TESIS – SM 142501

BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF HASIL AMALGAMASI SISI DARI DUA GRAF TERHUBUNG

FIQIH RAHMAN HARTIANSYAH
NRP 1212 201 203

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

THESIS – SM 142501

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF EDGE AMALGAMATION GRAPH OF TWO CONNECTED GRAPHS

FIQIH RAHMAN HARTIANSYAH
NRP 1212 201 203

SUPERVISOR
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

MASTER DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

BILANGAN KROMATIK LOKASI
PADA GRAF HASIL AMALGAMASI SISI
DARI DUA GRAF TERHUBUNG

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

oleh:
FIQIH RAHMAN HARTIANSYAH
NRP. 1212 201 203

Tanggal Ujian : 24 Juni 2016
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh:

Dr. Darmaji, S.Si., M.T. **(Pembimbing)**
NIP. 19691015 199412 1 001

Dr. Mahmud Yunus, M.Si. **(Penguji)**
NIP. 19620407 198703 1 005

Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. **(Penguji)**
NIP. 19611115 198703 1 003

Dr. Budi Setiyono, S.Si., M.T. **(Penguji)**
NIP.19720207 199702 1 001

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER PROGRAM PASCASARJANA

Direktur Program Pascasarjana

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF HASIL AMALGAMASI SISI DARI DUA GRAF TERHUBUNG

Nama Mahasiswa	: Fiqih Rahman Hartiansyah
NRP	: 1212 201 203
Jurusan	: Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	: Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

ABSTRAK

Misalkan c adalah pewarnaan-k simpul dari graf terhubung G dan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang dihasilkan. Untuk setiap $v \in V(G)$, kode warna dari v terhadap Π didefinisikan sebagai k-vektor: $c_\Pi(v) = \big(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k)\big)$, dimana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x): x \in C_i\}$ untuk $1 \le i \le k$. Jika setiap simpul di G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari G. Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua graf terhubung. Amalgamasi sisi dari graf G_1 dan graf G_2 dengan menggabungkan sisi $e \in E(G_1)$ dan sisi $f \in E(G_2)$, dinotasikan dengan $amal_s(G_1, G_2; e, f)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi e dari graf G_1 dan sisi f dari graf G_2 menjadi satu sisi g, dimana g adalah sisi bersama dari graf hasil $amal_s(G_1, G_2; e, f)$. Pada penelitian ini dapat ditentukan bilangan kromatik lokasi pada: graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e, f)$ dan graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e, f)$.

Kata kunci: pewarnaan lokasi, bilangan kromatik lokasi, graf hasil amalgamasi sisi.

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF EDGE AMALGAMATION GRAPH OF TWO CONNECTED GRAPHS

Name	: Fiqih Rahman Hartiansyah
Student Identity Number	: 1212 201 203
Department	: Mathematics FMIPA-ITS
Supervisor	: Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

ABSTRACT

Let c be a vertex k-coloring of a connected graph G and $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ be a partition of $V(G)$ into the resulting color classes. For each $v \in V(G)$, the color code of v with respect to Π is defined as the k-vector: $c_\Pi(v) = \big(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k)\big)$, where $d(v, C_i) = \min\{d(v, x): x \in C_i\}$ for $1 \le i \le k$. If each vertex of G have distinct color codes with respect to Π, then c is called a locating coloring of G. The locating chromatic number of G, denoted by $\chi_L(G)$ is the minimum number of colors in a locating coloring of G. Let G_1 and G_2 be two connected graphs. Edge amalgamation of graph G_1 and graph G_2 by amalgamating edge $e \in E(G_1)$ and edge $f \in E(G_2)$, denoted by $amal_s(G_1, G_2; e, f)$ is the graph obtained by amalgamating edge e of graph G_1 and edge f of graph G_2 into a single edge g, where g is common edge of graph $amal_s(G_1, G_2; e, f)$. In this research, the locating chromatic number of: graph $amal_s(C_m, C_n; e, f)$, graph $amal_s(C_m, S_n; e, f)$, graph $amal_s(C_m, K_n; e, f)$, graph $amal_s(S_m, S_n; e, f)$, graph $amal_s(S_m, K_n; e, f)$ and graph $amal_s(K_m, K_n; e, f)$ can be determined.

Keywords: locating coloring, locating chromatic number, edge amalgamation graph.

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat, Taufiq, dan Hidayah-Nya, serta suri tauladan junjungan Nabi Muhammad SAW sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **"Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Hasil Amalgamasi Sisi dari Dua Graf Terhubung"** sebagai salah satu prasyarat kelulusan Program Studi Magister (S-2) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penyusunan Tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
2. Direktur Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
4. Ketua Program Studi Magister Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
5. Dr. Darmaji, S.Si., M.T., selaku dosen wali dan dosen pembimbing yang senantiasa sabar dan telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, nasehat dan motivasi kepada penulis dalam penulisan Tesis ini.
6. Dr. Mahmud Yunus, M.Si., Dr. Chairul Imron, M.I.Komp., dan Dr. Budi Setiyono, S.Si., M.T., selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan juga saran kepada penulis sehingga Tesis ini dapat diselesaikan dengan baik.
7. Seluruh dosen Jurusan Matematika FMIPA ITS yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan, serta staf administrasi Jurusan Matematika atas segala bantuannya.

8. Kedua orang tua Bapak Hartono dan Ibu Mariyah Indrawati, serta Adikku Meivi Norma Rianti dan Veliana Safitri Wulandari yang senantiasa memberikan dukungan, doa dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.
9. Teman-teman Pascasarjana Matematika ITS angkatan 2012 dan 2013, serta semua pihak yang telah membantu dalam penulisan Tesis ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT selalu memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tesis ini.

Surabaya, Juli 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol	**Keterangan**
$G = (V, E)$	graf
$V(G)$	himpunan simpul dari G
$E(G)$	himpunan sisi dari G
$\|V(G)\|$	banyak simpul dari G
$\|E(G)\|$	banyak sisi dari G
$deg(v)$	derajat simpul v
$d(u, v)$	jarak simpul u ke simpul v
$diam(G)$	diameter graf G
$d(v, C_i)$	jarak simpul v ke kelas warna C_i
$\chi_L(G)$	bilangan kromatik lokasi dari G
$\chi(G)$	bilangan kromatik dari G
$pd(G)$	dimensi partisi dari G
C_n	graf sikel dengan *order* n
S_n	graf bintang dengan *order* $n + 1$
K_n	graf lengkap dengan *order* n
$\in$	elemen dari
$\subset$	himpunan bagian sejati dari
$\subseteq$	himpunan bagian dari
$amal_s(G_1, G_2; e, f)$	amalgamasi sisi dari graf G_1 dan graf G_2 dengan menggabungkan sisi $e \in E(G_1)$ dan sisi $f \in E(G_2)$
$\blacksquare$	pembuktian selesai

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang dapat menyelesaikan suatu permasalahan. Sehingga dengan merepresentasikan ke dalam bentuk graf maka suatu permasalahan yang ada menjadi lebih mudah dan sederhana. Graf, dinotasikan dengan $G = (V, E)$ adalah pasangan himpunan berhingga (V, E) dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut simpul (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan (boleh kosong) dengan elemen dari pasangan tak terurut (u, v) dengan $u, v \in V(G)$ dan $u \neq v$, yang disebut sisi (*edge*). Untuk penyederhanaan penulisan, sisi $e = (u, v) \in E(G)$ dapat ditulis $e = uv \in E(G)$ dan graf $G = (V, E)$ dapat ditulis G.

Banyak hal yang dapat dikembangkan dalam teori graf. Salah satu topik yang menjadi kajian adalah konsep pewarnaan lokasi pada graf yang merupakan pengembangan dari dua konsep dalam graf, yaitu pewarnaan simpul dan dimensi partisi pada graf. Kajian tentang pewarnaan lokasi pada graf merupakan kajian yang cukup baru dalam teori graf. Konsep pewarnaan lokasi untuk pertama kali dikenalkan oleh Chartrand, dkk. (2002).

Misalkan c adalah pewarnaan-k simpul dari graf terhubung G dan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang dihasilkan. Untuk setiap $v \in V(G)$, kode warna dari v terhadap Π didefinisikan sebagai k-vektor: $c_\Pi(v) = \big(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k)\big)$, dimana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x): x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap simpul di G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari G.

Penelitian tentang bilangan kromatik lokasi untuk pertama kali dikaji oleh Chartrand, dkk. (2002). Mereka menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf, diantaranya adalah graf lintasan, graf sikel, graf bintang ganda dan graf multipartit lengkap. Bilangan kromatik lokasi pada graf lintasan P_n adalah 3 untuk $n \geq 3$. Pada graf sikel diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Sedangkan pada graf bintang ganda diperoleh $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$ untuk $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$. Misalkan graf terhubung G berorder $n \geq 3$, maka $\chi_L(G) = n$ jika dan hanya jika graf multipartit lengkap. Sehingga bilangan kromatik lokasi pada graf lengkap K_n adalah n. Chartrand, dkk. (2003) juga mengkarakterisasi semua graf terhubung G berorder n dengan bilangan kromatik lokasi $n - 1$ dan $n - 2$.

Asmiati, dkk. (2011) menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi simpul dari k buah graf bintang. Bilangan kromatik lokasi pada graf bintang S_n adalah $n + 1$. Beberapa penulis juga menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf-graf hasil operasi, diantaranya adalah Baskoro dan Purwasih (2012) menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil korona dari dua graf, Behtoei dan Anbarloei (2014) menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil join dari dua graf. Berdasarkan uraian di atas, dalam tesis ini ditentukan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari dua graf terhubung.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan bilangan kromatik lokasi pada: graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e, f)$ dan graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e, f)$.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi pada graf yang diteliti adalah hasil amalgamasi sisi dari: graf sikel dengan graf sikel, graf sikel dengan graf bintang, graf sikel dengan graf lengkap, graf bintang dengan graf bintang, graf bintang dengan graf lengkap dan graf lengkap dengan graf lengkap.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada: graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e, f)$, graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e, f)$ dan graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e, f)$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah memberikan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup bilangan kromatik lokasi pada graf, yaitu mengetahui bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari dua graf terhubung.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Terminologi Dasar Graf

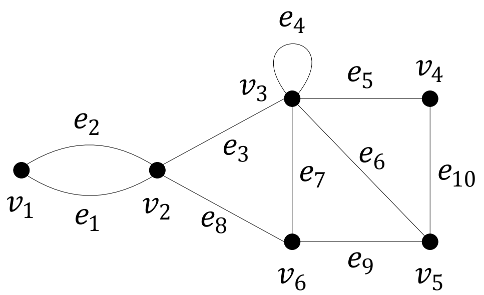
Graf, dinotasikan dengan $G = (V, E)$ adalah pasangan himpunan berhingga (V, E) dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut simpul (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan (boleh kosong) dengan elemen dari pasangan tak terurut (u, v) dengan $u, v \in V(G)$ dan $u \neq v$, yang disebut sisi (*edge*). Untuk penyederhanaan penulisan, sisi $e = (u, v) \in E(G)$ dapat ditulis $e = uv \in E(G)$ dan graf $G = (V, E)$ dapat ditulis G. Banyak simpul dari graf G disebut *order* dari G, dinotasikan dengan $|V(G)|$ sedangkan banyak sisi dari graf G disebut *size* dari G, dinotasikan dengan $|E(G)|$. Jika terdapat sebuah sisi antara u dan v, yaitu $e = uv \in E(G)$ maka simpul u dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan simpul v sedangkan sisi e dikatakan melekat (*incident*) dengan simpul u dan v.

