TUGAS AKHIR – SM 141501

PEMBANDINGAN DOMINASI SIMPUL DAN DOMINASI SISI PADA GRAF CIRCULANT $C(n\,;\,S)$

DITA AGUSTINA MUSTIKANINGRUM
NRP 1209 100 004

Dosen Pembimbing
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.
Drs. Suhud Wahyudi, M.Si.

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

FINAL PROJECT – SM 141501

COMPARING VERTEX DOMINATING AND EDGE DOMINATING ON CIRCULANT GRAPH $C(n\,;\,S)$

DITA AGUSTINA MUSTIKANINGRUM
NRP 1209 100 004

Supervisors
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.
Drs. Suhud Wahyudi, M.Si.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

PEMBANDINGAN DOMINASI SIMPUL DAN DOMINASI SISI PADA GRAF CIRCULANT $C(n\,;\,S)$

COMPARING VERTEX DOMINATING AND EDGE DOMINATING ON CIRCULANT GRAPH $C(n\,;\,S)$

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Analisis, Aljabar, dan Pembelajaran Matematika
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
DITA AGUSTINA MUSTIKANINGRUM
NRP. 1209 100 004

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Suhud Wahyudi, M.Si.	Dr. Darmaji, S.Si., M.T.
NIP. 19600109 198701 1 001	NIP. 19691015 199412 1 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T.
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2016

Pembandingan Dominasi Simpul dan Dominasi Sisi pada Graf Circulant $\boldsymbol{C\ (n\ ;\ S)}$

Nama	**: Dita Agustina Mustikaningrum**
NRP	**: 1209100004**
Jurusan	**: Matematika**
Dosen Pembimbing	**: 1) Dr. Darmaji, S.Si., M.T.**
	2) Drs. Suhud Wahyudi, M.Si.

Abstrak

Dominasi dalam teori graf merupakan salah satu cabang ilmu yang mempelajari tentang himpunan yang mendominasi. Sebuah himpunan D dari simpul-simpul pada G adalah himpunan dominasi simpul jika setiap simpul pada $V - D$ bertetanggaan pada setidaknya satu simpul yang berada di D. Bilangan dominasi simpul G, dinotasikan dengan $\gamma(G)$, adalah kardinalitas minimal dari himpunan dominasi G. Sebuah subset X dari E disebut dengan himpunan dominasi sisi dari G jika setiap sisi yang tidak berada di X bertetanggaan dengan beberapa sisi yang berada di X. Bilangan dominasi sisi $\gamma'(G)$ (atau cukup ditulis γ' saja) dari G adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan dominasi sisi pada G. Dalam paper ini diuraikan dominasi simpul dan dominasi sisi pada graf circulant $circ\ (n\ ;\ S)$. Hasil yang diperoleh dari pengerjaan tugas akhir ini adalah $\gamma\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$, untuk $S = \{1\}$ atau $\gamma\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = 1$, untuk $S = \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}$. Serta $\gamma'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$, untuk $S = \{1\}$ atau $\gamma'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, untuk $S = \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}$.

Kata-kunci: ***Himpunan dominasi, bilangan dominasi, dominasi simpul, dominasi sisi, graf circulant $\boldsymbol{circ\ (n\ ;\ S)}$***

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

Comparing Vertex Dominating and Edge Dominating On Circulant Graph $\boldsymbol{C\ (n\ ;\ S)}$

Name	**: Dita Agustina Mustikaningrum**
NRP	**: 1209100004**
Department	**: Mathematics**
Supervisors	**: 1) Dr. Darmaji, S.Si., M.T.**
	2) Drs. Suhud Wahyudi, M.Si.

Abstract

Domination in graph is one branch of graph theory that studies on the dominating set. A set D of vertices of a graph G is a vertex dominating set If each vertex in V-D is adjacent to at least one vertex in D. The vertex domination number of G, denoted by $\gamma(G)$ *is the cardinality of a minimum dominating set of G. A subset X of E is called an edge dominating set of G if every edge not in X is adjacent to some edge in X. The edge domination number* $\gamma'(G)$ *(or* γ' *for short) of G is the minimum cardinality taken over all edge dominating sets of G. In this paper, we study the vertex dominating number and edge dominating number of circulant graph* $circ\ (n\ ;\ S)$*. We also prove that* $\gamma\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ *for* $S = \{1\}$ *,* $\gamma\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = 1$ *for* $S = \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}$ *, and* $\gamma'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ *for* $S = \{1\}$ *and* $\gamma'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *for* $S = \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}$.

Key-words:* *Dominating set, dominating number, vertex domination, edge domination, circulant graph $\boldsymbol{circ\ (n\ ;\ S)}$

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR ISI

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR TABEL

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR GAMBAR

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR SIMBOL

$\subseteq$	Subset/himpunan bagian dari
$\gamma(G)$	Bilangan dominasi simpul
$\Delta(G)$	Derajat maksimum (terbesar) pada graf G dengan himpunan simpul $V(G)$
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n
$\gamma'(G)$	Bilangan dominasi sisi
$\Delta'(G)$	Derajat maksimum untuk sisi di G

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan tugas akhir.

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika diskrit yang banyak penerapannya dalam berbagai bidang ilmu seperti engineering, fisika, biologi, kimia, arsitektur, transportasi, teknologi komputer, ekonomi, sosial dan bidang lainnya. Teori graf juga dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan persoalan - persoalan, seperti *Travelling Salesperson Problem*, *Chinese Postman Problem*, *Shortest Path*, *Electrical Network Problems*, *Graph Coloring*, dan lain-lain. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, titik, atau simpul. Untuk selanjutnya, disebut dengan simpul saja. Sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi.

Konsep himpunan dominasi pada graf memiliki akar sejarah sejak tahun 1850 ketika penggemar catur Eropa mempelajari masalah ”dominasi ratu” [1]. Para penggemar ini bekerja untuk menentukan jumlah minimum ratu yang diperlukan sehingga setiap persegi pada papan catur standar 8×8 dapat diduduki oleh sebuah ratu atau dapat langsung diserang oleh ratu, dengan kata lain kotak tersebut didominasi oleh sebuah ratu. Situasi tersebut dapat dimodelkan dengan teori graf. Pada papan catur, kotak adalah titik (V) dan dua titik terhubung di G jika setiap kotak dapat dicapai oleh ratu pada kotak lain dengan satu langkah. Jumlah minimum ratu yang memungkinkan untuk tidak bertabrakan dengan ratu lainnya dengan satu langkah adalah bilangan dominasi dari sebuah himpunan dominasi di G [2].

Selanjutnya studi matematika himpunan dominasi dimulai pada tahun 1960, dan sejak saat itu, himpunan dominasi digunakan untuk banyak aplikasi yang berbeda, diantaranya untuk memodelkan keterkaitan pada jaringan komunikasi komputer, teori jejaring sosial, dan masalah serupa lainnya.

Dengan kata lain, dominasi dalam teori graf merupakan salah satu cabang ilmu yang mempelajari tentang himpunan yang mendominasi. Diketahui graf $G = (V, E)$ dan $S \subseteq V$. Pada graf G, sebuah simpul v mendominasi dirinya sendiri dan masing-masing simpul yang bertetangga dengan dirinya. Jika setiap simpul dari $V-S$ saling *adjacent* pada sedikitnya dengan satu simpul dari S, maka S dikatakan himpunan dominasi atau *dominating set* dari graf G [3]. Sedangkan ukuran terkecil dari *dominating set* disebut bilangan dominasi atau *dominating number*. Bilangan dominasi yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi dalam graf G, yang merupakan pengembangan dari penelitian-penelitian sebelumnya. Nilai dari bilangan dominasi selalu $\gamma(G) \subseteq V(G)$.

Penelitian terkait dominasi telah berkembang cukup pesat. Wardani, dkk. [4] telah melakukan penelitian mengenai pengembangan teori dominating set pada graf bunga (Fl_n) dengan hasil $\gamma(Fl_n) = 1$; graf gunung berapi (ϑ_n) dengan hasil $\gamma|(\vartheta_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$; graf *firecracker* $\left(F_{n,k}\right)$ dengan hasil $\gamma\left(F_{n,k}\right) = n$; graf pohon pisang $\left(B_{n,m}\right)$ dengan hasil $\gamma\left(B_{n,m}\right) = n + 1$; dan graf tunas kelapa $\left(CR_{n,m}\right)$ dengan hasil $\gamma\left(CR_{n,m}\right) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Roifah dan Dafik [2] menyimpulkan bahwa: untuk $n \geq 3$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf *joint product* $K_3 + C_n$ adalah $\gamma(K_3 + C_n) = 1$ dan $\gamma(K_3 + P_m) = 1$; untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf cartesian *product* $G = C_n \times P_m$ adalah $\gamma(G) = \left\lceil \frac{nm}{4} \right\rceil$; untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf $C_n \odot K_m$ adalah $\gamma(C_n \odot K_m) = n$; untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf $G = Shackel(K_m, n)$ adalah $\gamma\left(Shackel(K_m, n)\right) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Pada tugas akhir ini dicari dominasi simpul dan dominasi sisi pada graf *circulant*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah:

a. Bagaimana mendapatkan rumus umum bilangan dominasi simpul pada graf *circulant* $circ(n : S)$.
b. Bagaimana mendapatkan rumus umum bilangan dominasi sisi pada graf *circulant* $circ(n : S)$.

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan dalam Tugas Akhir ini dibatasi oleh:

a. Graf yang menjadi obyek kajian adalah graf *circulant* terhubung yang dinotasikan $circ(n : S)$ dengan n adalah jumlah simpul dan S adalah himpunan bilangan bulat dimana $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ dengan $0 < s_1 < \cdots < s_k < \frac{(n+1)}{2}$.
b. Dominasi yang dipakai adalah dominasi simpul dan dominasi sisi.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian Tugas Akhir ini adalah:

a. Mendapatkan rumus umum bilangan dominasi simpul pada graf *circulant* $circ(n : S)$.
b. Mendapatkan rumus umum bilangan dominasi sisi pada graf *circulant* $circ(n : S)$.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini disusun berdasarkan sistematika tulisan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, serta tujuan dan manfaat penelitian.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang dasar teori yang digunakan penulis dalam mengerjakan tugas akhir yang meliputi graf, terutama graf *circulant*, pengertian dominasi simpul dan dominasi sisi.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi uraian mengenai langkah – langkah yang dilakukan untuk menentukan pola umum dominasi simpul dan dominasi sisi pada graf *circulant* yang meliputi studi literatur, menganalisa dominasi simpul dan dominasi sisi dan menentukan pola dominasi, serta menentukan dominasi simpul dan dominasi sisi.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai proses untuk mendapatkan pola dominasi simpul dan dominasi sisi pada graf *circulant* yang meliputi analisa dan menentukan dominasi yang memenuhi syarat dominasi simpul dan dominasi sisi kemudian menentukan pola umum dominasi simpul dan dominasi sisi pada graf *circulant*.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

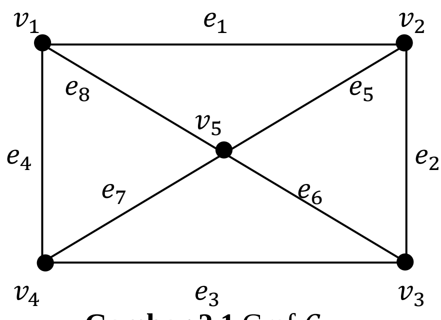
Bab ini berisikan kesimpulan akhir dari tugas akhir yang berisi pembuktian terhadap teorema yang diperoleh dengan memenuhi batas tertentu dan saran yang bertujuan untuk mengembangkan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

Graf G didefenisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G(V, E)$ terdiri atas himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dengan V adalah himpunan tak kosong dari simpul (*vertex*) yang disebut himpunan simpul, dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$, dimana anggotanya disebut sisi yang menghubungkan sepasang simpul dan dinyatakan sebagai pasangan tak-terurut dari simpul pada V.

Banyaknya simpul anggota $V(G)$ dari graf G disebut *order* graf G dan dinotasikan $|G|$. Banyaknya sisi anggota $E(G)$ dari graf G disebut *size* graf G dan dinotasikan $\|G\|$. Apabila dua simpul terhubung oleh satu sisi maka disebut simpul yang bertetangga (*adjacent vertices*). Sedangkan sisi yang bertetangga adalah dua sisi yang memiliki salah satu simpul ujung yang sama [5].



Gambar 2.1 Graf G_1

Graf G_1 pada Gambar 2.1 mempunyai simpul $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan sisi $E(G_1) = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7,\ e_8\}$. Jadi, $|G_1| = 5$ dan $\|G_1\| = 8$.

2.2 Jenis-Jenis Graf

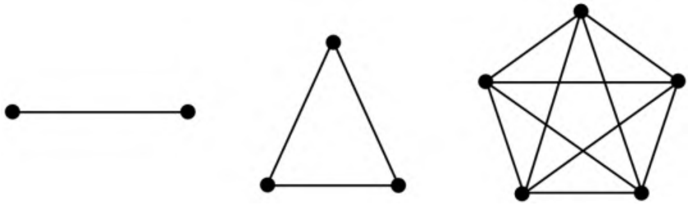
Berdasarkan sifatnya graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan banyak simpul, maupun berdasarkan orientasi arah pada sisi atau berdasarkan keterhubungan simpul, maupun graf khusus.

Graf terdiri dari berbagai jenis. Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, graf dapat dikelompokkan menjadi graf sederhana dan graf tidak sederhana. Graf Sederhana (*Simple Graph*) adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun loop. Graf Tak-Sederhana (*Unsimple Graph*) adalah graf yang mengandung sisi ganda atau loop.

Graf Berhingga (*Limited Graph*) adalah graf yang banyak simpulnya n berhingga. Graf Tak-Berhingga (*Unlimited Graph*) adalah graf yang banyak simpulnya n tak-berhingga.

Berdasarkan ada tidaknya orientasi atau arah pada simpul-simpul graf, graf dapat dibagi menjadi graf berarah dan graf tidak berarah. Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya mempunyai arah dari sebuah simpul ke simpul lainnya. Sedangkan graf tidak berarah adalah graf yang setiap sisinya tidak memiliki arah.

Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Graf Lengkap (*Complete Graph*) merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya terhubung (oleh satu sisi) ke semua simpul lainnya. Dengan kata lain, setiap simpulnya bertetangga. Graf lengkap dengan n buah simpul dinotasikan dengan K_n. Banyak sisi pada sebuah graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi.



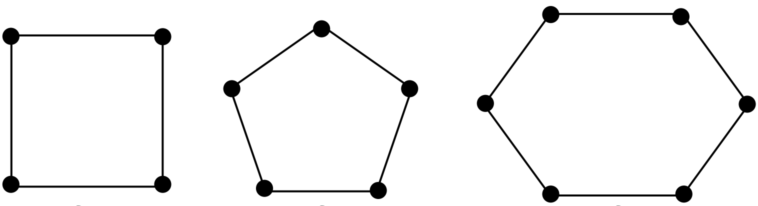
K_2 K_3 K_5

Gambar 2.2 Contoh Graf Lengkap

Graf K_2, K_3, dan K_5 pada Gambar 2.2 adalah contoh graf lengkap yang masing-masing memiliki simpul sebanyak 2, 3, serta 5 simpul. Setiap simpul pada graf K_2, K_3, dan K_5 bertetangga satu sama lain.

