



TESIS - SM 142501

**KONSTRUKSI WAVELET GRAF SPEKTRAL MENGGUNAKAN  
LAPLACIAN GRAF BERARAH**

FARLY OKTRIANY HANING  
NRP 1214 201 001

Dosen Pembimbing:  
Dr. Mahmud Yunus, M.Si  
Dr. Darmaji, MT

PROGRAM MAGISTER  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016





THESIS - SM 142501

**THE CONSTRUCTION OF SPECTRAL GRAPH WAVELET USING  
DIRECTED GRAPH LAPLACIAN**

FARLY OKTRIANY HANING  
NRP 1214 201 001

Supervisor:  
Dr. Mahmud Yunus, M.Si  
Dr. Darmaji, MT

MASTER PROGRAM  
MATHEMATICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016



**KONSTRUKSI WAVELET GRAF SPEKTRAL MENGGUNAKAN  
LAPLACIAN GRAF BERARAH**

**Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat mendapatkan gelar Magister  
Sains (M. Si.)  
di  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya**

**Oleh  
FARLY OKTRIANY HANING  
NRP 1214 201 001**

**Tanggal Ujian : 20 Juli 2016  
Periode Wisuda : September 2016**

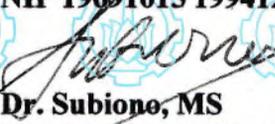
**Disetujui oleh:**

  
**Dr. Mahmud Yunus, M.Si  
NIP 19620407 198703 1 005**

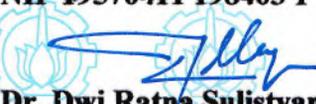
**(Pembimbing I)**

  
**Dr. Darmaji MT  
NIP 19691015 199412 1 001**

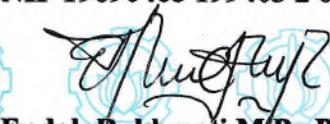
**(Pembimbing II)**

  
**Dr. Subiono, MS  
NIP 19570411 198403 1 001**

**(Penguji)**

  
**Dr. Dwi Ratna Sulistyani, S.Si, MT  
NIP 19690405 199403 2 003**

**(Penguji)**

  
**Endah Rokhmati M.P., Ph.D  
NIP 19761213 200212 2 001**

**(Penguji)**

**Direktur Program Pascasarjana,**

  
**Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D  
NIP 19601202 198701 1 001**





# KONSTRUKSI WAVELET GRAF SPEKTRAL MENGUNAKAN LAPLACIAN GRAF BERARAH

Nama Mahasiswa : Farly Oktriany Haning  
NRP : 1214 201 001  
Pembimbing : 1. Dr. Mahmud Yunus, M.Si  
2. Dr. Darmaji, MT

## ABSTRAK

Wavelet pada graf dikonstruksi dan digunakan sebagai alat untuk pengolahan sinyal pada graf berbobot. Akan tetapi, wavelet tersebut hanya dapat diterapkan untuk data pada simpul graf tidak berarah yang mempunyai bobot. Pada penelitian ini, dikonstruksi frame wavelet graf spektral untuk graf berarah yang mempunyai bobot menggunakan spektrum Laplacian graf berarah. Objek dalam penelitian ini adalah graf berarah  $G$  yang mempunyai bobot dengan asumsi pada setiap simpul terdapat sinyal atau data tertentu pada graf. Pertama-tama dikaji sifat-sifat dari Laplacian graf berarah yang mendukung konstruksi. Selanjutnya, dikonstruksi frame wavelet graf spektral. Hasil penelitian menunjukkan bahwa spektrum atau nilai eigen Laplacian yang dapat mendukung konstruksi adalah spektrum yang real. Namun tidak semua Laplacian graf berarah dengan bentuk  $L_d = \mathcal{D} - \mathcal{A}$  mempunyai nilai eigen real, dengan  $\mathcal{D}$  adalah matriks diagonal yang entrinya derajat keluar setiap simpul pada graf berarah dan  $\mathcal{A}$  adalah matriks *adjacency* graf berarah. Diperoleh dugaan bahwa jika bentuk Laplacian  $L_d$  singular maka nilai eigennya real. Selanjutnya, dihasilkan frame wavelet graf spektral yang merupakan *tight* frame. Wavelet graf spektral ini dapat digunakan untuk menganalisis sinyal atau *dataset* yang terletak pada graf berarah yang mempunyai bobot.

**Kata kunci:** Graf berarah, Laplacian graf berarah, Transformasi wavelet graf spektral, Wavelet pada graf



# THE CONSTRUCTION OF SPECTRAL GRAPH WAVELET USING DIRECTED GRAPH LAPLACIAN

Name : Farly Oktriany Haning  
NRP : 1214 201 001  
Supervisors : 1. Dr. Mahmud Yunus, M.Si  
2. Dr. Darmaji, MT

## ABSTRACT

Wavelet on graph was constructed as a tool for analyzing signal on weighted graph. However, it was used for data or signal reside on vertices of undirected weighted graph. This research construct a spectral graph wavelet frame on directed weighted graph which use Laplacian of directed graph. Firstly, we get the spectral properties of directed graph Laplacian. Secondly, we construct a spectral graph wavelet frame. The results show that real eigenvalue or spectrum can be used to construct the frame. But not all of Laplacian of directed graph with the form  $L_d = \mathcal{D} - \mathcal{A}$  have real eigenvalue, where  $\mathcal{D}$  is a diagonal matrix which every diagonal entry is out degree of each vertex and  $\mathcal{A}$  is *adjacency* matrix of directed graph. There is a conjecture which is if Laplacian  $L_d$  is singular, then have real eigenvalue. We also get the result of construction of spectral graph wavelet frame. The frame proved as a tight frame. This frame can be used to analyze dataset or signal reside on directed weighted graph.

**Keywords:** Directed graph, Laplacian of directed graph, Spectral graph wavelet transform, Wavelet on graph



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR SIMBOL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Manfaat Penelitian	2
BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	3
2.1 Transformasi Wavelet Kontinu	3
2.2 Teori Graf Spektral	6
2.2.1 Graf tidak berarah	6
2.2.2 Graf berarah	7
2.2.3 Random walk dalam suatu Graf	8
2.3 Transformasi Wavelet Graf Spektral	10
2.4 Beberapa Frame Wavelet untuk Graf Tidak Berarah	11
2.4.1 Fungsi kernel <i>cubic-spline</i>	13
2.4.2 Frame wavelet graf seperti wavelet Meyer	14
2.4.3 Frame wavelet graf Log-Warped	15
BAB III METODE PENELITIAN	17
3.1 Tahapan Penelitian	17

BAB IV	HASIL DAN PEMBAHASAN	19
4.1	Laplacian Graf Berarah	19
4.1.1	Laplacian graf berarah dengan pendekatan menggunakan derajat simpul	20
4.1.2	Laplacian graf berarah dengan pendekatan <i>random walk</i>	29
4.2	Wavelet Graf Spektral dari Graf Berarah	32
4.2.1	Kernel Hann	38
4.2.2	Kernel Hamming	39
4.2.3	Blackman window	41
BAB V	SIMPULAN DAN SARAN	43
5.1	Simpulan	43
5.2	Saran	43
	DAFTAR PUSTAKA	45

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Gambar Wavelet Mexican Hat dan Translasinya .....	4
Gambar 2.2	Gambar Rencana Jaringan Jalan Kota Surabaya dalam RTRW Surabaya 2009-2029. Sumber: <a href="https://i2.wp.com/smart.surabaya.go.id/wp-content/uploads/2013/04/Gambar-2.13.png">https://i2.wp.com/smart.surabaya.go.id/wp-content/uploads/2013/04/Gambar-2.13.png</a> .....	5
Gambar 2.3	Graf tidak berarah dengan bobot .....	9
Gambar 2.4	Fungsi kernel wavelet <i>cubic-spline</i> $g(t_j\lambda)$ dengan $\lambda_{\max} = 12$ , $K = 20$ , $J = 8$ (Shuman, dkk (2015)) .....	13
Gambar 2.5	Frame wavelet graf seperti Wavelet Meyer dengan $\lambda_{\max} = 12$ dan $J = 8$ (Shuman, dkk (2015)) .....	14
Gambar 2.6	Frame wavelet graf Log-Warped dengan kernel Hann ( $K = 1$ , $a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$ ) dan $\lambda_{\max} = 12$ , $R = 3$ , dan $M = 8$ ...	16
Gambar 4.1	Graf Lintasan Berarah Sederhana $P_5$ dengan Bobot .....	22
Gambar 4.2	Graf Siklik Berarah $C_5$ dengan bobot .....	23
Gambar 4.3	Graf untuk Jaringan Web dengan 15 Link URL .....	25
Gambar 4.4	Gambar Kernel Hann, Kernel Hamming dan Blackman Window .....	38



## DAFTAR SIMBOL

$G(V, E, w)$	Graf dengan himpunan simpul $V$ dan himpunan sisi $E$ dan himpunan bobot $w$
$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$	Graf berarah dengan himpunan simpul $V$ dan himpunan sisi $E$ dan himpunan bobot $w$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Hasil Kali dalam atau <i>inner product</i>
$\  \cdot \ $	Norm dari suatu vektor
$U$	Matriks Unitary
$U^*$	Konjugat transpose dari matriks unitary
$L$	Laplacian untuk graf tidak berarah
$L_d$	Laplacian untuk graf berarah dengan menggunakan derajat simpul
$L_p$	Laplacian untuk graf berarah dengan pendekatan menggunakan <i>random walk</i>
$A$	Matriks <i>adjacency</i> untuk graf tidak berarah
$\mathcal{A}$	Matriks <i>adjacency</i> untuk graf berarah
$D$	Matriks diagonal yang entrinya derajat dari tiap simpul dari graf tidak berarah
$\mathcal{D}$	Matriks diagonal yang entrinya derajat keluar dari tiap simpul untuk graf berarah
$\lambda_\ell$	Nilai eigen dari Laplacian
$\chi_\ell$	Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_\ell$
$P$	Matriks Probabilitas Stasioner
$\phi$	Vektor probabilitas stasioner dari matriks $P$
$\Phi$	Matriks diagonal dari vektor probabilitas stasioner $\phi$
$f(i)$	Sinyal pada simpul ke- $i$ dari graf
$\hat{f}$	Transformasi Fourier dari $f$
■	Tanda Contoh selesai
□	Tanda Bukti selesai



# BAB I

## PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan latar belakang yang mendasari penelitian ini. Di dalamnya terdapat identifikasi permasalahan dan beberapa penelitian terdahulu yang terkait, yang kemudian dirumuskan permasalahan yang akan dibahas, tujuan penelitian dan manfaat dari penelitian ini.

### 1.1 Latar Belakang

Graf berbobot merupakan suatu representasi yang sangat relevan untuk masalah-masalah yang berkaitan dengan jaringan, baik jaringan sosial, jaringan komputer maupun jaringan transportasi, dan jaringan lainnya. Data pada setiap simpul dari graf dapat dipandang sebagai sebagai sinyal pada graf (Shuman dkk, 2013). Kemampuan wavelet untuk menangani berbagai pengolahan sinyal atau *dataset* pada bilangan real, memotivasi para peneliti untuk mengembangkan transformasi wavelet pada graf (Hammond dkk, 2011).