Derajat (*degree*) simpul v, dinotasikan $deg(v)$ adalah banyak sisi yang melekat pada simpul v. Simpul dengan derajat nol disebut simpul terisolasi (*isolated vertex*) sedangkan simpul dengan derajat satu disebut simpul anting (*pendant*). Sisi yang simpul ujungnya pada simpul yang sama disebut *loop* sedangkan beberapa sisi berbeda yang mempunyai simpul ujung yang sama disebut sisi ganda (*multiple edge*). Graf yang tidak mempunyai *loop* dan sisi ganda disebut graf sederhana (*simple graph*). Graf G disebut terhubung (*connected*) jika setiap dua simpul sebarang berbeda terhubung.

Misalkan G adalah graf, v dan w adalah simpul-simpul dari G. Jalan (*walk*) dari v ke w adalah barisan berhingga dari simpul dan sisi secara bergantian, dimulai dari simpul v dan diakhiri pada simpul w. Jalan dengan panjang n dari v ke w dituliskan sebagai: $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n$ dengan $v_0 = v; v_n = w$ dan $e_i = v_{i-1} v_i$. Lintasan (*path*) dengan panjang n dari v ke w adalah jalan dari v ke w yang semua sisinya berbeda. Lintasan dari v ke w dituliskan sebagai: $v = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n = w$ dengan $e_i \neq e_j$ untuk $i \neq j$.

Lintasan sederhana dengan panjang n dari v ke w adalah lintasan dari v ke w yang semua simpulnya berbeda. Lintasan sederhana dari v ke w dituliskan sebagai: $v = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n = w$ dengan $e_i \neq e_j$ untuk $i \neq j$ dan $v_k \neq v_m$ untuk $k \neq m$.

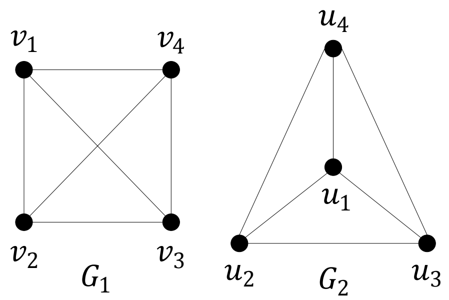
Sirkuit dengan panjang n adalah lintasan yang dimulai dan diakhiri pada simpul yang sama. Sirkuit adalah lintasan dituliskan sebagai: $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n$ dengan $v_0 = v_n$. Sirkuit sederhana dengan panjang n adalah sirkuit yang semua simpulnya berbeda. Sirkuit sederhana dituliskan sebagai: $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n$ dengan $e_i \neq e_j$ untuk $i \neq j$ dan $v_k \neq v_m$ untuk $k \neq m$, kecuali $v_0 = v_n$. Jarak (*distance*) simpul u ke simpul v, dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan minimum dari simpul u ke simpul v. Jika graf G tidak mempunyai lintasan dari simpul u ke v maka didefinisikan $d(u, v) = \infty$. Diameter graf G, dinotasikan dengan $diam(G)$ adalah jarak maksimum antara dua simpul sebarang pada graf G, yaitu $diam(G) = max\{d(x, y): x, y \in V(G)\}$. Jika $v \in V(G)$ dan $C \subset V(G)$, maka jarak simpul v ke C, dinotasikan dengan $d(v, C)$, yaitu $d(v, C)$ =min$\{d(v, x): x \in C\}$.



Gambar 2.1: Graf terhubung G dengan 6 simpul dan 10 sisi

Pada Gambar 2.1, graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$. Simpul v_4 dikatakan bertetangga dengan simpul v_3 dan v_5 sedangkan sisi e_6 dikatakan melekat dengan simpul v_3 dan v_5. Selanjutnya, $deg(v_1) = 2$, $deg(v_2) = 4$, $deg(v_3) = 6$, $deg(v_4) = 2$, $deg(v_5) = 3$ dan $deg(v_6) = 3$. Jadi, graf G di atas bukan merupakan graf sederhana karena graf tersebut mempunyai *loop* dan sisi ganda tetapi graf G terhubung karena setiap dua simpul sebarang berbeda terhubung. Barisan $v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_5 v_4 e_5 v_3 e_6 v_5$ merupakan jalan dari v_1 ke v_5 dengan panjang 5 karena terdapat sisi yang muncul dua kali, yaitu e_5, barisan $v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_3e_5v_4$ merupakan lintasan dari v_1 ke v_4 dengan panjang 4 karena semua sisinya berbeda dan terdapat simpul yang muncul dua kali, yaitu v_3, barisan $v_2e_3v_3e_5v_4e_{10}v_5e_6v_3e_7v_6e_8v_2$ merupakan sirkuit dengan panjang 6 karena merupakan lintasan yang dimulai dan diakhiri pada simpul yang sama, yaitu v_2 dan barisan $v_2e_3v_3e_5v_4e_{10}v_5e_9v_6e_8v_2$ merupakan sirkuit sederhana dengan panjang 5 karena merupakan sirkuit yang semua simpulnya berbeda. Selanjutnya, $d(v_2, v_4) = 2$ dan $diam(G) = 3$. Jika $v_4 \in V(G)$ dan $C = \{v_2, v_5\} \subset V(G)$, maka $d(v_4, C) = 1$.

Subgraf dari graf G adalah graf H sedemikian sehingga setiap simpul dari H adalah simpul dari G dan setiap sisi dari H adalah sisi dari G. Dengan kata lain, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika $V(H) = V(G)$, maka H disebut subgraf merentang (*spanning subgraph*) dari graf G. Dua graf G_1 dan G_2 disebut isomorfis jika terdapat fungsi bijektif $f: V(G_1) \to V(G_2)$ sedemikian sehingga $v_1v_2 \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $f(v_1)f(v_2) \in E(G_2)$, dinotasikan dengan $G_1 \cong G_2$.



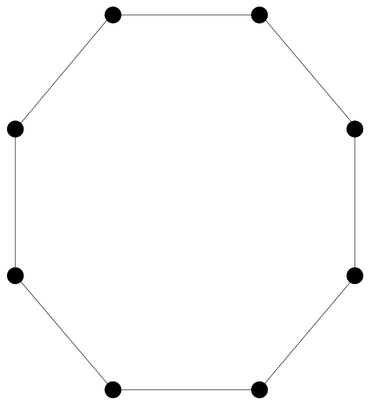
Gambar 2.2: Dua graf G_1 dan G_2 adalah isomorfis

Pada Gambar 2.2, dua graf G_1 dan G_2 adalah isomorfis karena terdapat fungsi bijektif $f: V(G_1) \to V(G_2)$ sedemikian sehingga $v_iv_j \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $f(v_i)f(v_j) \in E(G_2)$, dimana $f(v_i) = u_i, 1 \leq i \leq 4, f(v_j) = u_j, 1 \leq j \leq 4$ dan $i \neq j$.

2.2 Jenis – Jenis Graf

2.2.1 Graf Sikel (*Cycle Graph*)

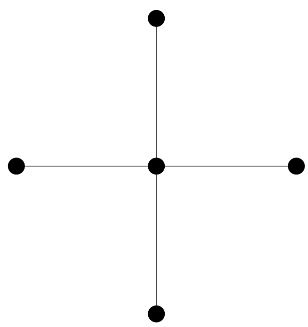
Graf sikel, dinotasikan dengan C_n untuk $n \geq 3$ adalah graf terhubung sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. *Order* dan *size* dari graf sikel adalah n.



Gambar 2.3: Graf sikel C_8

2.2.2 Graf Bintang (*Star Graph*)

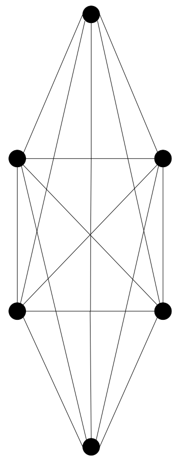
Graf bintang, dinotasikan dengan S_n untuk $n \geq 3$ adalah graf terhubung sederhana yang satu simpulnya berderajat n sedangkan simpul yang lainnya berderajat satu. *Order* dan *size* dari graf bintang adalah $n + 1$ dan n.



Gambar 2.4: Graf bintang S_4

2.2.3 Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap, dinotasikan dengan K_n untuk $n \geq 4$ adalah graf terhubung sederhana yang setiap simpulnya berderajat $n-1$. *Order* dan *size* dari graf lengkap adalah n dan $n(n-1)/2$.

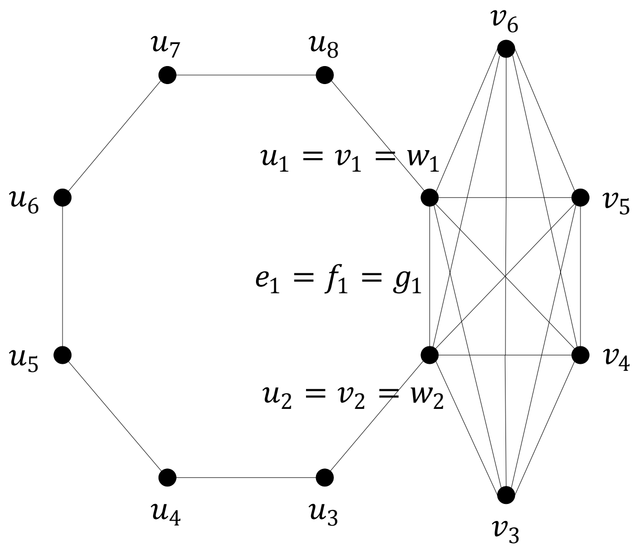


Gambar 2.5: Graf lengkap K_6

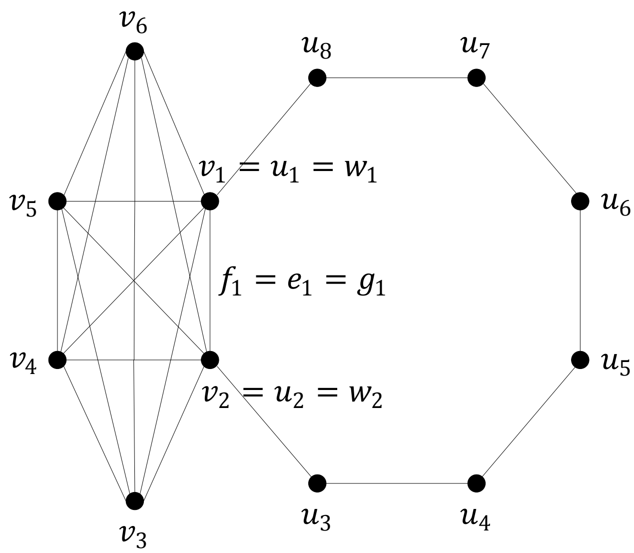
2.3 Operasi pada Graf

2.3.1 Amalgamasi Sisi

Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua graf terhubung. Amalgamasi sisi dari graf G_1 dan graf G_2 dengan menggabungkan sisi $e \in E(G_1)$ dan sisi $f \in E(G_2)$, dinotasikan dengan $amal_s(G_1, G_2; e, f)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi e dari graf G_1 dan sisi f dari graf G_2 menjadi satu sisi g, dimana g adalah sisi bersama dari graf hasil $amal_s(G_1, G_2; e, f)$.



Gambar 2.6: Graf hasil $amal_s(C_8, K_6; e_1, f_1)$.

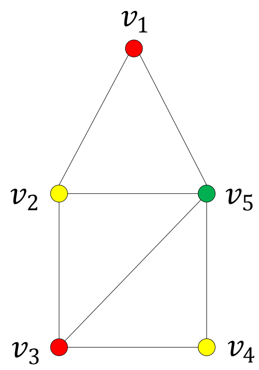


Gambar 2.7: Graf hasil $amal_s(K_6, C_8; f_1, e_1)$.

