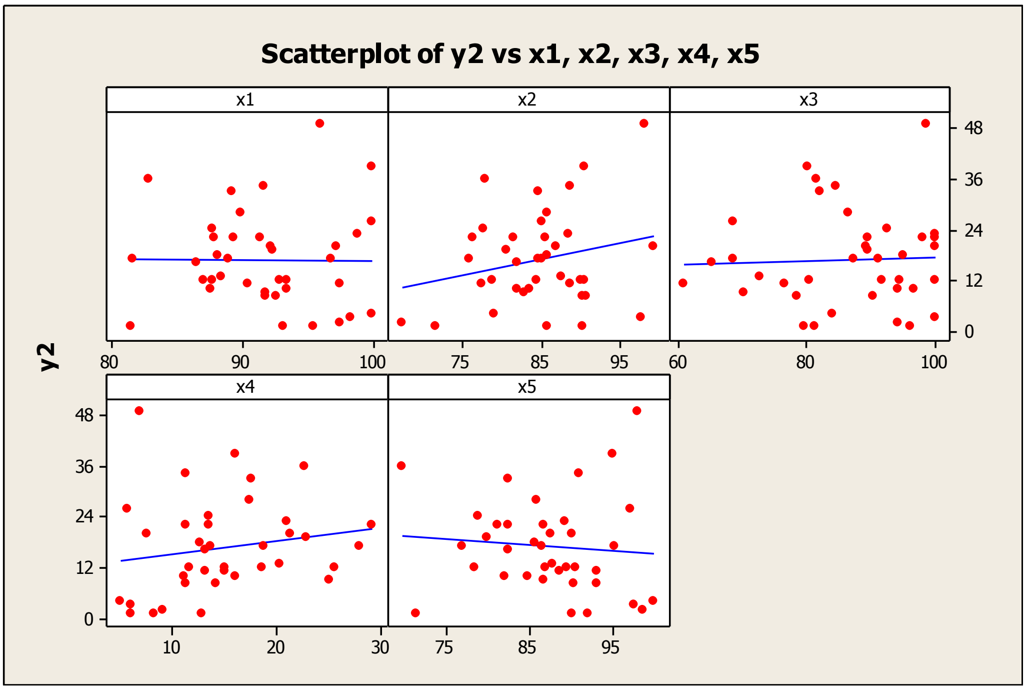
Lampiran 7. Hasil Pendugaan Parameter dan Penggujian Hipotesis

Parameter	**Nilai**	**SE**	**Z**	**P-value**
$\beta_{1.0}$	4,6192	3,1532	1,4649	0,1429
$\beta_{1.1}$	-0,0819	0,0354	-2,3121	0,0208*
$\beta_{1.2}$	0,1816	0,0383	4,7446	2,09E-06*
$\beta_{1.3}$	-0,0091	0,0138	-0,6649	0,5061
$\beta_{1.4}$	0,0965	0,0176	5,4927	3,96E-08*
$\beta_{1.5}$	-0,1471	0,0235	-6,2603	3,84E-10*
$\beta_{2.0}$	-0,2441	11,6987	-0,0209	0,9834
$\beta_{2.1}$	0,06563	0,2095	0,3133	0,7541
$\beta_{2.2}$	-0,0443	0,1670	-0,2655	0,7906
$\beta_{2.3}$	0,2347	0,0854	2,7495	0,0060*
$\beta_{2.4}$	-0,0870	0,0488	-1,7831	0,0746*
$\beta_{2.5}$	-0,2838	0,1912	-1,4838	0,1379
μ_0	823,6875	0,6221	1324,1	0,0000*
α_0	4,0929	14,0848	0,2906	0,7714
α_1	0,0102	0,0023	4,3971	1,10E-05*
α_2	0,0142	0,0059	2,3958	0,0166

$\mathbf{G_{hit}}$= 5791

Lampiran 8. Scatterplot antara Variabel Respon dengan masing-masing Variabel Prediktor





