TUGAS AKHIR - SF 141501

PENGARUH KONSTANTA KOSMOLOGI TERHADAP MODEL STANDAR ALAM SEMESTA

MUHAMMAD RAMADHAN
NRP 1111100074

Dosen Pembimbing
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

JURUSAN FISIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya, 2016

UNDERGRADUATE THESIS - SF 141501

INFLUENCE OF COSMOLOGICAL CONSTANT TO THE STANDARD MODEL OF THE UNIVERSE

MUHAMMAD RAMADHAN
NRP 1111100074

Supervisor
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

Department of PHYSICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya, 2016

PENGARUH KONSTANTA KOSMOLOGI TERHADAP MODEL STANDAR ALAM SEMESTA

TUGAS AKHIR

Diajukan Guna Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Fisika Teori dan Filsafat Alam
Program Studi S1 Jurusan Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :
Muhammad Ramadhan
NRP: 1111100074

Disetujui oleh Dosen Pembimbing Tugas Akhir :

Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo ....
NIP: 197907192005011005 (Pembimbing)

SURABAYA
JUNI 2016

Halaman ini sengaja dikosongkan

PENGARUH KONSTANTA KOSMOLOGI TERHADAP MODEL STANDAR ALAM SEMESTA

Nama : MUHAMMAD RAMADHAN
NRP : 1111100074
Jurusan : Fisika FMIPA
Pembimbing : Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

ABSTRAK

Metrik FLRW adalah sebuah metrik ruang-waktu yang digunakan untuk memodelkan alam semesta. Dalam membangun metrik ini, digunakan asumsi prinsip kosmologi, yaitu alam semesta isotropik dan homogen. Setelah itu, metrik FLRW dikerjakan pada Persamaan Medan Einstein dengan Konstanta Kosmologi, sehingga didapatkan dua solusi Friedmann. Solusi tersebut adalah solusi Friedmann jenis pertama dan solusi Friedmann jenis kedua. Pada tugas akhir ini, digunakan solusi Friedmann jenis pertama yang telah dimodifikasi agar sesuai dengan keadaan fisis alam semesta untuk memodelkan alam semesta. Dari model ini, dibandingkan antara model yang memiliki konstanta kosmologi dan tidak sehingga didapatkan pengaruh konstanta kosmologi terhadap model standar alam semesta.

Kata-Kunci: Persamaan Medan Einstein, Solusi Friedmann, Konstanta Kosmologi

Halaman ini sengaja dikosongkan

INFLUENCE OF COSMOLOGICAL CONSTANT TO THE STANDARD MODEL OF THE UNIVERSE

Name	: MUHAMMAD RAMADHAN
NRP	: 1111100074
Department	: Physics
Supervisor	: Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

ABSTRACT

Friedmann - Lemaitre - Robertson - Walker metric is a space-time metric using to make a model of the universe. Cosmological principles, isotropic and homogeneous universe, is used to build this metric. After that, the FLRW metric applied to Einstein Field Equation with Cosmological Constant and consist two solutions. These solutions are first Friedmann equation and second Friedmann equation. In this final project, first Friedmann equation with some modifications are chosen to so it would fit the physical properties of the universe. From this model, universe with cosmological constant can be compared to universe without cosmological constant. In this work, we investigate the influence of cosmological constant to the standard model of the universe.

Keywords: Einstein Field Equation, Friedmann Equation, Cosmological Constant

Halaman ini sengaja dikosongkan

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala limpahan rahmat berkah, rahmat, dan petunjukNya atas nikmat iman, Islam, dan ikhsan yang diberikan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan laporan Tugas Akhir (TA) ini dengan optimal dan tepat waktu. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah, Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun kami dari kebodohan menuju cahaya kebenaran.

Tugas Akhir (TA) ini penulis susun untuk memenuhi persyaratan menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) di Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Tugas Akhir ini ditulis dengan judul :

"PENGARUH KONSTANTA KOSMOLOGI TERHADAP MODEL STANDAR ALAM SEMESTA"

Penulis berharap penelitian ini berguna untuk orang-orang yang tertarik pada bidang kosmologi khususnya . Penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang membantu penyusunan laporan Tugas Akhir (TA) dan proses penelitiannya.

1. Keluarga tercinta: kedua orang tua dan saudara-saudara penulis yang selalu memberi semangat, modal serta dukungan.
2. **Bapak Prof. Eddy Yahya** sebagai dosen wali yang selalu memberikan bimbingan dan pengarahan setiap semester juga nasehat atas masalah-masalah yang sering diberikan oleh penulis.
3. **Bapak Dr. rer. nat Bintoro Anang Subagyo**, selaku dosen pembimbing yang telah memberi inspirasi dan

membagi pengalaman serta memberikan pengarahan dalam menyelesaikan permasalahan kosmologi.

4. **Bapak Agus Purwanto D.Sc.**, dosen Fisika Teori yang sangat inspiratif dan sering memberikan nasehat-nasehat kepada penulis agar menjadi seorang fisikawan teoritis yang siap menghadapi kerasnya kehidupan teoritikus di tanah Indonesia ini.
5. **Bapak Heru Sukamto M.Si**, seorang dosen Fisika Teori yang sangat dekat dengan mahasiswanya dan mampu memberikan jalan keluar yang tidak disangka-sangka saat penulis mengalami kesulitan.
6. Seluruh Staf Pengajar dan Karyawan di Jurusan Fisika ITS
7. Kawan-kawan di Laboratorium Fisika Teori dan Filsafat Alam (LaFTiFA) ITS: **Mas Nurhadi, Mbak Nova, Mas Yohannes, Mas Fadlol, Mas Taufiqi, Philin, Usykur, Andika, Afif, Ira, Afidah, Anom,** dan **Dwi** atas canda tawa, diskusi-diskusi dan bantuan-bantuannya.
8. Segenap teman-teman Fisika **FOTON 2011** yang telah menjadi keluarga penulis selama di Surabaya dan telah memberikan dukungan terbaik bagi penulis.
9. Sahabat penulis sedari kecil, **Fahmi Gibran Syahadat**, atas semua petuah-petuah, dukungan moral, semangat, dan segala bantuan yang pernah dan akan diberikan kepada penulis.
10. Kawan-kawan *Howling Architecture*: **Lord Maraya "the Defiler", Lord Ivan, Lord Thalib,** dan **Lord Ahnaf** atas nasehat, semangat, dan kekonyolan yang tidak disangka-sangka yang mampu menghibur penulis disaat waktu-waktu kesusahan. *Mariki'*..
11. Pengurus IKAMI SULSEL Surabaya 2012-2013: **Syamsualam Syamsuddin, Hery Nugroho, Bagus Agwin, Jimmy Sa'pang, Syamsul Irfan, Andi Heynoum Dala Rifat, Rizky Maharja, Azwar**, **Winda D.P.** serta penasehat-penasehatnya yaitu **kak Lilis Widiastuty, kak Ridhayani Adiningsih, kak Abdul Malik, kak Andi**

Irhamsyah, kak Taufiq, kak Syafaatul Haq atas kekeluargaan bernuansa kampung yang sangat dirindukan penulisi di tanah perantauan.

12. Kakanda RUDAL dan RADAR: **Haerul Ahmadi, A.Rosman, A. Ichsan, Muflih Noer, Yassir Arafat, A. Asrafiani Arafah, A. Sri Rahayu, A. Wulansari R**. atas suasan kekeluargaan dan motivasi kepada penulis.
13. **Meutia Ikawidjaja**, seseorang yang spesial, terima kasih atas motivasi, dukungan, kekhawatiran, dan bantuan lainnya kepada penulis.
14. **Kevin Devalentino**, teman senasib dan sesama pendukung Juventus F.C., terima kasih atas semua bantuan saat penulis mengalami kesulitan saat praktikum, contoh-contoh laporan, serta waktu-waktu nonton bareng Juventus. Semoga segera dipertemukan dengan jodohnya, amin! *FINO ALLA FINE FORZA JUVENTUS!*
15. **Dwita Ratu K.P.,** sepupu seperjuangan walau berbeda kampus. EWAKO!
16. Seluruh pihak yang membantu dalam pengerjaan Tugas Akhir secara langsung dan tidak langsung yang tidak dapat disebutkan satu per satu.
17. Kamu, yang membaca Tugas Akhir ini. Semoga menjadi inspirasi ßuntuk memahami alam semesta lebih dalam.

Penulis menyadari dalam penyusunan laporan ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mohon kritik dan saran membangun dari pembaca guna menyempurnakan laporan ini demi kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi di masa mendatang. Akhir kata penulis berharap semoga laporan Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak, terutama untuk penelitian selanjutnya.

Surabaya, Juni 2016

Penulis
ramadhaanm@gmail.com

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1916, Albert Einstein dalam bukunya yang berjudul *Relativity: Special and General Theory* memperkenalkan sebuah konsep gravitasi baru yang sangat berbeda dengan Hukum Gravitasi Universal yang diperkenalkan oleh Isaac Newton. Menurut Einstein, gravitasi bukan merupakan sebuah gaya biasa, melainkan sebuah properti dari ruang dan waktu. Dari konsep tersebut, Einstein berhasil menurunkan sebuah persamaan yang dinamakan sebagai Persamaan Medan Gravitasi Einstein (Einstein, 2005).

Pada tahun 1917, Einstein memodifikasi kembali persamaannya. Einstein mengasumsikan bahwa alam semesta yang kita huni merupakan alam semesta yang statik. Prinsip Mach mengatakan bahwa "keberadaan seluruh materi, secara rata-rata dan global, di alam semesta, merupakan latar belakang yang mendefinisikan aturan yang berkaitan dengan gerak dari suatu materi spesifik di suatu titik dan di manapun di alam semesta." Menurut Mach, keberadaan "bintang-bintang tetap"-lah yang mendefinisikan kerangka acuan terhadap gerak benda-benda di suatu posisi dan waktu. Jika suatu benda dikatakan bergerak dengan kecepatan konstan, maka gerak tersebut relatif terhadap bintang-bintang tetap, dan inersia merupakan tanggapan benda terhadap perubahan keadaan geraknya. Sehingga untuk memenuhi konsep itu, Einstein mengusulkan sebuah parameter bebas yang bernama Konstanta Kosmologi (dilambangkan dengan Λ) untuk ditambahkan pada Persamaan

Medan Gravitasi Einstein (Einstein, 1917).

Suku Λ ini diinterpretasikan sebagai efek dari gaya tolak (repulsif) yang mengkompensasi gaya tarik gravitasi dan dengan demikian dapat mempertahankan struktur ruang dari keruntuhan akibat alam semesta homogen (Einstein, 1917). Bukti observasi oleh Hubble menunjukkan bahwa alam semesta memang mengembang, demikian pula dapat diperoleh suatu solusi non-statik dari persamaan medan Einstein tanpa suku konstanta kosmologi, sehingga akhirnya Einstein menyatakan bahwa tidak perlu lagi memasukkan konstanta kosmologi ke dalam persamaan medannya. Hal ini sering disebut sebagai kesalahan terbesarnya (Weinberg, 1989).

1.2 Perumusan Masalah

Dalam tugas akhir ini permasalahan yang akan dibahas adalah apa pengaruh konstanta kosmologi terhadap model standar alam semesta.

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini permasalahan hanya dibatasi pada konstanta kosmologi dari Persamaan Medan Einstein dan Metrik Friedmann Lemaitre Robertson Walker.

1.4 Tujuan

Dalam tugas akhir ini akan dilakukan penurunan ulang secara lengkap mengenai Persamaan Medan Einstein dengan penambahan konstanta kosmologi, Metrik Friedmann Lemaitre Robertson Walker dan memahami pengaruh konstanta kosmologi terhadap model standar alam semesta.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penyusunan Tugas Akhir ini adalah metode analitis dari studi literatur.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan Tugas Akhir ini , terdiri dari enam bab.Bab I diuraikan mengenai pendahuluan yang meliputi latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan. Pada bab II akan diuraikan mengenai tinjauan pustaka yang meliputi Prinsip Kosmologi, Persamaan Medan Einsten dengan Konstanta Kosmologi dan Metrik FLRW. Pada bab III akan diuraikan mengenai Solusi Friedmann. Pada bab IV akan diuraikan bagaimana memodelkan alam semesta. Pada bab V adalah diskusi dan bab VI berisi kesimpulan.

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

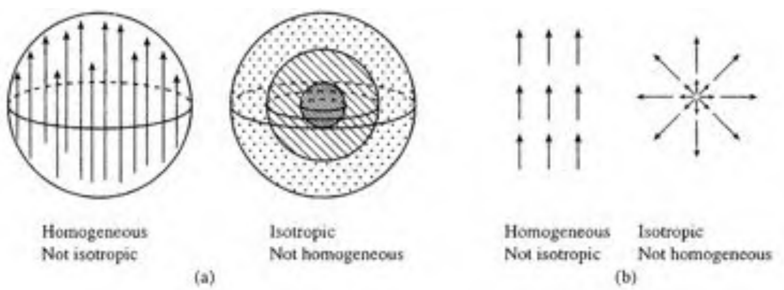
2.1 Prinsip Kosmologi

Kosmologi adalah cabang dari ilmu astronomi yang mempelajari asal-usul dan evolusi alam semesta, dari awal penciptaan yaitu Ledakan Besar hingga hari ini dan prediksinya di masa depan. Sejak jaman pertengahan, alam semesta dipandang sebagai sesuatu yang tetap, dengan bumi berada di pusat alam semesta. Teori ini dinamakan sebagai teori geosentris, dimana seluruh benda-benda di langit seperti bulan, matahari, planet, bahkan bintang-bintang, bergerak dengan orbit lingkaran sempurna. Paham tersebut dipatahkan oleh Nicolaus Copernicus pada abad ke-16 yang mengatakan bahwa bumi bukan merupakan pusat alam semesta. Copernicus mengusulkan bahwa matahari adalah pusat dari alam semesta dengan planet-planet dan benda langit yang lain bergerak mengelilingi matahari. Teori ini disebut sebagai teori heliosentris (Ryden, 2006).

Pada abad ke-17, Isaac Newton memberikan penjelasan lebih jauh mengenai interaksi antara benda-benda langit dengan Hukum Gravitasi Universal yang ia buat. Hukum itu berbunyi: Setiap benda di alam semesta akan menarik satu sama lain dengan gaya yang sebanding dengan massa benda tersebut dan berbanding terbalik dengan jarak kuadrat dari benda tersebut (Newton, 1687). Ilmu kosmologi kemudian mengalami kemajuan pesat pada abad ke-20.

Albert Einstein memberikan pandangan baru mengenai kosmologi melalui Teori Relativitas Umum. Teori ini menyatakan ruang dan waktu sebagai satu kesatuan (Einstein, 2005). Masih pada waktu yang sama, ilmuwan-ilmuwan di bidang astronomi mulai melakukan penelitian mengenai alam semesta dengan satu pernyataan mendasar: apakah galaksi tempat bumi berada merupakan alam semesta secara keseluruhan atau hanya sebuah galaksi biasa yang mempunyai bintang dengan jumlah banyak?

Edwin Hubble menemukan bahwa objek-objek seperti nebula berada di luar Galaksi Bima Sakti, sehingga dari penemuan Hubble tersebut dapat disimpulkan bahwa Galaksi Bima Sakti hanyalah galaksi biasa di alam semesta ini. Selain itu, Hubble juga menemukan bahwa di alam semesta terdapat banyak galaksi dan terdistribusi secara merata pada skala yang besar. Skala besar yang dimaksud adalah skala yang tidak lagi mengacu pada skala galaksi, ataupun kluster galaksi, melainkan skala dengan orde milyaran tahun cahaya. Pada skala ini, galaksi mempunyai distribusi isotropik yang berarti terdistribusi secara merata dengan arah berbeda di langit. Galaksi-galaksi ini juga terdistribusi secara merata di ruang angkasa, atau homogen (Weinberg, 1989).



Gambar 2.1: Illustrasi Prinsip Kosmologi (Ryden, 2006).

Dua fakta ini akhirnya dikenal sebagai dua prinsip kosmologi:

1. Tidak ada titik spesial di alam semesta; galaksi-galaksi terdistribusi secara merata di ruang angkasa pada skala yang sangat besar. Alam semesta dapat dikatakan homogen pada skala besar ini.

2. Tidak ada arah yang spesial di alam semesta; galaksi-galaksi terdistribusi secara merata dengan arah yang berbeda-beda pada skala yang sangat besar. Alam semesta ini disebut sebagai isotropik (Frieman dkk., 2008), (Padmanabahan, 2003).

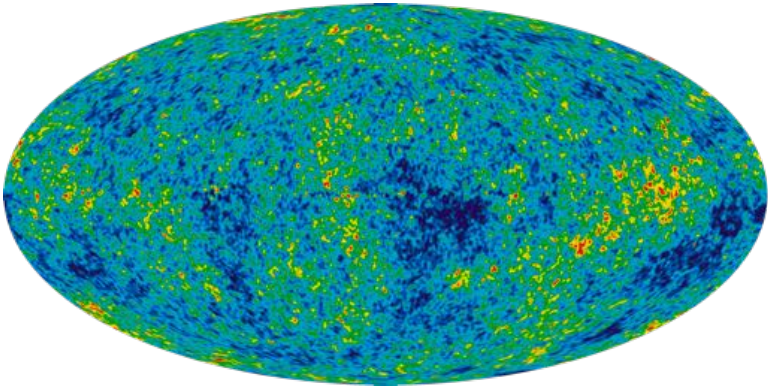
Kedua prinsip ini tidak dapat diaplikasikan untuk skala yang kecil karena adanya ketidak-homogen-an. Namun model ini tetap digunakan karena dua alasan:

1. Merupakan model paling sederhana dari evolusi alam semesta (Friemann dkk., 2008).

2. Bukti observasi berupa CMB (Cosmic Microwave Background) mengindikasikan bahwa alam semesta memenuhi prinsip kosmologi (lihat gambar 2.2) (Penzias dkk., 1965).