Beberapa penelitian tentang transformasi wavelet pada graf telah dikembangkan dengan cara yang berbeda. Coifman dan Maggioni (2006) memperkenalkan “difusi wavelet” sebagai lokalisasi fungsi basis ruang eigen dari operator difusi pada graf dengan pangkat *dyadic*. Hammond dkk (2011) mengkonstruksi wavelet dari fungsi yang terdefinisi pada sebarang graf tidak berarah dengan bobot berhingga melalui teori graf spektral. Transformasi suatu fungsi sinyal pada graf dengan wavelet ini dinamakan Transformasi Wavelet Graf Spektral (*Spectral Graph Wavelet Transform*).

Beberapa penerapan transformasi wavelet graf spektral yang telah dikerjakan yaitu untuk mendeteksi kemacetan lalu lintas di jalan (Mohan dkk, 2014), untuk mendeteksi anomali yang terjadi pada jaringan transportasi udara (Drew dan Sheth, 2015), dan untuk masalah segmentasi tekstur citra untuk resolusi multispektral yang sangat tinggi (Pham dkk, 2014). Namun, wavelet graf spektral yang dikonstruksi tidak dapat diterapkan untuk jaringan berbentuk graf berarah (*directed graph*) yang mempunyai bobot berhingga.

Dalam penelitian ini, dilakukan konstruksi wavelet pada graf berarah yang mempunyai bobot. Konstruksi dilakukan melalui teori spektral yaitu dengan menggunakan spektrum dari matriks Laplacian graf berarah tersebut. Akan tetapi,

bentuk Laplacian graf berarah yang tidak simetris tidak menjamin matriks tersebut mempunyai spektrum yang bernilai real. Hal ini menjadi batasan masalah untuk transformasi yang telah dikonstruksi oleh peneliti sebelumnya yaitu tidak dapat diterapkan untuk jaringan berbentuk graf berarah. Oleh karena itu, dikaji sifat-sifat Laplacian graf berarah yang mendukung konstruksi wavelet graf spektral pada graf berarah. Hasil yang diperoleh berupa sifat-sifat yang dimiliki oleh laplacian graf berarah yang berbobot dan juga frame wavelet graf spektral untuk graf berarah. Frame ini dapat digunakan untuk menganalisis *dataset* atau sinyal yang terletak pada graf berarah yang mempunyai bobot. Selain itu, ditunjukkan pula bahwa frame wavelet tersebut adalah *tight frame*.

## **1.2 Perumusan Masalah**

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana sifat-sifat Laplacian graf berarah yang harus dipenuhi agar dapat digunakan dalam konstruksi wavelet graf spektral
2. Bagaimana mengkonstruksi frame wavelet graf spektral dengan menggunakan spektrum Laplacian graf berarah.

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Adapun penelitian ini dilakukan dengan tujuan sebagai berikut

1. Mengetahui sifat-sifat dari Laplacian graf berarah yang mendukung konstruksi wavelet graf spektral
2. Mendapatkan frame wavelet graf spektral dengan menggunakan spektrum Laplacian graf berarah

## **1.4 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah

1. Sebagai wawasan keilmuan baru dalam matematika khususnya bidang wavelet
2. Sebagai tambahan referensi transformasi wavelet pada graf khususnya menggunakan teori spektral untuk penelitian selanjutnya

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Dalam bagian ini, dijelaskan beberapa teori mengenai transformasi wavelet klasik, secara khusus Transformasi Wavelet Kontinu dalam domain Fourier. Selanjutnya, dijelaskan teori graf spektral yaitu bentuk matriks Laplacian untuk graf berarah dan tidak berarah. Transformasi wavelet graf spektral beserta desain frame wavelet yang telah dikembangkan beberapa peneliti.

#### 2.1 Transformasi Wavelet Kontinu

Wavelet dapat dipandang sebagai suatu koleksi fungsi yang ditranslasikan dan didilasikan dari suatu fungsi  $\psi$  yang disebut sebagai induk “mother” wavelet. Induk wavelet dapat disebut juga sebagai kernel wavelet. Secara umum, suatu fungsi kernel wavelet adalah fungsi yang memenuhi kondisi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \text{ untuk setiap } t \in \mathbb{R}$$

yaitu mempunyai rata-rata nol (*zero mean*). Wavelet yang akan digunakan dalam transformasi, dikonstruksikan melalui fungsi induk wavelet  $\psi(t)$ , yang diskalakan dengan parameter skala  $s$  dan ditranslasikan oleh  $\tau$

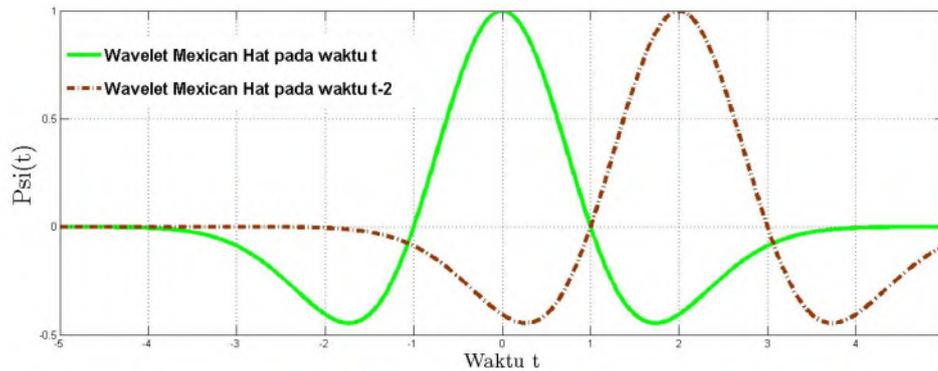
$$\psi_{s,\tau} = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad s \in \mathbb{R}^+, \tau \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Parameter translasi berkaitan dengan posisi waktu dan parameter skala berkaitan dengan frekuensi. Koefisien wavelet, yang merupakan hasil transformasi wavelet kontinu dari suatu fungsi sinyal  $f$  dengan wavelet  $\psi_{s,\tau}$ , mempunyai bentuk

$$W_f(s, \tau) = \langle f, \psi_{s,\tau} \rangle = \sqrt{|s|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \quad (2.2)$$

dengan  $\psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$  adalah bentuk konjugat kompleks dari  $\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$ . Untuk memperoleh kembali fungsi sinyal  $f$ , digunakan invers dari transformasi yang didefinisikan sebagai berikut.

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(s, \tau) \psi_{s,\tau}(s^{-2} ds) d\tau \quad (2.3)$$



Gambar 2.1: Gambar Wavelet Mexican Hat dan Translasinya

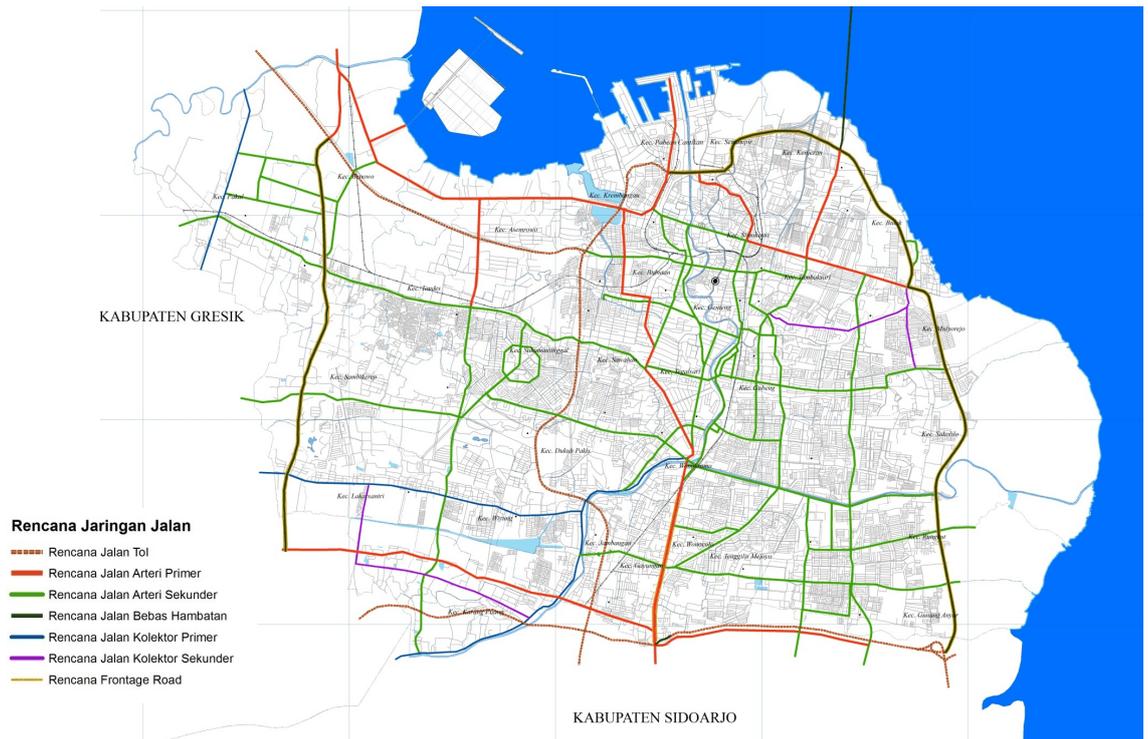
dengan

$$C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

dan  $\hat{\psi}(\omega)$  adalah bentuk transformasi Fourier dari induk wavelet  $\psi(t)$ . Pada ruang non-Euclidean seperti graf, wavelet tidak dapat dikonstruksi secara langsung. Lebih jelasnya perhatikan Gambar 2.1, grafik berwarna hijau adalah fungsi induk wavelet *mexican hat*,  $\psi(t) = (1 - t^2) \exp(-\frac{t^2}{2})$ , dan grafik berwarna merah adalah hasil translasinya ke kanan sebesar 2 satuan waktu. Namun untuk fungsi yang terletak pada simpul dari suatu graf tidak dapat ditentukan bagaimana melakukan translasi terhadap fungsi tersebut. Lebih lanjut dijelaskan sebagai berikut.