Pada Gambar 2.6 dan Gambar 2.7 menunjukkan bahwa graf hasil amalgamasi sisi dari dua graf terhubung adalah graf yang isomorfis, sehingga operasi tersebut bersifat komutatif.

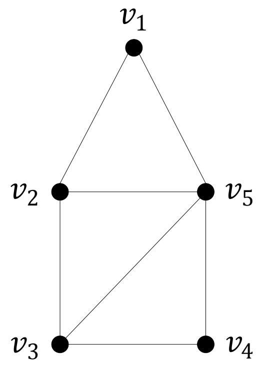
2.4 Bilangan Kromatik Lokasi

Konsep pewarnaan lokasi pada graf yang merupakan pengembangan dari dua konsep dalam graf, yaitu pewarnaan simpul dan dimensi partisi pada graf. Misalkan G adalah graf terhubung. Pewarnaan simpul dari G adalah pemberian warna pada setiap simpul di G sedemikian sehingga tidak terdapat dua simpul bertetangga mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G, dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah banyaknya warna minimum pada pewarnaan simpul dari G.



Gambar 2.8: Graf terhubung G dengan $\chi(G) = 3$

Misalkan G adalah graf terhubung dan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$. Untuk setiap $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai k-vektor : $r(v|\Pi) = \big(d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)\big)$, dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x): x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap simpul di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut partisi pembeda dari G. Dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$ adalah banyaknya partisi minimum pada partisi pembeda dari G.



Gambar 2.9: Graf terhubung G dengan $pd(G) = 3$

Pada Gambar 2.9, graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $S_1 = \{v_1, v_2\}$, $S_2 = \{v_5\}$ dan $S_3 = \{v_3, v_4\}$. Representasi dari setiap simpul terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ adalah:

$$r(v_1|\Pi) = \big(d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3)\big) = (0,1,2)$$

$$r(v_2|\Pi) = \big(d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3)\big) = (0,1,1)$$

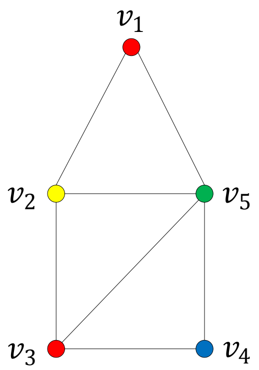
$$r(v_3|\Pi) = \big(d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3)\big) = (1,1,0)$$

$$r(v_4|\Pi) = \big(d(v_4, S_1), d(v_4, S_2), d(v_4, S_3)\big) = (2,1,0)$$

$$r(v_5|\Pi) = \big(d(v_5, S_1), d(v_5, S_2), d(v_5, S_3)\big) = (1,0,1)$$

Karena setiap simpul di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ maka Π merupakan partisi pembeda dari G. Jadi, dimensi partisi dari G, $pd(G) = 3$.

Misalkan c adalah pewarnaan-k simpul dari graf terhubung G dan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang dihasilkan. Untuk setiap $v \in V(G)$, kode warna dari v terhadap Π didefinisikan sebagai k-vektor : $c_\Pi(v) = \big(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k)\big)$, dimana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x): x \in C_i\}$ untuk $1 \le i \le k$. Jika setiap simpul di G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari G. Karena setiap pewarnaan lokasi merupakan pewarnaan maka $\chi(G) \le \chi_L(G)$.



Gambar 2.10: Graf terhubung G dengan $\chi_L(G) = 4$

Pada Gambar 2.10, graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $C_1 = \{v_1, v_3\}$, $C_2 = \{v_2\}$, $C_3 = \{v_5\}$ dan $C_4 = \{v_4\}$. Kode warna dari setiap simpul terhadap $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ adalah:

$$c_\Pi(v_1) = \big(d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3), d(v_1, C_4)\big) = (0,1,1,2)$$

$$c_\Pi(v_2) = \big(d(v_2,C_1), d(v_2,C_2), d(v_2,C_3), d(v_2,C_4)\big) = (1,0,1,2)$$

$$c_\Pi(v_3) = \big(d(v_3,C_1), d(v_3,C_2), d(v_3,C_3), d(v_3,C_4)\big) = (0,1,1,1)$$

$$c_\Pi(v_4) = \big(d(v_4,C_1), d(v_4,C_2), d(v_4,C_3), d(v_4,C_4)\big) = (1,2,1,0)$$

$$c_\Pi(v_5) = \big(d(v_5,C_1), d(v_5,C_2), d(v_5,C_3), d(v_5,C_4)\big) = (1,1,0,1)$$

Karena setiap simpul di G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ maka c merupakan pewarnaan lokasi dari G. Jadi, bilangan kromatik lokasi dari G, $\chi_L(G) = 4$.

Proposisi 2.1 Misalkan H adalah subgraf dari graf G. Maka $\chi_L(G) \geq \chi_L(H)$.

Bukti. Apapun warna-warna yang digunakan pada simpul-simpul dari subgraf H dalam pewarnaan lokasi minimum dari graf G juga dapat digunakan dalam pewarnaan lokasi dari subgraf H dengan sendirinya.

Berikut ini diberikan teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi pada graf terhubung. Lingkungan dari u, dinotasikan dengan $N(u)$ adalah himpunan simpul-simpul yang bertetangga dengan u.

Teorema 2.2 Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah simpul-simpul yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v adalah simpul-simpul yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah partisi dari simpul-simpul G ke dalam kelas warna C_i. Untuk simpul $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga simpul u dan v termuat dalam kelas warna yang sama, misalkan C_i dari Π. Akibatnya, $d(u,C_i) = d(v,C_i) = 0$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$ maka $d(u,C_j) = d(v,C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$.

BAB 3
METODE PENELITIAN

Pada bagian ini dideskripsikan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari dua graf terhubung. Pada penelitian ini, operasi amalgamasi sisi digunakan untuk membentuk suatu graf baru dari graf sikel dengan graf sikel, graf sikel dengan graf bintang, graf sikel dengan graf lengkap, graf bintang dengan graf bintang, graf bintang dengan graf lengkap dan graf lengkap dengan graf lengkap.

Selanjutnya, graf hasil amalgamasi sisi tersebut dibentuk partisi dari himpunan simpul ke dalam kelas-kelas warna berdasarkan pewarnaan simpul. Kemudian setiap simpul di graf dan kelas-kelas warna, dibentuk kode warna dari setiap simpul terhadap kelas-kelas warna yang didefinisikan sebagai k-vektor, yaitu jarak minimum setiap simpul terhadap kelas-kelas warna. Dengan demikian, jika setiap simpul di graf mempunyai kode warna yang berbeda terhadap kelas-kelas warna maka membentuk pewarnaan lokasi dari pewarnaan simpul. Banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari graf yang terbentuk disebut bilangan kromatik lokasi dari graf.

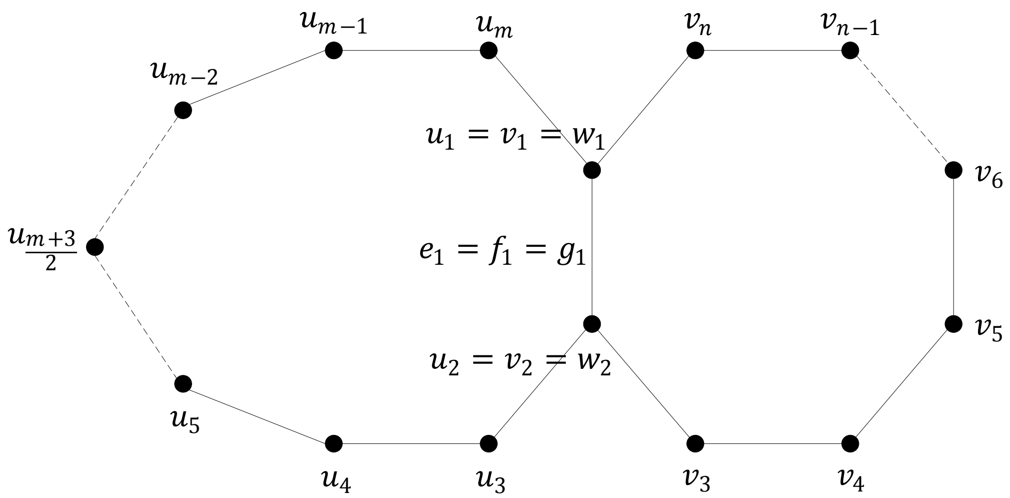
Berdasarkan deskripsi tersebut maka diperoleh beberapa teorema terkait dengan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari dua graf terhubung dengan melakukan beberapa tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi graf hasil amalgamasi sisi antara graf sikel, graf bintang dan graf lengkap.
2. Menentukan pewarnaan lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi antara graf sikel, graf bintang dan graf lengkap.
3. Menentukan batas atas dari bilangan kromatik lokasi diperoleh dari pewarnaan lokasi yang sesuai.
4. Menentukan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi diperoleh dengan menggunakan proposisi dan teorema yang ada.

BAB 4
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari dua graf terhubung. Graf yang diteliti adalah hasil amalgamasi sisi dari: graf sikel dengan graf sikel, graf sikel dengan graf bintang, graf sikel dengan graf lengkap, graf bintang dengan graf bintang, graf bintang dengan graf lengkap dan graf lengkap dengan graf lengkap.

Amalgamasi sisi dari dua graf sikel C_m dan C_n dengan menggabungkan sisi $e_1 \in E(C_m)$ dan sisi $f_1 \in E(C_n)$ untuk $m, n \geq 3$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi $e_1 = u_1u_2$ dari graf sikel C_m dan sisi $f_1 = v_1v_2$ dari graf sikel C_n menjadi satu sisi $g_1 = w_1w_2$, dimana g_1 adalah sisi bersama dari graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$.



Gambar 4.1: Graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ untuk m ganjil dan n genap.

Teorema 4.1 Diberikan dua graf sikel C_m dengan *order* m dan C_n dengan *order* n untuk $m, n \geq 3$. Maka bilangan kromatik lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e, f)$ adalah

$$\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e, f)\big) = \begin{cases} 3 & untuk\ m+n-2\ ganjil, \\ 4 & untuk\ m+n-2\ genap. \end{cases}$$

Bukti. Ambil $e_1 = f_1$, dimana sisi $e_1 \in E(C_m)$ dan sisi $f_1 \in E(C_n)$. Pandang dua kasus berikut:

Kasus 1: Untuk $m + n - 2$ ganjil.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m ganjil dan n genap. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, C_3\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\} \cup \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \leq i < \frac{m+3}{2}$ jika i ganjil, untuk $\frac{m+3}{2} < i \leq m$ jika i genap dan untuk $3 \leq i \leq n$ jika i ganjil.

$C_2 = \{w_2\} \cup \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \leq i < \frac{m+3}{2}$ jika i genap, untuk $\frac{m+3}{2} < i \leq m$ jika i ganjil dan untuk $3 \leq i \leq n$ jika i genap.

$C_3 = \{u_i\}$ untuk $i = \frac{m+3}{2}$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada tiga kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(a) = \big(0,1, d(a, C_3)\big)$, dimana untuk setiap $a \in C_1$. Karena untuk setiap $a \in C_1$ sedemikian sehingga $d(a, C_3)$ selalu berbeda maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_1 mempunyai kode warna yang berbeda.

ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(b) = \big(1,0, d(b, C_3)\big)$, dimana untuk setiap $b \in C_2$. Karena untuk setiap $b \in C_2$ sedemikian sehingga $d(b, C_3)$ selalu berbeda maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_2 mempunyai kode warna yang berbeda.

iii. Kelas warna C_3: $c_\Pi(u_i) = (1,1,0)$ untuk $i = \frac{m+3}{2}$.

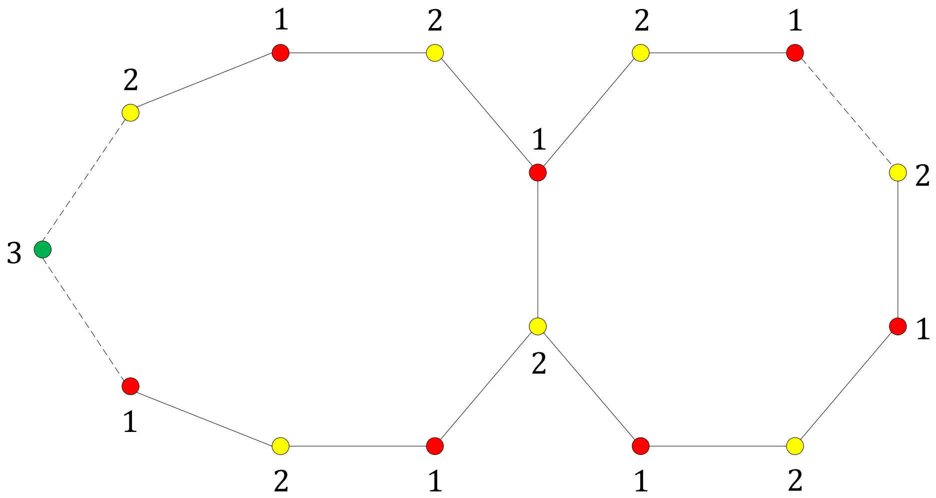
Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \leq 3$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m ganjil dan n genap. Berdasarkan Gambar 4.2, di graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf merentang yang isomorfis dengan graf sikel dengan *order* ganjil. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh

$\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \geq 3$. Karena $\big|V\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)\big| = m + n - 2\ ganjil$ maka $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \geq 3$.

Karena $3 \leq \chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \leq 3$ maka $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) = 3$.

Karena operasi amalgamasi sisi bersifat komutatif maka pada kasus untuk m genap dan n ganjil mempunyai hasil yang sama dengan pada kasus untuk m ganjil dan n genap.



Gambar 4.2: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ untuk m ganjil dan n genap.

Kasus 2: Untuk $m + n - 2$ genap.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m ganjil dan n ganjil. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\} \cup \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \leq i < \frac{m+3}{2}$ jika i ganjil, untuk $\frac{m+3}{2} < i \leq m$ jika i genap, untuk $3 \leq i < \frac{n+3}{2}$ jika i ganjil dan untuk $\frac{n+3}{2} < i \leq n$ jika i genap.

$C_2 = \{w_2\} \cup \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \leq i < \frac{m+3}{2}$ jika i genap, untuk $\frac{m+3}{2} < i \leq m$ jika i ganjil, untuk $3 \leq i < \frac{n+3}{2}$ jika i genap dan untuk $\frac{n+3}{2} < i \leq n$ jika i ganjil.

$C_3 = \{u_i\}$ untuk $i = \frac{m+3}{2}$ dan $C_4 = \{v_i\}$ untuk $i = \frac{n+3}{2}$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada empat kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(a) = \big(0,1, d(a, C_3), d(a, C_4)\big)$, dimana untuk setiap $a \in C_1$. Karena untuk setiap $a \in C_1$ sedemikian sehingga $d(a, C_3) \neq d(a, C_4)$ meskipun terdapat tunggal $k \in C_1$ sedemikian sehingga $d(k, C_3) = d(k, C_4)$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_1 mempunyai kode warna yang berbeda.

ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(b) = \big(1,0, d(b, C_3), d(b, C_4)\big)$, dimana untuk setiap $b \in C_2$. Karena untuk setiap $b \in C_2$ sedemikian sehingga $d(b, C_3) \neq d(b, C_4)$ meskipun terdapat tunggal $k \in C_2$ sedemikian sehingga $d(k, C_3) = d(k, C_4)$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_2 mempunyai kode warna yang berbeda.

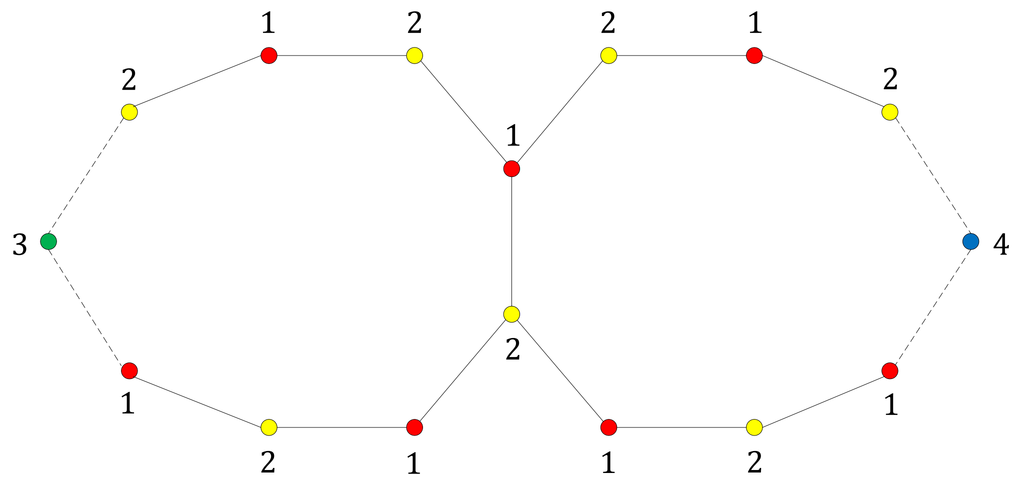
iii. Kelas warna C_3: $c_\Pi(u_i) = (1,1,0, \cdots)$ untuk $i = \frac{m+3}{2}$.

iv. Kelas warna C_4: $c_\Pi(v_i) = (1,1, \cdots, 0)$ untuk $i = \frac{n+3}{2}$.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \leq 4$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m ganjil dan n ganjil. Berdasarkan Gambar 4.3, di graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf merentang yang isomorfis dengan graf sikel dengan *order* genap. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \geq 4$. Karena $\left|V\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)\right| = m + n - 2\ genap$ maka $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \geq 4$.

Karena $4 \leq \chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \leq 4$ maka $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) = 4$.



Gambar 4.3: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ untuk m ganjil dan n ganjil.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m genap dan n genap. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\} \cup \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \le i \le m$ jika i ganjil, untuk $3 \le i < \frac{n+2}{2}$ jika i ganjil dan untuk $\frac{n+4}{2} < i \le n$ jika i ganjil.

$C_2 = \{w_2\} \cup \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \le i \le m$ jika i genap, untuk $3 \le i < \frac{n+2}{2}$ jika i genap dan untuk $\frac{n+4}{2} < i \le n$ jika i genap.

$C_3 = \{v_i\}$ untuk $i = \frac{n+4}{2}$ dan $C_4 = \{v_i\}$ untuk $i = \frac{n+2}{2}$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada empat kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(a) = \big(0,1, d(a, C_3), d(a, C_4)\big)$, dimana untuk setiap $a \in C_1$. Misalkan terdapat $k, l \in C_1$ sedemikian sehingga $d(k, C_4) = d(l, C_4)$ tetapi $d(k, C_3) \ne d(l, C_3)$ atau/dan $d(k, C_3) = d(l, C_3)$ tetapi $d(k, C_4) \ne d(l, C_4)$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_1 mempunyai kode warna yang berbeda.

ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(b) = \big(1,0, d(b, C_3), d(b, C_4)\big)$, dimana untuk setiap $b \in C_2$. Misalkan terdapat $k, l \in C_2$ sedemikian sehingga $d(k, C_3) = d(l, C_3)$ tetapi $d(k, C_4) \ne d(l, C_4)$ atau/dan $d(k, C_4) = d(l, C_4)$ tetapi

$d(k, C_3) \neq d(l, C_3)$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_2 mempunyai kode warna yang berbeda.

iii. Kelas warna C_3: $c_\Pi(v_i) = (\cdots, \cdots, 0, 1)$ untuk $i = \frac{n+4}{2}$.

iv. Kelas warna C_4: $c_\Pi(v_i) = (\cdots, \cdots, 1, 0)$ untuk $i = \frac{n+2}{2}$.

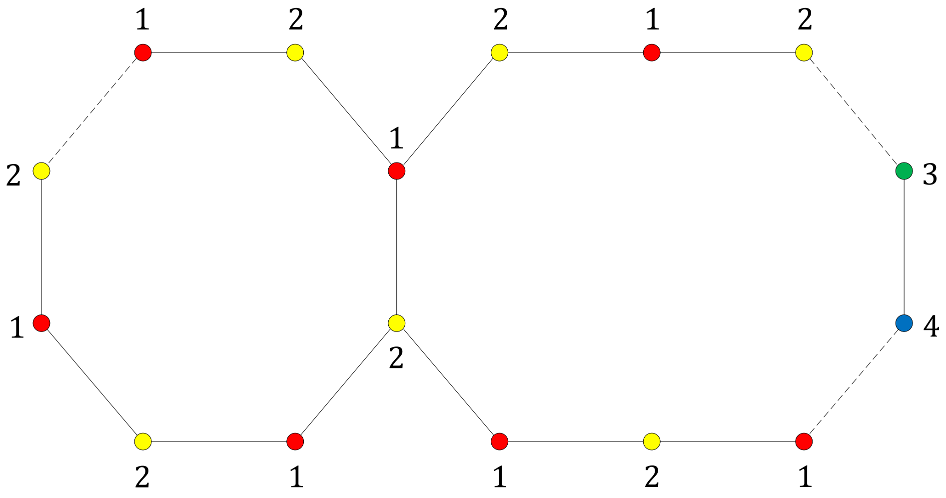
Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \leq 4$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m genap dan n genap. Berdasarkan Gambar 4.4, di graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf merentang yang isomorfis dengan graf sikel dengan *order* genap. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \geq 4$. Karena $\big|V\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big)\big| = m + n - 2$ *genap* maka $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \geq 4$.

Karena $4 \leq \chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) \leq 4$ maka $\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)\big) = 4$.