2.2 Persamaan Medan Einstein dengan Konstanta Kosmologi

Einstein melalui persamaan medannya mengatakan bahwa seharusnya materi dan energi membelokkan ruang-waktu. Bentuk kelengkungan ruang-waktu ini digambarkan oleh bentuk tensor metrik. Tensor metrik sendiri dipengaruhi oleh distribusi massa sebagai sumber gravitasi. Integral aksi total



Gambar 2.2: Cosmic Microwave Background atau sebuah relik cahaya dari awal penciptaan alam semesta, diobservasi pada tahun 1964 oleh Penzias dan Wilson menggunakan teleskop radio dengan panjang gelombang gamma. Radiasi ini merupakan radiasi benda hitam dengan temperatur 2,725 K.

yang disebabkan aksi massa sumber dan aksi oleh gravitasi dinyatakan sebagai berikut

$$S = S_G + S_M. \tag{2.1}$$

Untuk mendapatkan persamaan gerak, maka diperlukan prinsip aksi minimum dengan variasi

$$\delta S = 0. \tag{2.2}$$

Persamaan (2.1) menjadi

$$\begin{aligned} \delta S_G + \delta S_M &= 0 \\ \delta S_G &= -\delta S_M, \end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan nilai δS_G dan δS_M masing-masing adalah

$$\begin{aligned}\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa}\int_M \mathcal{L}_G[g_{\mu\nu}]\sqrt{-g}d^4x \\ \delta S_M &= \int_M \mathcal{L}_M\sqrt{-g}d^4x.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Dimana $\mathcal{L}_M$ adalah lagrangian massa dan $\mathcal{L}_G$ adalah lagrangian gravitasi.

Lagrangian gravitasi dengan penambahan suku konstanta kosmologi Λ adalah

$$\mathcal{L}_G = R - 2\Lambda. \tag{2.5}$$

Modifikasi ini berdasarkan prinsip Mach. Suku Λ diinterpretasikan sebagai efek dari gaya tolak (repulsif) yang mengkompensasi gaya tarik gravitasional sehingga dengan demikian dapat mempertahankan struktur ruang akibat kehomogenan materi alam semesta. Persamaan $\delta S_G = -\delta S_M$ menjadi (lihat lampiran A.1 untuk detail penurunan Persamaan Medan Einstein)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\kappa}\int_M (R-2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x &= -\int_M \mathcal{L}_M\sqrt{-g}d^4x \\ \frac{1}{2\kappa}\int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}d^4x &= \frac{1}{2}\int\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Solusi persamaan (2.6) adalah

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) merupakan Persamaan Medan Einstein dengan penambahan konstanta kosmologi. Ruas kiri persamaan medan Einstein menggambarkan kelengkungan ruang-waktu dan ruas kanannya menggambarkan distribusi materi. Interpretasi dari persamaan ini adalah materi menyebabkan ruang-waktu melengkung atau kelengkungan ruang waktu memerintahkan materi untuk bergerak (Gron dan Hervik, 2007).

Secara historis, Einstein menambahkan konstanta kosmologi untuk mendukung postulatnya bahwa alam semesta ini statis. Namun, pada 1917, de Sitter memberikan model alam semesta statis tanpa keterlibatan konstanta kosmologi. Selain itu, hasil obervasi astronom-astronom pada jaman itu memberikan bukti mengenai adanya pergeseran merah oleh galaksi-galaksi yang berada sangat jauh dari Bumi. Bukti ini pertama kali ditemukan oleh Slipher pada tahun 1924. Pada tahun yang sama, Friedmann mengajukan sebuah model kosmologi dengan ekspansi alam semesta. Setahun sebelumnya, yaitu tahun 1923, Weyl sudah memprediksi dari model de Sitter bahwa model yang diberikan oleh de Sitter akan menghasilkan pergeseran merah oleh benda angkasa, bertambah seiring jarak banda tersebut. Hal ini karena pada metrik de Sitter, sistem koordinat yang diberikan tidak bergantung pada waktu, namun benda yang dijadikan acuan tidak diam. Berdasarkan prediksi Weyl ini, Einstein kemudian mengirimkan surat kepada Weyl, reaksi terhadap ditemukannya ekspansi alam semesta yang berisi: Jika alam semesta ini tidak statis, maka jangan pernah gunakan konstanta kosmologi! (Weinberg, 1989)

Setelah tahun-tahun penuh kontroversi, ditambah dengan perkataan Einstein menjelang akhir hayatnya bahwa konstanta kosmologi merupakan salah satu kesalahan terbesar dalam hidupnya, penggunaan konstanta ini mulai ditinggalkan. Sehingga persamaan medan Einstein yang umum digunakan untuk memodelkan alam semesta adalah persamaan medan Einstein tanpa konstanta kosmologi. Namun, pada tahun 1998, Riess bersama timnya menemukan pergeseran merah oleh bintang Supernova tipe Ia dan menyimpulkan bahwa ada keterlibatan konstanta kosmologi dalam pergeseran merah tersebut. Penemuan ini menyebabkan dibukanya kembali penggunaan konstanta kosmologi pada model standar alam semesta.

2.3 Metrik FLRW (Friedmann - Lemaitre - Robertson - Walker)

Pada tahun 1922, matematikawan Uni Soviet bernama Alexander Friedmann menjadi orang pertama yang memprediksi ekspansi alam semesta melalui persamaan matematika. Prediksi ini ia dapatkan dari penurunan Persamaan Medan Einstein dengan menggunakan metrik yang ia bangun sendiri. Prediksi ini di periksa langsung oleh Albert Einstein , namun Einstein gagal memahami kondisi fisis dari persamaan Friedmann sehingga ia menganggap bahwa prediksi Friedmann ini hanyalah rasa penasaran matematis saja.

Pada tahun 1928, seorang biarawan dan astronom dari Belgia bernama Georges Lemaitre, secara independen memberikan hasil yang sama dengan prediksi Friedmann. Setahun setelah hasil kalkulasi Lemaitre dipublikasian di Belgia, Edwin Hubble menemukan bahwa alam semesta mengembang. Hal ini memicu Sir Arthur Eddington, seorang astronom Inggris, untuk menerjemahkan jurnal Lemaitre ke Bahasa Inggris dan menerbitkannya.

Pada tahun 1935, pekerjaan Friedmann dan Lemaitre dikaji lebih jauh lagi oleh fisikawan Amerika , Howard P. Robertson dan matematikawan Inggris, Arthur Geoffrey Walker, yang membuat metrik ini dinamakan metrik FLRW. Penamaan ini mengikuti nama keempat ilmuwan yang menggagas metrik ini(walaupun terdapat kontroversi untuk penamaan ini, ilmuwan di luar Amerika memberikan nama metrik ini sebagai metrik Friedmann - Lemaitre atau metrik FL berdasarkan dua penggagas utama. Sedangkan ilmuwan di Amerika memberikan nama metrik ini sebagai metrik Robertson - Walker atau metrik RW saja) (Bergstrom, 2006).

Metrik FLRW ini dibangun berdasarkan prinsip kosmologi, yaitu isotropik dan homogen. Asumsi pertama yaitu alam semesta adalah isotropik dan mengalami ekspansi sejauh a seiring waktu, maka bentuk metrik ruang-waktunya berupa

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t) dl^2. \tag{2.8}$$

Untuk memudahkan perhitungan, maka diambil nilai c=1, sehingga metrik tersebut menjadi

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) dl^2. \tag{2.9}$$

Metrik ruang-waktu di atas terdiri atas bagian ruang dan temporal. Metrik waktu disini dapat diinterpretasikan sebagai waktu kosmologi atau waktu alam semesta. Sementara itu, bagian ruang harus dikonstruksi berdasarkan sifat alam semesta, sehingga akan diambil beberapa asumsi untuk membentuk komponen metrik dari ruang. Pertama, materi dari ruang-waktu dan ruang harus melengkung. Kehomogenan alam semesta membuat kurvatur dari ruang harus sama pada setiap titik. Kedua, metrik ruang ini dapat ditinjau sebagai permukaan dari ruang Euclid tiga dimensi. Dari asumsi ini, terdapat dua tipe permukaan yang mempunyai kurvatur homogen, yaitu bidang datar dan bola. Sehingga metrik ruang alam semesta dapat dirumuskan sebagai

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.10}$$

Hanya saja, bidang datar tidak memiliki kelengkungan sama sekali karena kedatarannya, sehingga satu-satunya permukaan yang mungkin adalah bola. Metrik ruang tersebut harus ditransformasi dari koordinat kartesian menjadi koordinat bola dengan

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta, \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

maka didapatkan (lihat persamaan A.29 - A.31 pada lampiran)

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi \\
&= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi \\
&= \sin\theta\sin\phi dr + r\sin\phi\cos\theta d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta \\
&= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Elemen-elemen garis tersebut dikuadratkan, sehingga (lihat persamaan A.32-A.34 pada lampiran)

$$\begin{aligned}
dx^2 &= \sin^2\theta\cos^2\phi dr^2 + r\cos^2\theta\cos^2\phi d\theta^2 + r\sin^2\theta\sin^2\phi d\phi^2 \\
&\quad +2r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi dr d\theta - 2r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi dr d\phi \\
&\quad -2r^2\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi d\theta d\phi, \\
dy^2 &= \sin^2\theta\sin^2\phi dr^2 + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi d\phi^2 \\
&\quad +2r\sin\theta\sin^2\phi\cos\theta dr d\theta + 2r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi dr d\phi \\
&\quad +2r^2\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi d\theta d\phi, \\
dz^2 &= \cos^2\theta dr^2 - 2r\sin\theta\cos\theta dr d\theta + r^2\sin^2\theta d\theta^2, \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

dan menyisakan metrik ruang dalam koordinat bola (lihat persamaan A.35 pada lampiran)

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \qquad (2.14)$$

Pada kenyataannya, geometri alam semesta bukan merupakan bidang Euclid tiga dimensi, namun merupakan tiga dimensi hyper-bola atau bidang Euclid empat dimensi. Sehingga metrik ruang diubah lagi menjadi

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2, \tag{2.15}$$

dimana dw adalah suku dari kurvatur empat dimensi

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2. \tag{2.16}$$

Dimisalkan

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{2.17}$$

maka

$$R^2 = r^2 + w^2. \tag{2.18}$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.19) ke persamaan (2.18)

$$\begin{aligned} w^2 &= R^2 - r^2 \\ 2wdw &= -2rdr \\ dw &= \frac{-r}{w}dr \\ dw^2 &= (-r\frac{dr}{w})^2 \\ &= [-r\frac{dr}{(R^2-r^2)^{1/2}}]^2 \\ dw^2 &= r^2\frac{dr^2}{R^2-r^2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Selanjutnya, dari persamaan (2.12) dan (2.19), menyisakan (lihat persamaan A.43 pada lampiran)

$$dl^2 = dr^2(\frac{1}{1-\frac{r^2}{R^2}}) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{2.20}$$

Untuk menyederhanakan bentuk (2.20), diperkenalkan simbol kurvatur $k = \frac{1}{R^2}$, sehingga persamaan (2.20) menjadi

$$dl^2 = dr^2 \left(\frac{1}{1 - kr^2} \right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \tag{2.21}$$

dengan nilai k adalah nilai kelengkungan kurvatur. Berdasarkan k, alam semesta tertutup mempunyai nilai k = 1, alam semesta datar mempunyai nilai k = 0 dan alam semesta terbuka mempunyai nilai k = -1.

Setelah itu, persamaan (2.24) disubstitusi ke persamaan (2.12) untuk mendapatkan metrik ruang-waktu seutuhnya

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[dr^2 \left(\frac{1}{1 - kr^2} \right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \tag{2.22}$$

metrik ruang-waktu diatas disebut sebagai metrik FLRW.

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 3

SOLUSI FRIEDMANN

3.1 Solusi Friedmann

Solusi Friedmann adalah salah satu dari solusi Persamaan Medan Einstein dengan Konstanta Kosmologi. Solusi ini merupakan hasil dari penurunan metrik FLRW yang tidak nol dan pertama kali dilakukan oleh Friedmann pada tahun 1924 yang menceritakan ekspansi alam semesta akibat adanya faktor skala, yaitu sebuah faktor jarak yang menggambarkan alam semesta mengembang.

Langkah pertama dalam mencari solusi Friedmann adalah mengidentifikasi tensor metrik $g_{\mu\nu}$, diberikan oleh Metrik FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dr^2(\frac{1}{1-kr^2}) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2]. \quad (3.1)$$

Dengan mengalikan faktor skala pada metrik ruang, maka didapatkan

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\frac{dr^2}{1-kr^2}) + a^2(t)r^2 d\theta^2 + a^2(t)r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.2)$$

Dari metrik ruang-waktu tersebut, didapatkan empat buah elemen, yaitu elemen waktu dt dan tiga buah elemen ruang, $\frac{a^2(t)}{1-kr^2}dr^2$, $a^2(t)r^2 d\theta^2$, dan $a^2(t)r^2\sin^2\theta d\phi^2$. Keempat elemen ini adalah elemen diagonal dari tensor metrik $g_{\mu\nu}$ yang dapat dituliskan sebagai

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Bentuk kontravarian dari tensor metrik diatas adalah

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Setelah itu, langkah berikutnya adalah mencari nilai dari simbol Christoffel jenis ke-2 dari tensor metrik diatas dengan persamaan

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \tag{3.5}$$

Nilai dari simbol Christoffel berjumlah 64 komponen dan sebagian besar bernilai nol. Komponen-komponen simbol Christoffel yang tidak bernilai nol adalah (lihat persamaan A.51 -

A.114 pada lampiran)

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \\
\Gamma^0_{22} &= r^2 a\dot{a} \\
\Gamma^0_{33} &= r^2 a\dot{a}\sin^2\theta \\
\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} &= \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma^1_{11} &= \frac{kr}{1-kr^2} \\
\Gamma^1_{22} &= -r(1-kr^2) \\
\Gamma^1_{33} &= -r(1-kr^2)\ sin^2\theta \\
\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} &= \frac{1}{\tan\theta}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Langkah berikutnya adalah mencari Tensor Ricci (Romeu, 2013). Tensor Ricci merupakan kontraksi dari Tensor Riemann dan dituliskan sebagai

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho \mu_\nu \Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}. \qquad (3.7)$$

Tensor Ricci bersifat simetri ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$), sehingga hanya terdapat 10 komponen bebas. Untuk komponen R_{i0}, (i = 1,2,3), didapatkan:

$$R_{i0} = \partial_0 \Gamma^\sigma_{i\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{i0} + \Gamma^\rho_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho 0} - \Gamma^\rho_{i0}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}. \qquad (3.8)$$

Kondisi statik mensyaratkan bahwa $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ sehingga $\partial_0 \Gamma^\sigma_{i\sigma}$ $= 0$. Tensor Ricci menjadi

$$R_{i0} = -\partial_j \Gamma^j_{i0} + \Gamma^\rho_{ij}\Gamma^j_{\rho 0} - \Gamma^\rho_{i0}\Gamma^j_{\rho j}. \qquad (3.9)$$

Dengan menggunakan nilai $\Gamma^i_{j0}= 0$, $\Gamma^\rho_{0\rho}= 0$ dan $\Gamma^0_{ij}= 0$, maka didapatkan

$$R_{i0} = R_{0i} = 0, \tag{3.10}$$

maka komponen tensor Ricci yang tersisa adalah komponen dalam arah diagonal ($R_{\mu\mu}$). Nilai dari $R_{\mu\mu}$ ini adalah (lihat persamaan A.117 - A.120 pada lampiran):

$$R_{\mu\mu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\mu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}. \tag{3.11}$$

Untuk $\mu = 0$

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}. \tag{3.12}$$

Untuk $\mu = 1$

$$R_{11} = \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2}. \tag{3.13}$$

Untuk $\mu = 2$

$$R_{22} = 2r^2\dot{a}^2 + r^2 a\ddot{a} + 2kr^2. \tag{3.14}$$

Untuk $\mu = 3$

$$R_{33} = r^2 a\ddot{a}^2 \sin^2\theta + 2r^2\dot{a}^2 \sin^2\theta + 2kr^2 \sin^2\theta. \tag{3.15}$$

Kemudian, langkah berikutnya adalah mencari nilai dari Skalar Ricci dengan persamaan

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{3.16}$$

Dari persamaan (3.12), (3.13), (3.14) dan (3.15) terlihat bahwa komponen Tensor Ricci memiliki nilai hanya jika $\mu = \nu$, sehingga syarat tersebut berlaku juga terhadap metrik $g^{\mu\nu}$. Dengan memasukkan nilai $\mu = \nu = 0, 1, 2,$ dan 3, maka nilai Skalar Ricci adalah (lihat persamaan A.123 pada lampiran)

$$\begin{aligned} R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\ &= \frac{6\ddot{a}}{a} + \frac{6\dot{a}^2}{a^2} + \frac{6k}{a^2}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ruas kiri pada persamaan Medan Einstein telah selesai dikerjakan. Langkah berikutnya adalah dengan mengerjakan Tensor Energi-Momentum pada ruas kanan persamaan Medan Einstein. Diasumsikan bahwa Tensor Energi-Momentum di alam semesta adalah fluida ideal

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{3.18}$$

dengan matriks U

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

dimana U_α menyatakan bahwa pada persamaan (3.18) yang memiliki nilai adalah $\rho = 1$ dan $p = 0$.