Pada Gambar 2.2 dapat dilihat peta jaringan jalan di Kota Surabaya. Apabila setiap kecamatan direpresentasikan sebagai simpul pada graf dan jaringan jalan yang menghubungkan dua kecamatan sebagai sisi pada graf maka Gambar 2.2 dapat direpresentasikan dalam sebuah graf. Misalkan pada setiap simpul dari graf memuat suatu informasi tertentu, katakanlah informasi tersebut berupa suatu fungsi sinyal, maka tidak jelas bagaimana cara melakukan translasi terhadap fungsi sinyal tersebut seperti translasi terhadap wavelet yang terlihat pada Gambar 2.1. Demikian halnya dengan fungsi wavelet yang dikonstruksi pada graf. Untuk mengatasi masalah ini, Hammond dkk (2011) mendefinisikan wavelet graf spektral yang analog dengan wavelet kontinu pada domain Fourier, sehingga bentuk translasi dan dilasinya disesuaikan seperti dalam domain Fourier. Wavelet kontinu satu dimensi,  $\psi_{s,\tau}$ , dalam domain Fourier didefinisikan sebagai

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^*(s\omega) e^{i\omega t} e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2.4)$$



Gambar 2.2: Gambar Rencana Jaringan Jalan Kota Surabaya dalam RTRW Surabaya 2009-2029. Sumber: <https://i2.wp.com/smart.surabaya.go.id/wp-content/uploads/2013/04/Gambar-2.13.png>

dan transformasinya dapat ditulis menjadi

$$W_f(s, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}^*(s\omega) e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega \quad (2.5)$$

Untuk penurunan rumusnya dapat dilihat dalam paper Hammond dkk (2011). Berikut adalah ringkasan yang dapat dipahami dalam pembentukan wavelet melalui domain Fourier:

- Wavelet direpresentasikan dalam bentuk kompleks eksponensial yaitu  $\frac{d^2}{dx^2} e^{i\omega x} = -\omega^2 e^{i\omega x}$ . Kompleks eksponensial merupakan fungsi eigen dari operator Laplace 1-D (negatif dari turunan kedua operator). Nilai eigen dari operator merupakan frekuensi yang ingin diketahui. Oleh karena operator bersifat simetris dan semidefinit positif, semua frekuensi dari graf bernilai real non-negatif dan terurut total. Penjelasan lebih detail tentang spektrum atau frekuensi dari operator Laplacian dapat dilihat dalam Bagian 2.2;
- Menggeser wavelet ke posisi  $\tau$  berkoresponden dengan perkalian  $e^{-i\omega\tau}$ ;

- Wavelet dapat diinterpretasikan sebagai filter *bandpass* dan penskalaan  $\psi$  oleh  $\frac{1}{s}$  berkoresponden penskalaan  $\hat{\psi}$  oleh  $s$  dalam Fourier.

## 2.2 Teori Graf Spektral

Teori spektral graf adalah teori yang berkaitan dengan spektrum suatu graf. Teori ini telah digunakan dalam beberapa perkembangan teoritis dan berperan dalam beberapa bidang seperti kimia, fisika kuantum, kombinatorial dan teori graf. Dalam perkembangannya, teori graf spektral membahas sifat-sifat yang berkaitan dengan graf melalui matriks representasinya. Matriks representasi ini seperti yang telah disebutkan yaitu matriks *adjacency* dan matriks Laplacian. Jika diberikan suatu graf  $G = (V, E)$ , maka teori spektral dari graf  $G$  berbicara mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari matriks representasi graf tersebut. Dengan kata lain, teori graf spektral membahas mengenai spektrum dari matriks representasi. Spektrum dari suatu matriks representasi adalah himpunan nilai eigen dari graf beserta multiplisitasnya. Dari spektrum suatu matriks representasi kita dapat mengetahui informasi tentang graf misalnya mengenai banyaknya simpul dalam graf, keterhubungan graf dan juga banyaknya lintasan dari suatu simpul ke simpul lainnya pada graf.

Berikut dibahas mengenai matriks representasi dari graf, lebih khusus Laplacian dari graf. Hal ini karena dalam penelitian ini spektrum matriks representasi yang digunakan dalam konstruksi wavelet graf spektral adalah matriks Laplacian graf.

### 2.2.1 Graf tidak berarah

Diberikan sebuah graf tidak berarah (*undirected graph*) yang mempunyai bobot sebagai  $G = \{V, E, w\}$  dengan  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  adalah himpunan simpul-simpul,  $E$  adalah himpunan sisi (sisi menghubungkan dua simpul), dan fungsi  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  yang menyatakan bobot positif dari setiap sisi. Selanjutnya, didefinisikan matriks *adjacency*  $A = [a_{ij}]$  dari suatu graf tidak berarah  $G$  dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} w(e), & \text{jika } e \in E, e \text{ menghubungkan simpul ke-}i \text{ dengan simpul ke-}j \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \quad (2.6)$$

Oleh karena bobot sisi yang menghubungkan simpul ke- $i$  dengan simpul ke- $j$  selalu sama dengan bobot sisi yang menghubungkan simpul ke- $j$  dengan simpul ke- $i$ , maka bentuk matriks *adjacency* graf tidak berarah selalu simetris. Selanjutnya, didefinisikan  $d(i) = \sum_j a_{ij}$  menyatakan derajat dari simpul ke- $i$ . Dengan kata lain, derajat *degree* dari suatu simpul adalah banyaknya sisi yang mempunyai ujung pada simpul tersebut. Matriks  $D = [d_{ij}]$  adalah matriks diagonal yang setiap entrinya

didefinisikan sebagai

$$d_{ij} = \begin{cases} d(i), & \text{untuk } i = j \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \quad (2.7)$$

Selanjutnya didefinisikan Laplacian  $L$  sebagai

$$L = D - A \quad (2.8)$$

Vektoreigen  $\chi_\ell$  memenuhi

$$L\chi_\ell = \lambda_\ell\chi_\ell, \quad (2.9)$$

untuk  $\ell = 0, 1, 2, \dots, N-1$  bersesuaian dengan nilai eigen real non-negatif  $\{\lambda_\ell\}_{\ell=0,1,2,\dots,N-1}$ . Laplacian untuk graf tidak berarah pada Persamaan 2.8 berbentuk simetris sehingga nilai eigennya pasti bernilai real dan setiap vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda pasti ortogonal. Selain itu Laplacian  $L$  juga memiliki sifat semidefinit positif sehingga setiap nilai eigennya bernilai non-negatif. Demikian juga berlaku untuk bentuk Laplacian ternormalkan (*normalized Laplacian*) yang didefinisikan

$$\mathcal{L} = D^{-1/2}LD^{-1/2} = I - D^{-1/2}AD^{-1/2} \quad (2.10)$$

dengan  $D^{1/2} = [d_{ij}]^{1/2}$  dan  $D^{-1/2} = [d_{ij}]^{-1/2}$ .

Misalkan  $\{\lambda_\ell; \ell = 0, \dots, N-1\}$  adalah nilai eigen dari Laplacian  $L$  maka vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_\ell$  adalah vektor bukan nol yang memenuhi

$$L\chi_\ell = \lambda_\ell\chi_\ell \quad (2.11)$$

Himpunan semua nilai eigen dari Laplacian  $L$  disebut spektrum dari Laplacian dan dinotasikan sebagai  $\sigma(L) = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}$ . Sedangkan spektrum Laplacian ternormalkan  $\sigma((L)) = \{\lambda_0 = 0, \lambda_1, \dots, \lambda_{\max} = 2\}$  atau dapat ditulis  $\sigma((L)) \subseteq [0, 2]$ .

### 2.2.2 Graf berarah

Misalkan  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$  adalah graf berarah yang mempunyai bobot dengan  $\mathcal{V}$  adalah himpunan simpul dan  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  adalah himpunan sisi yang memiliki arah *arc*. Misalkan arc  $e = (i, j) \in \mathcal{E}$  maka arah arc  $e$  adalah dari simpul  $i$  ke simpul  $j$ . Himpunan  $w$  menyatakan bobot dari setiap sisi. Dalam hal ini,  $i$  dapat disebut sebagai simpul awal dan  $j$  sebagai simpul akhir. Matriks *adjacency*  $A = [a_{ij}]$  untuk

graf berarah didefinisikan mengikuti Persamaan 2.6 yaitu

$$a_{ij} = \begin{cases} w(e), & \text{jika } e = (i, j) \in E \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \quad (2.12)$$

Akan tetapi matriks *adjacency*  $A$  untuk graf berarah mempunyai bentuk yang tidak simetris. Hal ini karena *arc*  $(i, j)$  tidak sama dengan *arc*  $(j, i)$ . Ini berarti derajat simpul dalam graf berarah dapat dibagi menjadi dua yaitu derajat masuk (*in degree*) dan derajat keluar (*out degree*). Derajat masuk dari suatu simpul  $i$ ,  $d_{\text{in}}(i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}$ , menyatakan banyaknya *arc* yang mempunyai akhir di  $i$ . Derajat keluar dari suatu simpul  $i$ ,  $d_{\text{out}}(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ , menyatakan banyaknya *arc* yang mempunyai awal di  $i$ . Secara umum dalam suatu graf berlaku  $d_{\text{in}}(i) \neq d_{\text{out}}(i)$  akan tetapi diperoleh

$$d = \sum_{i=1}^n d_{\text{in}}(i) = \sum_{i=1}^n d_{\text{out}}(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

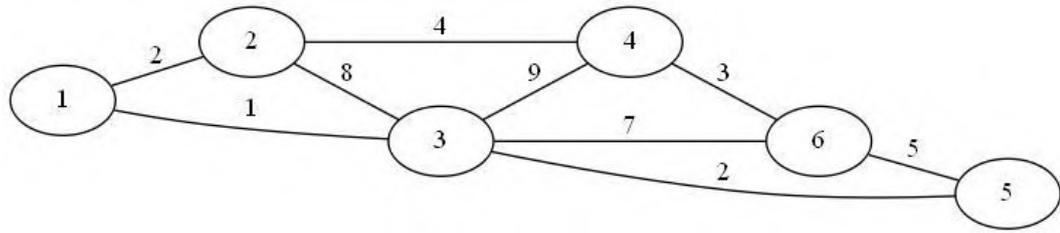
$d$  disebut sebagai volume dari graf  $G$ , dituliskan  $\text{vol}(G) = d$ . Selanjutnya dalam penelitian ini akan digunakan derajat keluar sebagai matriks diagonal yaitu  $\mathcal{D} = \text{diag}(d(i))$  dengan  $d(i) = d_{\text{out}}(i)$ . Selanjutnya, didefinisikan Laplacian untuk graf berarah sebagai

$$L_d = \mathcal{D} - \mathcal{A} \quad (2.13)$$

Laplacian graf berarah memiliki bentuk yang tidak simetris, berbeda dengan Laplacian graf tidak berarah yang simetris. Ini menyebabkan kita tidak dapat memastikan setiap nilai eigen dari Laplacian graf berarah bernilai real.