Graf Lingkaran (*Cycle Graph*) adalah graf sederhana yang setiap simpulnya masing-masing berderajat dua. Graf lingkaran dinotasikan dengan C_n dengan $n \geq 3$ adalah jumlah simpul pada graf tersebut.

Graf C_4, C_5, dan C_6 yang dicontohkan dalam Gambar 2.3 adalah contoh graf lingkaran yang masing-masing memiliki simpul sebanyak 4, 5, dan 6 simpul. Masing-masing simpul pada graf C_4, C_5, dan C_6 berderajat dua.

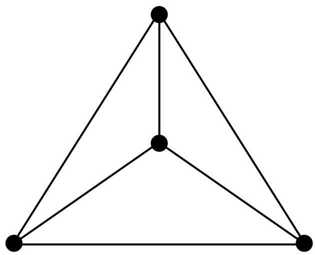


C_4 C_5 C_6

Gambar 2.3 Contoh Graf Lingkaran

Graf Teratur (*Regular Graph*) adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul adalah *r*, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat *r*. Jumlah sisi pada graf teratur derajat *r* adalah $\frac{nr}{2}$.

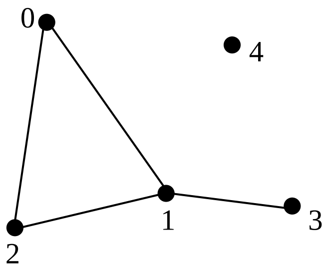
Graf Roda (*Wheels Graph*) merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran, dan menghubungkan simpul baru tersebut dengan semua simpul pada graf lingkaran. Notasi graf roda adalah W_n dengan $n \geq 3$ adalah jumlah simpul pada graf tersebut. Gambar 2.4 di bawah menunjukkan contoh dari graf roda.



Gambar 2.4 Graf roda W_3

Derajat (*Degree*) pada suatu simpul $d(v)$ adalah banyaknya sisi yang menghubungkan suatu simpul. Sedangkan derajat Graf *G* adalah jumlah derajat semua simpul Graf *G*. Derajat minimum (terkecil) dan derajat maksimum (terbesar) pada graf G dengan himpunan simpul $V(G)$ berturut-turut dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan $\Delta(G)$. Berikut contoh derajat suatu simpul pada graf *G*.

Pada Gambar 2.5 terlihat bahwa $d(0) = d(2) = 2$, karena banyaknya ujung sisi yang terhubung pada simpul 0 dan 2 masing-masing sebanyak 2 buah. Untuk $d(1) = 3$ karena banyaknya ujung sisi yang terhubung pada simpul 1 sebanyak 3 buah. Untuk $d(3) = 1$ karena banyaknya ujung sisi yang terhubung pada simpul 3 sebanyak 1 buah, sedangkan pada $d(4) = 0$ karena tidak ada ujung sisi yang terhubung pada simpul 3. Sehingga graf di atas mempunyai $\delta(G) = 0$ dan $\Delta(G) = 3$.



Gambar 2.5 Graf G dengan Simpul Terisolasi

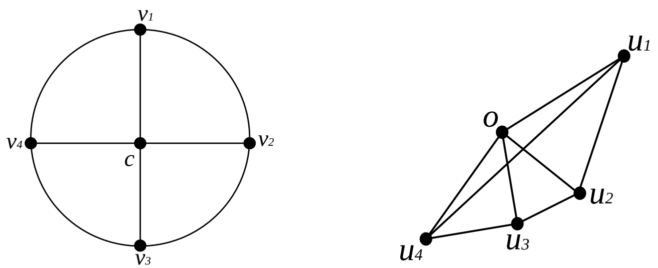
Graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan simpul kedua graf maupun antara himpunan sisi kedua graf, sedemikian sehingga hubungan ketetanggaan tetap terjaga. Dengan kata lain, misalkan sisi e bertetangga dengan simpul u dan v pada graf G_1, maka sisi e' pada graf G_2 harus bertetangga dengan simpul u' dan v' pada graf G_2. Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Dari definisi graf isomorfik dapat dikemukakan bahwa dua buah graf isomorfik apabila memenuhi ketiga syarat, yaitu:

1. Memiliki jumlah simpul yang sama
2. Memiliki jumlah sisi yang sama
3. Memiliki derajat yang sama dari simpul-simpulnya.

Semisal terdapat dua graf seperti pada Gambar 2.6, kedua graf tersebut isomorfik jika memenuhi ketiga syarat tersebut. Analisa graf roda W_4 dan graf G, yaitu:

1. Jumlah simpul masing-masing graf, yaitu $|W_4| = 5$ dan $|G| = 5$, sedemikian hingga jumlah simpul graf W_4 sama dengan jumlah simpul graf G.
2. Jumlah sisi masing-masing graf, yaitu $\|W_4\| = 8$ dan $\|G\| = 8$. Jadi kedua graf memiliki jumlah sisi yang sama.
3. Derajat dari simpul-simpul kedua graf, yaitu $W_4 = 4, 3, 3, 3, 3$ dan $G = 4, 3, 3, 3, 3$. Berdasarkan hasil tersebut diperoleh derajat simpul-simpul dari kedua graf sama.

Karena kedua graf pada Gambar 2.6 memenuhi ketiga syarat isomorfik, maka dapat dikatakan graf roda W_4 isomorfik dengan graf G.



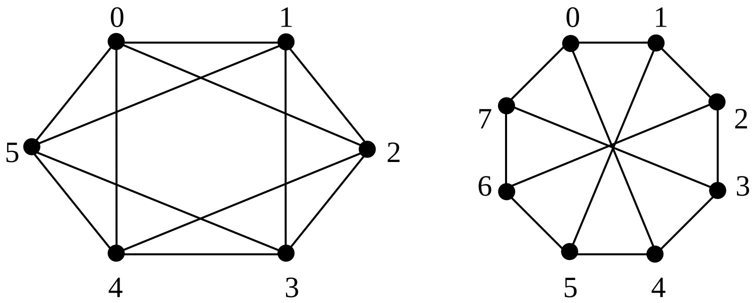
(a) (b)

Gambar 2.6 (a) Graf Roda W_4; (b) Graf Terhubung G

2.3 Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ}$ $(\boldsymbol{n}\ ;\ \boldsymbol{S})$

Graf *Circulant* dinotasikan oleh $circ(n\ ;\ S)$ dengan n adalah himpunan simpul dan S adalah himpunan bilangan bulat dimana $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ dengan $0 < s_1 < \ldots < s_k < \frac{(n+1)}{2}$. Himpunan simpul pada graf *circulant* merupakan himpunan bilangan bulat modulo n yaitu $\mathbb{Z}_n$ yang merupakan suatu grup dengan operasi penjumlahan. Suatu graf dapat dikatakan sebagai graf *circulant* apabila terdapat dua simpul bertetangga yaitu i dan j jika dan hanya jika terdapat bilangan $s \in S$ sehingga $i + s = j \bmod n$ atau $j + s = i \bmod n$ [5].

Gambar 2.7 berikut merupakan contoh dari graf *circulant*.



Graf $circ\ (6\ ; 1{,}2)$ Graf $circ(8\ ; 1{,}4)$

Gambar 2.7 Contoh Graf *Circulant*

2.4 Dominasi dalam Teori Graf

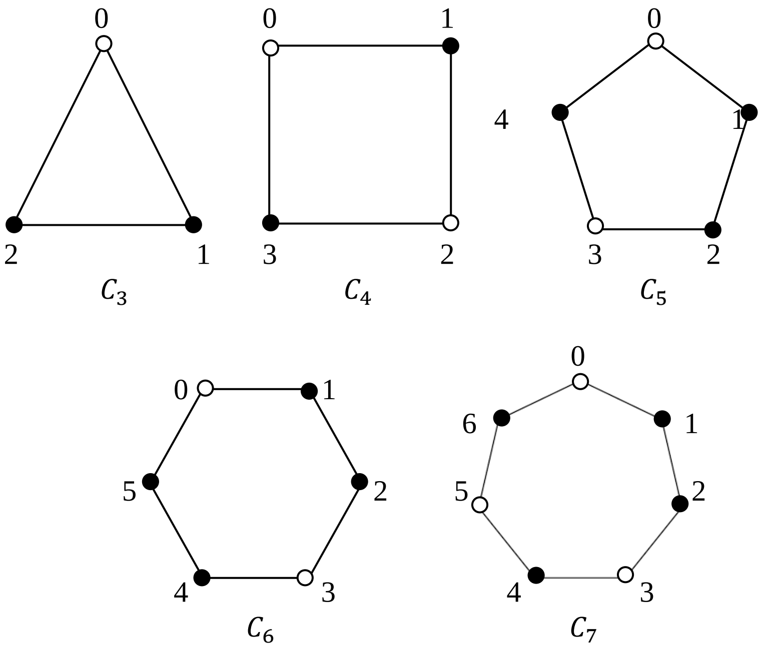
Dominasi dalam teori graf merupakan salah satu cabang ilmu yang mempelajari tentang himpunan yang mendominasi.

2.4.1 Dominasi Simpul

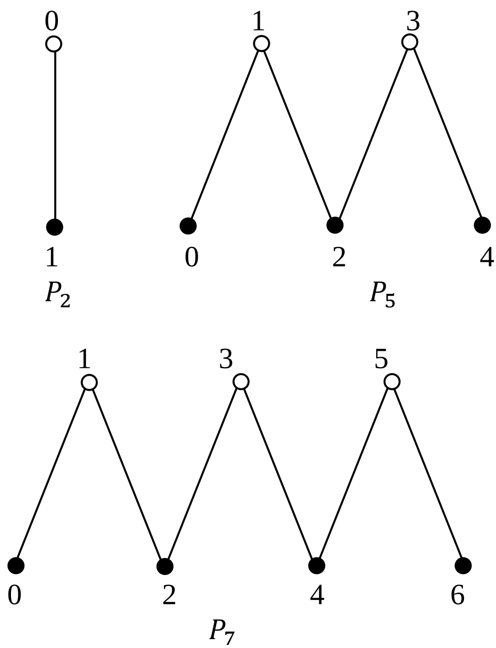
Pada graf G, sebuah simpul v mendominasi dirinya sendiri dan masing-masing simpul yang bertetangga dengan dirinya. Sebuah himpunan D dari simpul-simpul pada G adalah himpunan dominasi simpul jika setiap simpul pada $V - D$ bertetanggaan pada setidaknya satu simpul yang berada di D. Bilangan dominasi simpul G, dinotasikan dengan $\gamma(G)$, adalah kardinalitas minimal dari himpunan dominasi G [3].

a. Dominasi Simpul pada Graf C_n dan P_n

Dari Gambar 2.8 dan Gambar 2.9 dapat diketahui bahwa $\gamma(C_n) = \gamma(P_n) = \lceil n/3 \rceil$. Graf C_n yang ditunjukkan pada Gambar 2.8 dan graf P_n yang ditunjukkan pada Gambar 2.9 memiliki derajat maksimum 2, dan karena itu masing-masing simpul dapat mendominasi dirinya sendiri dan maksimal sampai 2 simpul lainnya. Memilih setiap simpul ketiga yang dimulai dari simpul kedua, dan menggunakan simpul terakhir ketika n tidak dapat dibagi dengan 3, menghasilkan sebuah himpunan dominasi untuk graf dengan jumlah sisi $\lceil n/3 \rceil$ [3].



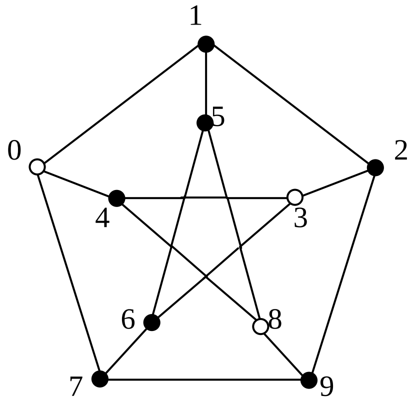
Gambar 2.8 Contoh Graf C_n



Gambar 2.9 Contoh Graf P_n

b. Dominasi Simpul pada Graf Petersen

Graf Petersen adalah graf yang memiliki 10 simpul, 15 sisi dan setiap simpulnya berderajat-3 dengan 5 sikel di luar dan 5 sikel di dalam yang dihubungkan dengan 5 sisi sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Graf Petersen *P*

Pada pada Gambar 2.10 dapat diketahui bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0 (dirinya sendiri), 1, 4, 7. Simpul 3 mendominasi simpul 3 (dirinya sendiri), 2, 4, 6. Simpul 8 mendominasi simpul 8 (dirinya sendiri), 4, 5, 9. Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf Petersen didominasi oleh simpul di $D = \{0, 3, 8\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma(P) = 3$.

Setiap simpul mendominasi dirinya sendiri dan 3 simpul lainnya, sehingga setidaknya dibutuhkan 3 simpul. Karena graf Petersen memiliki diameter 2, maka simpul-simpul tetangga pada sebuah simpul tunggal membentuk himpunan dominasi.

2.4.2 Dominasi Sisi

Gagasan mengenai dominasi sisi sebelumnya diperkenalkan oleh Mitchell dan Hedetniemi [6]. Sebuah subset *X* dari *E* disebut dengan himpunan dominasi sisi dari *G* jika setiap sisi yang tidak berada di *X* bertetanggaan dengan beberapa sisi yang berada di *X* [7]. Bilangan dominasi sisi

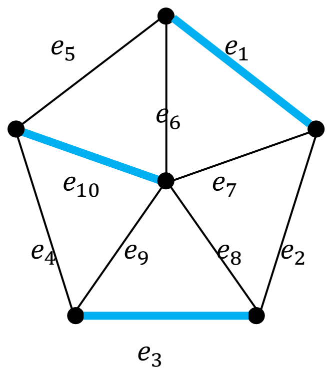
$\gamma'(G)$ (atau cukup ditulis γ' saja) dari G adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan dominasi sisi pada G.

a. Dominasi Sisi pada Graf Roda (*Wheels Graph*)

Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf lingkaran C_n , dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf lingkaran tersebut.

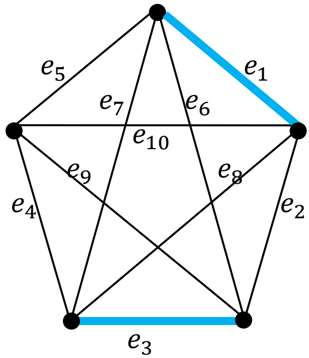
Pada Gambar 2.11 dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi e_1 (dirinya sendiri), e_2, e_5, e_6, e_7 . Sisi e_3 mendominasi sisi e_3 (dirinya sendiri), e_2, e_4, e_8, e_9 . Sisi e_{10} mendominasi sisi e_{10} (dirinya sendiri), $e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf Roda W_5 didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3, e_{10}\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'(G) = 3$.