Sama seperti pada Tensor Ricci dan metrik $g^{\mu\nu}$, Tensor Energi-Momentum yang tidak bernilai nol adalah matriks diagonalnya, maka nilai μ harus sama dengan nilai ν dengan $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$. Sehingga didapatkan solusi umum persamaan Medan Einstein (lihat persamaan A.127-A.128 pada lampiran):

Untuk $\mu = \nu = 0$

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} + \Lambda g_{00} &= 8\pi G T_{00} \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Persamaan (3.20) disebut juga sebagai Persamaan Friedmann jenis pertama. Didefinisikan

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2, \tag{3.21}$$

maka persamaan (3.20) dibaca

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \tag{3.22}$$

Sehingga Persamaan Friedmann jenis pertama dikenal juga sebagai persamaan Parameter Hubble. Solusi ini akan digunakan untuk memodelkan alam semesta.

Untuk $\mu = \nu = 1$

$$\begin{aligned} R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} + \Lambda g_{11} &= 8\pi GT_{11} \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a^2} &= -4\pi Gp + \frac{\Lambda}{2} - \frac{k}{2a^2} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Untuk $\mu = \nu = 2$

$$\begin{aligned} R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} + \Lambda g_{22} &= 8\pi GT_{22} \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a^2} &= -4\pi Gp + \frac{\Lambda}{2} - \frac{k}{2a^2} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Untuk $\mu = \nu = 3$

$$\begin{aligned} R_{33} - \frac{1}{2}Rg_{33} + \Lambda g_{33} &= 8\pi GT_{33} \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a^2} &= -4\pi Gp + \frac{\Lambda}{2} - \frac{k}{2a^2} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dari persamaan (3.23), (3.24), dan (3.25) didapatkan solusi yang sama. Berikutnya adalah mengeliminasi persamaan (3.24) dengan persamaan (3.20), maka didapatkan (lihat A.129 pada lampiran)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{3.26}$$

Persamaan (3.26) ini dinamakan sebagai Persamaan Friedmann jenis kedua.

3.2 Bentuk Lain dari Persamaan Friedmann Jenis Pertama

Setelah didapatkan solusi Friedmann jenis pertama, diperlukan modifikasi untuk memenuhi keadaan fisis alam semesta. Ada beberapa faktor yang berpengaruh pada solusi ini, yaitu kurvatur, konstanta kosmologi, dan materi. Diketahui Persamaan Friedmann jenis pertama

$$\begin{aligned} H &= \frac{\dot{a}}{a} \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right) = \frac{k}{a^2} \\ &= \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \end{aligned} \tag{3.27}$$

dengan

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{3.28}$$

dan

$$\rho = \rho_m + \rho_r. \tag{3.29}$$

Dimana ρ_m = densitas materi dan ρ_r = densitas radiasi. Di alam semesta ini, densitas materi berupa

$$\rho_m = \rho_b + \rho_{cdm}, \tag{3.30}$$

dengan ρ_b = densitas baryon dan ρ_r = densitas radiasi. Didefinisikan lagi densitas radiasi

$$\rho_r = \rho_\gamma + \rho_\nu, \tag{3.31}$$

dengan ρ_γ = foton dan ρ_ν = neutron. Hanya saja, pada Persamaan Friedmann, densitas yang digunakan adalah densitas materi dan densitas radiasi saja, sehingga

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}. \tag{3.32}$$

Alam semesta pada saat ini berada dalam keadaan dengan massa dan volume yang cukup untuk membuat alam semesta menuju penyusutan. Keadaan ini dinamakan sebagai alam semesta kritis, dimana bila keadaan ini telah dicapai maka alam semesta akan berbentuk flat atau k=0 (Friemann dkk, 2008)

$$
\begin{aligned}
H^2 &= \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) \\
\frac{3H^2}{8\pi G} &= \underbrace{(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda)}_{\rho_{crit}} \\
\frac{3H^2}{8\pi G} &= \rho_{crit} \\
\frac{3H_0^2}{8\pi G} &= \rho_{crit,0}. \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

Kemudian persamaan (3.33) disubstitusi ke persamaan (3.32), sehingga

$$
\begin{aligned}
H^2 &= \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) \\
\frac{H^2}{\rho_{crit,0}} &= \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda}{\rho_{crit,0}}\right) \\
\frac{H^2}{\frac{3H_0^2}{8\pi G}} &= \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda}{\rho_{crit,0}}\right) \\
\frac{H^2}{H_0^2} &= \left(\frac{\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda}{\rho_{crit,0}}\right) \\
H^2 &= H_0^2\left(\frac{\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda}{\rho_{crit,0}}\right) - \frac{k}{a^2}, \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

dengan

$$
\Omega_m = \frac{\rho_m(a)}{\rho_{crit}(a)},\ \Omega_r = \frac{\rho_r(a)}{\rho_{crit}(a)},\ \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda(a)}{\rho_{crit}(a)}. \qquad (3.35)
$$

Maka

$$
\begin{aligned}
H^2 &= H_0^2\left(\Omega_{m,0}+\Omega_{r,0}+\Omega_{\Lambda,0}\right)-\frac{k}{a^2}\\
\frac{k}{a^2} &= H_0^2\left(\Omega_{m,0}+\Omega_{r,0}+\Omega_{\Lambda,0}\right)-H^2. \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

untuk alam semesta saat ini digunakan nilai $H = H_0$ dan $a_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{a_0^2} &= H_0^2\left(\Omega_{m,0}+\Omega_{r,0}+\Omega_{\Lambda,0}\right)-H_0^2\\
k &= H_0^2\left(\Omega_{m,0}+\Omega_{r,0}+\Omega_{\Lambda,0}-1\right)\\
-\frac{k}{H_0^2} &= 1-\Omega_{m,0}-\Omega_{r,0}-\Omega_{\Lambda,0}, \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

didefinisikan $\Omega_{k,0} \equiv -\frac{k}{H_0^2}$, maka

$$
\begin{aligned}
\Omega_{k,0} &= 1-\Omega_{m,0}-\Omega_{r,0}-\Omega_{\Lambda,0}\\
\Omega_{k,0}+\Omega_{m,0}+\Omega_{r,0}+\Omega_{\Lambda,0} &= 1. \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

Pada literatur (Gron dan Hervik, 2007), didapatkan perbandingan antara kerapatan dan skala faktor:

$$
\begin{aligned}
\rho_r &= \frac{1}{a^4}\\
\rho_m &= \frac{1}{a^3}\\
\rho_k &= \frac{1}{a^2}. \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

Menyempurnakan persamaan (3.32) menjadi

$$
H^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4}+\frac{\Omega_{m,0}}{a^3}+\frac{\Omega_{k,0}}{a^2}+\Omega_{\Lambda,0}\right)
$$

BAB 4

MODEL STANDAR ALAM SEMESTA

Dalam bab sebelumnya telah ditunjukkan bahwa solusi Friedmann yang didapatkan ada dua, yaitu Persamaan Friedmann jenis pertama dan Persamaan Friedmann jenis kedua. Untuk memodelkan alam semesta, solusi yang digunakan hanya solusi Friedmann jenis pertama yang telah diubah bentuknya sesuai dengan keadaan fisis alam semesta. Ada beberapa parameter yang berpengaruh untuk memodelkan alam semesta, yaitu parameter materi, parameter radiasi, paramater kurvatur, dan parameter konstanta kosmologi (Ohanian dan Ruffini, 2013).

Pada Tugas Akhir ini, parameter radiasi yang digunakan nilainya sangat kecil atau mendekati nol, sehingga untuk semua model kecuali model alam semesta yang dipenuhi radiasi, akan digunakan nilai $\Omega_{r,0} = 0$. Selain itu, nilai parameter konstanta kosmologi yang digunakan hanya dibatasi untuk $\Omega_{\Lambda,0}$ lebih dari nol. Untuk parameter kurvatur, nilai $\Omega_{k,0} =$ -1 hanya digunakan untuk satu model alam semesta saja, sehingga didapatkan tujuh model alam semesta yang akan dibahas pada Tugas Akhir ini (untuk detail integral, lihat lampiran A.4)

4.1 Model Alam Semesta Pertama

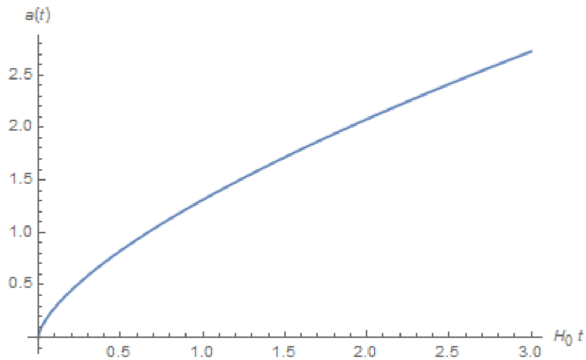
Untuk model alam semesta pertama ini diambil nilai $\Omega_{m,0}$ $= 1$ dan nilai $\Omega_{r,0} = \Omega_{k,0} = \Omega_{\Lambda,0} = 0$. Nilai-nilai ini dimasukkan pada persamaan (3.27), sehingga didapatkan

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2(\frac{0}{a^4} + \frac{1}{a^3} + \frac{0}{a^2} + 0) \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{1}{a^3}\right) \\
\frac{\dot{a}}{a} &= \left[H_0^2\left(\frac{1}{a^3}\right)\right]^{1/2} \\
\frac{1}{a}\frac{da}{dt} &= H_0\left(\frac{1}{a^{3/2}}\right). \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Persamaan diatas kemudian diintegralkan, sehingga didapatkan solusi

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}. \qquad (4.2)$$

Setelah itu, solusi tersebut di plot menggunakan software Mathematica.



Gambar 4.1: Model Alam Semesta dengan Dominasi Materi

Alam semesta ini didominasi oleh materi. Bila ditinjau secara fisis alam semesta, keadaan ini terjadi saat awal mula alam semesta mulai terbentuk. Saat itu alam semesta memiliki jumlah materi yang sangat berlimpah, sehingga parameter radiasi, parameter konstanta kosmologi belum muncul saat itu. Selain itu, saat itu alam semesta belum mempunyai kelengkungan, sehingga alam semesta dapat dikatakan flat. Dari grafik terlihat bahwa alam semesta ini memiliki keadaan awal atau terbentuk dari big bang. Model ini biasa disebut sebagai model alam semesta Friedmann.

4.2 Model Alam Semesta Kedua

Untuk model alam semesta kedua ini diambil nilai $\Omega_{r,0} = 1$ dan nilai $\Omega_{m,0} = \Omega_{k,0} = \Omega_{\Lambda,0} = 0$. Nilai-nilai ini dimasukkan pada persamaan (3.27), sehingga didapatkan

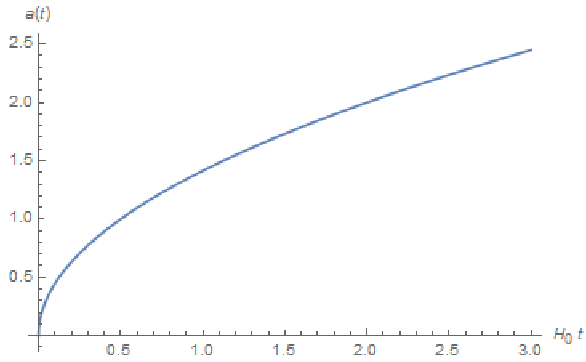
$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{1}{a^4} + \frac{0}{a^3} + \frac{0}{a^2} + 0\right) \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{1}{a^4}\right) \\
\frac{\dot{a}}{a} &= \left[H_0^2\left(\frac{1}{a^4}\right)\right]^{1/2} \\
\frac{1}{a}\frac{da}{dt} &= H_0\left(\frac{1}{a^2}\right). \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Persamaan (4.3) kemudian diintegralkan, sehingga didapatkan solusi

$$a(t) = (2H_0t)^{1/2}. \qquad (4.4)$$

Setelah itu, solusi tersebut di plot menggunakan software Mathematica (lihat gambar 4.2).

Alam semesta ini didominasi oleh radiasi. Bila ditinjau secara fisis alam semesta saat ini, jumlah radiasi sangatlah kecil, sehingga model ini tidak cocok untuk model alam semesta



Gambar 4.2: Model Alam Semesta dengan Dominasi Radiasi

sekarang. Dari grafik terlihat bahwa alam semesta ini mempunyai keadaan awal ($t = 0$) atau tercipta dari big bang.

4.3 Model Alam Semesta Ketiga

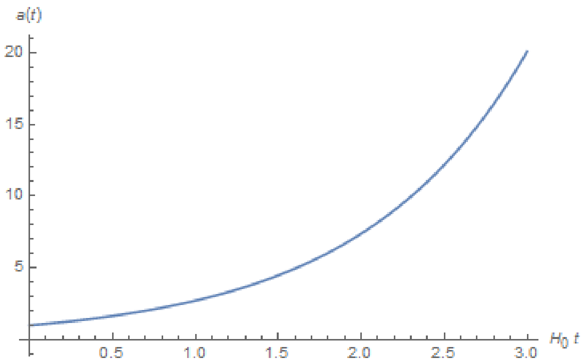
Untuk model alam semesta ketiga ini diambil nilai $\Omega_{\Lambda,0} = 1$ dan nilai $\Omega_{m,0} = \Omega_{k,0} = \Omega_{r,0} = 0$. Nilai-nilai ini dimasukkan pada persamaan (3.27), sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{0}{a^4} + \frac{0}{a^3} + \frac{0}{a^2} + 1\right) \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2(1) \\
\frac{\dot{a}}{a} &= \left(H_0^2\right)^{1/2} \\
\frac{1}{a}\frac{da}{dt} &= H_0. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Persamaan diatas kemudian diintegralkan, sehingga didapatkan solusi

$$a(t) = e^{H_0 t}. \tag{4.6}$$

Setelah itu, solusi tersebut di plot menggunakan software Mathematica.



Gambar 4.3: Model Alam Semesta dengan Dominasi Konstanta Kosmologi

Alam semesta ini didominasi oleh konstanta kosmologi. Bila ditinjau secara fisis alam semesta saat ini, konstanta kosmologi adalah penyebab terjadinya ekspansi alam semesta. Hanya saja, model ini mempunyai kekurangan. Terlihat dari grafik, keadaan awal alam semesta tidak mulai dari $t = 0$. Hal ini menyebabkam alam semesta tidak tercipta dari big bang.

4.4 Model Alam Semesta Keempat

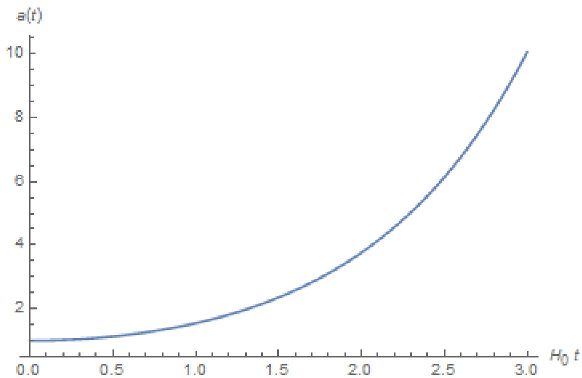
Model alam semesta keempat adalah pengembangan dari model alam semesta ketiga. Untuk model alam semesta ini diambil dua parameter yang memiliki nilai, yaitu $\Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{k,0} = 1$ dan nilai $\Omega_{m,0} = \Omega_{r,0} = 0$. Nilai-nilai ini dimasukkan pada persamaan (3.27), sehingga didapatkan

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{0}{a^4}+\frac{0}{a^3}+\frac{1}{a^2}+1\right) \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2(\frac{1}{a^2}+1) \\
\frac{\dot{a}}{a} &= \left[H_0^2\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\right]^{1/2} \\
\frac{1}{a}\frac{da}{dt} &= H_0\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Persamaan diatas kemudian diintegralkan, sehingga didapatkan solusi

$$a(t) = \sinh(H_0 t). \tag{4.8}$$

Setelah itu, solusi tersebut di plot menggunakan software Mathematica.



Gambar 4.4: Model Alam Semesta dengan Konstanta Kosmologi dan Kurvatur tidak Nol

Alam semesta ini didominasi oleh konstanta kosmologi namun mempunyai nilai kelengkungan yang lebih dari nol. Hal ini akan berimplikasi pada model alam semesta yaitu model alam semesta tertutup. Selain itu, nilai kelengkungan yang tidak nol akan menyebabkan jari-jari kelengkungannya tidak pernah nol sehingga jika ditinjau secara fisis alam semesta, model ini tidak mempunyai awal penciptaan atau big bang.