### 2.2.3 Random walk dalam suatu Graf

Diberikan suatu graf tidak berarah  $G = (V, E, w)$  yang terhubung dengan  $V = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $E \subset V \times V$  dan  $w$  adalah himpunan bobot dari sisi. Suatu *walk* dari simpul  $i_1$  ke simpul  $i_k$  dalam graf  $G$  adalah barisan  $W(i_1, i_k) = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_{k-1}, i_k\}$  dengan syarat  $(i_{k-1}, i_k) \in E$  untuk setiap  $k \in \mathbb{Z}$  dan  $k \leq N$ . Suatu *walk* dikatakan sebagai *random walk* apabila dari suatu simpul awal  $i_1$  dipilih secara *random* (acak) satu simpul diantara semua simpul yang bertetangga dengan simpul  $i_1$ , katakanlah simpul  $i_2$ . Selanjutnya, dari simpul  $i_2$  dipilih satu simpul secara acak satu simpul yang bertetangga dengan  $i_2$ . Iterasi dilanjutkan hingga mencapai simpul  $i_k$  dan barisan acak dari simpul-simpul terpilih dari  $i_1$  ke  $i_k$  disebut sebagai *random walk*. *Walk* pada graf berarah disebut sebagai *walk* berarah dengan setiap simpul yang berurutan di *walk* adalah *arc*  $(i_{k-1}, i_k)$  dengan simpul awal  $i_{k-1}$  dan simpul akhir  $i_k$ . Dalam *walk* setiap simpul dapat dilalui berulang-ulang, *walk* dengan setiap simpul



Gambar 2.3: Graf tidak berarah dengan bobot

hanya dilalui satu kali disebut sebagai lintasan atau *path*.

Misalkan  $W(i_1, i_k) = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_{k-1}, i_k\}$  adalah *random walk* dari simpul  $i_1$  ke simpul  $i_k$ . Misalkan pada langkah ke- $k$ , kita berada pada simpul  $i_k$  dan apabila  $d(i_k) = \sum_j a_{i_k j}$  menyatakan derajat keluar dari simpul  $i_k$  maka kita akan pindah ke simpul yang bertetangga dengan  $i_k$  dengan probabilitas sebesar  $\frac{1}{d(i_k)}$ . Dinotasikan  $P = [p_{ij}]$  untuk  $i, j \in V$  sebagai matriks probabilitas transisi dari *random walk* pada graf  $G$  dengan

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{\sum_k a_{ik}}, & \text{jika } (i, j) \in E \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \quad (2.14)$$

Lebih jelasnya diberikan matriks *adjacency* atau matriks bobot untuk graf pada Gambar 2.3 sebagai berikut

Matriks *adjacency* untuk graf pada Gambar 2.3 ini dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dari matriks *adjacency* ditentukan matriks probabilitas transisi  $P = [p_{ij}]$  untuk graf pada Gambar 2.3 dengan menggunakan Persamaan 2.14 sebagai berikut

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 0 & \frac{9}{27} & \frac{2}{27} & \frac{7}{27} \\ 0 & \frac{4}{16} & \frac{9}{16} & 0 & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & 0 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{7}{15} & \frac{3}{15} & \frac{5}{15} & 0 \end{bmatrix}.$$

Bila kita berada di simpul 1 dan ingin menuju simpul 4 maka terlebih dahulu kita harus melalui simpul yang bertetangga dengan simpul 1 yaitu melalui simpul 2 dengan probabilitas sebesar  $\frac{2}{3}$  atau melalui simpul 3 dengan probabilitas sebesar  $\frac{1}{3}$ . Jika yang dipilih adalah simpul 2 maka selanjutnya akan dipilih lagi simpul yang bertetangga dengan 2 yaitu simpul 3, 4 dan 1. Probabilitas masing-masing simpul dapat dilihat dalam matriks  $P$ .

### 2.3 Transformasi Wavelet Graf Spektral

Ide untuk mengkonstruksi wavelet pada graf muncul dari fungsi sinyal yang terletak pada simpul-simpul dari graf. Fungsi sinyal ini tidak dapat dianalisis secara langsung menggunakan wavelet pada bilangan real. Setiap fungsi  $f$  dapat dipandang sebagai pemetaan koordinat dari masing-masing simpul ke bilangan real, dituliskan  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Dengan demikian fungsi  $f$  dapat ditulis juga sebagai suatu vektor dalam  $\mathbb{R}^N$  dengan  $N$  adalah order dari graf  $G$ . Untuk sebarang sinyal  $f \in \mathbb{R}^N$ , Laplacian  $L$  memenuhi

$$(Lf)(i) = \sum_{i \sim j} w_{ij} [f(i) - f(j)] \quad (2.15)$$

dengan  $\sim$  merepresentasikan semua simpul  $i$  yang terhubung ke simpul  $j$ .

Dalam konstruksi wavelet graf spektral, spektrum matriks representasi graf yang digunakan adalah matriks Laplacian. Hal ini karena operator Laplacian graf adalah pasangan diskrit dari operator Laplace-Beltrami kontinu pada manifold. Selain itu melalui pendekatan dalam domain Fourier diperhatikan bahwa kompleks eksponensial adalah fungsi eigen dari operator Laplace 1-D yaitu merupakan negatif turunan kedua dari operator. Oleh karena itu, wavelet graf spektral dikonstruksi dengan analogi seperti konstruksi wavelet klasik dalam domain Fourier yang dapat dilihat pada bagian 2.1. Dalam Hammond, dkk (2011) didefinisikan wavelet graf spektral,  $\psi_{t,n}(m)$ , pada skala  $t$  dan simpul  $n$ , dalam ruang eigen dari matriks Laplacian  $L$  yaitu:

$$\psi_{t,n}(m) = \sum_{\ell=0}^{N-1} g(t\lambda_{\ell}) \chi_{\ell}^*(n) \chi_{\ell}(m) \quad (2.16)$$

dengan  $g$  adalah fungsi kernel pembangkit wavelet yang didefinisikan dalam domain graf spektral. Leonardi dan Van De Ville (2013) menuliskan beberapa analogi dalam Persamaan 2.16 dan Persamaan 2.4 yaitu (i) wavelet direpresentasikan oleh vektoreigen  $\chi_{\ell}(m)$  dari matriks Laplacian, menggantikan  $e^{i\omega x}$ ; (ii) menggeser wavelet ke simpul  $n$  berkoresponden dengan perkalian oleh  $\chi_{\ell}^*(n)$ , menggantikan  $e^{-\omega \tau}$ ; (iii) fungsi kernel  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  berlaku seperti filter *bandpass*

terskalakan, menggantikan  $\hat{\psi}$ ; (iv) frekuensi  $\omega$  dalam Fourier digantikan dengan nilai eigen  $\lambda_\ell$ .

Selain itu, Hammond, dkk (2011) juga mendefinisikan fungsi *scaling*,  $\phi_n(m)$ , sebagai filter *low pass* dengan menggunakan fungsi pembangkit  $h$  yaitu:

$$\phi_n(m) = \sum_{\ell=0}^{N-1} h(t_j \lambda_\ell) \chi_\ell^*(n) \chi_\ell(m) \quad (2.17)$$

Apabila dicari koefisien transformasi dengan menggunakan parameter skala  $t$  yang telah disampel menjadi diskrit  $\{t_j\}_{j=1}^J$  maka akan berpengaruh pada proses rekonstruksi. Dalam hal ini fungsi pembangkit *scaling*  $h(\cdot)$  berperan untuk menghasilkan proses rekonstruksi yang stabil. Hal ini dijamin apabila jumlahan kuadrat  $G(\lambda) = h(\lambda)^2 + \sum_{j=1}^J g(t_j \lambda)^2$  mempunyai batas yang jauh dari spektrum nol. Beberapa contoh desain fungsi  $g(\cdot)$  dan  $h(\cdot)$  dapat dilihat dalam bagian 2.4. Koefisien wavelet dan *scaling* diberikan melalui hasil kali dalam dari sinyal pada graf  $f$  dengan wavelet  $\psi_{t,n}$  dan fungsi *scaling*  $\phi_n$ , masing-masing dituliskan sebagai berikut.

$$W_f(t, n) = \langle \psi_{t,n}, f \rangle = \sum_{m=1}^N \psi_{t,n}^*(m) f(m), \quad (2.18)$$

$$S_f(n) = \langle \phi_n, f \rangle = \sum_{m=1}^N \phi_n^*(m) f(m). \quad (2.19)$$

## 2.4 Beberapa Frame Wavelet untuk Graf Tidak Berarah

Parameter skala yang diskrit lebih menarik dibanding yang kontinu apabila dipandang dari efisiensi komputasinya. Oleh karena itu, akan lebih memudahkan jika suatu wavelet yang kontinu diubah menjadi diskrit melalui proses diskritisasi parameter skalanya. Mendiskritisasi suatu fungsi sebelum dianalisis akan berpengaruh ke proses konstruksi kembali setelah analisis. Dalam proses rekonstruksi terkadang tidak didapatkan kembali fungsi atau sinyal yang mendekati asli. Untuk mengatasi hal ini, didesain wavelet yang dapat dikonstruksi kembali melalui hasil kali dalam.

Proses rekonstruksi dalam domain real dapat dijamin apabila basis wavelet yang dibangun merupakan basis ortonormal. Pada kenyataannya tidak mudah untuk mengkonstruksi suatu basis wavelet yang ortonormal. Oleh karena itu, konstruksi basis biortogonal pun dapat menjamin proses rekonstruksi dengan menggunakan dual dari setiap elemen basis tersebut. Namun, dalam kebanyakan kasus tidak dapat ditemukan himpunan pembangun yang merupakan basis tetapi merupakan frame. Frame mempunyai bentuk seperti basis tetapi ekspansi frame tidak unik. Suatu

barisan fungsi  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}$  dalam ruang Hilbert  $H$  dikatakan sebagai frame apabila terdapat konstanta  $0 < A \leq B < \infty$  sedemikian hingga

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (2.20)$$

untuk setiap  $f \in H$ . Konstanta  $A$  dan  $B$  disebut batas frame. Jika  $A = B$  frame disebut *tight frame*. Frame disebut *exact* jika barisan  $\{\psi_k\}$  bukan lagi frame ketika terdapat salah satu fungsi yang dihapus dari frame. Barisan  $\{\psi_k\}$  tidak diperlukan untuk bebas linear.

Jika ekspansi dari barisan  $\{\psi_k\}$  merupakan basis ortonormal di ruang Hilbert  $H$ , maka suatu fungsi  $f$  di  $H$  dapat ditulis dalam bentuk

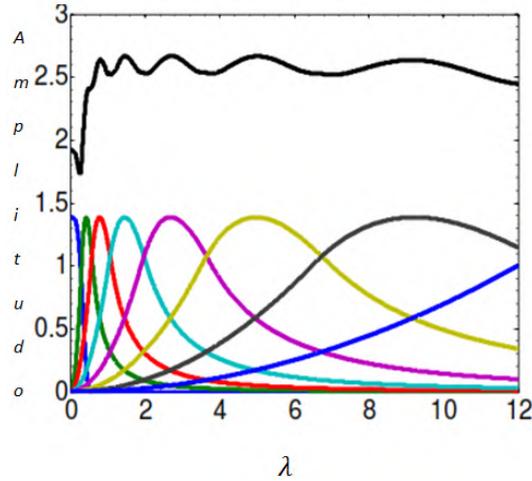
$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k$$

dengan nilai konstanta  $\alpha_k$  unik yaitu  $\alpha_k = \langle f, \psi_k \rangle$  untuk setiap  $k$ . Ini berarti saat proses rekonstruksi fungsi  $f$  dapat ditulis menjadi

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$$

dan memenuhi formula Parseval yaitu  $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2$ . Dapat diperhatikan bahwa basis ortonormal  $\{\psi_k\}$  juga merupakan *tight* frame dengan konstanta frame  $A = B = 1$ , tetapi sebaliknya suatu *tight* frame belum tentu merupakan basis ataupun basis ortonormal.