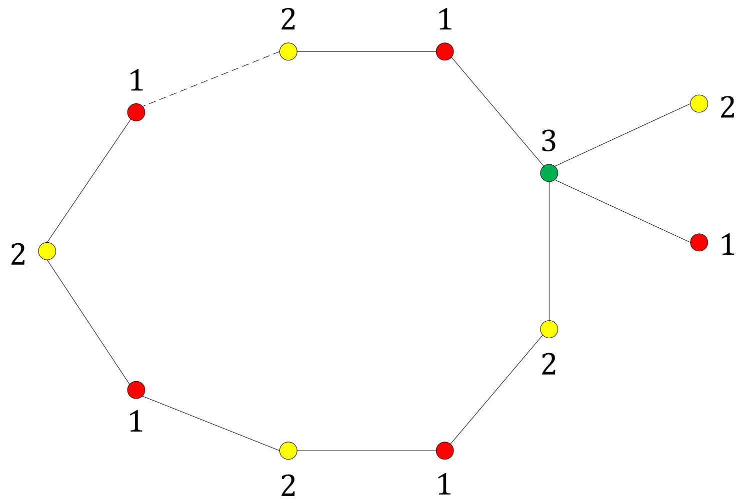
Tanpa mengurangi keumuman, ambil sebarang $e = f$, dimana sisi $e \in E(C_m)$ dan sisi $f \in E(C_n)$. Maka berlaku

$$\chi_L\big(amal_s(C_m, C_n; e, f)\big) = \begin{cases} 3 & untuk\ m+n-2\ ganjil, \\ 4 & untuk\ m+n-2\ genap. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

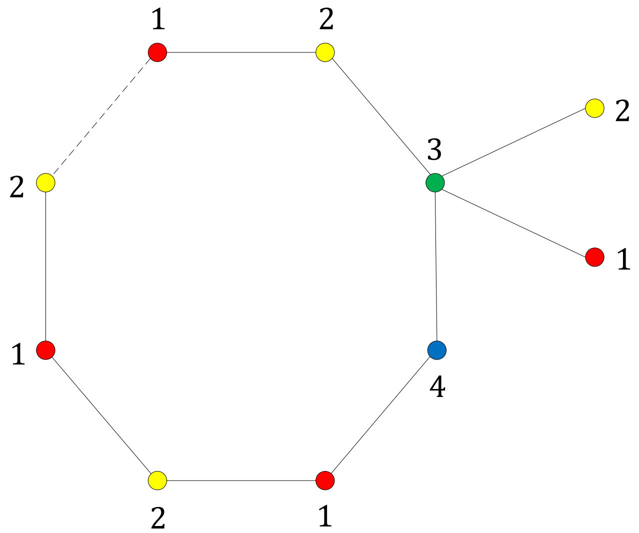


Gambar 4.4: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, C_n; e_1, f_1)$ untuk m genap dan n genap.

Secara khusus, untuk $m \geq 3$ dan $n = 3$, bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf sikel C_m dan graf bintang S_3 diperoleh: $\chi_L(amal_s(C_m, S_3; e_1, f_1)) = 3$ untuk m ganjil dan $n = 3$ sedangkan $\chi_L(amal_s(C_m, S_3; e_1, f_1)) = 4$ untuk m genap dan $n = 3$. Tanpa mengurangi keumuman, ambil sebarang $e = f$, dimana sisi $e \in E(C_m)$ dan sisi $f \in E(S_3)$. Maka berlaku $\chi_L(amal_s(C_m, S_3; e, f)) = \begin{cases} 3 & untuk\ m\ ganjil, n = 3, \\ 4 & untuk\ m\ genap, n = 3. \end{cases}$

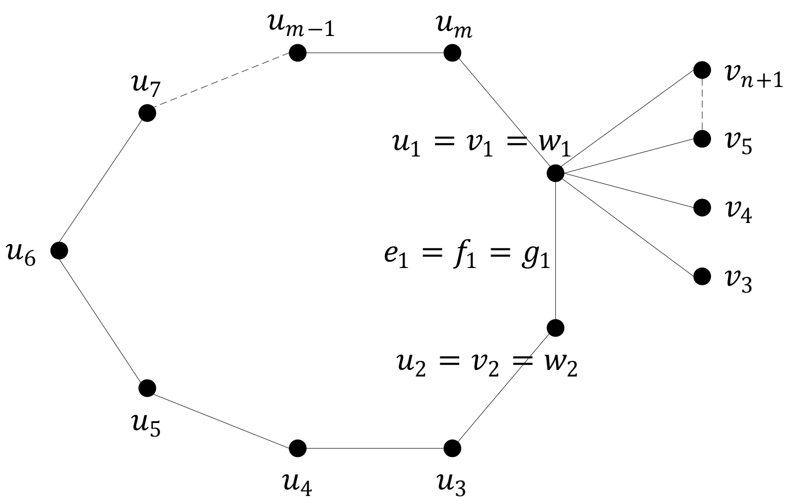


Gambar 4.5: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, S_3; e_1, f_1)$ untuk m ganjil dan $n = 3$.



Gambar 4.6: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, S_3; e_1, f_1)$ untuk m genap dan $n = 3$.

Amalgamasi sisi dari graf sikel C_m dan graf bintang S_n dengan menggabungkan sisi $e_1 \in E(C_m)$ dan sisi $f_1 \in E(S_n)$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi $e_1 = u_1 u_2$ dari graf sikel C_m dan sisi $f_1 = v_1 v_2$ dari graf bintang S_n dimana simpul-simpul v_1 dan v_2 berderajat n dan satu menjadi satu sisi $g_1 = w_1 w_2$, dimana g_1 adalah sisi bersama dari graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$.



Gambar 4.7: Graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ untuk m ganjil dan $n \geq 4$.

Teorema 4.2 Diberikan graf sikel C_m dengan *order* m dan graf bintang S_n dengan *order* $n + 1$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$. Maka bilangan kromatik lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e, f)$ adalah $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e, f)\big) = n$.

Bukti. Ambil $e_1 = f_1$, dimana sisi $e_1 \in E(C_m)$ dan sisi $f_1 \in E(S_n)$. Pandang dua kasus berikut:

Kasus 1: Untuk m ganjil dan $n \geq 4$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m ganjil dan $n \geq 4$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{v_3\} \cup \{u_i\}$ untuk $3 \leq i \leq m$ jika i ganjil.

$C_2 = \{w_2\} \cup \{v_4\} \cup \{u_i\}$ untuk $4 \leq i \leq m$ jika i genap.

$C_3 = \{w_1\}$.

$C_i = \{v_{i+1}\}$ untuk $4 \leq i \leq n$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(v_3) = (0,2,1,2,\cdots,2)$ dan $c_\Pi(a) = \big(0,1,d(a,C_3),d(a,C_4),\cdots,d(a,C_n)\big)$, dimana untuk setiap $a \in C_1 - \{v_3\}$. Karena untuk setiap $a \in C_1 - \{v_3\}$ sedemikian sehingga $d(a,C_3) \neq d(a,C_4)$, dimana $d(a,C_4) = d(a,C_i)$ untuk $5 \leq i \leq n$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_1 mempunyai kode warna yang berbeda.

ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(v_4) = (2,0,1,2,\cdots,2)$ dan $c_\Pi(b) = \big(1,0,d(b,C_3),d(b,C_4),\cdots,d(b,C_n)\big)$, dimana untuk setiap $b \in C_2 - \{v_4\}$. Karena untuk setiap $b \in C_2 - \{v_4\}$ sedemikian sehingga $d(b,C_3) \neq d(b,C_4)$, dimana $d(b,C_4) = d(b,C_i)$ untuk $5 \leq i \leq n$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_2 mempunyai kode warna yang berbeda.

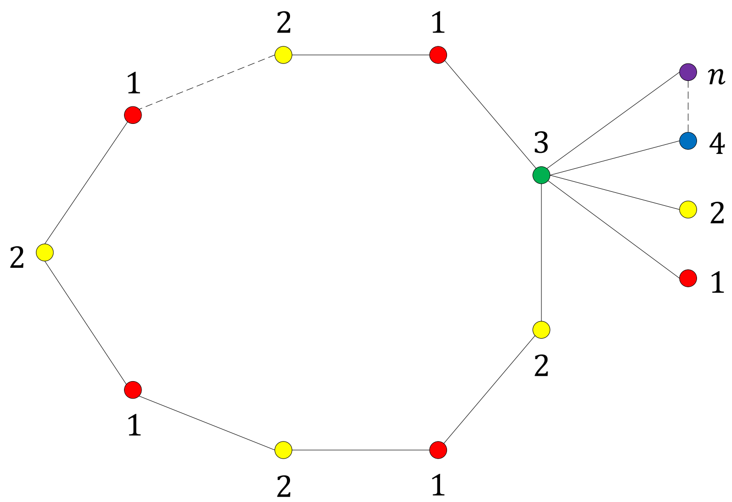
iii. Kelas warna C_3: $c_\Pi(w_1) = (1,1,0,1,\cdots,1)$.

iv. Kelas warna C_i: $c_\Pi(v_{i+1}) = (2,2,1,\cdots,\cdots,\cdots)$ untuk $4 \leq i \leq n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big) \leq n$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m ganjil dan $n \geq 4$. Berdasarkan Gambar 4.8, di graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan graf bintang S_{n-1}. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(S_{n-1})$ dimana $\chi_L(S_{n-1}) = n$. Jadi, $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big) \geq n$.

Karena $n \leq \chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big) \leq n$ maka $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big) = n$.



Gambar 4.8: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ untuk m ganjil dan $n \geq 4$.

Kasus 2: Untuk m genap dan $n \geq 4$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\left(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\right)$ untuk m genap dan $n \geq 4$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\left(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\right)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{v_3\} \cup \{u_i\}$ untuk $3 \leq i \leq m$ jika i ganjil.

$C_2 = \{v_4\} \cup \{u_i\}$ untuk $4 \leq i \leq m$ jika i genap.

$C_3 = \{w_2\} \cup \{v_5\}$.

$C_4 = \{w_1\}$.

$C_i = \{v_{i+1}\}$ untuk $5 \leq i \leq n$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(v_3) = (0,2,2,1,\cdots,2)$ dan $c_\Pi(a) = \left(0,1, d(a, C_3), d(a, C_4), \cdots, d(a, C_n)\right)$, dimana untuk setiap $a \in C_1$. Misalkan terdapat $k, l \in C_1$ sedemikian sehingga $d(k, C_4) = d(l, C_4)$ dan $d(k, C_i) = d(l, C_i)$ untuk $5 \leq i \leq n$ tetapi $d(k, C_3) \neq d(l, C_3)$ atau/dan $d(k, C_3) = d(l, C_3)$ tetapi $d(k, C_4) \neq d(l, C_4)$ dan $d(k, C_i) \neq d(l, C_i)$ untuk $5 \leq i \leq n$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_1 mempunyai kode warna yang berbeda.

ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(v_4) = (2,0,2,1,\cdots,2)$ dan $c_\Pi(b) = \left(1,0, d(b, C_3), d(b, C_4), \cdots, d(b, C_n)\right)$, dimana untuk setiap

$b \in C_2$. Misalkan terdapat $k, l \in C_2$ sedemikian sehingga $d(k, C_3) = d(l, C_3)$ tetapi $d(k, C_4) \neq d(l, C_4)$ dan $d(k, C_i) \neq d(l, C_i)$ untuk $5 \leq i \leq n$ atau/dan $d(k, C_4) = d(l, C_4)$ dan $d(k, C_i) = d(l, C_i)$ untuk $5 \leq i \leq n$ tetapi $d(k, C_3) \neq d(l, C_3)$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_2 mempunyai kode warna yang berbeda.

iii. Kelas warna C_3: $c_\Pi(w_2) = (1,2,0,1, \cdots, 2)$ dan $c_\Pi(v_5) = (2,2,0,1, \cdots, 2)$.

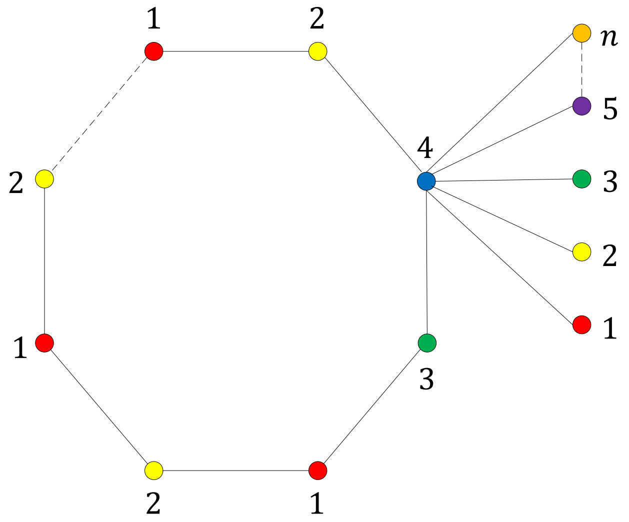
iv. Kelas warna C_4: $c_\Pi(w_1) = (1,1,1,0, \cdots, 1)$.

v. Kelas warna C_i: $c_\Pi(v_{i+1}) = (2,2,2,1, \cdots, \cdots)$ untuk $5 \leq i \leq n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big) \leq n$.