4.5 Model Alam Semesta Kelima

Model alam semesta kelima ini hampir menyerupai model alam semesta keempat. Perbedaannya adalah nilai parameter kurvatur yang diambil. Untuk model alam semesta ini diambil dua parameter yang memiliki nilai, yaitu $\Omega_{\Lambda,0} = 1$, $\Omega_{k,0} =$ -1 dan nilai $\Omega_{m,0} = \Omega_{r,0} = 0$. Nilai-nilai ini dimasukkan pada persamaan (3.27), sehingga didapatkan

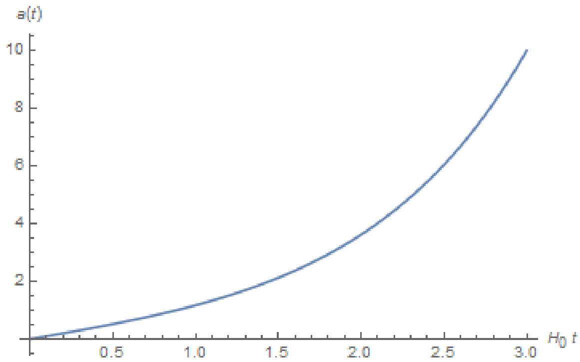
$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{0}{a^4}+\frac{0}{a^3}-\frac{1}{a^2}+1\right)\\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(-\frac{1}{a^2}+1\right)\\
\frac{\dot{a}}{a} &= \left[H_0^2\left(\frac{a^2-1}{a^2}\right)\right]^{1/2}\\
\frac{1}{a}\frac{da}{dt} &= H_0\left(\frac{a^2-1}{a^2}\right)^{1/2}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Persamaan diatas kemudian diintegralkan, sehingga didapatkan solusi

$$a(t) = \cosh(H_0 t). \qquad (4.10)$$

Setelah itu, solusi tersebut di plot menggunakan software Mathematica.

Sama seperti pada model alam semesta keempat, model alam semesta kelima ini didominasi oleh konstanta kosmologi dan mempunyai nilai parameter kurvatur yang kurang dari

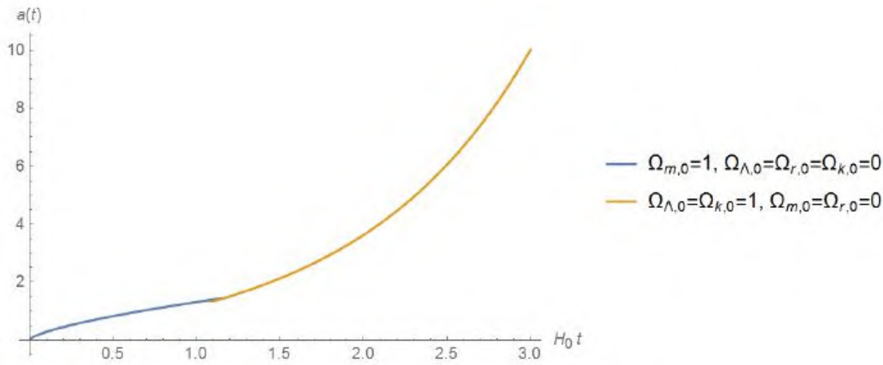


Gambar 4.5: Model Alam Semesta dengan Konstanta Kosmologi dan Kurvatur tidak Nol

nol. Hal ini akan berimplikasi pada model alam semesta yaitu model alam semesta terbuka. Perbedaan antara model alam semesta kelima dan keempat adalah model alam semesta kelima mempunyai awal atau tercipta dari big bang.

4.6 Model Alam Semesta Keenam

Model alam semesta keenam ini adalah model alam semesta dengan menggunakan tiga parameter yang tidak bernilai nol. Paramater-parameter tersebut adalah parameter materi, parameter kurvatur, dan parameter konstanta kosmologi. Diambil masing-masing nilai paramater, yaitu $\Omega_{m,0} = \Omega_{k,0} = \Omega_{\Lambda,0} = 1$ dan $\Omega_{r,0} = 0$. Hanya saja, untuk mendapatkan model alam semesta dengan menggunakan parameter ini, tidak dapat dengan memasukkan langsung nilai-nilai tersebut pada persamaan (3.27). Hal ini akan membuat perhitungan sangat sulit untuk dikerjakan. Sehingga model ini merupakan kombinasi dari dua model, yaitu model alam semesta yang hanya terdiri dari materi (grafik 4.1) saja kemudian dilanjutkan dengan model alam semesta yang terdiri dari konstanta kosmologi dan kurvatur positif (grafik 4.4).



Gambar 4.6: Model Alam Semesta dengan Konstanta Kosmologi, Materi dan Kurvatur tidak Nol

Model alam semesta ini memenuhi keadaan fisis alam semesta. Pada awal penciptaan, alam semesta memiliki kelimpahan materi yang sangat banyak. Seiring dengan perkembangan alam semesta, kelimpahan materi tersebut mulai berkurang, sehingga konstanta kosmologi mulai muncul dan mendominasi alam semesta. Kemudian, alam semesta yang dari awalnya tidak memiliki kurvatur setelah big bang, perlahan mulai mempunyai kelengkungan dan akan terus mengembang.

4.7 Model Alam Semesta Ketujuh

Untuk model alam semesta ini, diambil dua parameter yang tidak bernilai nol, yaitu $\Omega_{m,0}$ dan $\Omega_{\Lambda,0}$. Sementara itu, nilai $\Omega_{r,0} = \Omega_{k,0} = 0$. Model ini harus memenuhi syarat parameter

$$\begin{aligned}
\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} &= 1 \\
\Omega_{m,0} + 0 + \Omega_{\Lambda,0} &= 1 \\
\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} &= 1.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Nilai parameter-parameter tersebut dimasukkan ke persamaan (3.27) Sehingga didapatkan

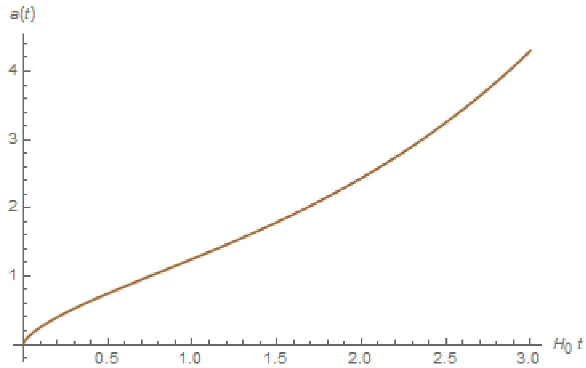
$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{0}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{0}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}\right) \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0}\right) \\
\frac{\dot{a}}{a} &= \left[H_0^2\left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0}\frac{a^3}{a^3}\right)\right]^{1/2} \\
\frac{1}{a}\frac{da}{dt} &= H_0\left(\frac{\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}a^3}{a^3}\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Persamaan diatas kemudian diintegralkan, sehingga didapatkan solusi

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3}{2}H_0 t\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\right). \tag{4.13}$$

Setelah itu, solusi tersebut diplot dengan menggunakan software Mathematica dengan menggunakan nilai $\Omega_{m,0}$ dan $\Omega_{\Lambda,0}$ yang bervariasi.

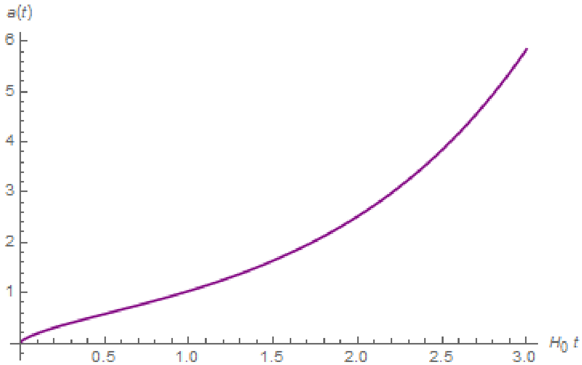
Alam semesta ini terdiri dari dua komponen, yaitu materi dan konstanta kosmologi. Dari grafik terlihat bahwa ketika jumlah materi lebih mendominasi dibandingkan dengan konstanta kosmologi, maka alam semesta berekspansi dengan lambat. Sebaliknya, ketika konstanta kosmologi lebih mendominasi bila dibandingkan dengan jumlah materi, maka pada satu



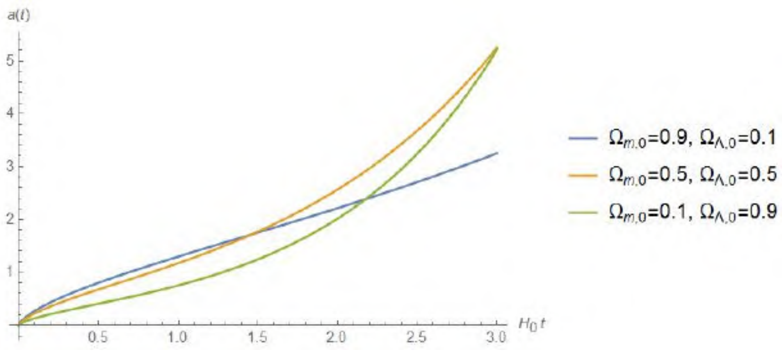
Gambar 4.7: Model Alam Semesta dengan $\Omega_{m,0}$=0.7 dan $\Omega_{\Lambda,0}$=0.3

titik alam semesta akan mulai berekspansi lebih cepat daripada alam semesta dengan dominasi materi.

Bila diinterpretasi menurut keadaan fisis alam semesta, keadaan materi lebih mendominasi dibanding konstanta kosmologi terjadi pada awal terciptanya alam semesta. Hal ini menghasilkan alam semesta yang linier saja. Setelah itu, seiring perkembangannya, perlahan konstanta kosmologi mulai mendominasi alam semesta, sehingga terjadi ekspansi dari yang awalnya linier menjadi eksponensial. Namun, ketiadaaan kurvatur membuat model alam semesta ini berbentuk datar.



Gambar 4.8: Model Alam Semesta dengan $\Omega_{m,0}$*=0.3 dan* $\Omega_{\Lambda,0}$*=0.7*



Gambar 4.9: Model Alam Semesta dengan $\Omega_{m,0}$ *dan* $\Omega_{\Lambda,0}$ *yang bervariasi*

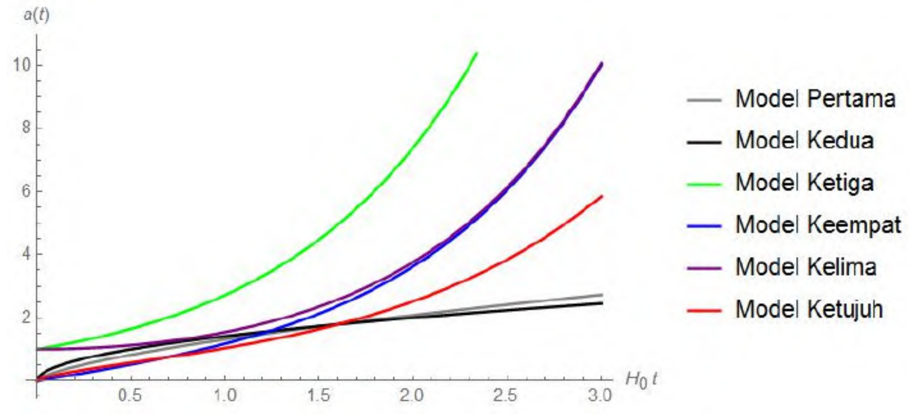
BAB 5

DISKUSI

Persamaan Medan Einstein dengan Konstanta Kosmologi yang tidak nol ini mempunyai berbagai macam solusi, salah satunya adalah solusi Friedmann. Solusi Friedmann yang didapatkan ada dua, yaitu jenis pertama dan kedua. Untuk melakukan pemodelan alam semesta, solusi yang digunakan adalah Persamaan Friedmann jenis pertama. Sementara itu, Persamaan Friedmann jenis kedua digunakan untuk mendapatkan parameter-parameter alam semesta yang digunakan untuk memodifikasi Persamaan Friedmann jenis pertama (Carroll, 2001).

Namun sebelum dilakukan pemodelan, solusi ini harus dimodifikasi terlebih dahulu agar sesuai dengan keadaan fisis alam semesta. Setelah itu, didapatkan parameter-parameter yang mempengaruhi pemodelan alam semesta, yaitu parameter materi ($\Omega_{m,0}$), parameter radiasi ($\Omega_{r,0}$), parameter kurvatur ($\Omega_{k,0}$), dan parameter konstanta kosmologi ($\Omega_{\Lambda,0}$). Dengan memasukkan syarat-syarat parameter dan beberapa pengecualian, maka didapatkan tujuh model alam semesta. Namun pada grafik dibawah hanya akan dibandingkan enam model alam semesta karena model alam semesta keenam merupakan kombinasi dari alam semesta pertama dan keempat

Dari gambar 5.1, hanya dua model alam semesta saja yang tidak dipengaruhi oleh konstanta kosmologi, yaitu model alam semesta pertama yang hanya berisi materi saja dan model alam semesta kedua yang hanya berisi radiasi saja. Sementara itu, model alam semesta ketiga hingga model alam semesta ketujuh semuanya dipengaruhi oleh konstanta kosmologi. Hal ini



Gambar 5.1: Perbandingan dari Model-model Alam Semesta

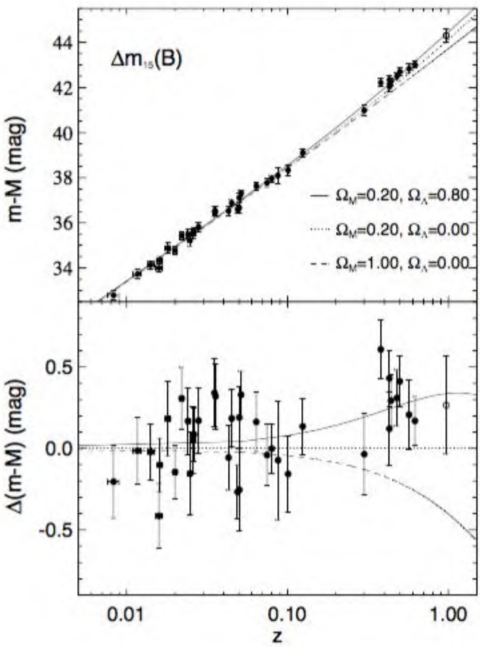
memperlihatkan pengaruh konstanta kosmologi yang cukup mencolok. Untuk model alam semesta yang tidak dipengaruhi oleh konstanta kosmologi, terlihat bahwa alam semesta tersebut mengembang secara linier kemudian pada suatu titik hampir konstan atau tidak mengalami ekspansi sama sekali. Sebaliknya, ketika model alam semesta diberikan pengaruh konstanta kosmologi, maka perlahan-lahan model tersebut akan mengalami ekspansi terus-menerus secara eksponensial.

Dari model-model tersebut, ada dua model alam semesta yang tidak dimulai dari big bang, yaitu model alam semesta ketiga dan keempat. Model alam semesta ketiga hanya berisi konstanta kosmologi saja. Hal ini dapat diinterpretasikan bahwa kehadiran konstanta kosmologi saat penciptaan alam semesta belum ada. Begitu pula dengan model alam semesta keempat. Alam semesta ini berisi konstanta kosmologi dan memiliki kurvatur positif (k=1). Hal ini dapat diinterpretasikan bahwa pada awal penciptaan, alam semesta belum memiliki kelengkungan atau masih datar(k=0).

Sementara itu, dari ketujuh alam semesta yang telah dimodelkan, ada satu model alam semesta yang cocok untuk alam semesta saat ini, yaitu model alam semesta ketujuh. Model ini memiliki nilai $\Omega_{m,0}$ dan $\Omega_{\Lambda,0}$ bervariasi, sehingga diperlukan nilai parameter yang tepat agar didapatkan model alam semesta yang sesuai. Untuk menentukan nilai yang dibutuhkan, maka model alam semesta ini haruslah sesuai dengan hasil observasi. Pada tahun 1998, Adam G. Riess dan sekelompok astronom menemukan bukti bahwa alam semesta mengembang. Riess dan timnya meneliti pergeseran merah yang dialami oleh bintang Supernovae Ia dan menyimpulkan bahwa pergeseran merah tersebut dipengaruhi oleh konstanta kosmologi yang ditunjukkan pada grafik berikut
Dari gambar 5.2, terlihat bahwa nilai parameter yang digunakan adalah $\Omega_{m,o}$= 0.20 dan $\Omega_{\Lambda,0}$=0.80. Nilai-nilai parameter tersebut dimasukkan ke model alam semesta ketujuh sehingga didapatkan grafik seperti pada gambar 5.3.

Ketika grafik pada gambar 5.2 dan grafik pada gambar 5.3 dibandingkan, maka masih terdapat perbedaan. Pada gambar 5.2, grafik ekspansi alam semesta tidak terlalu terlihat, sementara pada gambar 5.3 terlihat bahwa alam semesta mengalami ekspansi yang cukup mencolok. Bila perbedaan itu diinterpretasikan pada keadaan alam semesta sekarang, maka ada dua kemungkinan yang bisa didapatkan. Pertama, umur alam semesta masih sangat muda. Pada gambar 5.3, sumbu x menunjukkan prediksi umur alam semesta, sehingga dapat dikatakan alam semesta masih berada di daerah $0 < H_0 t < 1$. Kedua, model alam semesta yang terlihat pada gambar 5.3 merupakan prediksi dari model alam semesta yang didapatkan oleh observasi Riess dan timnya.