Gambar 2.11 Contoh Graf Roda W_5 dengan e_1, e_3, e_{10} sebagai Anggota Himpunan Sisi Pendominasi

b. Dominasi Sisi pada Graf Lengkap



Gambar 2.12 Contoh Graf Lengkap K_5 $(n = 5)$ dengan e_1, e_3 sebagai Anggota Himpunan Sisi Pendominasi

Pada Gambar 2.12 dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi e_1 (dirinya sendiri), $e_2, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}$. Sisi e_3 mendominasi sisi e_3 (dirinya sendiri), $e_2, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9$.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf K_5 didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'(K_5) = 2$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan tahapan penelitian yang digunakan untuk mencapai tujuan penelitian..

3.1 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian untuk mendapatkan dominasi simpul dan dominasi sisi pada graf *circulant* $circ\,(n\,;\,S)$ adalah sebagai berikut:

a. Studi Literatur
Dalam tahap ini dilakukan pemahaman mengenai konsep dasar teori graf. Setelah memahami konsep dasar teori graf, lalu membaca dan memahami konsep dominasi dalam teori graf. Tahap berikutnya adalah membaca dan memahami paper maupun sumber lainnya yang berkaitan dengan dominasi simpul dan dominasi sisi. Terutama pada graf *circulant*.

b. Mendapatkan Dominasi Simpul (*Vertex Domination*)
Setelah memperoleh informasi dari studi literatur, pada tahap ini dilakukan analisis masalah dan menyelesaikannya dengan mendapatkan dominasi simpul (*vertex domination*) pada graf *circulant*.

c. Mendapatkan Dominasi Sisi (*Edge Domination*)
Setelah memperoleh dominasi simpul (*vertex dominating number*) dari graf *circulant*. Selanjutnya, pada tahap ini dilakukan analisis berdasarkan konsep yang telah diberikan untuk mendapatkan dominasi sisi (*edge dominating*) pada graf *circulant*.

d. Analisa Pola Secara Umum

Pada tahap ini dilakukan analisa pola pada poin (b) dan (c) untuk kemudian digunakan pada dominasi simpul dan sisi pada graf *circulant* secara umum. Pola yang didapatkan masih dapat dianggap sebagai dugaan (konjektur). Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

e. Evaluasi

Melakukan evaluasi terhadap analisis yang sudah dilakukan untuk mengetahui apakah analisis tentang dominasi simpul dan dominasi sisi pada graf *circulant* yang dikaji sudah sesuai dengan tujuan yang diharapkan.

f. Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan.

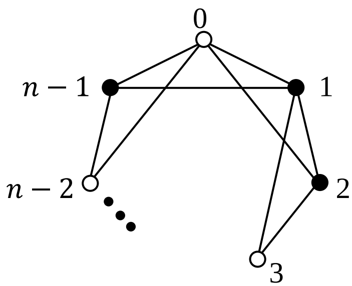
g. Penulisan Laporan Tugas Akhir

BAB IV
ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai analisa permasalahan dan pembahasan mengenai dominasi simpul dan dominasi sisi pada graf *circulant* $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan $n \geq 5$.

4.1 Dominasi Simpul (*Vertex Domination*) pada Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ}\ (\boldsymbol{n}\ ;\ \boldsymbol{S})$

Pada sub bab ini, dibahas dominasi simpul pada graf *circulant* $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10.$ Gambar 4.1 memberi gambaran graf *circulant* $circ\ (n\ ;\ 1, 2)$.



Gambar 4.1 Graf *Circulant* $circ\ (n\ ;\ 1{,}2)$

Berikut diberikan yang teorema mengenai bilangan dominasi yang akan digunakan dalam tugas akhir ini.

Teorema 1 [1]

Untuk sebarang graf *G*,

$$\left\lceil \frac{p}{1 + \Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$$

Keterangan:

p = Banyaknya simpul
$\Delta(G)$ = Derajat maksimum
$\gamma(G)$ = Bilangan dominasi

Bukti:

Misalkan S adalah sebuah $\gamma - \text{set}$ dari G. Pertama, kita andaikan batas bawah. Setiap titik dapat sebagai dominating set dan $\gamma(G)$ ke titik yang lain. Berakibat, $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rceil$. Untuk batas atasnya, misalkan v adalah titik dengan derajat maksimum $\Delta(G)$. Maka v sebagai dominating set $N[v]$ dan titik di $V - N[v]$ merupakan dominating set mereka sendiri. Berakibat, $V - N[v]$ merupakan dominating set dengan kardinalitas $n - \Delta(G)$, sehingga $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

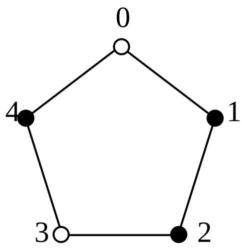
4.1.1 Dominasi Simpul pada *Graf Circulant* $\boldsymbol{circ}$ $(\mathbf{5}\ ;\ \boldsymbol{S})$

Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi simpul pada graf *circulant* $circ\ (5\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 5, maka kemungkinan $S = \{1, 2\}$.

(i) Graf $circ\ (5\ ;\ 1)$

Gambar 4.2 menunjukkan graf $circ\ (5\ ;\ 1)$. Terlihat bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0 (dirinya sendiri), 1, 4. Apabila $D = \{0\}$ maka terdapat simpul 2 dan 3 yang belum terdominasi. Dari pengamatan tampak bahwa jika $|D| = 1$, dengan mangambil simpul manapun, selalu saja terdapat sedikitnya satu simpul lain yang tidak terdominasi. Dengan demikian diperlukan setidaknya satu simpul lagi untuk menjadi anggota D. Dalam kasus ini diambil simpul 3. Simpul 3 mendominasi simpul 3 (dirinya sendiri), 2, 4.

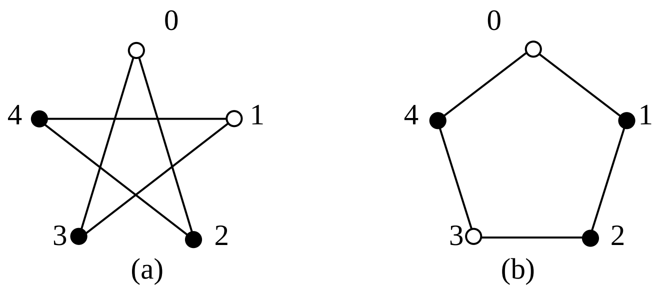
Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (5\ ;\ 1)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0, 3\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (5\ ;\ 1)\big) = 2$.



Gambar 4.2 Graf *Circulant* $circ\ (5\ ;\ 1)$

(ii) Graf $circ\ (5\ ;\ 2)$

Oleh karena graf $circ\ (5\ ;\ 2)$ pada Gambar 4.3 (a) isomorfis dengan graf $circ\ (5\ ;\ 1)$ sebagaimana pada Gambar 4.2, maka $\gamma\big(circ\ (5\ ;\ 2)\big) = 2$.

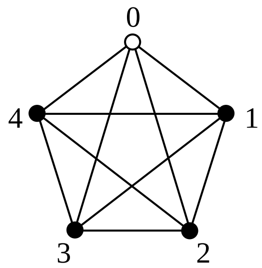


Gambar 4.3 (a) Graf *Circulant* $(5\ ;\ 2)$; (b) Graf $circ\ (5\ ;\ 1)$

(iii) Graf $circ\ (5\ ;\ 1, 2)$

Gambar 4.4 menunjukkan graf $circ\ (5\ ;\ 1{,}2)$. Terlihat bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 2, 3, 4. Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (5\ ;\ 1, 2)$

didominasi oleh simpul di $D = \{0\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (5\ ;\ 1, 2)\big) = 1$.

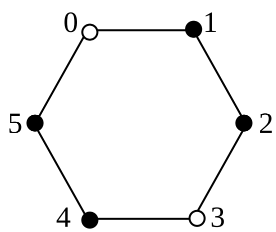


Gambar 4.4 Graf *Circulant* $circ\ (5\ ;\ 1{,}2)$

4.1.2 Dominasi Simpul pada *Graf Circulant* $\boldsymbol{circ\ (6\ ;\ S)}$

Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi simpul pada graf *circulant* $circ\ (6\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 6, maka kemungkinan $S = \{1, 2, 3\}$.

(i) Graf $circ\ (6\ ;\ 1)$



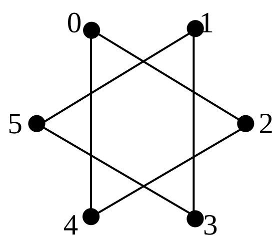
Gambar 4.5 Graf *Circulant* $circ\ (6\ ;\ 1)$

Gambar 4.5 menunjukkan graf $circ\ (6\ ;\ 1)$. Terlihat bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 5. Simpul 3 mendominasi simpul 3, 2, 4.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\,(6\,;\,1)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0, 3\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\,(6\,;\,1)\big) = 2$.

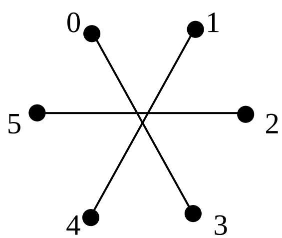
(ii) Graf $circ\,(6\,;\,2)$

Gambar 4.6 menunjukkan bahwa graf $circ\,(6\,;\,2)$ adalah graf tidak terhubung. Dominasi simpul hanya didefinisikan pada graf terhubung. Oleh karena graf $circ\,(6\,;\,2)$ adalah graf tidak terhubung, maka $\gamma\big(circ\,(6\,;\,2)\big)$ tidak didefinisikan.



Gambar 4.6 Graf *Circulant* $circ\,(6\,;2)$

(iii) Graf $circ\,(6\,;\,3)$



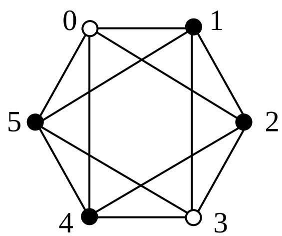
Gambar 4.7 Graf *Circulant* $circ\,(6\,;\,3)$

Gambar 4.7 menunjukkan bahwa graf $circ\ (6\ ;\ 3)$ adalah graf tidak terhubung. Dominasi simpul hanya didefinisikan pada graf terhubung. Oleh karena graf $circ\ (6\ ;\ 3)$ adalah graf tidak terhubung, maka $\gamma\big(circ\ (6\ ;\ 3)\big)$ tidak didefinisikan.

(iv) Graf $circ\ (6\ ;\ 1,2)$

Gambar 4.8 menunjukkan graf $circ\ (6\ ;\ 1,2)$. Terlihat bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 2, 4, 5. Simpul 3 mendominasi simpul 3, 1, 2, 4, 5.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (6\ ;\ 1,2)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0,3\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (6\ ;\ 1,2)\big) = 2$.



Gambar 4.8 Graf *Circulant* $circ\ (6\ ;\ 1,2)$

(v) Graf $circ\ (6\ ;\ 1,3)$

Gambar 4.9 menunjukkan graf $circ\ (6\ ;\ 1,3)$. Terlihat bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 3, 5. Simpul 2 mendominasi simpul 2, 1, 3, 5.

Akan ditunjukkan bahwa $\gamma\big(circ\ (6\ ;\ 1,3)\big)$ tidak sama dengan 2, dengan menunjukkan semua kemungkinan $|D| = 2$ bukan merupakan bilangan dominasi dari graf $circ\ (6\ ;\ 1,3)$.

Jika $V\big(circ\ (6\ ;\ 1,3)\big) = \{0,1,2,3,4,5\}$ maka untuk $|D| = 2$ terdiri atas $\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{0,4\}, \{0,5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}$.

Pada kasus $\{0,1\}$ simpul 1 didominasi oleh simpul 0, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{0,1\}$ diabaikan. Pada kasus $\{0,2\}$, simpul 0 dan 2 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{0,3\}$, simpul 3 didominasi oleh simpul 0, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{0,3\}$ diabaikan. Pada kasus $\{0,4\}$, simpul 0 dan 4 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{0,5\}$ simpul 5 didominasi oleh simpul 0, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{0,5\}$ diabaikan.

Pada kasus $\{1,2\}$ simpul 1 didominasi oleh simpul 2, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{1,2\}$ diabaikan. Pada kasus $\{1,3\}$ simpul 1 dan 3 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{1,4\}$ simpul 1 didominasi oleh simpul 4, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{1,4\}$ diabaikan. Pada kasus $\{1,5\}$ simpul 1 dan 5 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi.

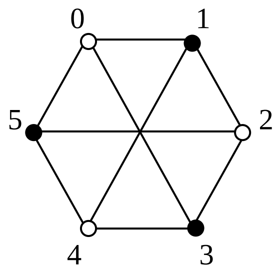
Pada kasus $\{2,3\}$ simpul 2 didominasi oleh simpul 3, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{2,3\}$ diabaikan. Pada kasus $\{2,4\}$ simpul 2 dan 4 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{2,5\}$ simpul 2 didominasi oleh simpul 5, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{2,5\}$ diabaikan.

Pada kasus $\{3,4\}$ simpul 3 didominasi oleh simpul 4, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{3,4\}$ diabaikan. Pada kasus $\{3,5\}$ simpul 3 dan 5 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi.

Pada kasus $\{4,5\}$ simpul 4 didominasi oleh simpul 5, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{4,5\}$ diabaikan.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat diambil kesimpulan bahwa $|D| = 2$ tidak memungkinkan. Apabila $D = \{0,2\}$ maka terdapat simpul 4 yang belum terdominasi. Dari pengamatan tampak bahwa jika $|D| = 2$, dengan mengambil simpul manapun, selalu saja terdapat sedikitnya satu simpul lain yang tidak terdominasi. Dengan demikian diperlukan setidaknya satu simpul lagi untuk menjadi anggota D. Dalam kasus ini diambil simpul 4 itu sendiri. Simpul 4 mendominasi simpul 4, 1, 3, 5.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (6\ ;\ 1,3)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0,2,4\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (6\ ;\ 1,3)\big) = 3$.

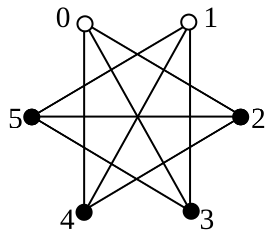


Gambar 4.9 Graf *Circulant* $circ\ (6\ ;\ 1,3)$

(vi) Graf $circ\ (6\ ;\ 2,3)$

Gambar 4.10 menunjukkan graf $circ\ (6\ ;\ 2,3)$. Terlihat bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 2, 3, 4. Simpul 1 mendominasi simpul 1, 3, 4, 5.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (6\ ;\ 2,3)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0,1\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (6\ ;\ 2,3)\big) = 2$.