Lampiran 9. Hasil Prediksi

Y_1	Y_2	$\hat{Y}_1$	$\hat{Y}_2$	$(Y_1-\hat{Y}_1)$	$(Y_2-\hat{Y}_2)$	$(Y_1-\hat{Y}_1)^2$	$(Y_2-\hat{Y}_2)^2$
79	10	70	12	9	-2	81	4
170	12	173	12	-3	0	9	0
70	10	65	12	5	-2	25	4
124	17	129	15	-5	2	25	4
251	16	250	20	1	-4	1	16
227	34	230	30	-3	4	9	16
193	39	170	40	23	-1	529	1
237	23	200	20	37	3	1369	9
420	36	385	30	35	6	1225	36
191	33	192	30	-1	3	1	9
187	22	180	20	7	2	49	4
136	17	140	15	-4	2	16	4
201	12	179	10	22	2	484	4
206	28	200	30	6	-2	36	4
316	26	300	25	16	1	256	1
129	22	119	20	10	2	100	4
277	18	200	20	77	-2	5929	4
365	24	300	25	65	-1	4225	1
97	11	90	10	7	1	49	1
100	8	89	10	11	-2	121	4
85	12	80	10	5	2	25	4
219	20	219	20	0	0	0	0
171	12	150	10	21	2	441	4
91	17	80	16	11	1	121	1
97	22	90	21	7	1	49	1
123	11	100	10	23	1	529	1
216	19	200	20	16	-1	256	1
69	13	50	10	19	3	361	9
57	9	60	10	-3	-1	9	1
28	4	30	5	-2	-1	4	1
25	1	30	4	-5	-3	25	9
209	20	200	15	9	5	81	25
72	8	60	10	12	-2	144	4
26	2	20	3	6	-1	36	1
33	1	40	2	-7	-1	49	1
24	3	30	1	-6	2	36	4
249	49	250	50	-1	-1	1	1
23	1	20	3	3	-2	9	4

Lampiran 9. (Lanjutan)

SSE	16715	202
MSE	451.75676	5.4594595
RMSE	21.25457	2.3365486

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR PUSTAKA

Agresti, A. (2002). *Categorical Data Analysis*.John Wiley and Sons.Inc: New York.

Akaike, H. (1978). *A Bayesian Analysis of The Minimum AIC Procedure*. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Part A Hal. 914.http://www.ism.ac.jp/editsec/aism/pdf/ Tanggal Akses:16 Februari 2016.

AlMuhayfith F.E., Alzaid A.Adan Omair M.A. (2015). *On Bivariate Poisson Regression Models*. Journal of King Saud University-Science.http://dx.doi.org/10.10. Tanggal akses : 3 Februari 2016.

Cameron, A.C dan Trivedi,P.K. (1998). *Regression Analysis of Count Data*. Cambridge University Press. USA.

Dhewy. (2014). *Pemodelan Bivariate Poisson Regression Dengan Kovarian Merupakan Fungsi Dari Variabel Bebas*. *Tesis S2 : Jurusan Statistika*. Surabaya. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Dinas Kesehatan Propinsi Jawa Timur. (2013).*Profil Kesehatan Propinsi JawaTimur*.Surabaya. Dinkes Jatim.

Draper, N. dan Smith, H. (1992).*Analisis Regresi Terapan*. Jakarta : Gramedia.

Famoye, F., J.T. Wulu and K.P. Singh. (2004). *On the Generalized Poisson Regression Model with an Application to Accident Data*. Journal of Data Science 2, Hal. 287-295. http://www.sinica.edu/.Tanggal Akses: 29 Desember 2015.

Gujarati, D. (1991). *Ekonometrika Dasar*. Terjemahan Sumarno Zain. Penerbit Erlangga: Jakarta.

Ismail, N. and A. A. Jemain. (2005). *Generalized Poisson Regression* :*AnAlternative for Risk Classification*. Jurnal TeknologiUniversiti TeknologiMalaysia,Vol 43 Page 39-54.http://www.penerbit.utm.my/onlinejournal/. Tanggal Akses: 29 Desember 2015.