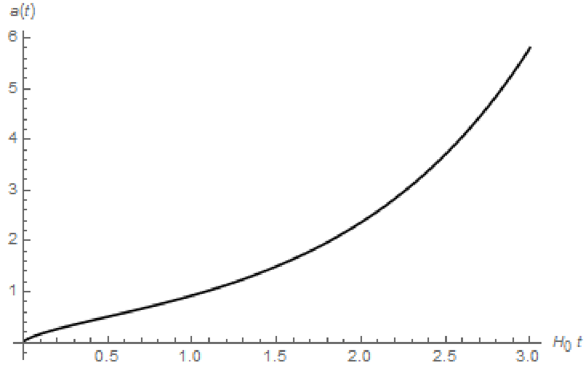
Hasil observasi ini tentu saja mengubah pandangan ilmuwan-ilmuwan mengenai model standar alam semesta yang digunakan. Saat persamaan Medan Einstein pertama kali diru-



Gambar 5.2: Pergeseran Merah Oleh Bintang Supernovae Ia (Riess et al.,1998)

muskan oleh Einstein, model alam semesta pertama yang muncul adalah model Einsten-de Sitter. Model ini dibuat oleh de Sitter yang mengatakan bahwa alam semesta statis dan hanya berisi materi saja. Model ini telah diuraikan pada subbab 4.1.

Setelah itu, Friedmann mengusulkan adanya pengaruh konstanta kosmologi yang mengatakan bahwa alam semesta mengembang. Namun kontroversi yang muncul pada saat itu membuat konstanta kosmologi diragukan dan dihapuskan keberadaannya oleh ilmuwan. Beberapa tahun kemudian, tepatnya pada tahun 1998, hasil observasi Riess et al. membuka babak baru



Gambar 5.3: Model Alam Semesta dengan $\Omega_{m,0}$= *0.20 dan* $\Omega_{\Lambda,0}$=*0.80*

dalam memodelkan alam semesta: konstanta kosmologi ada dan membuat alam semesta mengembang. Sehingga muncul satu pertanyaan, apakah bentuk dari konstanta kosmologi ini? Hingga saat ini, jawaban untuk pertanyaan tersebut adalah konstanta kosmologi di alam semesta berupa energi gelap. Energi ini merupakan energi hipotesis yang belum dapat dideteksi keberadaannya, namun membuat alam semesta mengalami ekspansi.

Halaman ini sengaja dikosongkan

LAMPIRAN A

Detail Penurunan Rumus

A.1 Persamaan Medan Einstein dengan Konstanta Kosmologi

Aksi medan gravitasi pada ruang vakum

$$S_G = \frac{1}{2\kappa}\int_M \mathcal{L}_G\left(g_{\mu\nu}, \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}d^4x \tag{A.1}$$

Bentuk dari $\mathcal{L}_G$ adalah

$$\mathcal{L}_G = R - 2\Lambda \tag{A.2}$$

Pers.(A.2)disubstitusikan ke pers.(A.1)

$$S_G = \frac{1}{2\kappa}\int_M (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x \tag{A.3}$$

jika dilakukan variasi terhadap S_G di atas, maka

$$\begin{aligned}
\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa}\int \delta\left(\sqrt{-g}R - 2\sqrt{-g}\Lambda\right)d^4x, \text{dengan } R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2\kappa}\int \delta\left(\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - 2\sqrt{-g}\Lambda\right)d^4x \\
&= \frac{1}{2\kappa}\int (R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu} \\
&\quad -2\Lambda\delta\sqrt{-g})d^4x
\end{aligned} \tag{A.4}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\delta\left(\sqrt{-g}R\right) &= \delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) \\
&= \left(\delta\sqrt{-g}\right)g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu}\right)R_{\mu\nu} \\
&\quad +\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\delta R_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

karena

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{A.6}$$

maka

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g}\delta g \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(-g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Subetitusi pers.(A.7) ke pers.(A.5)

$$\begin{aligned}
\delta\left(\sqrt{-g}R\right) &= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu}\right) R_{\mu\nu} \\
&\quad +\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\left(\delta R_{\mu\nu}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} R + \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu}\right) R_{\mu\nu} \\
&\quad +\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\left(\delta R_{\mu\nu}\right) \\
&= \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\left(\delta R_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

dengan suku ke-3 adalah

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\rho}\right) \\
&= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}\right) \\
&\quad + g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} + g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\nu} \\
&\quad - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\rho} - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\rho} \\
&\quad + \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\nu\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\nu\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}_{\text{suku tambahan=0}} \\
&= g^{\mu\nu}\delta\underbrace{\left(\partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}\right)}_{\rho\to\lambda} \\
&\quad + g^{\mu\nu}\underbrace{\left(\Gamma^\rho_{\nu\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\rho_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)}_{\rho\to\gamma} \\
&\quad + \underbrace{g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}}_{\lambda\to\mu,\mu\to\rho,\rho\to\lambda} + \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\nu}}_{\rho\leftrightarrow\nu} \\
&\quad \underbrace{-g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\rho}}_{\lambda\to\mu,\mu\to\rho,\rho\to\lambda} - \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\nu\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}_{\nu\leftrightarrow\rho} \\
&= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \\
&\quad + g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\gamma_{\nu\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \\
&\quad + g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} + g^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \\
&\quad - g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - g^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \\
&= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \\
&\quad + g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\gamma_{\nu\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \\
&\quad - \left(-g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\lambda} - g^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\lambda}\right)\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \\
&\quad + \left(-g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\nu} - g^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\nu}\right)\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

Karena turunan kovarian tensor metrik adalah nol

$$\begin{aligned} D_\lambda g^{\mu\nu} &= \partial_\lambda g^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} g^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\lambda} g^{\mu\rho} = 0 \\ \partial_\lambda g^{\mu\nu} &= -\Gamma^\mu_{\rho\lambda} g^{\rho\nu} - \Gamma^\nu_{\rho\lambda} g^{\mu\rho} \end{aligned} \tag{A.10}$$

dan

$$\begin{aligned} D_\nu g^{\mu\nu} &= \partial_\nu g^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} g^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\nu} g^{\mu\rho} = 0 \\ \partial_\nu g^{\mu\nu} &= -\Gamma^\mu_{\rho\nu} g^{\rho\nu} - \Gamma^\nu_{\rho\nu} g^{\mu\rho} \end{aligned} \tag{A.11}$$

pers.(A.10) dan pers.(A.11) disubstitusikan ke pers.(A.9)

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right) - g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \\ &\quad -\partial_\lambda g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \partial_\nu g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \\ &\quad +g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\gamma_{\nu\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \\ &= g^{\mu\nu}\partial_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right) - g^{\mu\nu}\partial_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \\ &\quad -\partial_\lambda g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \partial_\nu g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \\ &\quad +g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\gamma_{\nu\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \\ &= \underbrace{\partial_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)}_{\lambda\leftrightarrow\nu} - \partial_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \\ &\quad + \underbrace{\Gamma^\gamma_{\nu\gamma}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)}_{\lambda\leftrightarrow\nu} - \Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \\ &= \partial_\lambda\left(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right) \\ &\quad +\Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\left(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{A.12}$$

didefinisikan vektor-4

$$A^\lambda = g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{A.13}$$

serta menggunakan nilai simbol Christoffel

$$\Gamma^\gamma_{\lambda\gamma} = \partial_\lambda \ln\sqrt{-g} \tag{A.14}$$

pers.(A.13) dan pers.(A.14) disubstitusikan ke dalam pers.(A.12) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \partial_\lambda A^\lambda + \Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}A^\lambda \\ &= \partial_\lambda A^\lambda + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda \ln\sqrt{-g}A^\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}A^\lambda\right) \end{aligned} \tag{A.15}$$

substitusi pers.(A.15) ke dalam pers.(A.8)

$$\begin{aligned} \delta\left(\sqrt{-g}R\right) &= \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}A^\lambda\right) \\ &= \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}A^\lambda\right) \end{aligned} \tag{A.16}$$

Pers.(A.16) disubstitusikan pers.(A.4) sehingga

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \frac{1}{2\kappa}\int_M \left\{\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + 2\Lambda\delta\sqrt{-g}\right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\omega^\lambda\right)}_{=0(\text{teorema } Gauss)}\right\} d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa}\int_\Omega \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} d^4x \end{aligned} \tag{A.17}$$

Sedangkan aksi oleh massa sumber adalah

$$\delta S_M = \int_M \partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) d^4x \tag{A.18}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) &= \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{gg^{\mu\nu}\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(-\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-\sqrt{-g}\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(\frac{1}{2}(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

karena

$$T^{\mu\nu} = -2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M, \tag{A.20}$$

maka

$$
\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) &= \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M + 2\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\gamma\mu}g^{\lambda\nu}T_{\gamma\lambda}\delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\gamma\lambda}g^{\gamma\mu}g^{\lambda\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\gamma\lambda}\delta g^{\gamma\lambda} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{A.21}
$$

pers.(A.21) disubstitusikan ke pers.(A.18) sehingga didapatkan

$$
\delta S_M = -\frac{1}{2}\int_M \sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{A.22}
$$

Aksi total adalah

$$
\begin{aligned}
S &= S_G + S_M \\
\delta S &= \delta S_G + \delta S_M = 0 \\
\delta S_G &= -\delta S_M
\end{aligned} \tag{A.23}
$$

dari pers.(A.17) dan pers.(A.22), didapatkan

$$
\begin{aligned}
\delta S_G &= -\delta S_M \\
\frac{1}{2\kappa}\int_M \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} d^4x &= -\left(-\frac{1}{2}\right. \\
&\qquad \left.\int_M \sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) \\
\frac{1}{2\kappa}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right) &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \\
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} \qquad \text{(A.24)}
\end{aligned}
$$

didefinisikan

$$\kappa = 8\pi G \qquad \text{(A.25)}$$

maka

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \qquad \text{(A.26)}$$

Pers.(A.26) adalah persamaan medan Einstein dengan konstanta kosmologi.

A.2 Metrik FLRW

Diketahui koordinat Euclid tiga dimensi

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{(A.27)}$$

Dengan mengambil asumsi bahwa alam semesta mempunyai kelengkungan, sehingga koordinat tersebut ditransformasi ke koordinat bola dengan

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta \qquad \text{(A.28)}
\end{aligned}
$$

maka

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi \\
&= \frac{\partial r \sin\theta cos\phi}{\partial r}dr + \frac{\partial r \sin\theta cos\phi}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial r \sin\theta cos\phi}{\partial \phi}d\phi \\
&= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi \quad \text{(A.29)}
\end{aligned}
$$

Hal yang sama dilakukan pada elemen garis y

$$
\begin{aligned}
dy &= \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi \\
&= \frac{\partial r \sin\theta\sin\phi}{\partial r}dr + \frac{\partial r \sin\theta\sin\phi}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial r \sin\theta\sin\phi}{\partial \phi}d\phi \\
&= \sin\theta\sin\phi dr + r\sin\phi\cos\theta d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \quad \text{(A.30)}
\end{aligned}
$$

begitu juga dengan elemen garis z

$$
\begin{aligned}
dz &= \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta \\
&= \frac{\partial r\cos\theta}{\partial r}dr + \frac{\partial r\cos\theta}{\partial \theta}d\theta \\
&= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \qquad \text{(A.31)}
\end{aligned}
$$

Kemudian persamaan (A.29), (A.30), dan (A.31) dikuadratkan

$$
\begin{aligned}
dx^2 &= (\sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi)^2 \\
&= \sin^2\theta\cos^2\phi dr^2 + r^2\cos^2\theta\cos^2\phi d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi d\phi^2 \\
&\quad + r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi dr d\theta - r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi dr d\phi \\
&\quad + r\sin\theta\cos^2\phi\cos\theta dr d\theta - r^2\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi d\theta d\phi \\
&\quad - r\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi dr d\phi - r^2\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi d\theta d\phi \\
&= \sin^2\theta\cos^2\phi dr^2 + r\cos^2\theta\cos^2\phi d\theta^2 + r\sin^2\theta\sin^2\phi d\phi^2 \\
&\quad + 2r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi dr d\theta - 2r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi dr d\phi \\
&\quad - 2r^2\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi d\theta d\phi \qquad \text{(A.32)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dy^2 &= (\sin\theta\sin\phi dr + r\sin\phi\cos\theta d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi)^2 \\
&= \sin^2\theta\sin^2\phi dr^2 + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi d\phi^2 \\
&\quad + r\sin\theta\sin^2\phi\cos\theta dr d\theta + r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi dr d\phi \\
&\quad + r\sin\theta\sin^2\phi\cos\theta dr d\theta + r^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi\cos\theta d\theta d\phi \\
&\quad + r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi dr d\phi + r^2\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi d\theta d\phi \\
&= \sin^2\theta\sin^2\phi dr^2 + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi d\phi^2 \\
&\quad + 2r\sin\theta\sin^2\phi\cos\theta dr d\theta + 2r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi dr d\phi \\
&\quad + 2r^2\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi d\theta d\phi \qquad \text{(A.33)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dz^2 &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^2 \\
&= \cos^2\theta dr^2 - 2r\sin\theta\cos\theta dr d\theta + r^2\sin^2\theta d\theta^2 \qquad \text{(A.34)}
\end{aligned}
$$

maka didapatkan

$$
\begin{aligned}
dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
&= \sin^2\theta\cos^2\phi dr^2 + r\cos^2\theta\cos^2\phi d\theta^2 + r\sin^2\theta\sin^2\phi d\phi^2 \\
&\quad + 2r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi dr d\theta - 2r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi dr d\phi \\
&\quad - 2r^2\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi d\theta d\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi dr^2 \\
&\quad + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi d\phi^2 \\
&\quad + 2r\sin\theta\sin^2\phi\cos\theta dr d\theta + 2r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi dr d\phi \\
&\quad + 2r^2\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi d\theta d\phi + \cos^2\theta dr^2 \\
&\quad - 2r\sin\theta\cos\theta dr d\theta + r^2\sin^2\theta d\theta^2 \\
&= [\sin^2\theta\cos^2\phi dr^2 + \sin^2\theta\sin^2\phi dr^2 + \cos^2 dr^2 \\
&\quad + r^2 cos^2\theta\cos^2\phi d\theta^2 + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta d\theta^2 + r\sin^2 d\theta^2 \\
&\quad + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi d\phi^2 + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi d\phi^2] \rightarrow \text{Suku Pertama} \\
&\quad + [2r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi dr d\theta + 2r\sin\theta\sin^2\phi\cos\theta dr d\theta \\
&\quad - 2r\sin\theta\cos\theta dr d\theta] \rightarrow \text{Suku Kedua} \qquad \text{(A.35)}
\end{aligned}
$$

Solusi untuk suku pertama

$$\begin{aligned}
& \sin^2\theta\cos^2\phi dr^2+\sin^2\theta\sin^2\phi dr^2+\cos^2 dr^2+r^2cos^2\theta\cos^2\phi d\theta^2\\
& +r^2\sin^2\phi\cos^2\theta d\theta^2+r\sin^2 d\theta^2+r^2\sin^2\theta\sin^2\phi d\phi^2\\
& +r^2\sin^2\theta\cos^2\phi d\phi^2\\
= & (\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+cos^2\theta)dr^2\\
& +(r^2\cos^2\theta\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)d\theta^2\\
& +(r^2\sin^2\theta\sin^2\phi+r^2\sin^2\theta cos^2\phi)d\phi^2\\
= & [\sin^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+cos^2\theta]dr^2+[r^2\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\\
& +r^2\sin^2\theta]d\theta^2+[r^2\sin^2\theta(\sin^2\phi+cos^2\phi)]d\phi^2\\
= & (sin^2\theta+\cos^2\theta)dr^2+(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)d\theta^2+(r^2\sin^2\theta)d\phi^2\\
= & dr^2+r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2\\
= & dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2 \qquad \text{(A.36)}
\end{aligned}$$

Solusi untuk suku kedua

$$\begin{aligned}
& 2r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi drd\theta+2r\sin\theta\sin^2\phi\cos\theta drd\theta\\
& -2r\sin\theta\cos\theta drd\theta\\
= & 2r\sin\theta\cos\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)drd\theta-2r\sin\theta\cos\theta drd\theta\\
= & 2r\sin\theta\cos\theta drd\theta-2r\sin\theta\cos\theta drd\theta\\
= & 0 \qquad \text{(A.37)}
\end{aligned}$$

Sehingga dengan mensubtitusi persamaan (A.33) dan (A.32) ke persamaan (A.31), didapatkan transformasi koordinatnya

$$\begin{aligned}
dl^2 &= dx^2+dy^2+dz^2\\
&= dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2 \qquad \text{(A.38)}
\end{aligned}$$

Didefinisikan kurvatur untuk 4 - dimensi

$$R^2=x^2+y^2+z^2+w^2 \qquad \text{(A.39)}$$

dengan

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{A.40}$$

sehingga

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 + w^2 \\ w^2 &= R^2 - r^2 \end{aligned} \tag{A.41}$$