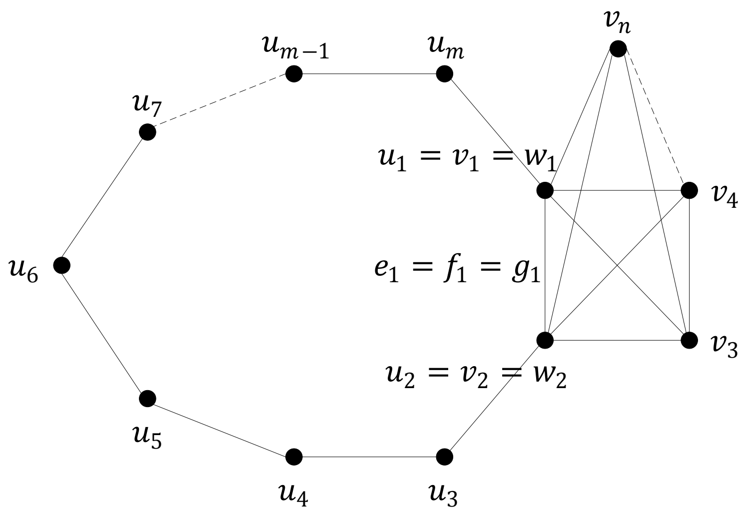
Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m genap dan $n \geq 4$. Berdasarkan Gambar 4.9, di graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan graf bintang S_{n-1}. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(S_{n-1})$ dimana $\chi_L(S_{n-1}) = n$. Jadi, $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big) \geq n$.

Karena $n \leq \chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big) \leq n$ maka $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)\big) = n$. Tanpa mengurangi keumuman, ambil sebarang $e = f$, dimana sisi $e \in E(C_m)$ dan sisi $f \in E(S_n)$. Maka berlaku $\chi_L\big(amal_s(C_m, S_n; e, f)\big) = n$ ∎



Gambar 4.9: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, S_n; e_1, f_1)$ untuk m genap dan $n \geq 4$.

Amalgamasi sisi dari graf sikel C_m dan graf lengkap K_n dengan menggabungkan sisi $e_1 \in E(C_m)$ dan sisi $f_1 \in E(K_n)$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi $e_1 = u_1u_2$ dari graf sikel C_m dan sisi $f_1 = v_1v_2$ dari graf lengkap K_n menjadi satu sisi $g_1 = w_1w_2$, dimana g_1 adalah sisi bersama dari graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$.



Gambar 4.10: Graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk m ganjil dan $n \geq 4$.

Teorema 4.3 Diberikan graf sikel C_m dengan *order* m dan graf lengkap K_n dengan *order* n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$. Maka bilangan kromatik lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e, f)$ adalah $\chi_L\left(amal_s(C_m, K_n; e, f)\right) = n$.

Bukti. Ambil $e_1 = f_1$, dimana sisi $e_1 \in E(C_m)$ dan sisi $f_1 \in E(K_n)$. Pandang dua kasus berikut:

Kasus 1: Untuk m ganjil dan $n \geq 4$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m ganjil dan $n \geq 4$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{v_3\} \cup \{u_i\}$ untuk $3 \leq i \leq m$ jika i ganjil.

$C_2 = \{w_2\} \cup \{u_i\}$ untuk $4 \leq i \leq m$ jika i genap.

$C_3 = \{w_1\}$.

$C_i = \{v_i\}$ untuk $4 \leq i \leq n$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(v_3) = (0,1,1,\cdots,1)$ dan $c_\Pi(a) = \big(0,1, d(a, C_3), \cdots, d(a, C_n)\big)$, dimana untuk setiap $a \in C_1 - \{v_3\}$. Karena untuk setiap $a \in C_1 - \{v_3\}$ sedemikian sehingga $d(a, C_3)$ selalu berbeda meskipun terdapat $k, l \in C_1 - \{v_3\}$ sedemikian sehingga $d(k, C_4) = d(l, C_4)$, dimana $d(k, C_4) = d(k, C_i)$ dan $d(l, C_4) = d(l, C_i)$ untuk $5 \leq i \leq n$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_1 mempunyai kode warna yang berbeda.

ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0,1,\cdots,1)$ dan $c_\Pi(b) = \big(1,0, d(b, C_3), \cdots, d(b, C_n)\big)$, dimana untuk setiap $b \in C_2 - \{w_2\}$. Karena untuk setiap $b \in C_2 - \{w_2\}$ sedemikian sehingga $d(b, C_3)$ selalu berbeda meskipun terdapat $k, l \in C_2 - \{w_2\}$ sedemikian sehingga $d(k, C_4) = d(l, C_4)$, dimana $d(k, C_4) = d(k, C_i)$ dan $d(l, C_4) = d(l, C_i)$ untuk $5 \leq i \leq n$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_2 mempunyai kode warna yang berbeda.

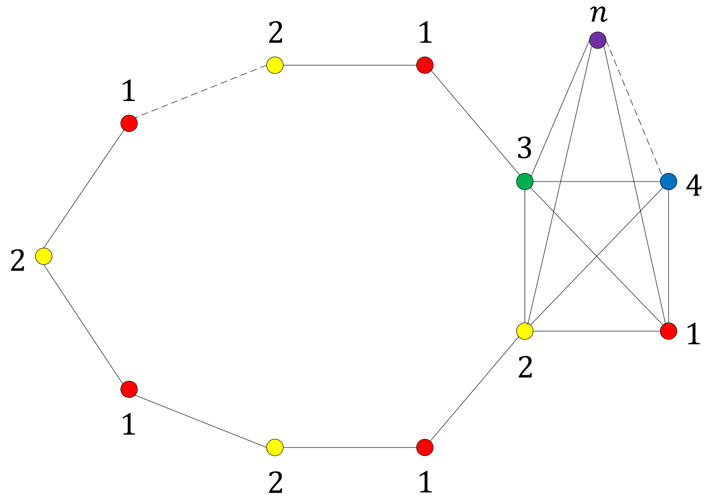
iii. Kelas warna C_3: $c_\Pi(w_1) = (1,1,0,\cdots,1)$.

iv. Kelas warna C_i: $c_\Pi(v_i) = (1,1,1,\cdots,\cdots)$ untuk $4 \leq i \leq n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq n$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m ganjil dan $n \geq 4$. Berdasarkan Gambar 4.11, di graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan graf lengkap K_n. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(K_n)$ dimana $\chi_L(K_n) = n$. Jadi, $\chi_L\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq n$.

Karena $n \leq \chi_L\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq n$ maka $\chi_L\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big) = n$.



Gambar 4.11: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk m ganjil dan $n \geq 4$.

Kasus 2: Untuk m genap dan $n \geq 4$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m genap dan $n \geq 4$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{v_4\} \cup \{u_i\}$ untuk $3 \leq i \leq m$ jika i ganjil.

$C_2 = \{v_3\} \cup \{u_i\}$ untuk $4 \leq i \leq m$ jika i genap.

$C_3 = \{w_2\}$.

$C_4 = \{w_1\}$.

$C_i = \{v_i\}$ untuk $5 \leq i \leq n$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(v_4) = (0,1,1,1,1, \cdots, 1)$ dan $c_\Pi(a) = \big(0,1, d(a, C_3), d(a, C_4), d(a, C_5), \cdots, d(a, C_n)\big)$, dimana untuk setiap $a \in C_1 - \{v_4\}$. Karena untuk setiap $a \in C_1 - \{v_4\}$ sedemikian sehingga $d(a, C_5)$ selalu berbeda, dimana $d(a, C_5) = d(a, C_i)$ untuk $6 \leq i \leq n$ meskipun terdapat $k, l \in C_1 - \{v_4\}$ sedemikian sehingga $d(k, C_4) = d(l, C_4)$ tetapi $d(k, C_3) \neq d(l, C_3)$ atau/dan $d(k, C_3) = d(l, C_3)$ tetapi $d(k, C_4) \neq d(l, C_4)$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_1 mempunyai kode warna yang berbeda.

ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(v_3) = (1,0,1,1,1, \cdots, 1)$ dan $c_\Pi(b) = \big(1,0, d(b, C_3), d(b, C_4), d(b, C_5), \cdots, d(b, C_n)\big)$, dimana untuk $b \in C_2 - \{v_3\}$. Karena untuk setiap $b \in C_2 - \{v_3\}$ sedemikian sehingga $d(b, C_5)$ selalu berbeda, dimana $d(b, C_5) = d(b, C_i)$ untuk $6 \leq i \leq n$ meskipun terdapat $k, l \in C_2 - \{v_3\}$ sedemikian sehingga $d(k, C_3) = d(l, C_3)$ tetapi $d(k, C_4) \neq d(l, C_4)$ atau/dan $d(k, C_4) = d(l, C_4)$ tetapi $d(k, C_3) \neq d(l, C_3)$ maka jelas bahwa setiap simpul pada kelas warna C_2 mempunyai kode warna yang berbeda.

iii. Kelas warna C_3: $c_\Pi(w_2) = (1,1,0,1,1, \cdots, 1)$.

iv. Kelas warna C_4: $c_\Pi(w_1) = (1,1,1,0,1, \cdots, 1)$.

v. Kelas warna C_i: $c_\Pi(v_i) = (1,1,1,1, \cdots, \cdots, \cdots)$ untuk $5 \leq i \leq n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

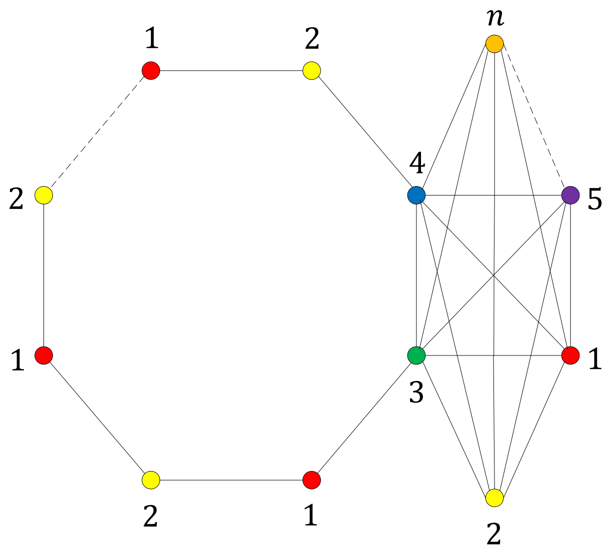
Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq n$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk m genap dan $n \geq 4$. Berdasarkan Gambar 4.12, di graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan graf lengkap K_n. Sehingga dengan menggunakan

Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)) \geq \chi_L(K_n)$ dimana $\chi_L(K_n) = n$. Jadi, $\chi_L(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)) \geq n$.

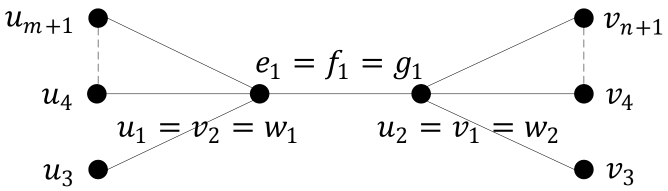
Karena $n \leq \chi_L(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)) \leq n$ maka $\chi_L(amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)) = n$.