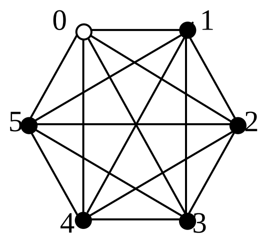


Gambar 4.10 Graf *Circulant* $circ\ (6\ ; 2,3)$

(vii) Graf $circ\ (6\ ;\ 1,2,3)$

Gambar 4.11 menunjukkan graf $circ\ (6\ ;\ 1,2,3)$. Terlihat bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (6\ ;\ 1,2,3)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (6\ ;\ 1,2,3)\big) = 1$.



Gambar 4.11 Graf *Circulant* $circ\ (6\ ; 1,2,3)$

4.1.3 Dominasi Simpul pada *Graf Circulant* $\boldsymbol{circ}\ (\mathbf{7}\ ;\ \boldsymbol{S})$

Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi simpul pada graf *circulant* $circ\ (7\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 7, maka kemungkinan $S = \{1, 2, 3\}$.

(i) Graf $circ\ (7\ ;\ 1)$

Gambar 4.12 menunjukkan graf $circ\ (7\ ;\ 1)$. Terlihat bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0 (dirinya sendiri), 1, 6. Simpul 3 mendominasi simpul 3 (dirinya sendiri), 2, 4.

Akan ditunjukkan bahwa $\gamma\big(circ\ (7\ ;\ 1)\big)$ tidak sama dengan 2, dengan menunjukkan semua kemungkinan $|D| = 2$ bukan merupakan bilangan dominasi dari graf $circ\ (7\ ;\ 1)$.

Jika $V\big(circ\ (7\ ;\ 1)\big) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ maka untuk $|D| = 2$ terdiri atas $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}, \{0, 6\}$, $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}$, $\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$.

Pada kasus $\{0, 1\}$, simpul 0 dan 1 saling mendominasi, maka $\{0, 2\}$ diabaikan. Pada kasus $\{0, 2\}$, simpul 2 dan simpul 0 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{0, 3\}$, simpul 0 dan 3 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{0, 4\}$, simpul 0 dan 4 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{0, 5\}$ simpul 5 dan simpul 0 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{0, 6\}$, simpul 0 dan 6 saling mendominasi maka $\{0, 6\}$ diabaikan.

Pada kasus $\{1, 2\}$ simpul 2 dan 1 saling mendominasi, maka $\{1, 2\}$ diabaikan. Pada kasus $\{1, 3\}$ simpul 3 dan simpul 1 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{1, 4\}$ simpul 4 dan 1 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{1, 5\}$ simpul 5 dan 1 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{1, 6\}$ simpul 6 dan simpul 1 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi.

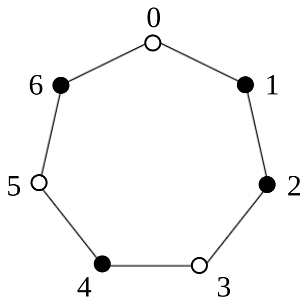
Pada kasus $\{2, 3\}$ simpul 2 didominasi oleh simpul 3, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{2, 3\}$ diabaikan. Pada kasus $\{2, 4\}$ simpul 4 dan simpul 2 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{2, 5\}$ simpul 5 dan simpul 2 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{2, 6\}$ simpul 6 dan simpul 2 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi.

Pada kasus $\{3, 4\}$ simpul 3 dan simpul 4 saling mendominasi, maka $\{3, 4\}$ diabaikan. Pada kasus $\{3, 5\}$ simpul 5 dan simpul 3 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{3, 6\}$ simpul 3 dan 6 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi.

Pada kasus $\{4, 5\}$ simpul 4 dan 5 saling mendominasi, maka $\{4, 5\}$ diabaikan. Pada kasus $\{4, 6\}$ simpul 6 dan simpul 2 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{5, 6\}$ simpul 5 dan 6 saling mendominasi, maka $\{5, 6\}$ diabaikan.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat diambil kesimpulan bahwa $|D| = 2$ tidak memungkinkan. Apabila $D = \{0, 3\}$ maka terdapat simpul 5 yang belum terdominasi. Dari pengamatan tampak bahwa jika $|D| = 2$, dengan mengambil simpul manapun, selalu saja terdapat sedikitnya satu simpul lain yang tidak terdominasi. Dengan demikian diperlukan setidaknya satu simpul lagi untuk menjadi anggota D. Dalam kasus ini diambil simpul 5 itu sendiri. Simpul 5 mendominasi simpul 5 (dirinya sendiri), 4, 6.

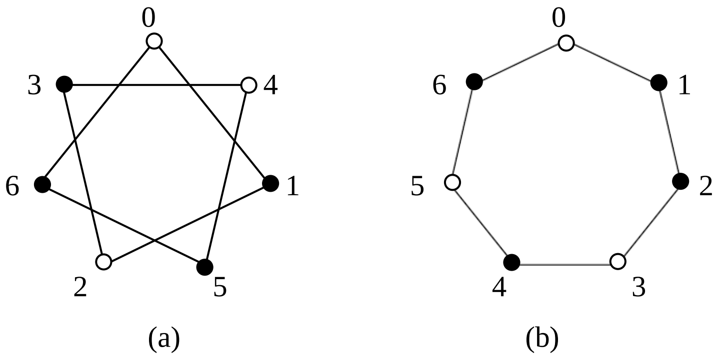
Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (7\ ;\ 1)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0, 3, 5\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (7\ ;\ 1)\big) = 3$.



Gambar 4.12 Graf *Circulant* $circ\ (7\ ;\ 1)$

(ii) Graf $circ\ (7\ ;\ 2)$

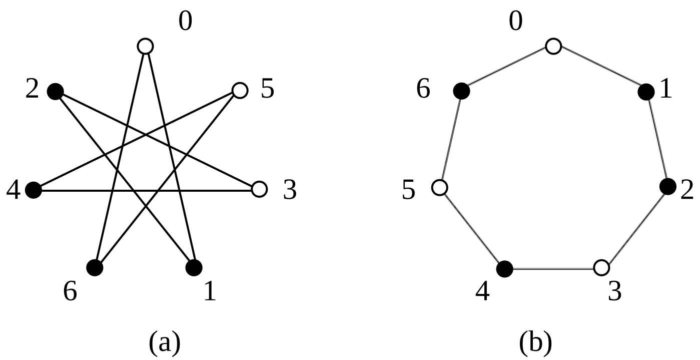
Gambar 4.13 (a) menunjukkan graf $circ\ (7\ ;\ 2)$. Oleh karena graf $circ\ (7\ ;\ 2)$ pada Gambar 4.13 (a) isomorfis dengan graf $circ\ (7\ ;\ 1)$ sebagaimana pada Gambar 4.12, maka $\gamma\big(circ\ (7\ ;\ 2)\big) = \gamma(C_7) = 3$.



Gambar 4.13 (a) Graf *Circulant* $(7\,;\ 2)$; (b) Graf $circ\ (7\,;\ 1)$

(iii) Graf $circ\ (7\,;\ 3)$

Gambar 4.14 (a) menunjukkan graf $circ\ (7\,;\ 3)$. Oleh karena graf $circ\ (7\,;\ 3)$ pada Gambar 4.14 (a) isomorfis dengan graf $circ\ (7\,;\ 1)$ sebagaimana pada Gambar 4.12, maka $\gamma\big(circ\ (7\,;\ 3)\big) = \gamma(C_7) = 3$.



Gambar 4.14 (a) Graf *Circulant* $circ\ (7\,;\ 3)$; (b) Graf $circ\ (7\,;\ 1)$

(iv) Graf $circ\ (7\ ;\ 1, 2)$

Gambar 4.15 menunjukkan graf $circ\ (7\ ;\ 1, 2)$. Terlihat bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 2, 5, 6.

Akan ditunjukkan bahwa $\gamma\big(circ\ (7\ ;\ 1, 2)\big)$ tidak sama dengan 1, dengan menunjukkan semua kemungkinan $|D| = 1$ bukan merupakan bilangan dominasi dari graf $circ\ (7\ ;\ 1, 2)$.

Jika $V\big(circ\ (7\ ;\ 1, 2)\big) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ maka untuk $|D| =$ 1 terdiri atas $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}, \{0, 6\}$, $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}$, $\{3, 4\}, \{3, 5\}$, $\{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$.

Pada kasus $\{0, 1\}$ simpul 1 didominasi oleh simpul 0, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{0, 1\}$ diabaikan. Pada kasus $\{0, 2\}$, simpul 2 didominasi oleh simpul 0, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{0, 2\}$ diabaikan. Pada kasus $\{0, 3\}$, simpul 0 dan 3 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{0, 4\}$, simpul 0 dan 4 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{0, 5\}$ simpul 5 didominasi oleh simpul 0, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{0, 5\}$ diabaikan. Pada kasus $\{0, 6\}$ simpul 6 didominasi oleh simpul 0, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{0, 6\}$ diabaikan.

Pada kasus $\{1, 2\}$ simpul 1 didominasi oleh simpul 2, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{1, 2\}$ diabaikan. Pada kasus $\{1, 3\}$ simpul 3 didominasi oleh simpul 1, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{1, 3\}$ diabaikan. Pada kasus $\{1, 4\}$ simpul 1 dan 4 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{1, 5\}$ simpul 1 dan 5 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{1, 6\}$ simpul 6 didominasi oleh simpul 1, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{1, 6\}$ diabaikan.

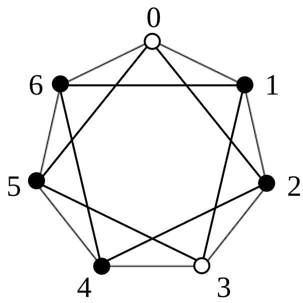
Pada kasus $\{2,3\}$ simpul 2 didominasi oleh simpul 3, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{2,3\}$ diabaikan. Pada kasus $\{2,4\}$ simpul 4 didominasi oleh simpul 2, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{2,4\}$ diabaikan. Pada kasus $\{2,5\}$ simpul 2 dan 5 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi. Pada kasus $\{2,6\}$ simpul 2 55dan 6 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi.

Pada kasus $\{3,4\}$ simpul 4 didominasi oleh simpul 3, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{3,4\}$ diabaikan. Pada kasus $\{3,5\}$ simpul 5 didominasi oleh simpul 3, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{3,5\}$ diabaikan. Pada kasus $\{3,6\}$ simpul 3 dan 6 tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi simpul pendominasi.

Pada kasus $\{4,5\}$ simpul 5 didominasi oleh simpul 4, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{4,5\}$ diabaikan. Pada kasus $\{4,6\}$ simpul 6 didominasi oleh simpul 4, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{4,6\}$ diabaikan. Pada kasus $\{5,6\}$ simpul 6 didominasi oleh simpul 5, dan begitu pula sebaliknya, maka $\{5,6\}$ diabaikan.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat diambil kesimpulan bahwa $|D| = 1$ tidak memungkinkan. Apabila $D = \{0\}$ maka terdapat simpul 3 dan 4 yang belum terdominasi. Dari pengamatan tampak bahwa jika $|D| = 1$, dengan mengambil simpul manapun, selalu saja terdapat sedikitnya satu simpul lain yang tidak terdominasi. Dengan demikian diperlukan setidaknya satu simpul lagi untuk menjadi anggota D. Dalam kasus ini diambil simpul 3 sebagai simpul pendominasi. Simpul 3 mendominasi simpul 3, 1, 2, 4, 5.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (7\ ;\ 1,2)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0,3\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (7\ ;\ 1,2)\big) = 2$.

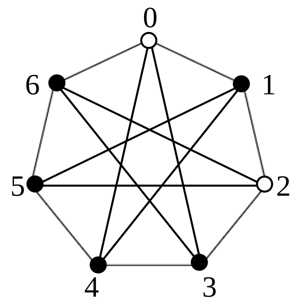


Gambar 4.15 Graf *Circulant* $circ\ (7\ ;\ 1,2)$

(v) Graf $circ\ (7\ ;\ 1,3)$

Pada pada Gambar 4.16 dapat diketahui bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 3, 4, 6. Simpul 2 mendominasi simpul 2 (dirinya sendiri), 1, 3, 5, 6.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (7\ ;\ 1,3)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0,3\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (7\ ;\ 1,3)\big) = 2$.

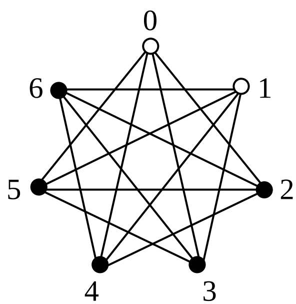


Gambar 4.16 Graf *Circulant* $circ\ (7\ ;\ 1,3)$

(vi) Graf $circ\ (7\ ;\ 2,3)$

Pada pada Gambar 4.17 dapat diketahui bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 2, 3, 4, 5. Simpul 1 mendominasi simpul 1, 3, 4, 5, 6.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (7\ ;\ 2,3)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0,1\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (7\ ;\ 2,3)\big) = 2$.



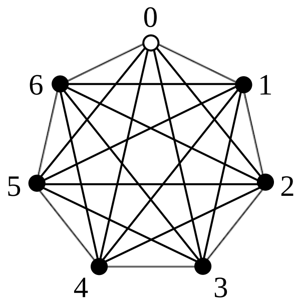
Gambar 4.17 Graf *Circulant* $circ\ (7\ ;\ 2,3)$

Dari penelitian yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan bahwa $\gamma\big(circ\ (7\ ;\ s_1)\big) = 3$ dan $\gamma\big(circ\ (7\ ;\ s_1, s_2)\big) = 2$.

(vii) Graf $circ\ (7\ ;\ 1,2,3)$

Gambar 4.18 menunjukkan graf $circ\ (7\ ;\ 1,2,3)$. Terlihat bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (7\ ;\ 1,2,3)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (7\ ;\ 1,2,3)\big) = 1$.

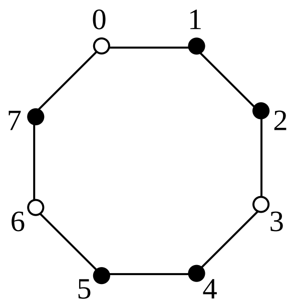


Gambar 4.18 Graf *Circulant* $circ\ (7\ ;\ 1, 2, 3)$

4.1.4 Dominasi Simpul pada *Graf Circulant* $\boldsymbol{circ\ (8\ ;\ S)}$

Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi simpul pada graf *circulant* $circ\ (8\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 8, maka kemungkinan $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

(i) Graf $circ\ (8\ ;\ 1)$



Gambar 4.19 Graf *Circulant* $circ\ (8\ ;\ 1)$

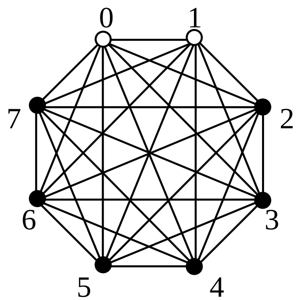
Pada Gambar 4.19 dapat diketahui bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 7. Simpul 3 mendominasi simpul 3, 2, 4. Simpul 6 mendominasi simpul 6, 5, 7.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (8\ ;\ 1)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0, 3, 6\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (8\ ;\ 1)\big) = 3$.