Persamaan (A.37) didiferensialkan

$$\begin{aligned} 2wdw &= -2rdr \\ dw &= \frac{-r}{w}dr \\ dw^2 &= \left(-r\frac{dr}{w}\right)^2 \\ &= \left[-r\frac{dr}{(R^2-r^2)^{1/2}}\right]^2 \\ &= r^2\left(\frac{dr^2}{R^2-r^2}\right) \end{aligned} \tag{A.42}$$

maka didapatkan koordinat baru dengan penambahan kurvatur

$$\begin{aligned}
dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \\
&= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + r^2 \frac{dr^2}{R^2 - r^2} \\
&= dr^2 \left(1 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}\right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \\
&= dr^2 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2} + \frac{r^2}{R^2 - r^2}\right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \\
&= dr^2 \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \\
&= dr^2 \left[\frac{R^2}{(R^2 - r^2)\frac{R^2}{R^2}}\right] + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \\
&= dr^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \qquad \text{(A.43)}
\end{aligned}$$

Diperkenalkan simbol kurvatur $k = \frac{1}{R^2}$, sehingga persamaan tersebut menjadi

$$dl^2 = dr^2 \left(\frac{1}{1 - kr^2}\right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \qquad \text{(A.44)}$$

Salah satu asas kosmologi FLRW adalah alam semesta yang isotropik, sehingga diperkenalkan persamaan metrik FLRW

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dl^2 \qquad \text{(A.45)}$$

diambil nilai $c = 1$, sehingga didapatkan bentuk akhir dari metrik FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[dr^2 \left(\frac{1}{1 - kr^2}\right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right] \qquad \text{(A.46)}$$

A.3 Solusi Friedmann

Didapatkan metrik FLRW

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t)\left[dr^2\left(\frac{1}{1-kr^2}\right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right] \\ &= -dt^2 + \frac{a^2 t}{1-kr^2} + a^2(t) r^2 d\theta^2 + a^2(t) r^2 \sin^2\theta d\varphi \end{aligned} \tag{A.47}$$

sehingga didapatkan metrik $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{A.48}$$

Setelah itu, metrik kontravarian dari $g_{\mu\nu}$ dapat dutentukan

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{A.49}$$

Langkah selanjutnya adalah mencari nilai dari simbol Christoffel jenis kedua dengan persamaan

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{A.50}$$

Untuk menghitung nilai dari simbol christoffel, digunakan nilai $\mu = \nu = \lambda = \sigma = 0, 1, 2, 3$. Untuk $\lambda = \sigma = 0$

$\mu = 0,\ \nu = 0$

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(-1)}{\partial t}\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.51}$$

$\mu = 0,\ \nu = 1$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) \\ &= -\frac{1}{2}[0 + \frac{\partial(-1)}{\partial r} - 0] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.52}$$

$\mu = 0,\ \nu = 2$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{02} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{20} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{02}) \\ &= -\frac{1}{2}\left[0 + \frac{\partial(-1)}{\partial \theta} - 0\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.53}$$

$\mu = 0,\ \nu = 3$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{03} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{30} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03}) \\ &= -\frac{1}{2}\left[0 + \frac{\partial(-1)}{\partial \varphi} - 0\right] \\ = 0 & \end{aligned} \tag{A.54}$$

$\mu = 1,\ \nu = 0$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{10} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{10} - \partial_0 g_{10}) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(-1)}{\partial r} + 0 - 0\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.55}$$

$\mu = 1,\ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) \\
&= -\frac{1}{2}\left[0 + 0 - \frac{\partial\left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right)}{\partial t}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{kr^2}\right)\left[\frac{\partial(a^2)}{\partial t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-kr^2}\right)(2a)(\dot{a}) \\
&= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \qquad \text{(A.56)}
\end{aligned}$$

$\mu = 1,\ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{12} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{10} - \partial_0 g_{12}) \\
&= -\frac{1}{2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.57)}
\end{aligned}$$

$\mu = 1,\ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{13} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{10} - \partial_0 g_{13}) \\
&= -\frac{1}{2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.58)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2,\ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{20} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{20} - \partial_0 g_{20}) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(-1)}{\partial\theta} + 0 - 0\right] \\
&= 0 \qquad \text{(A.59)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2,\ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{21} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{10} + \partial_1 g_{20} - \partial_0 g_{21}) \\
&= -\frac{1}{2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.60}$$

$\mu = 2,\ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{22}) \\
&= -\frac{1}{2}\left[0 + 0 - (\frac{\partial a^2 r^2)}{\partial t}\right] \\
&= -\frac{1}{2}(-r^2)\left[-\frac{\partial(a^2)}{\partial t}\right] \\
&= \frac{1}{2}(r^2)(2a)(\dot{a}) \\
&= r^2 a\dot{a}
\end{aligned} \tag{A.61}$$

$\mu = 2,\ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{23} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{20} - \partial_0 g_{23}) \\
&= -\frac{1}{2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.62}$$

$\mu = 3,\ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{30} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{30} - \partial_0 g_{30}) \\
&= -\frac{1}{2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.63}$$

$\mu = 3,\ \nu = 1$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{31} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{10} + \partial_1 g_{30} - \partial_0 g_{31}) \\ &= -\frac{1}{2}(0+0-0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.64}$$

$\mu = 3,\ \nu = 2$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{32} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{20} + \partial_2 g_{30} - \partial_0 g_{32}) \\ &= -\frac{1}{2}(0+0-0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.65}$$

$\mu = 3,\ \nu = 3$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}) \\ &= -\frac{1}{2}\left[0+0-\left(\frac{\partial a^2 r^2 \sin^2\theta}{\partial t}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[-r^2\sin^2\theta\left(\frac{\partial a^2}{\partial t}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}(r^2 2a\dot{a}\sin^2\theta) \\ &= r^2 a\dot{a}\sin^2\theta \end{aligned} \tag{A.66}$$

Untuk $\lambda = \sigma = 1$

$\mu = 0,\ \nu = 0$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{01} - \partial_1 g_{00}) \\ &= \frac{1-kr^2}{2a^2}\left[0+0-\frac{\partial(-1)}{\partial r}\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.67}$$

$\mu = 0,\ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{01} - \partial_1 g_{10}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}\left[\frac{\partial\left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right)}{\partial t} + 0 - 0\right] \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}\frac{1}{1-kr^2}\frac{\partial(a^2)}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2a^2}(2a\dot{a}) \\
&= \frac{\dot{a}}{a} \qquad \text{(A.68)}
\end{aligned}$$

$\mu = 0,\ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{02} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{01} - \partial_1 g_{02}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.69)}
\end{aligned}$$

$\mu = 0,\ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{03} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{01} - \partial_1 g_{03}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.70)}
\end{aligned}$$

$\mu = 1,\ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{10} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{01} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{10}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}\left[0 + \frac{\partial\left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right)}{\partial t} - 0\right] \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}\frac{1}{1-kr^2}\frac{\partial(a^2)}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2a^2}2a\dot{a} \\
&= \frac{\dot{a}}{a}
\end{aligned} \tag{A.71}$$

$\mu = 1,\ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}\left[\frac{\partial\left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right)}{\partial r}\right] \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(a^2)\frac{\partial\left(\frac{1}{1-kr^2}\right)}{\partial t} \\
&= \frac{1-kr^2}{2}\left[-\frac{(-2kr)}{(1-2kr^2)^2}\right] \\
&= \frac{kr}{1-kr^2}
\end{aligned} \tag{A.72}$$

$\mu = 1,\ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(0 + \frac{\partial(\frac{a^2}{1-kr^2})}{\partial\theta} - 0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.73}$$

$\mu = 1,\ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{13} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(0 + \frac{\partial(\frac{a^2}{1-kr^2})}{\partial\varphi} - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.74)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2,\ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{20} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{01} + \partial_0 g_{21} - \partial_1 g_{20}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.75)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2,\ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{21} - \partial_1 g_{21}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}\left[\frac{\partial\left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right)}{\partial\theta} + 0 - 0\right] \\
&= 0 \qquad \text{(A.76)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2,\ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}\left[0 + 0 - \left(\frac{\partial(a^2r^2)}{\partial r}\right)\right] \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(a^2)\left[-(\frac{\partial(r^2)}{\partial r})\right] \\
&= \frac{1-kr^2}{2}(2r) \\
&= -r(1-kr^2) \qquad \text{(A.77)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2, \ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{23} &= \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{21} - \partial_1 g_{23}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(0+0-0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.78}$$

$\mu = 3, \ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{30} &= \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{01} + \partial_0 g_{31} - \partial_1 g_{30}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(0+0-0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.79}$$

$\mu = 3, \ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{31} &= \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{31} - \partial_1 g_{31}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}\left[\frac{\partial\left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right)}{\partial\varphi} + 0 - 0\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.80}$$

$\mu = 3, \ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{32} &= \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{21} + \partial_2 g_{31} - \partial_1 g_{32}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(0+0-0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.81}$$

$\mu = 3,\ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}\left[0 + 0 - \left(\frac{\partial(a^2 r^2 \sin^2\theta)}{\partial r}\right)\right] \\
&= \frac{1-kr^2}{2a^2}(a^2\sin^2\theta)\left[-(\frac{\partial(r^2)}{\partial r})\right] \\
&= \frac{1-kr^2}{2}(2r)(\sin^2\theta) \\
&= -r(1-kr^2)\sin^2\theta \qquad \text{(A.82)}
\end{aligned}$$

Untuk $\lambda = \sigma = 2$

$\mu = 0,\ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.83)}
\end{aligned}$$

$\mu = 0,\ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{01} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{02} - \partial_2 g_{01}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.84)}
\end{aligned}$$

$\mu = 0,\ \nu = 2$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{02} - \partial_2 g_{02}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}\left[\frac{\partial(a^2r^2)}{\partial t} + 0 - 0\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}(r^2)\frac{\partial(a^2)}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2a^2}(2a)(\dot{a}) \\
&= \frac{\dot{a}}{a}
\end{aligned} \tag{A.85}
$$

$\mu = 0,\ \nu = 3$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{03} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{02} - \partial_2 g_{03}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.86}
$$

$\mu = 1,\ \nu = 0$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{10} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{02} + \partial_0 g_{12} - \partial_2 g_{10}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.87}
$$

$\mu = 1,\ \nu = 1$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{10}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}\left[0 + 0 - \frac{\partial\left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right)}{\partial\theta}\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.88}
$$

$\mu = 1,\ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}\left[\frac{\partial(a^2r^2)}{\partial r} + 0 - 0\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}(a^2)\left[\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\right] \\
&= \frac{1}{2r^2}(2r) \\
&= \frac{1}{r} \qquad \text{(A.89)}
\end{aligned}$$

$\mu = 1,\ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{13} &= \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{12} - \partial_2 g_{13}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.90)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2,\ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{20} &= \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}\left[0 + \frac{\partial(a^2r^2)}{\partial t} - 0\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}(r^2)\frac{\partial(a^2)}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2a^2}(2a)(\dot{a}) \\
&= \frac{\dot{a}}{a} \qquad \text{(A.91)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2, \ \nu = 1$

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}) \\ &= \frac{1}{2a^2 r^2} \left[0 + \frac{\partial (a^2 r^2)}{\partial r} - 0 \right] \\ &= \frac{1}{2a^2 r^2} (a^2) \left[\frac{\partial (r^2)}{\partial r} \right] \\ &= \frac{1}{2r^2} (2r) \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned} \tag{A.92}$$

$\mu = 2, \ \nu = 2$

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) \\ &= \frac{1}{2a^2 r^2} \left[\frac{\partial (a^2 r^2)}{\partial \theta} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.93}$$

$\mu = 2, \ \nu = 3$

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{23} &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) \\ &= \frac{1}{2a^2 r^2} \left[0 + \frac{\partial (a^2 r^2)}{\partial \varphi} - 0 \right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.94}$$

$\mu = 3, \ \nu = 0$

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{30} &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{02} + \partial_0 g_{32} - \partial_2 g_{30}) \\ &= \frac{1}{2a^2 r^2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.95}$$

$\mu = 3, \ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{31} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{12} + \partial_1 g_{32} - \partial_2 g_{31}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.96)}
\end{aligned}$$

$\mu = 3, \ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{32} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{32} - \partial_2 g_{32}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}\left[\frac{\partial(a^2r^2)}{\partial\varphi} + 0 - 0\right] \\
&= 0 \qquad \text{(A.97)}
\end{aligned}$$

$\mu = 3, \ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}\left[0 + 0 - \frac{\partial(a^2r^2\sin^2\theta)}{\partial\theta}\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2}(-a^2r^2)\frac{\partial(\sin^2\theta)}{\partial\theta} \\
&= -\frac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta) \\
&= -\sin\theta\cos\theta \qquad \text{(A.98)}
\end{aligned}$$

Untuk $\lambda = \sigma = 3$

$\mu = 0, \ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{00} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}\left[0 + 0 - \frac{\partial(-1)}{\partial\varphi}\right] \\
&= 0 \qquad \text{(A.99)}
\end{aligned}$$

$\mu = 0, \ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{01} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{03} - \partial_3 g_{01}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(0+0-0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.100}$$

$\mu = 0, \ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{02} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{03} - \partial_3 g_{02}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(0+0-0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.101}$$

$\mu = 0, \ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{03} - \partial_3 g_{03}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial(a^2r^2\sin^2\theta)}{\partial t} + 0 - 0\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(r^2\sin^2\theta)\left[\frac{\partial(a^2)}{\partial t}\right] \\
&= \frac{1}{2a^2}(2a)(\dot{a}) \\
&= \frac{\dot{a}}{a}
\end{aligned} \tag{A.102}$$

$\mu = 1, \ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{10} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{03} + \partial_0 g_{13} - \partial_3 g_{10}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(0+0-0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.103}$$

$\mu = 1,\ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{11} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}\left[0 + 0 - \frac{\partial\left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right)}{\partial\varphi}\right] \\
&= 0 \qquad \text{(A.104)}
\end{aligned}$$

$\mu = 1,\ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{12} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{13} - \partial_3 g_{12}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.105)}
\end{aligned}$$

$\mu = 1,\ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{13} - \partial_3 g_{13}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial(a^2r^2\sin^2\theta)}{\partial r} + 0 - 0\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(a^2\sin^2\theta)\left[\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\right] \\
&= \frac{1}{2r^2}(2r) \\
&= \frac{1}{r} \qquad \text{(A.106)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2,\ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{20} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{23} - \partial_3 g_{20}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.107)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2,\ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{21} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{13} + \partial_1 g_{23} - \partial_3 g_{21}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \qquad \text{(A.108)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2,\ \nu = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{22} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}\left[0 + 0 - \frac{\partial(a^2r^2)}{\partial\varphi}\right] \\
&= 0 \qquad \text{(A.109)}
\end{aligned}$$

$\mu = 2,\ \nu = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial(a^2r^2\sin^2\theta)}{\partial\theta} + 0 - 0\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(a^2r^2)\left[\frac{\partial(\sin^2\theta)}{\partial\theta}\right] \\
&= \frac{1}{2sin^2\theta}(2\sin\theta\cos\theta) \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{1}{\tan\theta} \qquad \text{(A.110)}
\end{aligned}$$

$\mu = 3, \ \nu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{30} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}\left[0 + \frac{\partial(a^2r^2\sin^2\theta)}{\partial t} - 0\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(r^2\sin^2\theta)\left[\frac{\partial(a^2)}{\partial t}\right] \\
&= \frac{1}{2a^2}(2a)(\dot{a}) \\
&= \frac{\dot{a}}{a} \qquad \text{(A.111)}
\end{aligned}$$

$\mu = 3, \ \nu = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{31} &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}\left[0 + \frac{\partial(a^2r^2sin^2\theta)}{\partial r} - 0\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(a^2\sin^2\theta)\left[\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\right] \\
&= \frac{1}{2r^2}(2r) \\
&= \frac{1}{r} \qquad \text{(A.112)}
\end{aligned}$$

$\mu = 3,\ \nu = 2$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{32} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}\left[0 + \frac{\partial(a^2r^2\sin^2\theta)}{\partial\theta} - 0\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(a^2r^2)\left[\frac{\partial(\sin^2\theta)}{\partial\theta}\right] \\
&= \frac{1}{2\sin^2\theta}(2\sin\theta\cos\theta) \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned}
\tag{A.113}
$$

$\mu = 3,\ \nu = 3$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{33} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2a^2r^2 s \in^2 \theta}\left[\frac{\partial(a^2r^2\sin^2\theta)}{\partial\varphi}\right] \\
&= \frac{1}{2a^2r^2\sin^2\theta}(0) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{A.114}
$$

Sehingga didapatkan simbol Christoffel yang memiliki nilai

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \\
\Gamma^0_{22} &= r^2 a\dot{a} \\
\Gamma^0_{33} &= r^2 a\dot{a}\sin^2\theta \\
\Gamma^1_{01} &= \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma^1_{11} &= \frac{kr}{1-kr^2} \\
\Gamma^1_{22} &= -r(1-kr^2) \\
\Gamma^1_{33} &= -r(1-kr^2)\sin^2\theta \\
\Gamma^2_{21} &= \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned}
\tag{A.115}
$$

Selanjutnya adalah menghitung nilai tensor Ricci dengan persamaan

$$
R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \tag{A.116}
$$

Untuk tensor Ricci yang bernilai tidak sama dengan 0 mempunyai syarat nilai $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$, sehingga didapatkan