Tanpa mengurangi keumuman, ambil sebarang $e = f$, dimana sisi $e \in E(C_m)$ dan sisi $f \in E(K_n)$. Maka berlaku $\chi_L(amal_s(C_m, K_n; e, f)) = n$ ■



Gambar 4.12: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(C_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk m genap dan $n \geq 4$.

Amalgamasi sisi dari dua graf bintang S_m dan S_n dengan menggabungkan sisi $e_1 \in E(S_m)$ dan sisi $f_1 \in E(S_n)$ untuk $m, n \geq 3$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi $e_1 = u_1u_2$ dari graf bintang S_m dimana dua simpul u_1 dan u_2 berderajat n dan satu dan sisi $f_1 = v_2v_1$ dari graf bintang S_n dimana dua simpul v_2 dan v_1 berderajat satu dan n menjadi satu sisi $g_1 = w_1w_2$, dimana g_1 adalah sisi bersama dari graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$.



Gambar 4.13: Graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ untuk $m = n$.

Teorema 4.4 Diberikan dua graf bintang S_m dengan *order* $m+1$ dan S_n dengan *order* $n+1$ untuk $m,n \geq 3$. Maka bilangan kromatik lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e, f)$ adalah $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e, f)\big) = max\{m, n\}$.

Bukti. Ambil $e_1 = f_1$, dimana sisi $e_1 \in E(S_m)$ dan sisi $f_1 \in E(S_n)$. Pandang dua kasus berikut:

Kasus 1: Untuk $m = n$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m = n$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\} \cup \{v_3\}$, $C_2 = \{w_2\} \cup \{u_3\}$ dan $C_i = \{u_{i+1}, v_{i+1}\}$ untuk $3 \leq i \leq n$.

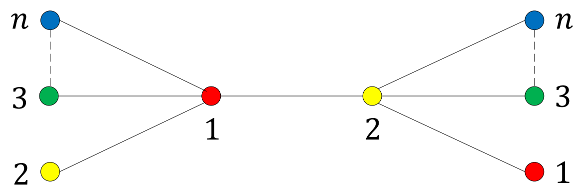
Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1,\cdots,1)$ dan $c_\Pi(v_3) = (0,1,\cdots,2)$.
ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0,\cdots,1)$ dan $c_\Pi(u_3) = (1,0,\cdots,2)$.
iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_{i+1}) = (1,2,\cdots,\cdots)$ dan $c_\Pi(v_{i+1}) = (2,1,\cdots,\cdots)$ untuk $3 \leq i \leq n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) \leq n$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m = n$. Berdasarkan Gambar 4.14, di graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan dua graf bintang S_{m-1} dan S_{n-1}. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(S_{m-1}) = m$ atau $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(S_{n-1}) = n$. Karena $m = n$ maka $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) \geq n$.

Karena $n \leq \chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) \leq n$ maka $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) = n$.



Gambar 4.14: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ untuk $m = n$.

Kasus 2: Untuk $m \neq n$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m < n$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\} \cup \{v_3\}$, $C_2 = \{w_2\} \cup \{u_3\}$, $C_i = \{u_{i+1}, v_{i+1}\}$ untuk $3 \leq i \leq m$ dan $C_i = \{v_{i+1}\}$ untuk $m + 1 \leq i \leq n$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

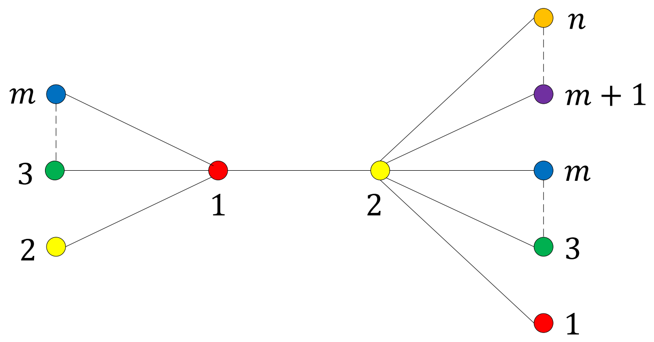
i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1,1, \cdots ,2)$ dan $c_\Pi(v_3) = (0,1,2, \cdots ,2)$.
ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0,1, \cdots ,1)$ dan $c_\Pi(u_3) = (1,0,2, \cdots ,3)$.
iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_{i+1}) = (1,2, \cdots, \cdots ,3)$ dan $c_\Pi(v_{i+1}) = (2,1, \cdots, \cdots ,2)$ untuk $3 \leq i \leq m$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.
iv. Kelas warna C_i: $c_\Pi(v_{i+1}) = (2,1,2, \cdots, \cdots)$ untuk $m + 1 \leq i \leq n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) \leq n$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m < n$. Berdasarkan Gambar 4.15, di graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan dua graf bintang S_{m-1} dan S_{n-1}. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(S_{m-1}) = m$ atau $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(S_{n-1}) = n$. Karena $m < n$ maka $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) \geq n$.

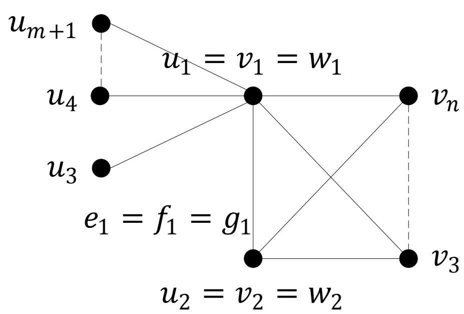
Karena $n \leq \chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) \leq n$ maka $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)\big) = n$.

Karena operasi amalgamasi sisi bersifat komutatif maka pada kasus untuk $m > n$ mempunyai hasil yang sama dengan pada kasus untuk $m < n$.
Tanpa mengurangi keumuman, ambil sebarang $e = f$, dimana sisi $e \in E(S_m)$ dan sisi $f \in E(S_n)$. Maka berlaku $\chi_L\big(amal_s(S_m, S_n; e, f)\big) = max\{m, n\}$ ■



Gambar 4.15: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, S_n; e_1, f_1)$ untuk $m < n$.

Amalgamasi sisi dari graf bintang S_m dan graf lengkap K_n dengan menggabungkan sisi $e_1 \in E(S_m)$ dan sisi $f_1 \in E(K_n)$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi $e_1 = u_1u_2$ dari graf bintang S_m dimana dua simpul u_1 dan u_2 berderajat n dan satu dan sisi $f_1 = v_1v_2$ dari graf lengkap K_n menjadi satu sisi $g_1 = w_1w_2$, dimana g_1 adalah sisi bersama dari graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$.



Gambar 4.16: Graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk $m = n$.

Teorema 4.5 Diberikan graf bintang S_m dengan *order* $m+1$ dan graf lengkap K_n dengan *order* n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$. Maka bilangan kromatik lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e, f)$ adalah $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e, f)\big) = max\{m, n\}$.

Bukti. Ambil $e_1 = f_1$, dimana sisi $e_1 \in E(S_m)$ dan sisi $f_1 \in E(K_n)$. Pandang tiga kasus berikut:

Kasus 1: Untuk $m = n$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m = n$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\}$, $C_2 = \{w_2\} \cup \{u_3\}$ dan $C_i = \{u_{i+1}, v_i\}$ untuk $3 \leq i \leq n$.

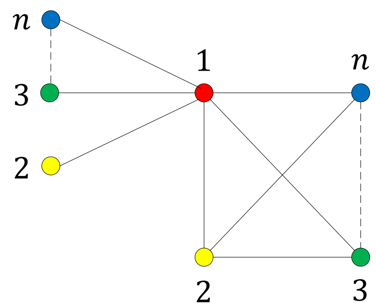
Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1, \cdots, 1)$.
ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0, \cdots, 1)$ dan $c_\Pi(u_3) = (1,0, \cdots, 2)$.
iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_{i+1}) = (1,2, \cdots, \cdots)$ dan $c_\Pi(v_i) = (1,1, \cdots, \cdots)$ untuk $3 \leq i \leq n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq n$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m = n$. Berdasarkan Gambar 4.17, di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan graf bintang S_{m-1} dan graf lengkap K_n. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(S_{m-1}) = m$ atau $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(K_n) = n$. Karena $m = n$ maka $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq n$.

Karena $n \leq \chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq n$ maka $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) = n$.



Gambar 4.17: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk $m = n$.

Kasus 2: Untuk $m < n$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m < n$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\}$, $C_2 = \{w_2\} \cup \{u_3\}$, $C_i = \{u_{i+1}, v_i\}$ untuk $3 \le i \le m$ dan $C_i = \{v_i\}$ untuk $m + 1 \le i \le n$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

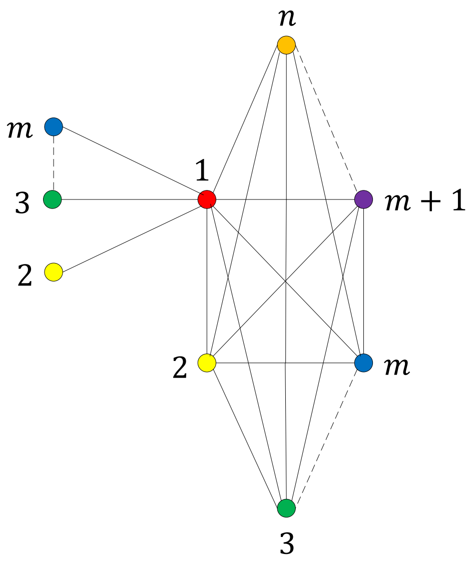
i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1, \cdots, 1)$.
ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0, \cdots, 1)$ dan $c_\Pi(u_3) = (1,0, \cdots, 2)$.
iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_{i+1}) = (1,2, \cdots, 2)$ dan $c_\Pi(v_i) = (1,1, \cdots, 1)$ untuk $3 \le i \le m$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.
iv. Kelas warna C_i: $c_\Pi(v_i) = (1,1, \cdots, \cdots)$ untuk $m + 1 \le i \le n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \le n$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m < n$. Berdasarkan Gambar 4.18, di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan graf bintang S_{m-1} dan graf lengkap K_n. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \ge \chi_L(S_{m-1}) =$

m atau $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(K_n) = n$. Karena $m < n$ maka $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq n$.

Karena $n \leq \chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq n$ maka $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) = n$.



Gambar 4.18: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk $m < n$.

Kasus 3: Untuk $m > n$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m > n$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\}$, $C_2 = \{w_2\} \cup \{u_3\}$, $C_i = \{u_{i+1}, v_i\}$ untuk $3 \leq i \leq n$ dan $C_i = \{v_i\}$ untuk $n + 1 \leq i \leq m$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada m kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1,1,\cdots,1)$.

ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0,1,\cdots,2)$ dan $c_\Pi(u_3) = (1,0,2,\cdots,2)$.

iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_{i+1}) = (1,2,\cdots,2,2)$ dan $c_\Pi(v_i) = (1,1,\cdots,2,2)$ untuk $3 \leq i \leq n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

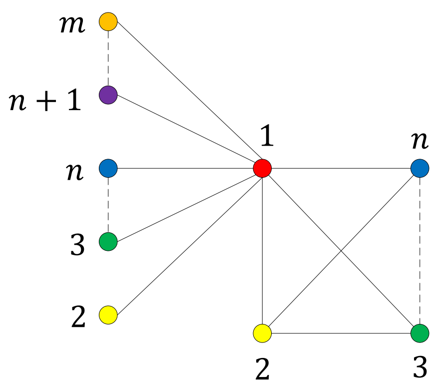
iv. Kelas warna C_i: $c_\Pi(v_i) = (1,2,2,2,\cdots)$ untuk $n + 1 \leq i \leq m$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq m$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m > n$. Berdasarkan Gambar 4.19, di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan graf bintang S_{m-1} dan graf lengkap K_n. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(S_{m-1}) = m$ atau $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(K_n) = n$. Karena $m > n$ maka $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq m$.