Beberapa jenis frame yaitu himpunan fungsi pembangkit kernel dan fungsi *scaling* telah dikonstruksi oleh beberapa peneliti, masing-masing dengan karakteristiknya tersendiri yaitu fungsi kernel *cubic-spline* diperkenalkan oleh Hammond, dkk (2011). Akan tetapi fungsi kernel cubic-spline dan frame yang dibentuk bukan merupakan *tight frame*. Selanjutnya, pada tahun 2013, Leonardi dan Van de Ville membentuk frame wavelet graf spektral yang *tight*, kernel yang digunakan adalah seperti kernel Meyer pada wavelet biasa. Lebih lanjut, Shuman, dkk pada tahun 2015 memperkenalkan kernel wavelet log-warped yang memenuhi bentuk *tight frame* yang dikonstruksi oleh mereka. Berikut diberikan penjelasan mengenai masing-masing kernel sebagai berikut.



Gambar 2.4: Fungsi kernel wavelet *cubic-spline*  $g(t_j\lambda)$  dengan  $\lambda_{\max} = 12$ ,  $K = 20$ ,  $J = 8$  (Shuman, dkk (2015))

#### 2.4.1 Fungsi kernel *cubic-spline*

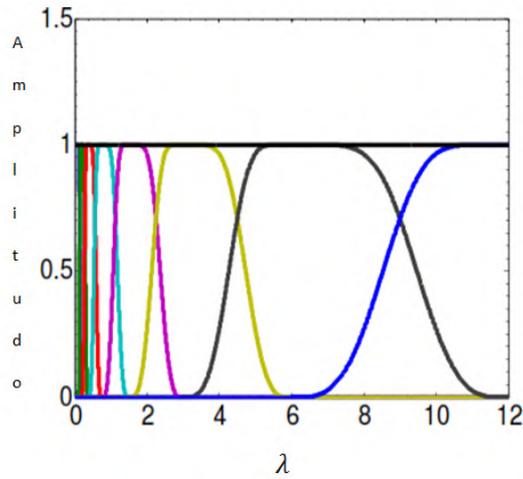
Hammond, dkk (2011) mendefinisikan fungsi kernel  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  yang didesain berlaku seperti filter *band-pass*, yaitu memenuhi kondisi  $g(0) = 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Selain itu, dikonstruksi fungsi *scaling*, yang berlaku seperti filter *low-pass*, yang memenuhi  $h(0) > 0$  dan  $h(x) \rightarrow 0$  saat  $x \rightarrow \infty$ . Dalam paper mereka, fungsi pembangkit kernel  $g$  yang dibangun merupakan *cubic-spline* sehingga  $g$  dan diferensialnya  $g'$  adalah fungsi yang kontinu

$$g(x; \alpha, \beta, x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^{-\alpha} x^\alpha & \text{untuk } x < x_1 \\ s(x) & \text{untuk } x_1 < x < x_2 \\ x_2^\beta x^{-\beta} & \text{untuk } x > x_2 \end{cases} \quad (2.21)$$

Koefisien dari polinomial kubik  $s(x)$  ditentukan dengan konstrain kekontinuan  $s(x_1) = s(x_2) = 1$  dan  $s'(x_1) = \frac{\alpha}{x_1}$  dan  $s'(x_2) = \frac{-\beta}{x_2}$ . Sebagai contoh dipilih  $\alpha = \beta = 1$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  dan  $s(x) = -5 + 11 - 6x^2 + x^3$ . Skala wavelet  $t_j$  dipilih secara logaritmik antara skala minimum dan maksimum  $t_J$  dan  $t_1$ . Skala ini disesuaikan batas atas  $\lambda_{\max}$  spektrum  $L$ . Sedangkan untuk fungsi kernel *scaling* diambil

$$h(x) = \gamma \exp\left(-\left(\frac{x}{0.6\lambda_{\min}}\right)^4\right) \quad (2.22)$$

dengan  $\gamma$  dipilih sedemikian hingga  $h(0)$  sama dengan nilai maksimum dari  $g$ . Pada Gambar 2.4 dapat dilihat fungsi kernel spline dengan nilai  $\lambda_{\max} = 12$ . Kurva yang berwarna-warni menandakan setiap bentuk kernel untuk masing-masing skala  $t_j$



Gambar 2.5: Frame wavelet graf seperti Wavelet Meyer dengan  $\lambda_{\max} = 12$  dan  $J = 8$  (Shuman, dkk (2015))

dengan  $j = 1, \dots, 8$ . Kurva biru muda adalah kernel *scaling*  $h(\lambda)$  dan tujuh kurva lainnya adalah bentuk kernel  $g(t_j \lambda)$  untuk masing-masing  $j = 1, \dots, 7$ . Kurva hitam yang paling atas merupakan jumlahan kuadrat dari kernel wavelet dan *scaling* yaitu  $G(\lambda) = \sum_{j=1}^7 |g(t_j \lambda)|^2 + |h(\lambda)|^2$ .

#### 2.4.2 Frame wavelet graf seperti wavelet Meyer

Leonardi dan Van De Ville pada tahun 2013 membangun fungsi pembangkit kernel  $g(s_j \lambda)$  dan fungsi *scaling*  $h(\lambda)$  untuk wavelet pada graf dengan analogi yang sama pada wavelet Meyer

$$g(\lambda) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \mathbf{v}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1\right)\right) & \text{untuk } \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \mathbf{v}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1\right)\right) & \text{untuk } \lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_3 \\ 0 & \text{untuk } \textit{lainnya} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$h(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } \lambda \leq \lambda_1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \mathbf{v}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1\right)\right) & \text{untuk } \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \\ 0 & \text{untuk } \textit{lainnya} \end{cases} \quad (2.24)$$

dengan,  $\mathbf{v}(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$  dan  $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ ,  $\lambda_2 = 2\lambda_1$ ,  $\lambda_3 = 4\lambda_1$ . Skala wavelet didefinisikan sebagai  $s_j = 2^j \frac{1}{\lambda_{\max}}$  untuk  $j = 0, \dots, J - 1$ . Shuman dkk (2015) menunjukkan bentuk kernel untuk wavelet seperti wavelet meyer yang diperkenalkan oleh Leonardi dan Van De Ville (2013) pada Gambar 2.5. Setiap bentuk kernel untuk masing-masing skala  $s_j$  dengan  $j = 1, \dots, 8$ . Kurva biru muda adalah kernel *scaling*  $h(\lambda)$  dan tujuh kurva lainnya adalah bentuk kernel  $g$  untuk masing-masing

skala  $s_j$  dengan  $j = 1, \dots, 7$ . Kurva hitam yang paling atas merupakan jumlahan kuadrat dari kernel wavelet dan *scaling* yaitu  $G(\lambda) = \sum_{j=1}^J |g(t_j \lambda)|^2 + |h(\lambda)|^2 = 1$ . Himpunan kernel ini membentuk frame Parseval, disebut juga *1-tight frame*, yang didefinisikan sebagai berikut: Suatu keluarga fungsi  $\{e_k\}$  membentuk frame Parseval dari suatu ruang Hilbert  $H$  jika untuk setiap  $f \in H$  memenuhi

$$\|f\|^2 = \sum_k |\langle f, e_k \rangle|^2.$$

Rumus rekonstruksi fungsi  $f$  dapat diperoleh dengan mudah yaitu

$$f = \sum_k \langle f, e_k \rangle e_k.$$

#### 2.4.3 Frame wavelet graf Log-Warped

Shuman dkk (2015) mendesain frame wavelet graf dengan menggunakan fungsi *warping* logaritmik untuk melakukan textitwarping terhadap sistem translasi uniform dalam domain graf spektral,  $\{\hat{g}_m^u\}_{m=1,2,\dots,M-1}$ . Fungsi *warping* yang digunakan adalah  $w(x) = \log(x)$ . Dengan memilih  $2 < R \leq M$  dan  $K \leq \frac{R}{2}$  dikonstruksi himpunan translasi uniform  $\{\hat{g}_m^u\}_{m=1,2,\dots,M-1}$ , dengan  $\gamma = w(\lambda_{\max})$ .

Selanjutnya, didefinisikan  $M - 1$  kernel wavelet dan satu kernel *scaling* masing-masing ditulis sebagai

$$\hat{g}_m(\lambda) = \hat{g}_{m-1}^u(w(\lambda)), \quad m = 2, 3, \dots, M \quad (2.25)$$

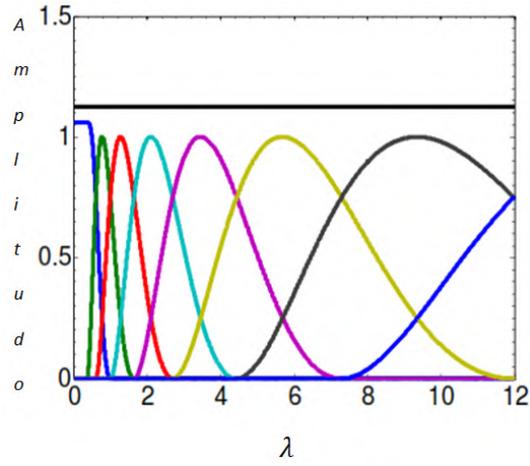
dan

$$\hat{g}_1(\lambda) = \sqrt{R \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{R}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sum_{m=2}^M |\hat{g}_m(\lambda)|^2} \quad (2.26)$$

Pada Gambar 2.6 dapat dilihat bahwa frame wavelet *log-warped* terdiri dari tujuh kernel wavelet dan satu kernel *scaling*. Bentuk kernel untuk masing-masing  $m = 1, \dots, 8$  ditandai dengan delapan kurva yang berwarna-warni. Sedangkan kurva hitam yang paling atas merupakan jumlahan kuadrat dari kernel wavelet dan *scaling* yaitu  $G(\lambda) = \sum_{j=1}^J |g_m(\lambda)|^2$  untuk  $m = 1, \dots, 8$ .

Konsep dasar yang digunakan adalah konvolusi tergeneralisasi dari sinyal  $f, g \in \mathbb{R}^N$  pada graf dapat dilihat dalam paper Shuman, dkk (2016) yaitu

$$(f * g)(n) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_\ell) \hat{g}(\lambda_\ell) \mathcal{X}_\ell(n)$$



Gambar 2.6: Frame wavelet graf Log-Warped dengan kernel Hann ( $K = 1, a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$ ) dan  $\lambda_{\max} = 12$ ,  $R = 3$ , dan  $M = 8$

dan juga operator translasi tergeneralisasi  $T_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  melalui konvolusi tergeneralisasi dengan  $\delta_i$  adalah Kronecker delta

$$(T_i)f(n) = \sqrt{N}(f * \delta_i)(n) = \sqrt{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_\ell) \mathcal{X}_\ell^*(i) \mathcal{X}_\ell(n). \quad (2.27)$$

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Penelitian dilakukan dengan tahapan sebagai berikut.