Untuk $\mu = \nu = 0$ dan $\lambda = \sigma = 0,1,2,3$

$$\begin{aligned}
R_{00} \quad = \quad & (\partial_0\Gamma^0_{00} + \partial_1\Gamma^1_{00} + \partial_2\Gamma^2_{00} + \partial_3\Gamma^3_{00}) - (\partial_0\Gamma^0_{00} \\
& +\partial_0\Gamma^1_{10} + \partial_0\Gamma^2_{20} + \partial_0\Gamma^3_{30}) + (\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} \\
& +\Gamma^0_{02}\Gamma^2_{00} + \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{00} + \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00}\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{00} \\
& +\Gamma^1_{13}\Gamma^3_{00} + \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{00} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{00} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{00} \\
& +\Gamma^3_{30}\Gamma^0_{00} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{00} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{00} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{00}) - (\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} \\
& +\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{00} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{10} \\
& +\Gamma^1_{20}\Gamma^2_{10} + \Gamma^1_{30}\Gamma^3_{10} + \Gamma^2_{00}\Gamma^0_{20} + \Gamma^2_{10}\Gamma^1_{20} + \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{20} \\
& +\Gamma^2_{30}\Gamma^3_{20} + \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{30} + \Gamma^3_{10}\Gamma^1_{30} + \Gamma^3_{20}\Gamma^2_{30} + \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{30})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & [\frac{\partial(0)}{\partial t} + \frac{\partial(0)}{\partial r} + \frac{\partial(0)}{\partial\theta} + \frac{\partial(0)}{\partial\varphi}] - [\frac{\partial(0)}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{\dot{a}}{a})}{\partial t} \\
& + \frac{\partial(\frac{\dot{a}}{a})}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{\dot{a}}{a})}{\partial t}] + [(0.0) + (0.0) + (0.0) + (0.0) \\
& +(\frac{\dot{a}}{a}.0) + (\frac{kr}{1-kr^2}.0) + (0.0) + (0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.0) \\
& +(\frac{1}{r}.0) + (0.0) + (0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.0) + (\frac{1}{r}.0) + (\frac{1}{r}.0) \\
& +(\frac{1}{tan\theta}.0) + (0.0)] - [(0.0) + (0.0) + (0.0) \\
& +(0.0) + (0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.\frac{\dot{a}}{a}) + (0.0) + (0.0) + (0.0) \\
& +(0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.\frac{\dot{a}}{a}) + (0.0) + (0.0) + (0.0) + (0.0) \\
& +(\frac{\dot{a}}{a}.\frac{\dot{a}}{a})]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad 0 - 3(\frac{a\ddot{a} - \dot{a}}{a^2}) + 0 - 3(\frac{\dot{a}}{a})^2 \\
&= \quad -3(\frac{a\ddot{a} - \dot{a}}{a^2}) - 3(\frac{\dot{a}}{a})^2 \\
&= \quad -3(\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \dot{a}^2}{a^2}) \\
&= \quad -3(\frac{a\ddot{a}}{a^2}) \\
&= \quad -\frac{3\ddot{a}}{a} \qquad \text{(A.117)}
\end{aligned}
$$

Untuk $\mu = \nu = 1$ dan $\lambda = \sigma = 0{,}1{,}2{,}3$

$$
\begin{aligned}
R_{11} \quad = \quad & (\partial_0\Gamma^0_{11} + \partial_1\Gamma^1_{11} + \partial_2\Gamma^2_{11} + \partial_3\Gamma^3_{11}) - (\partial_1\Gamma^0_{01} \\
& +\partial_1\Gamma^1_{11} + \partial_1\Gamma^2_{21} + \partial_1\Gamma^3_{31}) + (\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{11} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{11} \\
& +\Gamma^0_{02}\Gamma^2_{11} + \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{11} + \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} \\
& +\Gamma^1_{13}\Gamma^3_{11} + \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{11} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{11} \\
& +\Gamma^3_{30}\Gamma^0_{11} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{11} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{11}) - (\Gamma^0_{01}\Gamma^0_{01} \\
& +\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{21}\Gamma^2_{01} + \Gamma^0_{31}\Gamma^3_{01} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} \\
& +\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{11} + \Gamma^2_{01}\Gamma^0_{21} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{21} \\
& +\Gamma^2_{31}\Gamma^3_{21} + \Gamma^3_{01}\Gamma^0_{31} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{31} + \Gamma^3_{21}\Gamma^2_{31} + \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{31})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & [\frac{\partial(\frac{a\dot{a}}{1-kr^2})}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{kr}{1-kr^2})}{\partial r} + \frac{\partial(0)}{\partial\theta} + \frac{\partial(0)}{\partial\varphi}] - [\frac{\partial(0)}{\partial r} + \frac{\partial(\frac{kr}{1-kr^2})}{\partial r} \\
& + \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} + \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r}] + [(0.\frac{a\dot{a}}{1-kr^2}) + (0.\frac{kr}{1-kr^2}) + (0.0) + (0.0) \\
& + (\frac{\dot{a}}{a}.\frac{a\dot{a}}{1-kr^2}) + (\frac{kr}{1-kr^2}.\frac{kr}{1-kr^2}) + (0.0) + (0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.\frac{a\dot{a}}{1-kr^2}) \\
& + (\frac{1}{r}.\frac{kr}{1-kr^2}) + (0.0) + (0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.\frac{a\dot{a}}{1-kr^2}) + (\frac{1}{r}.\frac{kr}{1-kr^2}) \\
& + (\frac{1}{\tan\theta}.0) + (0.0)] - [(0.0) + (\frac{a\dot{a}}{1-kr^2}.\frac{\dot{a}}{a}) + (0.0) \\
& + (0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.\frac{a\dot{a}}{1-kr^2}) + (\frac{kr}{1-kr^2}.\frac{kr}{1-kr^2}) + (0.0) + (0.0) \\
& + (0.0) + (0.0) + (\frac{1}{r}.\frac{1}{r}) + (0.0) + (0.0) + (0.0) + (0.0) \\
& + (\frac{1}{r}.\frac{1}{r})] \\
= \quad & [\frac{1}{1-kr^2}\frac{\partial(a\dot{a})}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{kr}{1-kr^2})}{\partial r}] - [\frac{\partial(\frac{kr}{1-kr^2})}{\partial r} + 2(-\frac{1}{r})] \\
& + [\frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{k^2r^2}{(1-kr^2)^2} + \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{k}{1-kr^2} \\
& + \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{k}{1-kr^2}] - [\frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} \\
& + \frac{k^2r^2}{(1-kr^2)^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}] \\
= \quad & (\frac{\dot{a}\dot{a} + a\ddot{a}}{1-kr^2}) + \frac{2}{r^2} + \frac{2k}{1-kr^2} + \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} - \frac{2}{r^2} \\
= \quad & \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2} + \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} \\
= \quad & \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2} \qquad \text{(A.118)}
\end{aligned}
$$

Untuk $\mu = \nu = 2$ dan $\lambda = \sigma = 0,1,2,3$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= (\partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22} + \partial_2 \Gamma^2_{22} + \partial_3 \Gamma^3_{22}) - (\partial_2 \Gamma^0_{02} \\
&\quad + \partial_2 \Gamma^1_{12} + \partial_2 \Gamma^2_{22} + \partial_2 \Gamma^3_{32}) + (\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{22} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{22} \\
&\quad + \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{22} + \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{22} + \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{22} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{22} \\
&\quad + \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{22} + \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{22} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{22} \\
&\quad + \Gamma^3_{30}\Gamma^0_{22} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{22}) - (\Gamma^0_{02}\Gamma^0_{02} \\
&\quad + \Gamma^0_{12}\Gamma^1_{20} + \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{32}\Gamma^3_{02} + \Gamma^1_{02}\Gamma^0_{12} + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} \\
&\quad + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{32}\Gamma^3_{12} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{22} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{22} \\
&\quad + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{02}\Gamma^0_{32} + \Gamma^3_{12}\Gamma^1_{32} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{32}\Gamma^3_{32}) \\
&= [\frac{\partial(a\dot{a}r^2)}{\partial t} + \frac{\partial(-r(1-kr^2))}{\partial r} + \frac{\partial(0)}{\partial \theta} + \frac{\partial(0)}{\partial \varphi}] \\
&\quad -[\frac{\partial(0)}{\partial \theta} + \frac{\partial(0)}{\partial \theta} + \frac{\partial(0)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\frac{1}{\tan\theta})}{\partial \theta}] + [(0.a\dot{a}r^2) \\
&\quad +(0.-r(1-kr^2)) + (0.0) + (0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.a\dot{a}r^2) \\
&\quad +(\frac{kr}{1-kr^2}.-r(1-kr^2)) + (0.0) + (0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.a\dot{a}r^2) \\
&\quad +(\frac{1}{r}.-r(1-kr^2)) + (0.0) + (0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.a\dot{a}r^2) \\
&\quad +(\frac{1}{r}.-r(1-kr^2)) + (\frac{1}{\tan\theta}.0) + (0.0)] \\
&\quad -[(0.0) + (0.0) + (a\dot{a}r^2.\frac{\dot{a}}{a}) + (0.0) + (0.0) + (0.0) \\
&\quad +(-r(1-kr^2).\frac{kr}{1-kr^2}) + (0.0) + (a\dot{a}r^2.\frac{\dot{a}}{a}) \\
&\quad +(\frac{1}{r}.-r(1-kr^2)) + (0.0) + (0.0) + (0.0) + (0.0) \\
&\quad +(0.0) + (\frac{1}{\tan\theta}.\frac{1}{\tan\theta})] \\
&= r^2\frac{\partial(a\dot{a})}{\partial t} - \frac{\partial(r-kr^3)}{\partial r} - (-\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta}) + [\dot{a}r^2 + (-kr^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +(kr^2-1)+\dot{a}r^2+(kr^2-1)]-[\dot{a}r^2+(kr^2-1)+\dot{a}r^2 \\
& +(kr^2-1)+\frac{1}{\tan^2\theta}] \\
= \quad & r^2(\dot{a}\dot{a}+a\ddot{a})-(1-3kr^2)+\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta})-kr^2+\dot{a}r^2-\frac{1}{\tan^2\theta} \\
= \quad & r^2\dot{a}^2+r^2a\ddot{a}-1+3kr^2+\frac{1}{\sin^2\theta}-kr^2+r^2\dot{a}^2-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \\
= \quad & r^2\dot{a}^2+r^2a\ddot{a}+2kr^2+\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-1 \\
= \quad & 2r^2\dot{a}^2+r^2a\ddot{a}+2kr^2+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}-1 \\
= \quad & 2r^2\dot{a}^2+r^2a\ddot{a}+2kr^2 \qquad \text{(A.119)}
\end{aligned}
$$

Untuk $\mu = \nu = 3$ dan $\lambda = \sigma = 0,1,2,3$

$$
\begin{aligned}
R_{33} \quad = \quad & (\partial_0\Gamma^0_{33}+\partial_1\Gamma^1_{33}+\partial_2\Gamma^2_{33}+\partial_3\Gamma^3_{33})-(\partial_3\Gamma^0_{03} \\
& +\partial_3\Gamma^1_{13}+\partial_3\Gamma^2_{23}+\partial_3\Gamma^3_{33})+(\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{33}+\Gamma^0_{01}\Gamma^1_{33} \\
& +\Gamma^0_{02}\Gamma^2_{33}+\Gamma^0_{03}\Gamma^3_{33}+\Gamma^1_{10}\Gamma^0_{33}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{33}\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{33} \\
& +\Gamma^1_{13}\Gamma^3_{33}+\Gamma^2_{20}\Gamma^0_{33}+\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{33}+\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{33}+\Gamma^2_{23}\Gamma^3_{33} \\
& +\Gamma^3_{30}\Gamma^0_{33}+\Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33}+\Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33}+\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{33})-(\Gamma^0_{03}\Gamma^0_{03} \\
& +\Gamma^0_{13}\Gamma^1_{03}+\Gamma^0_{23}\Gamma^2_{03}+\Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03}+\Gamma^1_{03}\Gamma^0_{13}+\Gamma^1_{13}\Gamma^1_{13} \\
& +\Gamma^1_{23}\Gamma^2_{13}+\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13}+\Gamma^2_{03}\Gamma^0_{23}+\Gamma^2_{13}\Gamma^1_{23}+\Gamma^2_{23}\Gamma^2_{23} \\
& +\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}+\Gamma^3_{03}\Gamma^0_{33}+\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33}+\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{33}+\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{33})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & [\frac{\partial(a\dot{a}r^2\sin^2\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(-r(1-kr^2)\sin^2\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(-\sin\theta\cos\theta)}{\partial\theta} \\
& + \frac{\partial(0)}{\partial\varphi}] - [\frac{\partial(0)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(0)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(0)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(0)}{\partial\varphi}] + [(0.a\dot{a}r^2\sin^2\theta) \\
& + (\frac{\dot{a}}{a}. - r(1-kr^2)\sin^2\theta) + (0. - \sin\theta\cos\theta) \\
& + (\frac{\dot{a}}{a}.a\dot{a}r^2\sin^2\theta) + (0.0) + (\frac{kr}{1-kr^2}. - r(1-kr^2)\sin^2\theta) \\
& + (0. - \sin\theta\cos\theta) + (0.0) + (\frac{\dot{a}}{a}.a\dot{a}r^2\sin^2\theta) \\
& + (\frac{1}{r}. - r(1-kr^2)\sin^2\theta) + (0. - \sin\theta\cos\theta) + (0.0) \\
& + (\frac{\dot{a}}{a}.a\dot{a}r^2\sin^2\theta) + (\frac{1}{r}. - r(1-kr^2)\sin^2\theta) \\
& + (\frac{1}{\tan\theta}. - \sin\theta\cos\theta) + (0.0)] - [(0.0) + (0.0) + (0.0) \\
& + (a\dot{a}r^2\sin^2\theta.\frac{\dot{a}}{a}) + (0.0) + (0.0) + (0.0) \\
& + (-r(1-kr^2)\sin^2\theta.\frac{1}{r}) + (0.0) + (0.0) + (0.0) \\
& + (-\sin\theta\cos\theta.\frac{1}{\tan\theta}) + (\frac{\dot{a}}{a}.a\dot{a}r^2\sin^2\theta) \\
& + (\frac{1}{r}. - r(1-kr^2)\sin^2\theta) + (-\sin\theta\cos\theta.\frac{1}{\tan\theta})] \\
= \quad & r^2\sin^2\theta\frac{\partial(a\dot{a})}{\partial t} - \sin^2\theta\frac{\partial(r-kr^3)}{\partial r} - \frac{\partial(\sin\theta\cos\theta)}{\partial\theta} \\
& -k\sin^2\theta + \dot{a}^2r^2\sin^2\theta - (-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta}) \\
= \quad & r^2\sin^2\theta(\dot{a}\dot{a} + a\ddot{a}) - \sin^2\theta(1-3kr^3) - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
& -kr^2\sin^2\theta + \dot{a}^2r^2\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta(\frac{\cos\theta}{\sin\theta})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= r^2\sin^2\theta(\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \sin^2\theta + 3kr^3\sin^2\theta) - \cos^2\theta \\
&\quad + \sin^2\theta - kr^2\sin^2\theta + \dot{a}^2 r^2\sin^2\theta + \cos^2\theta \\
&= r^2\dot{a}^2\sin^2\theta + r^2 a\ddot{a}^2\sin^2\theta + 3kr^2\sin^2\theta - kr^2\sin^2\theta \\
&\quad + \dot{a}^2 r^2\sin^2\theta \\
&= r^2 a\ddot{a}^2\sin^2\theta + 2r^2\dot{a}^2\sin^2\theta + 2kr^2\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{A.120}
$$

Sehingga didapatkan nilai-nilai dari tensor Ricci

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{3\ddot{a}}{a} \\
R_{11} &= \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2} \\
R_{22} &= 2r^2\dot{a}^2 + r^2 a\ddot{a} + 2kr^2 \\
R_{33} &= r^2 a\ddot{a}^2\sin^2\theta + 2r^2\dot{a}^2\sin^2\theta + 2kr^2\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{A.121}
$$

Langkah berikutnya adalah mencari nilai dari skalar Ricci dengan persamaan

$$
R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \text{ dengan } \mu = \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{A.122}
$$

maka nilai dari skalar Ricci adalah

$$
\begin{aligned}
R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\
&= [-1(-\frac{3\ddot{a}}{a})] + [\frac{1-kr^2}{a^2}(\frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2})] \\
&\quad + [\frac{1}{a^2r^2}(2r^2\dot{a}^2 + r^2a\ddot{a} + 2kr^2)] \\
&\quad + [\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}(r^2a\ddot{a}^2\sin^2\theta + 2r^2\dot{a}^2\sin^2\theta + 2kr^2\sin^2\theta)] \\
&= [\frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2k}{a^2}] + [\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}] + [\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}] \\
&= \frac{6\ddot{a}}{a} + \frac{6\dot{a}^2}{a^2} + \frac{6k}{a^2}
\end{aligned} \tag{A.123}
$$