(ii) Graf $circ\ (8\ ;\ 1, 2, 3, 4)$

Pada Gambar 4.20 dapat diketahui bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (8\ ;\ 1, 2, 3, 4)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (8\ ;\ 1, 2, 3, 4)\big) = 1$.



Gambar 4.20 Graf *Circulant* $circ\ (8\ ;\ 1, 2, 3, 4)$

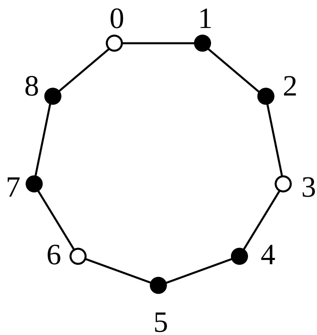
4.1.5 Dominasi Simpul pada *Graf Circulant* $\boldsymbol{circ\ (9\ ;\ S)}$

Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi simpul pada graf *circulant* $circ\ (9\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 9, maka kemungkinan $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

(i) Graf $circ\ (9\ ;\ 1)$

Pada Gambar 4.21 dapat diketahui bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 8. Simpul 3 mendominasi simpul 3, 2, 4. Simpul 6 mendominasi simpul 6, 5, 7.

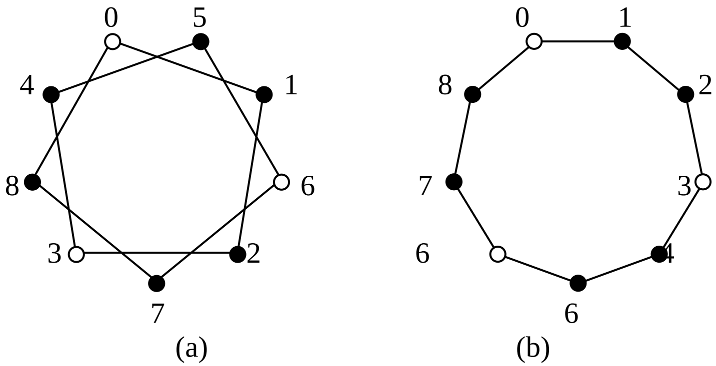
Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (9\ ;\ 1)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0, 3, 6\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (9\ ;\ 1)\big) = 3$.



Gambar 4.21 Graf *Circulant* $circ\ (9\ ;\ 1)$

(ii) Graf $circ\ (9\ ;\ 2)$

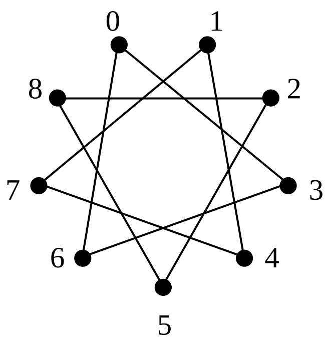
Gambar 4.22 (a) menunjukkan graf $circ\ (9\ ;\ 2)$. Oleh karena graf $circ\ (9\ ;\ 2)$ pada Gambar 4.22 (a) isomorfis dengan graf $circ\ (9\ ;\ 1)$ sebagaimana pada Gambar 4.21, maka $\gamma\big(circ\ (9\ ;\ 2)\big) = \gamma(C_9) = 3$.



Gambar 4.22 Graf *Circulant* $circ\ (9\ ;\ 2)$; (b) Graf $circ\ (9\ ;\ 1)$

(iii) Graf $circ\ (9\ ;\ 3)$

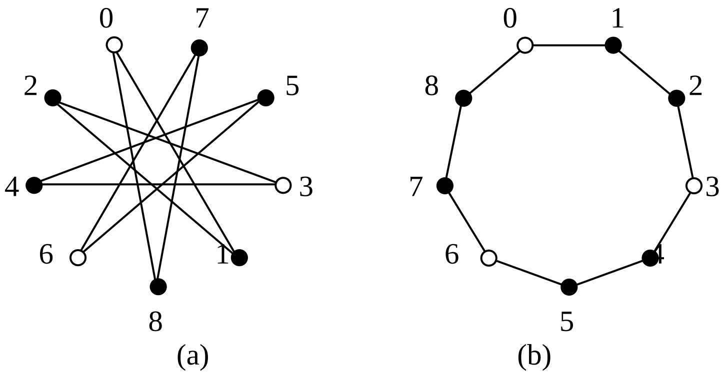
Gambar 4.23 menunjukkan bahwa graf $circ\ (9\ ;\ 3)$ adalah graf tidak terhubung. Dominasi simpul hanya didefinisikan pada graf terhubung. Oleh karena graf $circ\ (9\ ;\ 3)$ adalah graf tidak terhubung, maka $\gamma\big(circ\ (9\ ;\ 3)\big)$ tidak didefinisikan.



Gambar 4.23 Graf *Circulant* $circ\ (9\ ;\ 3)$

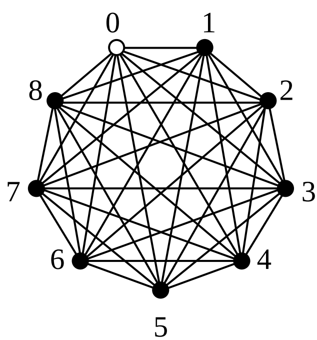
(iv) Graf $circ$ $(9\,;\ 4)$

Pada Gambar 4.24 (a) menunjukkan graf $circ$ $(9\,;\ 4)$. Oleh karena graf $circ$ $(9\,;\ 4)$ pada Gambar 4.24 (a) isomorfis dengan graf $circ$ $(9\,;\ 1)$ sebagaimana pada Gambar 4.21, maka $\gamma\big(circ\ (9\,;\ 4)\big) = \gamma(C_9) = 3$.



Gambar 4.24 Graf *Circulant* $circ$ $(9\,;\ 4)$; (b) Graf $circ$ $(9\,;\ 1)$

(v) Graf $circ$ $(9\,;\ 1,2,3,4)$



Gambar 4.25 Graf *Circulant* $circ$ $(9\,;\ 1,2,3,4)$

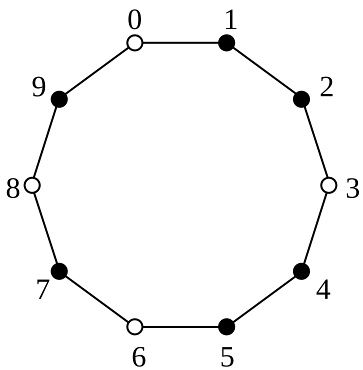
Pada Gambar 4.25 dapat diketahui bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (9\ ;\ 1, 2, 3, 4)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (9\ ;\ 1, 2, 3, 4)\big) = 1$.

4.1.6 Dominasi Simpul pada *Graf Circulant* $\boldsymbol{circ\ (10\ ;\ S)}$

Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi simpul pada graf *circulant* $circ\ (10\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 10, maka kemungkinan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(i) Graf $circ\ (10\ ;\ 1)$



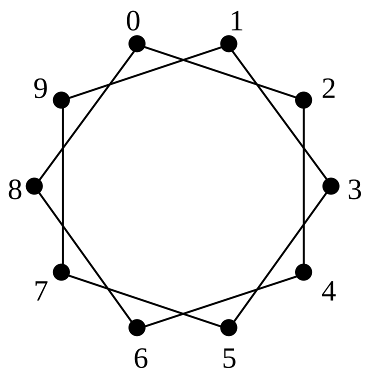
Gambar 4.26 Graf *Circulant* $circ\ (10\ ;\ 1)$

Pada Gambar 4.26 dapat diketahui bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 9. Simpul 3 mendominasi simpul 3, 2, 4. Simpul 6 mendominasi simpul 6, 5, 7. Simpul 8 mendominasi simpul 8, 7, 9.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (10\ ;\ 1)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0, 3, 6, 8\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (10\ ;\ 1)\big) = 4$.

(ii) Graf $circ\ (10\ ;\ 2)$

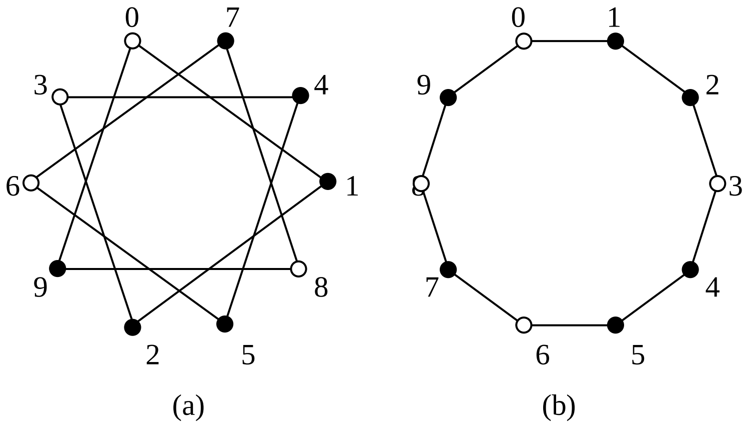
Gambar 4.27 menunjukkan bahwa graf $circ\ (10\ ;\ 2)$ adalah graf tidak terhubung. Dominasi simpul hanya didefinisikan pada graf terhubung. Oleh karena graf $circ\ (10\ ;\ 2)$ adalah graf tidak terhubung, maka $\gamma\big(circ\ (10\ ;\ 2)\big)$ tidak didefinisikan.



Gambar 4.27 Graf *Circulant* $circ\ (10\ ;\ 2)$

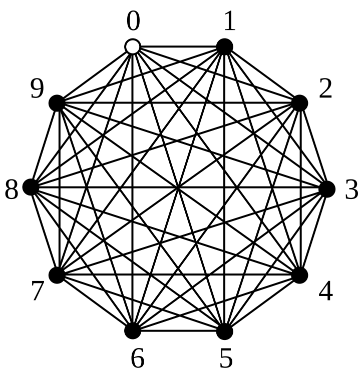
(iii) Graf $circ\ (10\ ;\ 3)$

Gambar 4.28 (a) menunjukkan graf $circ\ (10\ ;\ 3)$. Oleh karena graf $circ\ (10\ ;\ 3)$ pada Gambar 4.28 (a) isomorfis dengan graf $circ\ (10\ ;\ 1)$ sebagaimana pada Gambar 4.27, maka $\gamma\big(circ\ (10\ ;\ 3)\big) = \gamma(C_{10}) = 4$.



Gambar 4.28 Graf *Circulant* $circ\ (10\ ;\ 3)$; (b) Graf $circ\ (10\ ;\ 1)$

(iv) Graf $circ\ (10\ ;\ 1,2,3,4,5)$



Gambar 4.29 Graf *Circulant* $circ\ (10\ ;\ 1,2,3,4,5)$

Pada Gambar 4.29 dapat diketahui bahwa simpul 0 mendominasi simpul 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Dengan demikian tampak bahwa semua simpul di graf $circ\ (10\ ;\ 1, 2, 3, 4)$ didominasi oleh simpul di $D = \{0\}$, yang ditandai dengan bulatan berwarna putih, dan memiliki bilangan dominasi $\gamma\big(circ\ (10\ ;\ 1, 2, 3, 4, 5)\big) = 1$.

4.1.7 Dominasi Simpul pada Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ\ (n\ ;\ S)}$, $\boldsymbol{n = 5, 6, 7, 8, 9, 10}$

Dari observasi yang telah dilakukan, diperoleh hasil dominasi simpul pada graf circulant $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ seperti pada tabel berikut:

Tabel 4.1 Dominasi Simpul pada Graf *Circulant* $circ\ (n\ ;\ S)$, $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$

Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ\ (n\ ;\ S)}$		$\boldsymbol{\gamma\big(circ\ (n\ ;\ S)\big)}$
$5\ ;\ S$	$5\ ;\ 1$	2
	$5\ ;\ 2$	2
	$5\ ;\ 1, 2$	1
$6\ ;\ S$	$6\ ;\ 1$	2
	$6\ ;\ 2$	-
	$6\ ;\ 3$	-
	$6\ ;\ 1, 2$	2
	$6\ ;\ 1, 3$	3
	$6\ ;\ 2, 3$	2
	$6\ ;\ 1, 2, 3$	1
$7\ ;\ S$	$7\ ;\ 1$	3
	$7\ ;\ 2$	3
	$7\ ;\ 3$	3
	$7\ ;\ 1, 2$	2
	$7\ ;\ 1, 3$	2

Tabel 4.1 Dominasi Simpul pada Graf *Circulant* $circ\ (n\ ;\ S)$, $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (lanjutan)

	$7\ ;\ 2, 3$	2
	$7\ ;\ 1, 2, 3$	1
$8\ ;\ S$	$8\ ;\ 1$	3
	$8\ ;\ 1, 2, 3, 4$	1
$9\ ;\ S$	$9\ ;\ 1$	3
	$9\ ;\ 2$	3
	$9\ ;\ 3$	-
	$9\ ;\ 4$	3
	$9\ ;\ 1, 2, 3, 4$	1
$10\ ;\ S$	$10\ ;\ 1$	4
	$10\ ;\ 1$	4
	$10\ ;\ 2$	-
	$10\ ;\ 3$	4
	$10\ ;\ 1, 2, 3, 4, 5$	1

Tabel 4.1 di atas menunjukkan dominasi simpul pada graf *circulant* $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Berikut diberikan suatu teorema mengenai bilangan dominasi graf circulant $circ\ (n\ ;\ S)$ order n.

Teorema 2

Jika terdapat suatu graf circulant $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan order n, maka bilangan dominasinya adalah

$$\gamma\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{\mathrm{n}-1}{2} \right\rfloor & ,\text{untuk } S = \{1\} \\ 1 & ,\text{untuk } S = \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\} \end{cases}.$$

Bukti:

(i) Graf circulant $circ\ (n\ ;\ \{1\})$ memiliki $p = |V| = n$, $\Delta\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = 2$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\left\lceil \frac{p}{1+\Delta(circ(n\ ;S))} \right\rceil \leq \gamma\big(circ(n\ ; S)\big) \leq p - \Delta\big(circ(n\ ; S)\big)$.

Disubstitusikan nilai p dan $\Delta\big(circ\ (n\ ;\ S)\big)$ sehingga diperoleh $\left\lceil \frac{n}{1+2} \right\rceil \leq \gamma\big(circ(n\ ;\ S)\big) \leq n - 2$.