#### **3.1 Tahapan Penelitian**

##### **1. Studi Literatur**

Dasar teori yang digunakan dalam penelitian ini dikaji dari beberapa literatur yang terkait. Literatur tersebut terdiri dari transformasi wavelet kontinu dalam domain Fourier, Laplacian graf berbobot baik untuk graf tidak berarah maupun graf berarah, transformasi wavelet pada graf, dan juga bentuk desain frame wavelet yang telah dikonstruksi oleh peneliti-peneliti sebelumnya

##### **2. Mengkaji sifat-sifat Laplacian untuk sebarang graf berarah**

Pada tahap ini dikaji sifat-sifat yang merupakan syarat cukup atau syarat perlu dalam mengonstruksi wavelet graf spektral. Pertama-tama, dikaji sifat-sifat Laplacian graf berarah yang mungkin untuk mendapatkan syarat yang diperlukan. Selanjutnya, dikaji karakteristik dan bentuk nilai eigen dan vektor eigen dari Laplacian graf.

##### **3. Mengkonstruksi frame wavelet graf spektral dengan menggunakan Laplacian graf berarah**

Pada tahap ini, ingin didapatkan wavelet pada graf berarah yang berbobot dengan order berhingga dengan menggunakan representasi matriks Laplacian graf berarah. Dalam hal ini disusun frame wavelet yang digunakan sebagai kernel pembangkit wavelet dan juga fungsi *scaling*, berkaitan dengan spektrum dari graf. Frame wavelet yang diperoleh dalam penelitian ini merupakan *tight frame*.

##### **4. Menulis paper dan diseminasi**

Pada tahap ini, dilakukan penulisan hasil penelitian yang telah didapatkan. Selanjutnya, paper yang dituliskan akan dipresentasikan pada seminar internasional.

##### **5. Membuat simpulan dan saran**

Simpulan dan saran diberikan setelah mendapatkan hasil konstruksi wavelet graf berarah dengan menggunakan Laplacian graf berarah.

6. Menulis laporan

Laporan akan dituliskan berdasarkan hasil konstruksi wavelet graf spektral dengan menggunakan Laplacian graf berarah dan sifat-sifat Laplacian graf berarah yang mendukung konstruksi

## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini diuraikan tentang bentuk-bentuk Laplacian graf berarah. Selanjutnya dianalisis sifat nilai eigen dan vektor eigen dari Laplacian tersebut. Hal ini dilakukan untuk mengetahui syarat perlu suatu himpunan nilai eigen atau spektrum dari Laplacian graf berarah dapat digunakan dalam konstruksi wavelet graf spektral. Wavelet ini dapat digunakan untuk menganalisis *dataset* atau sinyal yang terletak pada simpul graf berarah.

Ide dasar konstruksi adalah dari kenyataan bahwa selain pada graf tidak berarah, dapat ditemukan pula suatu sinyal atau *dataset* yang terletak pada simpul-simpul di suatu graf berarah yang mempunyai bobot. Data pada setiap simpul dari graf dapat dipandang sebagai sebagai sinyal pada graf. Untuk menganalisis sinyal-sinyal tersebut menggunakan wavelet maka dikonstruksi wavelet pada graf melalui teori graf spektral, yang dalam penelitian ini berkaitan dengan spektrum dari Laplacian graf. Oleh karena yang menjadi obyek adalah graf berarah maka Laplacian yang digunakan adalah Laplacian untuk graf berarah yang mempunyai bobot.

Berikut adalah pembahasan mengenai bentuk Laplacian graf berarah dan sifat-sifatnya. Selanjutnya dijelaskan proses konstruksi frame wavelet dan beberapa contoh kernel yang dapat dibentuk menjadi frame. Frame yang dibentuk adalah frame yang *tight* agar secara numerik diperoleh suatu proses rekonstruksi yang stabil.

#### 4.1 Laplacian Graf Berarah

Pada bagian ini diberikan definisi dari Laplacian graf berarah dan sifat-sifat terkait dengan nilai eigen dan vektor eigennya. Hasil pengkajian Laplacian graf berarah merujuk dalam Boley, dkk (2011) dan Chung (2005) diperoleh dua definisi dari Laplacian graf berarah dengan pendekatan yang berbeda-beda. Tentu saja dengan karakteristik nilai eigen dan vektor eigen yang berbeda. Pertama akan dibahas Laplacian dengan definisi seperti sebelumnya yang memiliki bobot bernilai eksak. Pada bagian kedua dibahas Laplacian dengan bobot berupa probabilitas. Selanjutnya disimpulkan bentuk Laplacian graf berarah beserta karakteristik nilai eigen dan vektor eigennya yang memenuhi proses konstruksi frame wavelet graf spektral.

#### 4.1.1 Laplacian graf berarah dengan pendekatan menggunakan derajat simpul

Pada bagian ini Laplacian graf berarah didefinisikan melalui matriks *adjacency*  $\mathcal{A}$  dan matriks diagonal  $\mathcal{D}$  dari derajat seperti definisi Laplacian graf tidak berarah pada literatur-literatur. Diberikan graf berarah yang mempunyai bobot  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$  dengan  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$  dan  $\mathcal{E} = \{(i, j) | i, j \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  dan  $w : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$  merupakan himpunan bobot dari setiap sisi berarah (*arc*) pada graf. Diberikan juga matriks *adjacency*  $\mathcal{A}$  yang berukuran  $N \times N$  dan matriks diagonal  $\mathcal{D} = \text{diag}(d_i) = \text{diag}(\mathcal{A} \cdot \mathbf{1})$  dengan  $d_i$  menyatakan banyaknya *arc* yang keluar dari simpul  $i$  atau derajat keluar dari simpul  $i$  dan  $\mathbf{1}$  adalah vektor kolom berukuran  $N \times 1$  yang semua entrinya bernilai satu. Didefinisikan  $L_d$  sebagai matriks Laplacian untuk graf berarah  $\mathcal{G}$  yaitu

$$L_d = \mathcal{D} - \mathcal{A} \quad (4.1)$$

Seperti yang telah diketahui bahwa Laplacian graf tidak berarah mempunyai bentuk yang simetris dan merupakan matriks semidefinit positif sehingga nilai eigennya selalu bernilai real dan non-negatif. Hal ini karena semua nilai eigen dari matriks yang self-adjoint bernilai real dan semua nilai eigen dari matriks semidefinit positif bernilai non-negatif. Namun, tidak demikian dengan Laplacian graf berarah. Bentuk Laplacian untuk graf berarah pada Persamaan 4.1 tidak simetris sehingga tidak dijamin nilai eigennya bernilai real. Misal  $\{\lambda_\ell; \ell = 0, 1, \dots, N-1\}$  adalah nilai eigen untuk Laplacian  $L_d$  maka vektor eigen  $\chi_\ell$  dari matriks  $L_d$  adalah suatu vektor tak nol yang memenuhi

$$L_d \chi_\ell = \lambda_\ell \chi_\ell, \quad (4.2)$$

untuk  $\ell = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Jika memenuhi Persamaan 4.2 maka vektor eigen  $\chi_\ell$  dikatakan vektor yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\{\lambda_\ell\}$ . Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda$  bersama dengan vektor nol disebut ruang eigen dari Laplacian  $L_d$  yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_\ell$ . Dalam ruang fungsional vektor eigen biasa disebut sebagai fungsi eigen.

Adapun nilai eigen dari Laplacian graf berarah  $L_d$  merupakan akar-akar dari polinomial persamaan karakteristik, yang diperoleh dari penjabaran Persamaan 4.2 yaitu

$$\det[L_d - \lambda \cdot I] = 0 \quad (4.3)$$

dengan  $I$  adalah matriks identitas berukuran  $N \times N$ . Nilai determinan matriks  $L_d - \lambda \cdot I$  haruslah sama dengan nol agar Persamaan 4.2 terpenuhi. Selanjutnya untuk setiap nilai  $\lambda_\ell$  yang telah diperoleh dari Persamaan 4.3 dapat dicari vektor

eigen Laplacian  $L_d$  yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen dengan menggunakan rumus berikut.

$$(L_d - \lambda \cdot I)\chi_\ell = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

dengan  $\mathbf{0}$  adalah vektor kolom berukuran  $N \times 1$  yang semua entrinya adalah bilangan  $0 \in \mathbb{R}$  dan  $\chi_\ell$  adalah vektor eigen atau fungsi eigen yang ingin diketahui.

Lebih lanjut, setiap nilai eigen dari Laplacian yang simetris atau *self-adjoint* bernilai real. Oleh karena itu, untuk mendapatkan nilai eigen yang real bentuk Laplacian yang tidak simetris dapat disimetriskan terlebih dahulu. Secara umum sebarang matriks yang tidak simetris, katakanlah matriks  $M \in M_n(\mathbb{R})$ , dapat dijadikan simetris dengan menggunakan rumus

$$M_{\text{sim}} = \frac{M + M^T}{2}. \quad (4.5)$$

Apabila rumus ini diterapkan pada Laplacian berarah maka Laplacian yang tidak simetris dapat disimetriskan menjadi

$$L_{\text{ds}} = \frac{L_d + L_d^T}{2} \quad (4.6)$$

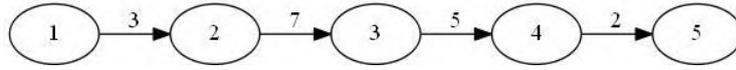
Dengan demikian nilai eigen yang diperoleh merupakan bilangan yang bernilai real. Namun, tidak dapat dipastikan nilai eigennya bernilai non-negatif kecuali Laplacian  $L_d$  merupakan matriks semidefinit positif yaitu untuk suatu fungsi tak nol  $f \in \mathbb{R}^N$ , Laplacian  $L_d$  memenuhi

$$f^T L_d f \geq 0.$$

Untuk kasus matriks kompleks berlaku  $f^* L_d f \geq 0$ . Berikut adalah Lemma yang menyatakan hubungan antara matriks yang disimetriskan  $M_{\text{sim}}$  dengan matriks asalnya  $M$ .