Setelah itu, dicari solusi Friedmann dengan menggunakan Persamaan Medan Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{A.124}$$

didefiniskan tensor energi-momentum pada cairan sempurna

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \tag{A.125}$$

dengan matrix U

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.126}$$

maka untuk $\mu = \nu = 0$

$$\begin{aligned}
R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} + \lambda g_{00} &= 8\pi G T_{00} \\
-\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}(\frac{6\ddot{a}}{a} + \frac{6\dot{a}^2}{a^2} + \frac{6k}{a^2})(-1) + \Lambda(-1) &= 8\pi G[(\rho + p)U_0 U_0 + p g_{00}] \\
-\frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} - \Lambda &= 8\pi G[(\rho + p)(1)(1) - p] \\
\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} - \Lambda &= 8\pi G(\rho + p - p) \\
\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} - \Lambda &= 8\pi G\rho \\
\frac{3\dot{a}^2}{a^2} &= 8\pi G\rho + \Lambda - \frac{3k}{a^2} \\
\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \\
H^2 \equiv (\frac{\dot{a}}{a})^2 &= \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad \text{(A.127)}
\end{aligned}$$

persamaan (A.129) adalah Persamaan Friedmann jenis pertama dan biasa disebut sebagai Parameter Hubble.
Untuk $\mu = \nu = 1$

$$
\begin{aligned}
R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} + \Lambda g_{11} &= 8\pi G T_{11} \\
R_{11} &= 8\pi G[(\rho + p)U_1 U_1 \\
&\quad +pg_{11}] - \Lambda g_{11} + \frac{1}{2}Rg_{11} \\
R_{11} &= 8\pi G[(\rho + p)(0)(0) \\
&\quad +pg_{11}] - \Lambda g_{11} + \frac{1}{2}Rg_{11} \\
R_{11} &= (8\pi G p - \Lambda + \frac{1}{2}Rg_{11})g_{11}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2}+\frac{a\ddot{a}}{1-kr^2}+\frac{2k}{1-kr^2} &= [8\pi Gp-\Lambda+\frac{1}{2}(\frac{6\ddot{a}}{a} \\
&\quad +\frac{6\dot{a}^2}{a^2}+\frac{6k}{a^2})]\ g_{11} \\
\frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2}+\frac{a\ddot{a}}{1-kr^2}+\frac{2k}{1-kr^2} &= (8\pi Gp-\Lambda+\frac{3\ddot{a}}{a} \\
&\quad +\frac{3\dot{a}^2}{a^2}+\frac{3k}{a^2})\ \frac{a^2}{1-kr^2} \\
(\frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2}+\frac{a\ddot{a}}{1-kr^2}+\frac{2k}{1-kr^2})\frac{a^2}{1-kr^2} &= (8\pi Gp-\Lambda+\frac{3\ddot{a}}{a} \\
&\quad +\frac{3\dot{a}^2}{a^2}+\frac{3k}{a^2}) \\
(\frac{2\dot{a}^2}{a^2}+\frac{a\ddot{a}}{a^2}+\frac{2k}{a^2}) &= (8\pi Gp-\Lambda+\frac{3\ddot{a}}{a} \\
&\quad +\frac{3\dot{a}^2}{a^2}+\frac{3k}{a^2}) \\
\frac{2\dot{a}^2}{a^2}-\frac{3\dot{a}^2}{a^2}+\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{3\ddot{a}}{a}+\frac{2k}{a^2}-\frac{3k}{a^2} &= 8\pi Gp-\Lambda \\
-\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{2\ddot{a}}{a}-\frac{k}{a^2} &= 8\pi Gp-\Lambda \\
-(\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{2\ddot{a}}{a}) &= 8\pi Gp-\Lambda+\frac{k}{a^2} \\
\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{2\ddot{a}}{a} &= -8\pi Gp+\Lambda-\frac{k}{a^2} \\
\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{2a^2} &= -4\pi Gp+\frac{\Lambda}{2}-\frac{k}{2a^2}
\end{aligned}
\tag{A.128}
$$

Untuk nilai $\mu=\nu=2,\ 3$ didapatkan hasil yang sama dengan nilai $\mu=\nu=1$. Dengan mengeliminasi persamaan (A.128) dengan persamaan (A.127), didapatkan

$$\begin{aligned}
-\frac{2\ddot{a}}{a} &= \frac{8\pi G\rho}{3} + 8\pi Gp + \frac{\Lambda}{3} - \Lambda - \frac{k}{a^2} + \frac{k}{a^2} \\
-\frac{2\ddot{a}}{a} &= \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{(3)8\pi Gp}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{3\Lambda}{3} \\
-\frac{2\ddot{a}}{a} &= \frac{8\pi G}{3}(\rho + 3p) - \frac{2\Lambda}{3} \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \qquad \text{(A.129)}
\end{aligned}$$

Persamaan (A.129) disebut sebagai Persamaan Friedmann jenis kedua.

A.4 Integral pada Model Alam Semesta

A.4.1 Model Alam Semesta Pertama

Pada model alam semesta pertama, digunakan $\Omega_{m,0}$=1, $\Omega_{r,0} = \Omega_{k,0} = \Omega_{\Lambda,0}$=0

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{1}{a^3}\right) \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) &= H_0^{\frac{2}{2}}\left(\frac{1}{a^{frac32}}\right) \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)a^{\frac{3}{2}} &= H_0^{\frac{2}{2}} \\
a^{\frac{1}{2}}\frac{da}{dt} &= H_0 \\
\int a^{\frac{1}{2}}da &= \int H_0 dt \\
\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} &= H_0 t \\
a^{\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2}H_0 t \\
a(t) &= \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{(A.130)}
\end{aligned}$$

A.4.2 Model Alam Semesta Kedua

Pada model alam semesta kedua, digunakan $\Omega_{r,0} = 1$, $\Omega_{m,0} = \Omega_{k,0} = \Omega_{\Lambda,0}$=0

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{1}{a^4}\right) \\
\frac{\dot{a}}{a} &= \frac{H_0}{a^2} \\
\frac{\dot{a}a^2}{a} &= H_0 \\
\int a\ da &= \int H_0 dt \\
\frac{a^2}{2} &= H_0 t \\
a^2 &= 2H_0 t \\
a(t) &= \sqrt{2H_0 t} \qquad \text{(A.131)}
\end{aligned}$$

A.4.3 Model Alam Semesta Ketiga

Pada model alam semesta ketiga, digunakan $\Omega_{\Lambda,0}$=1 ,$\Omega_{m,0} = \Omega_{k,0} = \Omega_{r,0}$=0

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2(1) \\
\frac{\dot{a}}{a} &= H_0 \\
\int \frac{da}{a} &= \int H_0 dt \\
lna &= H_0 t \\
a(t) &= e^{H_0 t} \qquad \text{(A.132)}
\end{aligned}$$

A.4.4 Model Alam Semesta Keempat

Pada model alam semesta ketiga, digunakan $\Omega_{\Lambda,0}$=1, $\Omega_{k,0} = 1, \Omega_{r,0} = \Omega_{m,0}$=0

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right) \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{a^2-1}{a^2}\right) \\
\frac{\dot{a}}{a} &= \frac{H_0}{a}\sqrt{a^2-1} \\
\int \frac{da}{\sqrt{a^2-1}} &= \int H_0 dt
\end{aligned}$$

dimisalkan $a = \cosh\theta \rightarrow \theta = \cosh^{-1} a$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sinh\ \theta\ d\theta}{\sqrt{\cosh^2\ \theta - 1}} &= H_0 t \\
\int \frac{\sinh\ \theta\ d\theta}{\sqrt{\sinh^2\ \theta}} &= H_0 t \\
\int \frac{\sinh\ \theta\ d\theta}{\sqrt{\sinh^2\ \theta}} &= H_0 t \\
\int d\theta &= H_0 t \\
\theta &= H_0 t \\
arc\ \cosh\ a &= H_0 t \\
a(t) &= \cosh(H_0 t) \qquad \text{(A.133)}
\end{aligned}$$

A.4.5 Model Alam Semesta Kelima

Pada model alam semesta ketiga, digunakan $\Omega_{\Lambda,0}$=1, $\Omega_{k,0}$=-1, dan $\Omega_{r,0} = \Omega_{m,0}$=0

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(1+\frac{1}{a^2}\right) \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right) \\
\frac{\dot{a}}{a} &= \frac{H_0}{a}\sqrt{a^2+1} \\
\int\frac{da}{\sqrt{a^2+1}} &= \int H_0 dt
\end{aligned}$$

dimisalkan $a = \sinh\theta \rightarrow \theta = \sinh^{-1} a$

$$\begin{aligned}
\int\frac{\cosh\ \theta\ d\theta}{\sqrt{\sinh^2\ \theta - 1}} &= H_0 t \\
\int\frac{\cosh\ \theta\ d\theta}{\sqrt{\cosh^2\ \theta}} &= H_0 t \\
\int\frac{\sinh\ \theta\ d\theta}{\sqrt{\sinh^2\ \theta}} &= H_0 t \\
\int d\theta &= H_0 t \\
\theta &= H_0 t \\
arc\ \sinh\ a &= H_0 t \\
a(t) &= \sinh(H_0 t) \qquad \text{(A.134)}
\end{aligned}$$

A.4.6 Model Alam Semesta Ketujuh

Pada model alam semesta ketiga, digunakan $\Omega_{m,0} > 0$, $\Omega_{\Lambda,0} < 0$, dan $\Omega_{k,0} = \Omega_{r,0} = 0$ dengan syarat

$$\begin{aligned}\Omega_{m,0} \neq 0,\ \Omega_{\Lambda,0} &\neq 0 \\ \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^2 &= H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} \right) \\
\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{a^3 \Omega_{\Lambda,0}}{a^3} \right) \\
\frac{\dot{a}}{a} &= \frac{H_0}{a^{\frac{3}{2}}} \left(\Omega_{m,0} + a^3 \Omega_{\Lambda,0} \right)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{\dot{a} a^{\frac{1}{2}}}{(\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} a^3)} &= H_0 \\
\int \left(\frac{a}{\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} a^3} \right)^{\frac{1}{2}} da &= \int H_0 dt
\end{aligned}$$

dimisalkan $b = \Omega_{m,0},\ f = \Omega_{\Lambda,0}$

$$\int \left(\frac{a}{b + f a^3} \right)^{\frac{1}{2}} da = \int \frac{1}{f^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{a}{\frac{b}{f} + a^3} \right)^{\frac{1}{2}} da$$

dimisalkan $a = \left(\frac{b}{f}\right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}} x \rightarrow x = arc\sinh\left(a\left(\frac{f}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$
maka

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{f^{\frac{1}{2}}}\int \frac{\left(\frac{b}{f}\right)\sinh^{\frac{1}{3}} x}{\left(\frac{b}{f}+\frac{b}{f}\sinh^2 x\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{b}{f}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}\sinh^{-\frac{1}{3}} x\cosh x dx \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{-1}{2}}\int \frac{\sinh^{\frac{1}{3}} x \ \sinh^{\frac{-1}{3}} x\cosh \ x \ \ dx}{(1+\sinh^2 x)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{f}\right)^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{-1}{3}}\int dx \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{f}\right)^{\frac{1+2-3}{6}}\int dx \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}} \ x \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}} arc\sinh \ a^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{f}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{\frac{1}{2}} arcsinh \ a^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

maka

$$
\begin{aligned}
\int \left(\frac{a}{\Omega_{m,0}+a^3\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{\frac{1}{2}} da &= \int H_0 dt \\
\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{\frac{1}{2}} arc\sinh\ a^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\right)^{\frac{1}{2}} &= H_0 t \\
arc\sinh\ a^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{3}{2}\ \Omega_{\Lambda,0}^{\frac{1}{2}} H_0 t \\
a^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\right)^{\frac{1}{2}} &= \sinh\ \frac{3}{2}\ \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0 t \\
a^{\frac{3}{2}} &= \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \sinh\ \frac{3}{2}\ \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0 t \\
a(t) &= \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad \sinh^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0 t\right)
\end{aligned}
\tag{A.135}
$$

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 6

PENUTUP

6.1 Kesimpulan

Dalam tugas akhir ini, telah dilakukan penurunan ulang metrik FLRW. Metrik tersebut kemudian dikerjakan pada Persamaan Medan Einstein dan didapatkan beberapa kesimpulan:

1. Solusi Friedmann yang didapatkan ada dua, yaitu Persamaan Friedmann jenis pertama yang digunakan untuk memodelkan alam semesta dan Persamaan Friedmann jenis kedua.

2. Persamaan Friedmann jenis pertama kemudian dimodifikasi agar sesuai dengan keadaan fisis alam semesta sehingga didapatkan parameter-parameter yang mempengaruhi pemodelan alam semesta, yaitu parameter materi $\Omega_{m,0}$, parameter radiasi $\Omega_{r,0}$, parameter kurvatur $\Omega_{k,0}$ dan parameter konstanta kosmologi $\Omega_{\Lambda,0}$.

3. Setelah didapatkan beberapa model alam semesta dan dibandingkan dengan hasil observasi, parameter konstanta kosmologi mempunyai pengaruh besar terhadap alam semesta, yaitu terjadinya ekspansi yang sangat mencolok bila dibandingkan dengan model alam semesta tanpa konstanta kosmologi. Konstanta kosmologi di alam semesta ini dikatakan sebagai energi gelap.

6.2 Saran

Penambahan konstanta kosmologi memberikan dampak yang sangat besar pada model alam semesta sehingga memberikan masalah-masalah baru yang belum terpecahkan dan memerlukan studi lebih lanjut, diantaranya:

1. Nilai tepat dari konstanta kosmologi, hasil observasi mengindikasikan nilai yang sangat kecil (Padmanabahan, 2003).

2. Hasil observasi terkini yaitu belum ditemukannya keberadaan energi gelap, sehingga memunculkan pertanyaan apakah konstanta kosmologi merupakan penyebab alam semesta mengembang (Friemann, 2008).

3. Hasil observasi terkini yaitu belum ditemukannya keberadaan energi gelap, sehingga memunculkan pertanyaan apakah konstanta kosmologi merupakan penyebab alam semesta mengembang (Friemann, 2008).

DAFTAR PUSTAKA

Bergstrom L., Goobar A. 2006. Cosmology and Particle Astrophysics (2nd ed.), Sprint: USA.

Carroll, Sean. 2001. The cosmological constant Living Reviews in Relativity 4: 1

Einstein, A. 1917. *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Koniglich Preußische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*. Berlin, Germany.

Einstein, A. 2005. *Relativity: The Special and General Theory*. PI PRESS, USA.

Frieman, Josh; Turner, Michael and Huterer, Dragan. 2008. Dark Energy and the Accelerating Universe Annual Review of Astronomy and Astrophysics 46: 385-432. arXiv:0803.0982

Gron, Oyvind; Hervik, Sigbjorn. 2007. *Einstein's General Theory of Relativity*. Springer: USA.

Newton, I. 1687. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.* Cambridge University Press: UK.

Ohanian, C; Ruffini R. 2013. *Gravitation and Spacetime 3rd Edition*. Cambridge University Press: UK.

Padmanabahan T. 2003. Cosmological Constant - The Weight of the Vacuum. arXiv:hep-th/0212290v2 26 Feb 2003.

Penzias, A.A.; R. W. Wilson (July 1965). *A Measurement Of Excess Antenna Temperature At 4080 Mc/s*. Astrophysical Journal Letters **142**: 419–421.

Riess et al. Observational Evidence From Supernovae For an Accelerating Universe and a Cosmological Constan. The Astronomical Journal, 116:1009-1038, 1998 September

Romeu, Joan Arnau. 2013. *Derivation of Friedman Equations*. Treballs Finals de Grau (TFG) – Física.

Ryden, B. 2002. *Introduction to Cosmology (1st ed.)*. Addison-Wesley: USA.

Weinberg, Steven. 1989. The cosmological constant problem Reviews of Modern Physics 61: 1-23

BIODATA PENULIS

Muhammad Ramadhan, merupakan penulis Tugas Akhir (TA) berjudul "**Pengaruh Konstanta Kosmologi Terhadap Model Standar Alam Semesta**".

Penulis lahir di Ujung Pandang pada 10 Maret 1993. Penulis menempuh pendidikan formal antara lain di SDN Kompleks IKIP Makassar, SMPN 1 Bandung, SMAN 2 Bandung dan pada tahun 2011 menjadi mahasiswa Jurusan Fisika FMIPA ITS. Semasa kuliah penulis aktif dalam kegiatan laboratorium sebagai asisten Laboratorium Fisika Dasar, Asisten Dosen Fisika Dasar, Operator Teleskop dari Ruang Teleskop dan anggota aktif dari Laboratorium Fisika Teori dan Filsafat Alam (LaFTiFA). Penulis juga aktif dalam organisasi mahasiswa eksternal yaitu Ikatan Pelajar/Mahasiswa Sulawesi Selatan (IKAMI SULSEL) Surabaya. Selain itu, penulis pernah mengikuti Program Kreativitas Mahasiswa (PKM) dari DIKTI, *Summer School: New Era of the Cosmic Distant Scale* 2015 di Universitas Tokyo, dan *Memorial Meeting for Professor Abdus Salam's 90th Birthday* di *Nanyang Technology University*. Penulis memiliki minat terhadap Astronomi, musik, dan novel fantasi. Setelah lulus, penulis ingin menggunakan latar belakang pendidikan untuk menjadi seorang ilmuwan dan suatu hari nanti memenangi nobel di bidang Fisika/Astronomi.

Muhammad Ramadhan
ramadhaanm@gmail.com

Halaman ini sengaja dikosongkan