Terbukti bahwa $\gamma\big(circ(n\ ;\ \{1\})\big) = \left\lfloor \frac{\mathrm{n}-1}{2} \right\rfloor$. ■

(ii) Graf circulant $circ\ \left(n\ ;\ \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}\right)$ memiliki $p = |V| = n$, $\Delta\left(circ\ \left(n\ ;\ \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}\right)\right) = n - 1$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa

$$\left\lceil \frac{p}{1+\Delta\left(circ\left(n\ ;\left\{1,2,\dots,\frac{(n+1)}{2}\right\}\right)\right)} \right\rceil \leq \gamma\left(circ\left(n\ ;\left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}\right)\right) \leq p - \Delta\left(circ\left(n\ ;\ \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}\right)\right).$$

Disubstitusikan nilai p dan $\Delta\left(circ\ \left(n\ ;\ \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}\right)\right)$ sehingga diperoleh $\left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil \leq \gamma\left(circ\left(n\ ;\ \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}\right)\right) \leq 1$.

Terbukti bahwa $\gamma\left(circ\left(n\ ;\ \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\}\right)\right) = 1$. ■

4.2 Dominasi Sisi (*Edge Domination*) pada Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ}\ (\boldsymbol{n}\ ;\ \boldsymbol{S})$

Pada sub bab ini, dibahas dominasi sisi pada graf *circulant* $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan $= 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Pada tugas akhir ini, teorema yang menjadi acuan adalah sebagai berikut,

Teorema 3 [8]

Untuk sebarang graf *G*,

$$\gamma'(G) \leq q - \Delta'(G)$$

Keterangan:

q = Banyaknya sisi
$\Delta'(G)$ = Derajat maksimum untuk sisi di *G*
$\gamma'(G)$ = Bilangan dominasi sisi

4.2.1 Dominasi Sisi pada Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ}\ (\mathbf{5}\ ;\ \boldsymbol{S})$

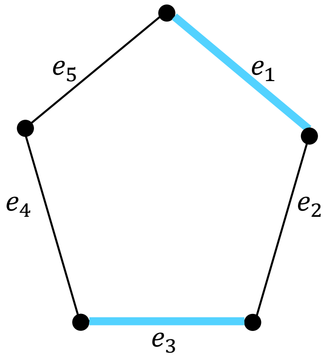
Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi sisi pada graf *circulant* $circ\ (5\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 5, maka kemungkinan $S = \{1, 2\}$.

(i) Graf $circ\ (5\ ;\ 1)$

Gambar 4.30 menunjukkan graf $circ\ (5\ ;\ 1)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi e_1 (dirinya sendiri), e_2, e_5.

Apabila $X = \{e_1\}$ maka terdapat sisi e_3 dan e_4 yang belum terdominasi. Dari pengamatan tampak bahwa jika $|X| = 1$, dengan mengambil sisi manapun, selalu saja terdapat sedikitnya satu sisi lain yang tidak terdominasi. Dengan demikian diperlukan setidaknya satu sisi lagi untuk menjadi anggota X. Dalam hal ini diambil sisi e_3. Dimana sisi e_3 mendominasi sisi e_3 (dirinya sendiri), e_2, e_4.

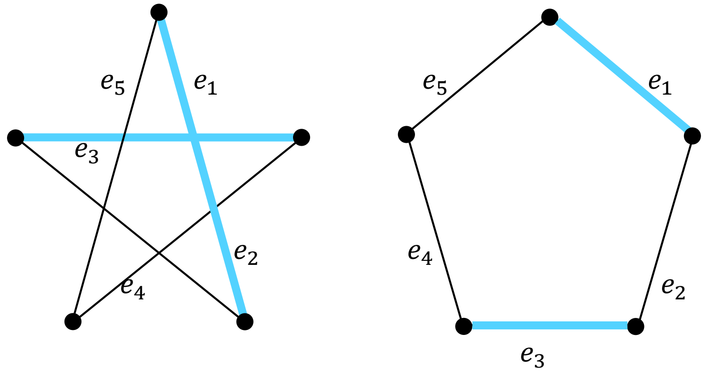
Sehingga semua sisi di graf $circ\ (5\ ;\ 1)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (5\ ;\ 1)\big) = 2$.



Gambar 4.30 Graf *Circulant* $circ\ (5\ ;\ 1)$

(ii) Graf $circ\ (5\ ;\ 2)$

Gambar 4.31 (a) menunjukkan graf $circ\ (5\ ;\ 2)$. Oleh karena graf $circ\ (5\ ;\ 2)$ isomorfis dengan graf $circ\ (5\ ;\ 1)$ sebagaimana pada Gambar 4.64, maka $\gamma'\big(circ\ (5\ ;\ 2)\big) = 2$.



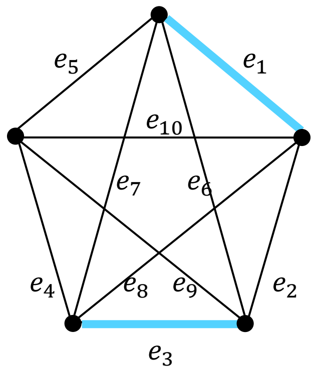
Gambar 4.31 (a) Graf *Circulant* $(5\ ;\ 2)$; (b) Graf $circ\ (5\ ;\ 1)$

(iii) Graf $circ\ (5\ ;\ 1, 2)$

Gambar 4.32 menunjukkan graf $circ\ (5\ ;\ 1, 2)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi $e_1, e_2, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}$.

Apabila $X = \{e_1\}$ maka terdapat sisi e_3 dan e_4 yang belum terdominasi. Dari pengamatan tampak bahwa jika $|X| = 1$, dengan mengambil sisi manapun, selalu saja terdapat sedikitnya satu sisi lain yang tidak terdominasi. Dengan demikian diperlukan setidaknya satu sisi lagi untuk menjadi anggota X. Dalam hal ini diambil sisi e_3. Dimana sisi e_3 mendominasi sisi $e_3, e_2, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9$.

Sehingga semua sisi di graf $circ\ (5\ ;\ 1, 2)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (5\ ;\ 1, 2)\big) = 2$.



Gambar 4.32 Graf *Circulant* $circ\ (5\ ;\ 1, 2)$

4.2.2 Dominasi Sisi pada Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ\ (6\ ;\ S)}$

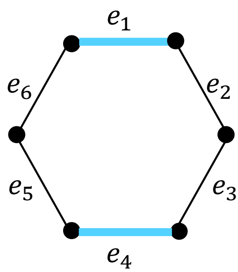
Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi sisi pada graf *circulant* $circ\ (6\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 6, maka kemungkinan $S = \{1, 2, 3\}$.

(i) Graf $circ\ (6\ ;\ 1)$

Gambar 4.33 menunjukkan graf $circ\ (6\ ;\ 1)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi e_1, e_2, e_6.

Apabila $X = \{e_1\}$ maka terdapat 3 sisi yang belum terdominasi. Dari pengamatan tampak bahwa jika $|X| = 1$, dengan mengambil sisi manapun, selalu saja terdapat sedikitnya satu sisi lain yang tidak terdominasi. Dengan demikian diperlukan setidaknya satu sisi lagi untuk menjadi anggota X. Dalam hal ini diambil sisi e_4. Dimana sisi e_4 mendominasi sisi e_4, e_3, e_5.

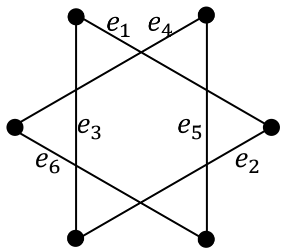
Sehingga semua sisi di graf $circ\ (6\ ;\ 1)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_4\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'(circ\ (6\ ;\ 1)) = 2$.



Gambar 4.33 Graf *Circulant* $circ\ (6\ ;\ 1)$

(ii) Graf $circ\ (6\ ;\ 2)$

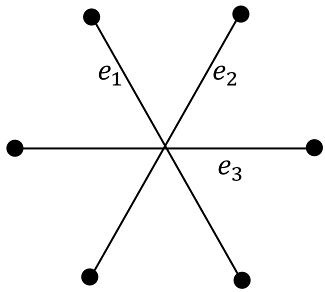
Gambar 4.34 menunjukkan bahwa graf $circ\ (6\ ;\ 2)$ adalah graf tidak terhubung. Dominasi sisi hanya dapat didefinisikan pada graf terhubung. Oleh karena graf $circ\ (6\ ;\ 2)$ adalah graf tidak terhubung, maka $\gamma'\big(circ\ (6\ ;\ 2)\big)$ tidak didefinisikan.



Gambar 4.34 Graf *Circulant* $circ\ (6\ ;2)$

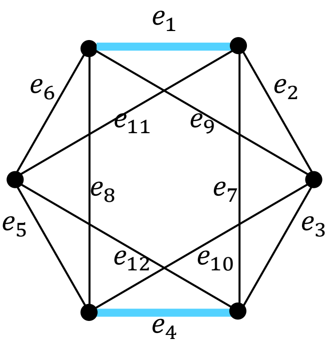
(iii) Graf $circ\ (6\ ;\ 3)$

Gambar 4.35 menunjukkan bahwa graf $circ\ (6\ ;\ 3)$ adalah graf tidak terhubung. Dominasi sisi hanya didefinisikan pada graf terhubung. Oleh karena graf $circ\ (6\ ;\ 3)$ adalah graf tidak terhubung, maka $\gamma'\big(circ\ (6\ ;\ 3)\big)$ tidak didefinisikan.



Gambar 4.35 Graf *Circulant* $circ\ (6\,;3)$

(iv) Graf *circ* $(6\,;\ 1,2)$



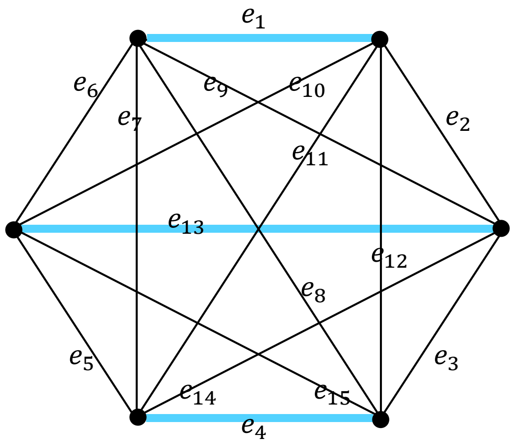
Gambar 4.36 Graf *Circulant* $circ\ (6\,;\ 1,2)$

Gambar 4.36 menunjukkan graf $circ\ (6\,;\ 1,2)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi $e_1, e_2, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{11}$.

Apabila $X = \{e_1\}$ maka terdapat sisi $e_3, e_4,$dan e_5 yang belum terdominasi. Dari pengamatan tampak bahwa jika $|X| = 1$, dengan mengambil sisi manapun, selalu saja terdapat sedikitnya satu sisi lain yang tidak terdominasi. Dengan demikian diperlukan setidaknya satu sisi lagi untuk menjadi anggota X. Dalam hal ini diambil sisi e_4. Dimana sisi e_4 mendominasi sisi $e_4, e_3, e_5, e_7, e_8, e_{10}, e_{12}$.

Sehingga tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (6\ ;\ 1,2)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_4\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (6\ ;\ 1,2)\big) = 2$.

(v) Graf $circ\ (6\ ;\ 1,2,3)$



Gambar 4.37 Graf *Circulant* $circ\ (6\ ;1,2,3)$

Gambar 4.37 menunjukkan graf $circ\ (6\ ;\ 1,2,3)$.

Tanpa mengurangi keumuman, ambil e_1 sebagai elemen X, atau dengan kata lain $X = \{e_1\}$. Dari hasil amatan, tampak bahwa e_1 mendominasi 9 sisi. 6 sisi yang tersisa selalu terdapat sedikitnya dua sisi yang berjarak tiga. Dengan demikian diperlukan sedikitnya dua sisi lagi yang menjadi elemen X. Jadi $\gamma'\big(circ\ (6\ ;\ 1,2,3)\big) \geq 3$.

Dapat diambil kesimpulan bahwa sisi e_1 mendominasi sisi $e_1, e_2, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}$. Sisi e_4 mendominasi sisi $e_4, e_3, e_5, e_7, e_8, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{15}$. Sisi e_{13} mendominasi sisi $e_{13}, e_2, e_3, e_5, e_6, e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}$.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (6\ ;\ 1,2,3)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_4, e_{15}\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (6\ ;\ 1,2,3)\big) = 3$.

4.2.3 Dominasi Sisi pada Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ}\ (\mathbf{7}\ ;\ \boldsymbol{S})$

Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi sisi pada graf *circulant* $circ\ (7\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 7, maka kemungkinan $S = \{1,2,3\}$.

(i) Graf $circ\ (7\ ;\ 1)$

Gambar 4.38 menunjukkan graf $circ\ (7\ ;\ 1)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi e_1, e_2, e_7. Sisi e_3 mendominasi sisi e_3, e_2, e_4.

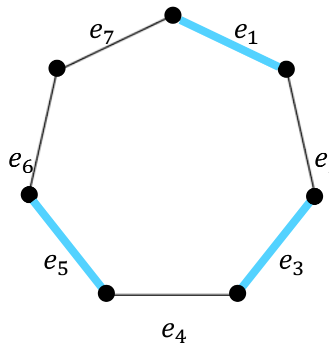
Akan ditunjukkan bahwa $\gamma'\big(circ\ (7\ ;\ 1)\big)$ tidak sama dengan 2, dengan menunjukkan semua kemungkinan $|X| = 2$ bukan merupakan bilangan dominasi dari graf $circ\ (6\ ;\ 1,3)$.

Jika $E\big(circ\ (7\ ;\ 1)\big) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ maka untuk $|X| = 2$ terdiri atas $\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\}$, $\{e_1, e_6\}, \{e_1, e_7\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_2, e_5\}, \{e_2, e_6\}, \{e_2, e_7\}, \{e_3, e_4\}$, $\{e_3, e_5\}, \{e_3, e_6\}, \{e_3, e_7\}, \{e_4, e_5\}, \{e_4, e_6\}, \{e_4, e_7\}, \{e_5, e_6\}, \{e_5, e_7\}$, $\{e_6, e_7\}$. Pada kasus $\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_7\}, \{e_2, e_3\}, \{e_3, e_4\}, \{e_4, e_5\}$, $\{e_5, e_6\}, \{e_6, e_7\}$masing-masing sisi saling mendominasi, maka diabaikan.

Sementara pada kasus kombinasi sisi yang lainnya, sisi-sisi tersebut tidak saling mendominasi, sehingga memungkinkan untuk menjadi sisi pendominasi.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat diambil kesimpulan bahwa $|X| = 2$ tidak memungkinkan. Apabila $X = \{e_1, e_3\}$ maka terdapat sisi e_5 dan e_6 yang belum terdominasi. Dari pengamatan tampak bahwa jika $|X| = 2$, dengan mengambil sisi manapun, selalu saja terdapat sedikitnya satu sisi lain yang tidak terdominasi. Dengan demikian diperlukan setidaknya satu sisi lagi untuk menjadi anggota X. Dalam kasus ini diambil sisi e_5, dimana sisi e_5 mendominasi sisi e_5, e_4, e_6.