**Lemma 1** (Lemma 12 dalam Boley, dkk (2011)). *Diberikan sebarang matriks  $M$  yang tidak simetris. Bentuk simetrisnya,  $\frac{M+M^T}{2}$ , adalah simetris semidefinit positif jika dan hanya jika  $f^T M f \geq 0$  untuk sebarang fungsi tak nol  $f$  (dapat bernilai real ataupun kompleks). Semua nilai eigen dari matriks  $M$  adalah non-negatif atau  $M$  merupakan matriks semidefinit positif.*

*Bukti.* Misal  $\frac{M+M^T}{2}$  adalah matriks simetris semidefinit positif. Ini berarti untuk



Gambar 4.1: Graf Lintasan Berarah Sederhana  $P_5$  dengan Bobot

sebarang fungsi real tak nol  $f \in \mathbb{R}^N$  berlaku

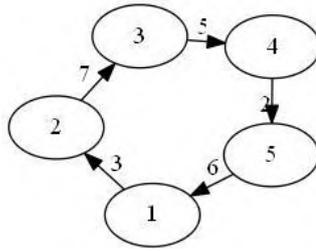
$$f^T \frac{M+M^T}{2} f \geq 0 \iff (f^T M f + f^T M^T f) \geq 0$$

Dari pertidaksamaan ini, haruslah  $f^T M f \geq 0$  dan  $f^T M^T f \geq 0$  sebab jumlahan dari operator non-negatif adalah non-negatif. Dengan demikian matriks  $M$  merupakan matriks semidefinit positif walaupun tidak simetris. Sebaliknya, diketahui  $f^T M f \geq 0$ , akan ditunjukkan bahwa bentuk simetrisnya merupakan matriks semidefinit positif. Misal diambil fungsi kompleks  $z = f_1 + if_2$  dengan  $f_1, f_2$  merupakan fungsi real, akan diselidiki bahwa  $z^* M z \geq 0$ . Selanjutnya, dituliskan

$$z^* M z = (f_1^T - if_2^T) M (f_1 + if_2) = f_1^T M f_1 + f_2^T M f_2 + i(f_1^T M f_2 - f_2^T M f_1)$$

Misal  $\alpha = f_1^T M f_1 + f_2^T M f_2$  maka jelas diperoleh  $\alpha \geq 0$ . Oleh karena itu didapatkan  $z^* (M + M^T) z = 2\alpha \geq 0$  atau  $z^* \frac{(M+M^T)}{2} z \geq 0$ . Dapat disimpulkan bahwa untuk matriks asal  $M$  yang semidefinit positif akan diperoleh bentuk simetris yang semidefinit positif. Akan tetapi, nilai eigen untuk matriks yang disimetriskan sudah memiliki makna yang berbeda sehingga tidak dapat digunakan dalam konstruksi.  $\square$

**Contoh 1.** Berikut ini adalah contoh Laplacian graf berarah beserta nilai eigen dan vektor eigennya untuk graf lintasan berarah yang mempunyai bobot seperti pada Gambar 4.1 dan graf siklik berarah yang mempunyai bobot seperti pada Gambar 4.2. Perhatikan graf lintasan berarah yang mempunyai bobot. Terlebih dahulu ditentukan matriks *adjacency*  $\mathcal{A}$  dari graf merujuk pada Persamaan 2.12 dan matriks diagonal  $\mathcal{D}$  yang merupakan matriks diagonal dari derajat keluar setiap simpul pada graf. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa derajat keluar dari suatu simpul pada graf dapat diperoleh dari perkalian matriks *adjacency*  $\mathcal{A}$  dengan vektor kolom  $\mathbf{1}$  yang berukuran  $N \times 1$  dan entrinya adalah  $1 \in \mathbb{R}$ . Selanjutnya, dibentuk Laplacian graf ini dengan rumus pada Persamaan 4.1. Langkah terakhir adalah menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari Laplacian dengan rumus pada Persamaan 4.2.



Gambar 4.2: Graf Siklik Berarah  $C_5$  dengan bobot

Berikut adalah matriks *adjacency* dari graf lintasan berarah  $P_5$

$$\mathcal{A}(P_5) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan  $\mathcal{D}(P_5) = \text{diag}(\mathcal{A}(P_5) \cdot \mathbf{1}) = \text{diag}(3, 7, 5, 2, 0)$  diperoleh Laplacian graf berarah  $P_5$  sebagai

$$L_d(P_5) = \mathcal{D}(P_5) - \mathcal{A}(P_5) = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Persamaan 4.3 didapatkan polinomial karkateristik  $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 7)(\lambda - 5)(\lambda - 2)\lambda$  dan ditentukan spektrum atau himpunan nilai eigen  $L_d(P_5)$  dengan mudah yaitu  $\sigma(P_5) = \{0, 2, 3, 5, 7\}$ . Himpunan spektrum ini ditulis menaik, demikian juga vektor eigennya ditulis berurutan dan bersesuaian dengan nilai eigennya. Masing-masing vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya didapatkan melalui Persamaan 4.2 dan dituliskan sebagai berikut

$$\chi_1 = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.4472 \\ 0.4472 \\ 0.4472 \\ 0.4472 \end{bmatrix}, \chi_2 = \begin{bmatrix} 0.9174 \\ 0.3058 \\ 0.2184 \\ 0.1311 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_3 = \begin{bmatrix} 0.9174 \\ 0.3058 \\ 0.2184 \\ 0.1311 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\chi_4 = \begin{bmatrix} -0.8218 \\ 0.5479 \\ 0.1565 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_5 = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demikian juga, dapat ditulis Laplacian untuk graf siklik berarah  $C_5$  yang mempunyai bobot pada Gambar 4.2 sebagai

$$L_d(C_5) = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

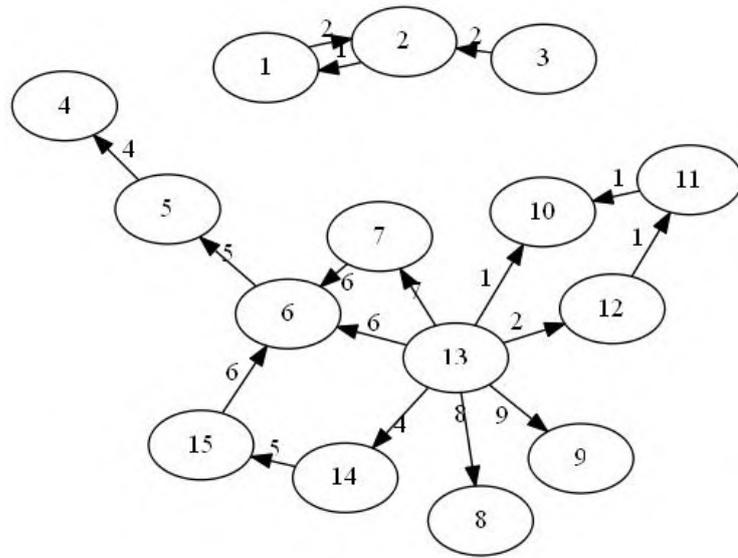
dan polinomial karakteristiknya sebagai  $p(\lambda) = \lambda^5 - 19\lambda^4 + 135\lambda^3 - 449\lambda^2 + 704\lambda$ . Dengan mencari akar polinomial karakteristiknya diperoleh himpunan spektrum  $\sigma(C_5) = \{0, 2.5094 + 2.7380i, 2.5094 - 2.7380i, 6.9906 + 1.4727i, 6.9906 - 1.4727i\}$ . Selanjutnya ditentukan vektor eigennya dengan menggunakan Persamaan 4.4 yang dituliskan berurutan dan bersesuaian dengan masing-masing nilai eigennya sebagai berikut

$$\chi_1 = \begin{bmatrix} -0.4472 \\ -0.4472 \\ -0.4472 \\ -0.4472 \\ -0.4472 \end{bmatrix}, \chi_2 = \begin{bmatrix} 0.5655 + 0.0000i \\ 0.0925 - 0.5161i \\ -0.1426 - 0.3673i \\ -0.2721 - 0.1049i \\ -0.0743 + 0.3993i \end{bmatrix}, \chi_3 = \begin{bmatrix} 0.5655 + 0.0000i \\ 0.0925 + 0.5161i \\ -0.1426 + 0.3673i \\ -0.2721 + 0.1049i \\ -0.0743 - 0.3993i \end{bmatrix},$$

$$\chi_4 = \begin{bmatrix} 0.5189 - 0.1915i \\ -0.7842 + 0.0000i \\ -0.0011 + 0.1650i \\ 0.0490 - 0.0654i \\ -0.1705 + 0.1270i \end{bmatrix}, \chi_5 = \begin{bmatrix} 0.5189 + 0.1915i \\ -0.7842 + 0.0000i \\ -0.0011 - 0.1650i \\ 0.0490 + 0.0654i \\ -0.1705 - 0.1270i \end{bmatrix}$$

■

Pada Contoh 1 dapat dilihat bahwa semua spektrum graf lintasan berarah  $P_5$  bernilai real dan non negatif walaupun bentuk matriksnya tidak simetris. Sebaliknya, spektrum graf siklik berarah  $C_5$  bernilai nol dan imajiner. Ini menunjukkan bahwa graf lintasan berarah  $P_5$  yang berbobot dan graf siklik berarah  $C_5$



Gambar 4.3: Graf untuk Jaringan Web dengan 15 Link URL

yang berbobot mempunyai karakteristik spektral yang berbeda. Walaupun graf  $C_5$  didapatkan dari penambahan satu *arc* berbobot yang menghubungkan simpul 5 ke simpul 1 dari simpul pada graf  $P_5$ . Namun secara keseluruhan tidak dapat dikarakterisasi nilai eigen dan vektor eigen Laplacian  $L_d$  seperti pada Persamaan 4.1. Pada kenyataannya bentuk graf berarah (atau tidak berarah) yang merepresentasikan jaringan tidak selalu sederhana bahkan bisa saja mempunyai *arc* (atau sisi) yang *self-loop* dan juga mempunyai order yang besar. *Arc* yang mempunyai simpul awal dan akhir yang sama disebut sebagai *arc* yang *self-loop*.

**Contoh 2.** Ini adalah contoh graf untuk jaringan informasi seperti halaman web. Jaringan web dapat dipandang sebagai suatu graf berarah dengan setiap link *Uniform Resource Locator* (URL) yang ada pada halaman web dinyatakan sebagai simpul. Apabila satu URL termuat (tertulis atau dapat dimuat (*load*) dari halaman web yang sedang terbuka) di satu halaman web maka terdapat satu *arc* yang menghubungkan URL web ke URL tersebut. Dengan kata lain, dua link URL dapat dihubungkan oleh suatu *arc* jika dalam URL halaman web yang satu memuat link URL lainnya. Jelas graf dari web merupakan graf berarah sebab jika kita menulis sebuah blog dan mencantumkan sebuah halaman web dari institusi atau perusahaan atau blog lainnya maka kita tidak dapat mengharapkan dalam web tersebut tertulis link URL blog kita. Jika dalam web tersebut juga memuat link URL kita maka terdapat *arc* yang menghubungkan URL kita ke web tersebut dan juga terdapat *arc* yang menghubungkan URL web ke URL halaman web kita.