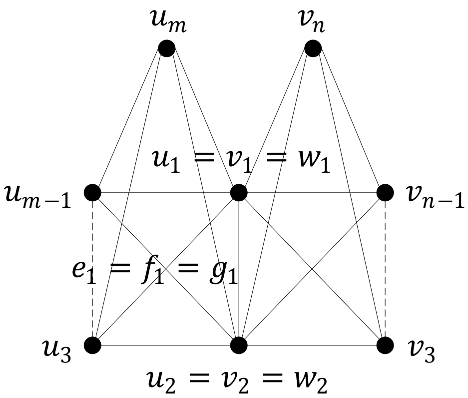
Karena $m \leq \chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq m$ maka $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\big) = m$.

Tanpa mengurangi keumuman, ambil sebarang $e = f$, dimana sisi $e \in E(S_m)$ dan sisi $f \in E(K_n)$. Maka berlaku $\chi_L\big(amal_s(S_m, K_n; e, f)\big) = max\{m, n\}$ ■



Gambar 4.19: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk $m > n$.

Amalgamasi sisi dari dua graf lengkap K_m dan K_n dengan menggabungkan sisi $e_1 \in E(K_m)$ dan sisi $f_1 \in E(K_n)$ untuk $m, n \geq 4$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi $e_1 = u_1u_2$ dari graf lengkap K_m dan sisi $f_1 = v_1v_2$ dari graf lengkap K_n menjadi satu sisi $g_1 = w_1w_2$, dimana g_1 adalah sisi bersama dari graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$.



Gambar 4.20: Graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk $m = n$.

Teorema 4.6 Diberikan dua graf lengkap K_m dengan *order* m dan K_n dengan *order* n untuk $m, n \geq 4$. Maka bilangan kromatik lokasi pada graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e, f)$ adalah

$$\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e, f)\big) = \begin{cases} n+1 & untuk\ m = n, \\ max\{m, n\} & untuk\ m \neq n. \end{cases}$$

Bukti. Ambil $e_1 = f_1$, dimana sisi $e_1 \in E(K_m)$ dan sisi $f_1 \in E(K_n)$. Pandang dua kasus berikut:

Kasus 1: Untuk $m = n$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m = n$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n, C_{n+1}\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\}$, $C_2 = \{w_2\}$, $C_i = \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \leq i \leq n-1$, $C_n = \{v_n\}$ dan $C_{n+1} = \{u_m\}$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada $n+1$ kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1, \cdots ,1,1)$.
ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0, \cdots ,1,1)$.
iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_i) = (1,1, \cdots ,1,2)$ dan $c_\Pi(v_i) = (1,1, \cdots ,2,1)$ untuk $3 \leq i \leq n-1$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.
iv. Kelas warna C_n: $c_\Pi(v_n) = (1,1, \cdots ,0,2)$.
v. Kelas warna C_{n+1}: $c_\Pi(u_m) = (1,1, \cdots ,2,0)$.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq n + 1$.

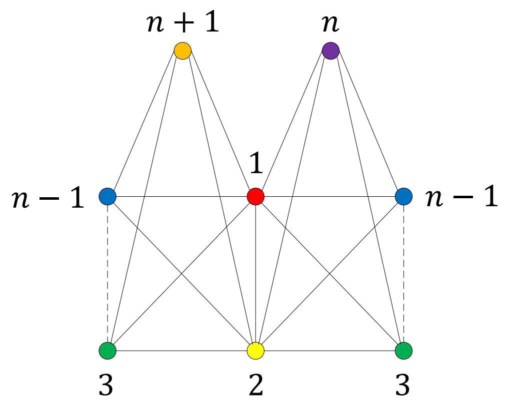
Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m = n$. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$. Andaikan terdapat partisi $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ dari $V\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ dan $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) = n$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1, \cdots, 1)$.
ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0, \cdots, 1)$.
iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_i) = (1,1, \cdots, 1)$ dan $c_\Pi(v_i) = (1,1, \cdots, 1)$ untuk $3 \leq i \leq n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Karena terdapat dua simpul $u_i, v_i \in C_i$ untuk $3 \leq i \leq n$ yang termuat dalam kelas warna yang sama maka $d\big(u_i, C_j\big) = d\big(v_i, C_j\big)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq n$. Akibatnya, $c_\Pi(u_i) = c_\Pi(v_i)$ untuk $3 \leq i \leq n$. Sehingga c bukan pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$. Hal ini kontradiksi dengan pemisalan sehingga pengandaian salah. Jadi, $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq n + 1$.

Karena $n + 1 \leq \chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq n + 1$ maka $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) = n + 1$.



Gambar 4.21: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk $m = n$.

Kasus 2: Untuk $m \neq n$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m < n$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\}$, $C_2 = \{w_2\}$, $C_i = \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \leq i \leq m$ dan $C_i = \{v_i\}$ untuk $m + 1 \leq i \leq n$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1, \cdots, 1)$.
ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0, \cdots, 1)$.
iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_i) = (1,1, \cdots, 2)$ dan $c_\Pi(v_i) = (1,1, \cdots, 1)$ untuk $3 \leq i \leq m$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.
iv. Kelas warna C_i: $c_\Pi(v_i) = (1,1,1, \cdots)$ untuk $m + 1 \leq i \leq n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq n$.

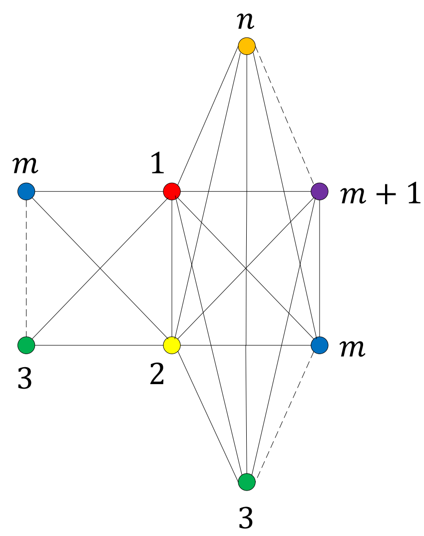
Menentukan batas bawah dari $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big)$ untuk $m < n$. Berdasarkan Gambar 4.22, di graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan dua graf lengkap K_m dan K_n. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(K_m) = m$ atau $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq \chi_L(K_n) = n$. Karena $m < n$ maka $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) \geq n$.

Karena $n \leq \chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) \leq n$ maka $\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)\big) = n$.

Karena operasi amalgamasi sisi bersifat komutatif maka pada kasus untuk $m > n$ mempunyai hasil yang sama dengan pada kasus untuk $m < n$.

Tanpa mengurangi keumuman, ambil sebarang $e = f$, dimana sisi $e \in E(K_m)$ dan sisi $f \in E(K_n)$. Maka berlaku

$$\chi_L\big(amal_s(K_m, K_n; e, f)\big) = \begin{cases} n+1 & untuk\ m = n, \\ max\{m, n\} & untuk\ m \neq n. \end{cases} \qquad \blacksquare$$



Gambar 4.22: Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(K_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk $m < n$.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penelitian pada Bab 1 serta hasil dan pembahasan pada Bab 4, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk $m, n \geq 3$, bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf sikel dengan *order* m dan graf sikel dengan *order* n dengan menggabungkan sisi $e \in E(C_m)$ dan sisi $f \in E(C_n)$ adalah 3 untuk $m + n - 2$ $ganjil$ dan 4 untuk $m + n - 2$ $genap$.
2. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$, bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf sikel dengan *order* m dan graf bintang dengan *order* $n + 1$ dengan menggabungkan sisi $e \in E(C_m)$ dan sisi $f \in E(S_n)$ adalah n.
3. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$, bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf sikel dengan *order* m dan graf lengkap dengan *order* n dengan menggabungkan sisi $e \in E(C_m)$ dan sisi $f \in E(K_n)$ adalah n.
4. Untuk $m, n \geq 3$, bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dengan *order* $m + 1$ dan graf bintang dengan *order* $n + 1$ dengan menggabungkan sisi $e \in E(S_m)$ dan sisi $f \in E(S_n)$ adalah $max\{m, n\}$.
5. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$, bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dengan *order* $m + 1$ dan graf lengkap dengan *order* n dengan menggabungkan sisi $e \in E(S_m)$ dan sisi $f \in E(K_n)$ adalah $max\{m, n\}$.
6. Untuk $m, n \geq 4$, bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf lengkap dengan *order* m dan graf lengkap dengan *order* n dengan menggabungkan sisi $e \in E(K_m)$ dan sisi $f \in E(K_n)$ adalah $n + 1$ untuk $m = n$ dan $max\{m, n\}$ untuk $m \neq n$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian tentang bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi antara graf sikel, graf bintang dan graf lengkap, sehingga peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk melakukan penelitian tentang bilangan kromatik lokasi pada graf-graf khusus lainnya ataupun dengan menggunakan operasi pada graf yang lain, yaitu operasi *comb* dari dua graf terhubung.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun, H., Baskoro, E.T. 2011. *Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars*. ITB J. Sci. 43 A(1):1-8.

Baskoro, E.T., Purwasih, I.A. 2012. *The Locating-Chromatic Number for Corona Product of Graphs*. Southeast-Asian J. of Sciences. 1(1):124-134.

Behtoei, A., Anbarloei, M. 2014. *The locating chromatic number of the join of graphs*. Bull. Iranian Math. Soc. 40(6):1491-1504.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., Zhang, P. 2002. *The locating-chromatic number of a graph*. Bull. Inst. Combin. Appl. 36:89-101.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., Zhang, P. 2003. *Graphs of order n with locating-chromatic number $n-1$*. Discrete Mathematics. 269:65-79.

Chartrand, G., Lesniak, L. 1996. *Graphs & Digraphs*. Chapman & Hall. London.

Chartrand, G., Salehi, E., Zhang, P. 2000. *The partition dimension of a graph*. Aequationes Mathematicae. 59:45-54.

Gross, J.L., Yellen, J. 2006. *Graph Theory and its Applications*. Chapman & Hall. Francis.

Hartsfield, N., Ringel G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Academic Press. London.

Siang, J.J. 2009. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Andi. Yogyakarta.

West, D.B. 2001. *Introduction to Graph Theory*. University of Illinois. Urbana.

BIOGRAFI PENULIS

Penulis bernama lengkap Fiqih Rahman Hartiansyah, lahir di Sumenep, 16 April 1987, merupakan anak pertama dari tiga bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di TK Kemala Bhayangkari Sumenep (1992-1993), SD Negeri Pangarangan IV Sumenep (1993-1999), SMP Negeri 1 Sumenep (1999-2002), SMA Negeri 1 Sumenep (2002-2005). Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi S1 di Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Brawijaya (UB) Malang (2005-2012) melalui seleksi Penjaringan Siswa Berprestasi (PSB) dengan NIM 0510940018. Pada masa perkuliahan penulis pernah menjadi asisten dosen mata kuliah Persamaan Diferensial Biasa dan Kalkulus Beda Hingga. Kemudian penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya pada tahun 2013 dengan NRP 1212201203. Penulis dapat dihubungi melalui email fi_qh@yahoo.com dan fiqih.math@gmail.com.