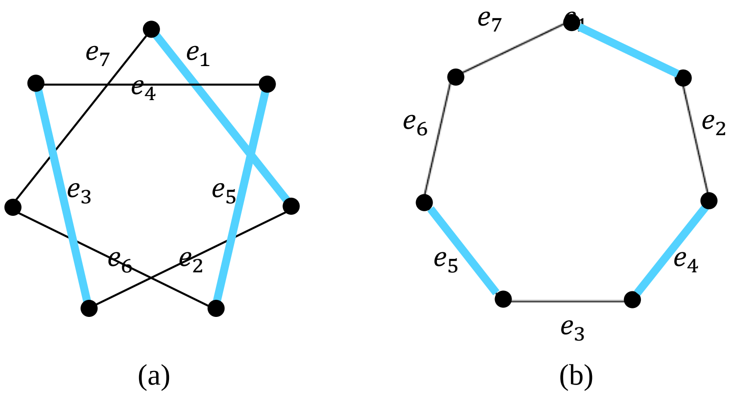
Sehingga tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (7\ ;\ 1)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3, e_5\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (7\ ;\ 1)\big) = 3$.



Gambar 4.38 Graf *Circulant* $circ\ (7\ ;\ 1)$

(ii) Graf $circ\ (7\ ;\ 2)$

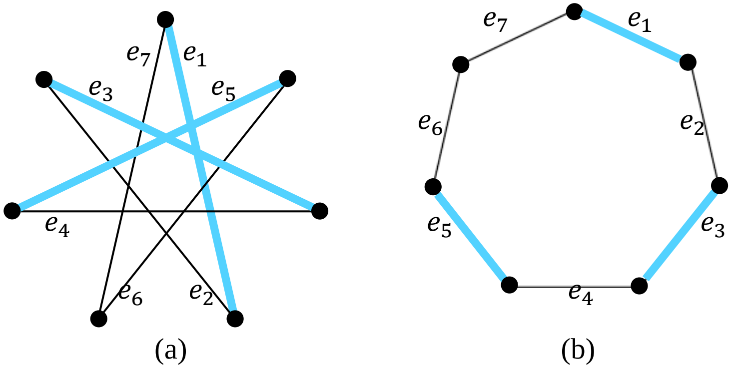
Gambar 4.39 (a) menunjukkan graf $circ\ (7\ ;\ 2)$. Oleh karena graf $circ\ (7\ ;\ 2)$ isomorfis dengan graf $circ\ (7\ ;\ 1)$ sebagaimana pada Gambar 4.38, maka $\gamma'\big(circ\ (7\ ;\ 2)\big) = 3$.



Gambar 4.39 (a) Graf *Circulant* $(7\ ;\ 2)$; (b) Graf $circ\ (7\ ;\ 1)$

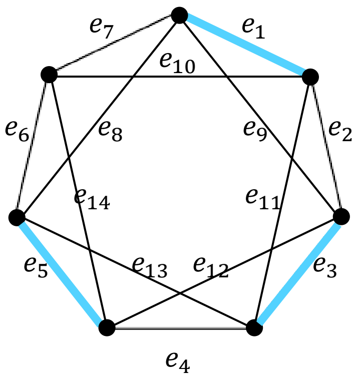
(iii) Graf $circ\ (7\ ;\ 3)$

Gambar 4.40 (a) menunjukkan graf $circ\ (7\ ;\ 3)$. Oleh karena graf $circ\ (7\ ;\ 2)$ isomorfis dengan graf $circ\ (7\ ;\ 1)$ sebagaimana pada Gambar 4.38, maka $\gamma'\big(circ\ (7\ ;\ 2)\big) = 3$.



Gambar 4.40 (a) Graf *Circulant* $circ\ (7\ ;\ 3)$; (b) Graf $circ\ (7\ ;\ 1)$

(iv) Graf $circ\ (7\ ;\ 1,2)$



Gambar 4.41 Graf *Circulant* $circ\ (7\ ;\ 1,2)$

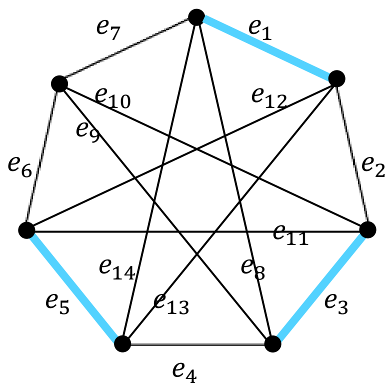
Gambar 4.41 menunjukkan graf $circ\ (7\ ;\ 1,2)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi $e_1, e_2, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}$. Sisi e_3 mendominasi sisi $e_3, e_2, e_4, e_9, e_{11}, e_{12}, e_{13}$. Sisi e_5 mendominasi sisi $e_5, e_4, e_6, e_{98}, e_{12}, e_{13}, e_{14}$.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (7\ ;\ 1,2)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3, e_5\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'(circ\ (7\ ;\ 1,2)) = 3$.

(v) Graf $circ\ (7\ ;\ 1,3)$

Gambar 4.42 menunjukkan graf $circ\ (7\ ;\ 1,3)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi $e_1, e_2, e_7, e_8, e_{11}, e_{12}, e_{14}$. Sisi e_3 mendominasi sisi $e_3, e_2, e_4, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}$. Sisi e_5 mendominasi sisi $e_5, e_4, e_6,$ $e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}$.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (7\ ;\ 1,3)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_4, e_5\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'(circ\ (7\ ;\ 1,3)) = 3$.

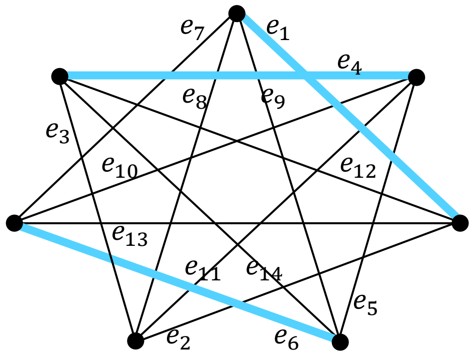


Gambar 4.42 Graf *Circulant* $circ\ (7\ ;\ 1,3)$

(vi) Graf $circ\ (7\ ;\ 2,3)$

Gambar 4.43 menunjukkan graf $circ\ (7\ ;\ 2,3)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi $e_1, e_2, e_7, e_8, e_9, e_{12}, e_{13}$. Sisi e_4 mendominasi sisi $e_4, e_3, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}$. Sisi e_6 mendominasi sisi $e_5, e_6, e_7,$ $e_9, e_{10}, e_{13}, e_{14}$.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (7\ ;\ 2, 3)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_4, e_6\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (7\ ;\ 2, 3)\big) = 3$.



Gambar 4.43 Graf *Circulant* $circ\ (7\ ;\ 2, 3)$

Dari penelitian yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan bahwa $\gamma'\big(circ\ (7\ ;\ s_1)\big) = 3$ dan $\gamma'\big(circ\ (7\ ;\ s_1, s_2)\big) = 3$.

(vii) Graf $circ\ (7\ ; 1, 2, 3)$

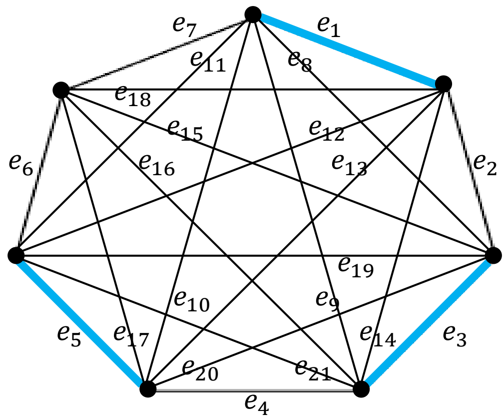
Gambar 4.44 menunjukkan graf $circ\ (7\ ; 1, 2, 3)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi $e_1, e_2, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{18}$ (11 sisi).

Di antara sepuluh sisi yang tersisa (yang belum terdominasi) terdapat sedikitnya dua sisi yang berjarak tiga.

Dengan demikian diperlukan sedikitnya dua sisi yang menjadi elemen X. Jadi $\gamma'\big(circ\ (7\ ; 1,2,3)\big) \geq 3$.

Maka dapat diambil kesimpulan bahwa sisi e_3 mendominasi sisi $e_3, e_2, e_4, e_8, e_9, e_{11}, e_{15}, e_{16}, e_{19}, e_{20}, e_{21}$. Sisi e_5 mendominasi sisi $e_5, e_4, e_6, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{17}, e_{19}$, e_{20}, e_{21}.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (7\ ; 1,2,3)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3, e_5\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (7\ ; 1,2,3)\big) = 3$.



Gambar 4.44 Graf *Circulant* $circ\ (7\ ; 1,2,3)$

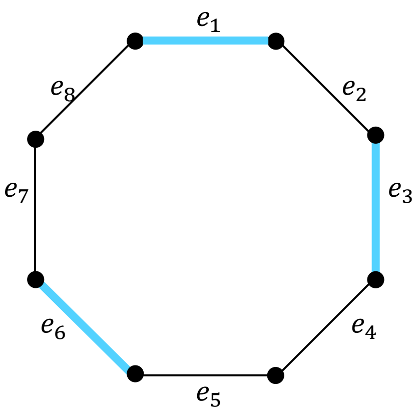
4.2.4 Dominasi Sisi pada Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ}\ (\mathbf{8}\ ;\ \boldsymbol{S})$

Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi sisi pada graf *circulant* $circ\ (8\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 8, maka kemungkinan $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

(i) Graf $circ\ (8\,;\ 1)$

Gambar 4.45 menunjukkan graf $circ\ (8\,;\ 1)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi e_1, e_2, e_8. Sisi e_3 mendominasi sisi e_3, e_2, e_4. Sisi e_6 mendominasi sisi e_6, e_5, e_7.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (8\,;\ 1)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3, e_6\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (8\,;\ 1)\big) = 3$.



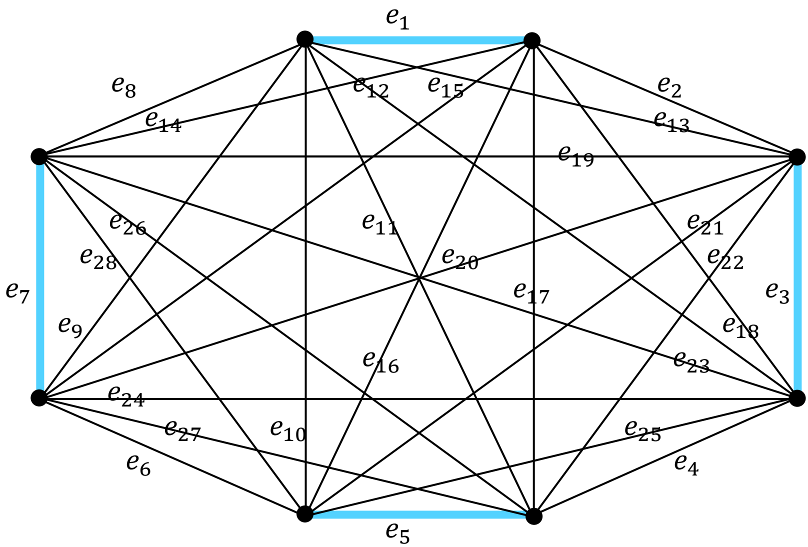
Gambar 4.45 Graf *Circulant* $circ\ (8\,;\ 1)$

(iii) Graf $circ\ (8\,;\ 1, 2, 3, 4)$

Gambar 4.46 menunjukkan graf $circ\ (8\,;\ 1, 2, 3, 4)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi $e_1, e_2, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}$. Sisi e_3 mendominasi sisi $e_3, e_2, e_4, e_{12}, e_{13}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25}$. Sisi e_5 mendominasi sisi $e_5, e_4, e_6, e_{10}, e_{11}, e_{16}, e_{17}, e_{21}, e_{22}, e_{25}, e_{26}, e_{27}, e_{28}$. Sisi e_7 mendomi - nasi sisi $e_7, e_6, e_8, e_9, e_{14}, e_{15}, e_{19}, e_{20}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{27},$

e_{28}.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (8\ ;\ 1,2,3,4)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3, e_5, e_7\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (8\ ;\ 1,2,3,4)\big) = 4$.



Gambar 4.46 Graf *Circulant* $circ\ (8\ ;\ 1,2,3,4)$

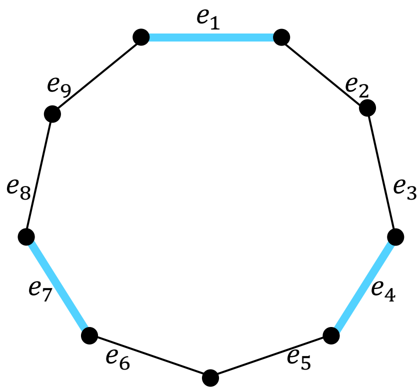
4.2.5 Dominasi Sisi pada Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ\ (9\ ;\ S)}$

Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi sisi pada graf *circulant* $circ\ (9\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 9, maka kemungkinan $S = \{1,2,3,4\}$.

(i) Graf $circ\ (9\ ;\ 1)$

Gambar 4.47 menunjukkan graf $circ\ (9\ ;\ 1)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi e_1, e_2, e_9 . Sisi e_4 mendominasi sisi e_4, e_3, e_5. Sisi e_7 mendominasi sisi e_7, e_6, e_8.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (9\ ;\ 1)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_4, e_7\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (9\ ;\ 1)\big) = 3$.

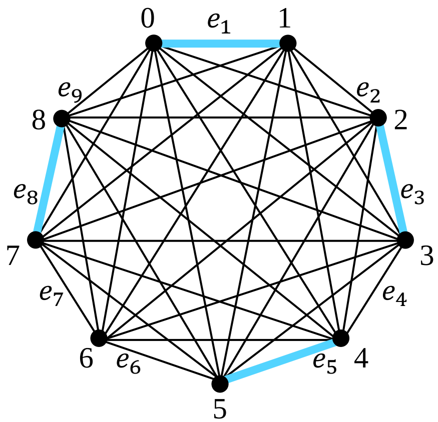


Gambar 4.47 Graf *Circulant* $circ\ (9\ ;\ 1)$

(ii) Graf $circ\ (9\ ;\ 1, 2, 3, 4)$

Gambar 4.48 menunjukkan graf $circ\ (9\ ;\ 1, 2, 3, 4)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi $e_1, e_2, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}$. Sisi e_3 mendominasi sisi $e_3, e_2, e_4, e_{10}, e_{12}, e_{15}, e_{17}, e_{20}, e_{24}, e_{25}, e_{26}$. Sisi e_6 mendominasi sisi $e_6, e_5, e_7, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{22}, e_{23}, e_{24}$. Sisi e_8 mendominasi sisi $e_8, e_7, e_9, e_{11}, e_{14}, e_{16}, e_{19}, e_{21}, e_{23}, e_{26}, e_{27}$.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (9\ ;\ 1, 2, 3, 4)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3, e_6, e_8\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (9\ ;\ 1, 2, 3, 4)\big) = 4$.