Jung, C. R. dan Winkelmann, R. (1993). *Two Aspect of Labor Mobility : A Bivariate Poisson Regression Approach*. Journal Empirical Economics, Vol 18, 543-556.

Karlis, D dan Ntzoufras, I. (2005). *Bivariate Poisson Regression Models in R. Journal of Statistical Software*, Vol 14 1-36.

Kawamura, K. (1973). *The Structure of Bivariate Poisson Distribution*. Kodai.Math. SEM.REP. 246-256.

KementrianKesehatan Republik Indonesia. (2013).*Profil Kesehatan Indonesia.*DepartemenKesehatan .Jakarta.

Kurniawan U. (2013).*Penaksiran dan Pengujian Hipotesis Parameter Model Regresi Binomial Negative Bivariat pada Angka Kematian Bayi dan Kematian Ibu di Provinsi Jawa Timur*. Tesis. Institut Teknologi SepuluhNopember. Surabaya.

Li, F. (2000). *Multicollinearity*. Department of Statistics, Stockholm University, Hal. 1-10. http://people.su.se/. Tanggal Akses: 29 Desember 2015.

Listiani, Y. (2010). *Pemodelan Regresi Generalized Poisson pada Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Angka Kematian Bayi di Jawa Timur Tahun 2007.*Tugas Akhir. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.

McClave, J.T., Benson, P.G., & Sincih, T. (2010).*Statistics for Business and Economics, 11th Edition. Pearson Education* Inc. Florida

Myers,R.H.,Montgomery, D.C., Vining, G.G., dan Robinson, T.J.(2010). *Generalized Linier Models with Aplication in Engineering and Sciences*. John Wiley and Sons, Inc., Publication. Canada.

Sofro A., (2009). *Generalized Poisson Regression padaPemodelan Data KlaimResikoSendiri : PT. AsuransuTripakarta Surabaya*. Tesis.Institut Teknologi SepuluhNopember. Surabaya.

Umami R.L. (2015). *Penaksiran Parameter Dan Pengujian Hipotesis Regresi Bivariat Zero-Inflated Poisson. Tesis S2: Jurusan Statistika.* Institut Teknologi Sepuluh Nopember.Surabaya.

Unicef. (2012). *Annual Report*. http://www.unicef.org/publications/files.Tanggal akses : 31 Maret 2016.

Vernic, R. (1997). *On The Bivariate Generalized Poisson Distribution. Astin Bulletin, 27, pp 23-32.* http://jounal.cambrige.org/ . Tanggal akses : 11 Januari 2016.

Walpole, R. (1995). *Pengantar Statistika*. Edisi ke-3. Terjemahan Bambang Sumantri. PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Winarno, D. (2009). *Analisis Angka Kematian Bayi di Jawa Timur dengan Pendekatan Model Regresi Spasial*. Tesis. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.

Zamani H., Faroughi P., Ismail N. (2013). *Bivariate Generalized Poisson Regression Model : Applications on Health Care Data*. Spinger-Verlag Berlin Heidelberg.Tanggalakses : 12 Februari 2016.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BIODATA PENULIS

DIAN KUSUMA WARDANI lahir di Jombang Jawa Timur pada tanggal 25 Oktober 1991. Anak pertama dan terakhir dari pasangan Bapak Sutamat, S.Pd dengan Ibu Endrawati Koestianingsih ini menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di SDN Banjardowo I tahun 2004 kemudian melanjutkan di SMP Negeri 2 Jombang dan selesai pada tahun 2007. Pendidikan selanjutnya di SMA Negeri 2 Jombang hingga lulus pada tahun 2010.

Pendidikan Tinggi dimulai pada tahun 2010 di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Brawijaya, Program Studi Statistika dan lulus pada tahun 2014. Pada tahun 2015 penulis melanjutkan studi lanjut di Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS). Kritik dan saran dapat disampaikan pada email penulis dian.wardani10@gmail.com.