Gambar 4.48 Graf *Circulant* $circ\ (9\ ;\ 1, 2, 3, 4)$

Tabel 4.2 menunjukkan sisi-sisi pada graf $circ\ (9\ ;\ 1, 2, 3, 4)$.

Tabel 4.2 Sisi-sisi pada Graf *Circulant* $circ\ (9\ ;\ 1, 2, 3, 4)$

Simpul	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-	e_1	e_{15}	e_{14}	e_{13}	e_{12}	e_{11}	e_{10}	e_9
1	e_1	-	e_2	e_{21}	e_{20}	e_{19}	e_{18}	e_{17}	e_{16}
2	e_{15}	e_2	-	e_3	e_{26}	e_{25}	e_{24}	e_{23}	e_{22}
3	e_{14}	e_{21}	e_3	-	e_4	e_{30}	e_{29}	e_{28}	e_{27}
4	e_{13}	e_{20}	e_{26}	e_4	-	e_5	e_{33}	e_{32}	e_{31}
5	e_{12}	e_{19}	e_{25}	e_{30}	e_5	-	e_6	e_{35}	e_{34}
6	e_{11}	e_{18}	e_{24}	e_{29}	e_{33}	e_6	-	e_7	e_8
7	e_{10}	e_{17}	e_{23}	e_{28}	e_{32}	e_{35}	e_7	-	e_{36}
8	e_9	e_{16}	e_{22}	e_{27}	e_{31}	e_{34}	e_{36}	e_8	-

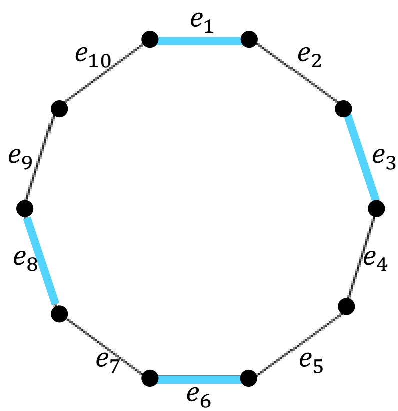
4.2.6 Dominasi Sisi pada Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ\ (10\ ;\ S)}$

Berikut diberikan pembahasan mengenai dominasi sisi pada graf *circulant* $circ\ (10\ ;\ S)$. Dengan himpunan n adalah 10, maka kemungkinan $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

(i) Graf $circ\ (10\ ;\ 1)$

Gambar 4.49 menunjukkan graf $circ\ (10\ ;1)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi e_1, e_2, e_{10}. Sisi e_3 mendominasi sisi e_3, e_2, e_4. Sisi e_6 mendominasi sisi e_6, e_5, e_7. Sisi e_8 mendominasi sisi e_8, e_7, e_9.

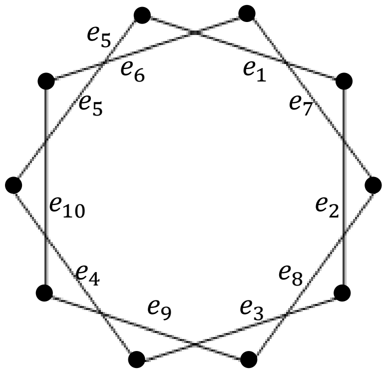
Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (10\ ;1)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3, e_6, e_8\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (10\ ;1)\big) = 4$.



Gambar 4.49 Graf *Circulant* $circ\ (10\ ;\ 1)$

(ii) Graf $circ\ (10\ ;\ 2)$

Gambar 4.50 menunjukkan bahwa graf $circ\ (10\ ;\ 2)$ adalah graf tidak terhubung. Dominasi sisi hanya didefinisikan pada graf terhubung. Oleh karena graf $circ\ (10\ ;\ 2)$ adalah graf tidak terhubung, maka $\gamma'\big(circ\ (10\ ;\ 2)\big)$ tidak didefinisikan.

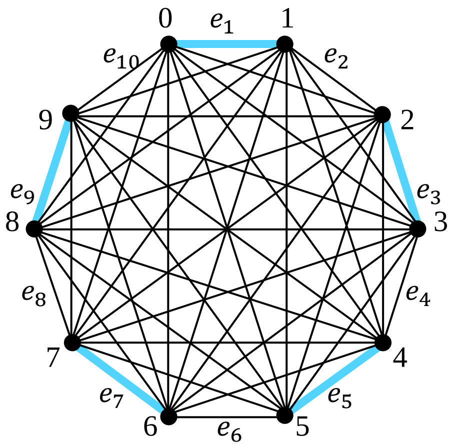


Gambar 4.50 Graf *Circulant* $circ\ (10\ ;\ 2)$

(iii) Graf $circ\ (10\ ;\ 1,2,3,4,5)$

Gambar 4.51 menunjukkan graf $circ\ (10\ ;\ 1,2,3,4,5)$. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa sisi e_1 mendominasi sisi $e_1, e_2, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}$, $e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}$. Sisi e_3 mendominasi sisi $e_3, e_2, e_4, e_{16}, e_{17}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{33}$, e_{34}, e_{35}. Sisi e_5 mendominasi sisi $e_5, e_4, e_6, e_{14}, e_{15}, e_{22}, e_{23}$, $e_{29}, e_{30}, e_{35}, e_{36}, e_{37}, e_{38}, e_{39}, e_{40}, e_{41}, e_{42}$. Sisi e_7 mendomi - nasi sisi $e_7, e_6, e_8, e_{12}, e_{13}, e_{20}, e_{21}, e_{27}, e_{28}, e_{33}, e_{34}, e_{38}, e_{39}$, $e_{42}, e_{43}, e_{44}, e_{45}$. Sisi e_9 mendominasi sisi $e_9, e_8, e_{10}, e_{11}, e_{18}$, $e_{19}, e_{25}, e_{26}, e_{31}, e_{32}, e_{36}, e_{37}, e_{40}, e_{41}, e_{43}, e_{44}, e_{45}$.

Dengan demikian tampak bahwa semua sisi di graf $circ\ (10\ ;\ 1,2,3,4,5)$ didominasi oleh sisi di $X = \{e_1, e_3, e_5, e_7, e_9\}$, yang ditandai dengan garis berwarna biru. Serta memiliki bilangan dominasi $\gamma'\big(circ\ (10\ ;\ 1,2,3,4,5)\big) = 5$.



Gambar 4.51 Graf *Circulant* $circ\ (10\ ;\ 1, 2, 3, 4, 5)$

Tabel 4.3 menunjukkan sisi-sisi pada graf $circ\ (10\ ;\ 1, 2, 3, 4, 5)$.

Tabel 4.3 Sisi-sisi pada Graf *Circulant* $circ\ (10\ ;\ 1, 2, 3, 4, 5)$

Simpul	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	e_1	e_{17}	e_{16}	e_{15}	e_{14}	e_{13}	e_{12}	e_{11}	e_{10}
1	e_1	-	e_2	e_{24}	e_{23}	e_{22}	e_{21}	e_{20}	e_{19}	e_{18}
2	e_{17}	e_2	-	e_3	e_{30}	e_{29}	e_{28}	e_{27}	e_{26}	e_{25}
3	e_{16}	e_{24}	e_3	-	e_4	e_{35}	e_{34}	e_{33}	e_{32}	e_{31}
4	e_{15}	e_{23}	e_{30}	e_4	-	e_5	e_{39}	e_{38}	e_{37}	e_{36}
5	e_{14}	e_{22}	e_{29}	e_{35}	e_5	-	e_6	e_{42}	e_{41}	e_{40}
6	e_{13}	e_{21}	e_{28}	e_{34}	e_{39}	e_6	-	e_7	e_{44}	e_{43}
7	e_{12}	e_{20}	e_{27}	e_{33}	e_{38}	e_{42}	e_7	-	e_8	e_{45}
8	e_{11}	e_{19}	e_{26}	e_{32}	e_{37}	e_{41}	e_{44}	e_8	-	e_9
9	e_{10}	e_{18}	e_{25}	e_{31}	e_{36}	e_{40}	e_{43}	e_{45}	e_9	-

4.2.7 Dominasi Sisi pada Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ\ (n\ ;\ S)}$, $\boldsymbol{n = 5, 6, 7, 8, 9, 10}$

Dari observasi yang telah dilakukan, diperoleh hasil dominasi sisi pada graf circulant $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ seperti pada tabel berikut:

Tabel 4.4 Bilangan Dominasi Sisi pada Graf *Circulant* $circ\ (n\ ;\ S), n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$

Graf *Circulant* $\boldsymbol{circ\ (n\ ;\ S)}$		$\gamma'(\boldsymbol{circ\ (n\ ;\ S)})$
$5\ ;\ S$	$5\ ;\ 1$	2
	$5\ ;\ 2$	2
	$5\ ;\ 1, 2$	2
$6\ ;\ S$	$6\ ;\ 1$	2
	$6\ ;\ 2$	-
	$6\ ;\ 3$	-
	$6\ ;\ 1, 2$	2
	$6\ ;\ 1, 2, 3$	3
$7\ ;\ S$	$7\ ;\ 1$	3
	$7\ ;\ 2$	3
	$7\ ;\ 3$	3
	$7\ ;\ 1, 2$	3
	$7\ ;\ 1, 3$	3
	$7\ ;\ 2, 3$	3
	$7\ ;\ 1, 2, 3$	3
$8\ ;\ S$	$8\ ;\ 1$	3
	$8\ ;\ 1, 2, 3, 4$	4
$9\ ;\ S$	$9\ ;\ 1$	3
	$9\ ;\ 1, 2, 3, 4$	4

Tabel 4.4 Bilangan Dominasi Sisi pada Graf *Circulant* $circ\ (n\ ;\ S), n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (lanjutan)

$10\ ;\ S$	$10\ ;\ 1$	4
	$10\ ;\ 2$	-
	$10\ ;\ 1, 2, 3, 4, 5$	5

Tabel 4.4 di atas menunjukkan bilangan dominasi sisi pada graf *circulant* $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Berikut didapatkan suatu teorema mengenai bilangan dominasi sisi graf circulant $circ\ (n\ ;\ S)$ order n.

Teorema 4

Jika terdapat suatu graf circulant $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan order n, maka bilangan dominasinya adalah

$$\gamma'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil & \text{, untuk } S = \{1\} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{, untuk } S = \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\} \end{cases}.$$

Bukti:

(i) Graf circulant $circ\ (n\ ;\ \{1\})$ memiliki $q = \|E\| = n$, $\Delta'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = 2$. Berdasarkan Teorema 3 dinyatakan bahwa $\gamma'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) \leq q - \Delta'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big)$.

Disubstitusikan nilai q dan $\Delta'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big)$ sehingga diperoleh $\gamma'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) \leq n - 2$.

Terbukti bahwa $\gamma'(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. ∎

(ii) Graf circulant $circ\left(n\,;\left\{1,2,\dots,\frac{(n+1)}{2}\right\}\right)$ memiliki $q=|||E|||=\frac{n(n-1)}{2}$, $\Delta\big(circ\,(n\,;\,S)\big)=(n-1)$. Berdasarkan Teorema 3 dinyatakan bahwa $\gamma'\big(circ\,(n\,;\,S)\big)\le q-\Delta'\big(circ\,(n\,;\,S)\big)$.

Disubstitusikan nilai q dan $\Delta'\big(circ\,(n\,;\,S)\big)$ sehingga diperoleh $\gamma'\big(circ\,(n\,;\,S)\big)\le\frac{n^2-5n+8}{2}$.

Terbukti bahwa $\gamma'\big(circ\,(n\,;\,S)\big)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. ■

BAB V
KESIMPULAN

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat dibuat kesimpulan sebagai berikut:

1. Bilangan dominasi simpul untuk graf circulant $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan order n adalah

$$\gamma\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor & \text{, untuk } S = \{1\} \\ 1 & \text{, untuk } S = \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\} \end{cases}.$$

2. Bilangan dominasi sisi untuk graf circulant $circ\ (n\ ;\ S)$ dengan order n adalah

$$\gamma'\big(circ\ (n\ ;\ S)\big) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil & \text{, untuk } S = \{1\} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{, untuk } S = \left\{1, 2, \dots, \frac{(n+1)}{2}\right\} \end{cases}.$$

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR PUSTAKA

[1] Haynes, Teresa W., Stephen T. Hedetniemi, dan Peter J. Slater. 1998. "**Fundamentals of Domination in Graphs**" in **Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics**, Vol. 208. New York: Marcel Dekker Inc.

[2] Roifah, Miftahur, dan Dafik. 2014. "Kajian Himpunan Dominasi pada Graf Khusus dan Operasinya". **Prosiding Seminar Nasional Matematika**, Vol. 1 No. 1, pp. 191-196.

[3] Alvarado, Jose. 2012. "Domination in Graphs". **Final Project in Graph Theory**. Oregon. Willamette University.

[4] Wardani, Dwi A. R., Ika Hesti Agustin, Dafik. 2014. "Bilangan Dominasi Dari Graf-Graf Khusus". **Prosiding Seminar Nasional Matematika**, Vol. 1 No. 1, pp. 78-82.

[5] Gross, Jonathan L. dan Jay Yellen. 2006. **Graph Theory and Its Applications**. New York: Chapman & Hall CRC.

[6] Mitchell, Sandra L. dan Stephen T. Hedetniemi. 1977. "Edge Domination in Trees". **Congressus Numerantium**,Vol 19, pp. 489-509.

[7] Arumugam, S. and S. Velammal. 1998. "Edge Domination in Graphs". **Taiwanese Journal of Mathematics** Vol. 2, pp. 173-179.

[8] Jayaram, S.R. 1987. "Line Domination in Graphs". **Graphs and Combinatorics** Vol. 3, pp. 357-363.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BIODATA PENULIS

Penulis yang memiliki nama lengkap Dita Agustina Mustikaningrum, dan biasa dipanggil Dita atau Mustika ini dilahirkan di Surabaya pada tanggal 29 Agustus 1991. Penulis merupakan anak pertama dari empat bersaudara dari pasangan Edy Suwarno dan Sri Supriatiningsih.

Penulis menempuh pendidikan selama 11 tahun di lembaga pendidikan di bawah naungan Yayasan Pendidikan Prima Swarga Bara (YPPSB), Kutai Timur, Kalimantan Timur. Yaitu dari TK YPPSB, SD YPPSB / SD YPPSB-1, hingga SMP YPPSB. Setelah lulus dari SMA Yayasan Pupuk Kaltim (YPK), Bontang, penulis melanjutkan pendidikan sebagai mahasiswi program Sarjana Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya melalui jalur PKM Kemitraan pada tahun angkatan 2009 dengan NRP 1209 100 004.

Penulis aktif melakukan kegiatan intra kampus selama 2 periode, yaitu pada Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) sebagai *staff* Departemen Pengembangan Potensi Akademik periode 2010-2011, dan sebagai bendahara Departemen Hubungan Luar periode 2011-2012.

Untuk membentuk jejaring yang luas ataupun membutuhkan informasi yang berhubungan dengan Tugas Akhir ini, penulis dapat dihubungi melalui email dita.mustikaningrum@gmail.co.id.