Misalkan diberikan jaringan web sederhana yang terdiri dari 15 link URL dan

bobot dari *arc* yang menghubungkan satu URL ke URL lainnya adalah tingginya popularitas URL halaman web asal. Setiap link URL yang terhubung oleh *arc* digambarkan dalam Gambar 4.3. Dalam contoh ini akan diselidiki nilai eigen dan vektor eigen dari Laplacian graf untuk jaringan web pada Gambar 4.3. Dengan cara yang sama seperti pada Contoh 1 ditentukan Laplacian graf untuk jaringan web sebagai berikut. Pertama-tama dibentuk matriks *adjacency* dari graf yang berisi bobot dari tiap-tiap *arc*. Jika terdapat *arc* dari simpul *i* ke *j* dalam *V* yaitu himpunan simpul-simpul dalam graf maka entri matriks *adjacency*  $\mathcal{A}$  pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Jika tidak terdapat *arc* maka bernilai nol. Matriks *adjacency* dari graf untuk jaringan web ini adalah matriks kuadrat berukuran  $15 \times 15$  yaitu

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks diagonal  $\mathcal{D}$  yang berukuran  $15 \times 15$  sebagai  $\mathcal{D} = \text{diag}(2, 1, 2, 0, 4, 5, 6, 0, 0, 0, 1, 1, 37, 5, 6)$ . Selanjutnya, Laplacian dari graf untuk jaringan web ini diperoleh melalui Persamaan 4.1 dan polinomial karakteristik dari Laplacian dapat ditulis sebagai  $p(\lambda) = \lambda^4(-\lambda^2 + 3\lambda)(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 5)2(\lambda - 6)^2(\lambda - 37)$ . Oleh karena determinan dari matriks  $\lambda I - \mathcal{A}$  harus sama dengan nol maka dapat ditulis  $p(\lambda) = 0$  dan diperoleh nilai eigen dari Laplacian graf untuk jaringan web pada Gambar 4.3 sebagai

$$\sigma(L_d) = \{2, 0, 3, 37, 5, 6, 6, 5, 4, 0, 0, 0, 1, 1, 0\}.$$

Berikut hanya dituliskan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen pada spektrum yaitu ditulis berurutan sesuai dengan urutan pada himpunan  $\sigma(L_d)$  yaitu

$$\begin{aligned}
 \chi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_2 = \begin{bmatrix} -0.5774 \\ -0.5774 \\ -0.5774 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_3 = \begin{bmatrix} -0.6667 \\ 0.3333 \\ -0.6667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1240 \\ 0.9923 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \chi_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1255 \\ -0.9728 \\ 0.1946 \end{bmatrix}, \chi_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9754 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2203 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1240 \\ 0.9923 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0126 \\ 0.0631 \\ 0.1894 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1664 \\ 0.9468 \\ 0.1894 \end{bmatrix}, \chi_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4013 \\ 0.4013 \\ 0.4013 \\ 0.4013 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1844 \\ 0.4013 \\ 0.4013 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\chi_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9774 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2113 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9717 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2364 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9985 \\ 0.0555 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9985 \\ 0.0555 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_{15} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5767 \\ 0.5767 \\ 0.5767 \\ 0.0468 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai eigen  $\lambda = 0$  memiliki multiplisitas aljabar 5 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 0$  adalah  $\chi_2, \chi_{10}, \chi_{11}, \chi_{12}$  dan  $\chi_{15}$



Graf pada Contoh 2 menunjukkan bahwa tidak semua matriks tak simetris mempunyai nilai eigen real. Sedangkan untuk matriks yang tidak simetris belum tentu memiliki nilai eigen real. Sebab nilai eigen real hanya dijamin oleh matriks real yang simetris maka untuk matriks real tidak simetris dapat disimetriskan dengan menggunakan rumus pada Persamaan 4.6. Selain itu, Laplacian pada Contoh 2 merupakan matriks singular sebab mempunyai nilai determinan sama dengan nol dan juga terdapat nilai eigen yang bernilai nol.

**Contoh 3.** Perhatikan Laplacian graf siklik berarah dalam Contoh 1 adalah Laplacian yang tidak simetris dan terdapat nilai eigen yang bernilai imajiner. Laplacian ini dapat disimetriskan untuk memperoleh nilai eigen yang real dengan menggunakan rumus pada Persamaan 4.6. Bentuk Laplacian simetris untuk graf siklik berarah  $C_5$  pada Contoh 1 dapat ditulis menjadi

$$L_{ds}(C_5) = \begin{bmatrix} 3 & -1.5 & 0 & 0 & -1 \\ -1.5 & 7 & -3.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3.5 & 5 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Laplacian ini mempunyai nilai eigen yang real yaitu

$$\sigma(L_{ds}(C_5)) = \{-0.3987, 1.7532, 2.6528, 4.8658, 10.1269\}$$

dan vektor eigen yang bersesuaian dengan setiap nilai eigen ditulis sesuai urutan nilai eigen pada  $\sigma(L_{ds}(C_5))$  yaitu

$$\chi_1 = \begin{bmatrix} -0.2387 \\ -0.2851 \\ -0.5004 \\ -0.6814 \\ -0.3836 \end{bmatrix}, \chi_2 = \begin{bmatrix} 0.4995 \\ -0.0739 \\ -0.3249 \\ -0.3184 \\ 0.7336 \end{bmatrix}, \chi_3 = \begin{bmatrix} 0.6454 \\ 0.4385 \\ 0.2681 \\ -0.3622 \\ -0.4337 \end{bmatrix}$$

$$\chi_4 = \begin{bmatrix} -0.5019 \\ 0.3871 \\ 0.4512 \\ -0.5177 \\ 0.3558 \end{bmatrix}, \chi_5 = \begin{bmatrix} 0.1586 \\ -0.7557 \\ 0.6072 \\ -0.1872 \\ 0.0035 \end{bmatrix}.$$

Jelas Laplacian yang telah disimetriskan ini mempunyai nilai eigen dan vektor eigen yang real. Akan tetapi nilai eigennya tidak selalu positif.

■

#### 4.1.2 Laplacian graf berarah dengan pendekatan *random walk*

Misalkan diberikan suatu graf berarah yang berbobot  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ . Maka Laplacian graf berarah dengan menggunakan *random walk* didefinisikan melalui matriks probabilitas transisi  $P = [p_{ij}]$  dengan  $p_{ij}$  dinotasikan sebagai probabilitas perpindahan dari simpul  $i$  ke simpul  $j$  pada graf  $\mathcal{G}$ . Penerapan dari Laplacian ini adalah untuk jaringan berbentuk graf berarah yang bisa saja bobotnya bukan lagi suatu nilai yang deterministik tapi stokastik. Chung (2005) memperkenalkan Laplacian ini sebagai matriks kompleks Hermitian sehingga memiliki nilai eigen yang real.

Matriks probabilitas transisi  $P = [p_{ij}]$  yang bersesuaian dengan *random walk* pada graf berarah didefinisikan sebagai

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{\sum_k a_{ik}}, & \text{jika } e = (i, j) \in E \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Misalkan  $\mathcal{D} = \text{diag}(d_i)$  adalah matriks diagonal dari derajat simpul pada graf maka matriks  $P$  dapat ditulis menjadi  $P = \mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{A}$ . Selanjutnya, Laplacian didefinisikan sebagai

$$L_p = \Phi(I - P)$$

dengan  $\Phi = \text{diag}(\phi)$  dan  $\phi$  adalah vektor kolom dari probabilitas stasioner sedemikian sehingga memenuhi  $\phi^T P = \phi^T$  dan  $\phi^T \cdot \mathbf{1} = 1$ . Eksistensi dari vektor  $\phi$  unik jika *Markov chain*  $P$  yang bersesuaian dengan *random walk* pada graf  $\mathcal{G}$  tak tereduksi (*irreducible*). *Markov chain* yang *irreducible* mempunyai distribusi probabilitas stasioner yang unik yaitu  $\phi_i$  dengan  $\phi_i > 0$  dan  $1 \leq i \leq N$ . Secara umum, *Markov chain* yang bersesuaian dengan *random walk* untuk graf berarah tidak *reversible* atau tidak bolak-balik. Sebagai tambahan, suatu *Markov chain irreducible* jika dan hanya jika graf berarah  $\mathcal{G}$  *strongly connected* yaitu terdapat lintasan (*path*) berarah dari sebarang simpul  $i$  ke sebarang simpul lainnya dalam himpunan  $\mathcal{V}$ . Namun dalam kebanyakan aplikasi, tidak semua jaringan dapat dibentuk menjadi graf yang *strongly connected*.

Pada bagian sebelumnya telah dibahas definisi Laplacian yaitu untuk graf tidak berarah, matriks  $L = D - A$  simetris dan identik dengan matriks  $L_p$ . Akan tetapi untuk graf berarah, matriks  $L_d = \mathcal{D} - \mathcal{A}$  tidak simetris dan juga tidak identik dengan  $L_p$ . Bentuk Laplacian  $L_p$  untuk graf berarah  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, w\}$  dapat disimetriskan dengan menggunakan formula pada Persamaan 4.5 yaitu

$$L_{ps} = \frac{(L_p + L_p^T)}{2} = \Phi - \frac{\Phi P + P^T \Phi}{2}. \quad (4.7)$$

Selain itu, bentuk Laplacian ternormalkan dari  $L_p$  adalah

$$L_{pd} = \Phi^{1/2} L_p \Phi^{-1/2}$$

dan bentuk simetrisnya adalah

$$L_{pds} = \frac{(L_{pd} + L_{pd}^T)}{2} = I - \frac{\Phi^{1/2} P \Phi^{-1/2} + \Phi^{-1/2} P^T \Phi^{1/2}}{2} = \Phi^{-1/2} L_{ps} \Phi^{-1/2} \quad (4.8)$$

dengan  $P^{1/2} = [p_{ij}]^{1/2}$  dan  $P^{-1/2} = [p_{ij}]^{-1/2}$ . Definisi Laplacian pada Persamaan 4.8 memenuhi  $L_{pds} = L_{pds}^*$  sehingga merupakan matriks Hermitian dan jelas merupakan matriks yang simetris. Sifat ini menjamin nilai eigen yang dimiliki oleh Laplacian bernilai real.

Selanjutnya, nilai eigen dari Laplacian graf berarah  $L_{pds}$  diperoleh dengan

memerhatikan karakterisasi nilai eigen untuk suatu matriks Hermitian. Nilai eigen minimum dan maksimum dari suatu matriks Hermitian dikarakterisasi dengan menggunakan Pecahan Rayleigh (Rayleigh Quotient). Demikian pula untuk Laplacian graf berarah  $L_{\text{pds}}$ . Misalkan Laplacian untuk graf berarah  $\mathcal{G}$  dengan order  $N$  mempunyai nilai eigen  $\lambda_i, i = 0, \dots, N-1$  maka setiap nilai eigen ini dapat disusun berurutan naik menjadi  $\lambda_{\min} = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N-1} = \lambda_{\max}$ . Diberikan Pecahan Rayleigh  $R(f)$  untuk sebarang fungsi  $f : \mathcal{V}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{C}$  yaitu

$$R(f) = \frac{\sum_{i \rightarrow j} |f(i) - f(j)|^2 \phi(i) P(i, j)}{\sum_i |f(i)|^2 \phi(i)}.$$

Berikut adalah beberapa karakterisasi nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $L_{\text{pds}}$  yang dikembangkan dari sifat-sifat matriks Hermitian. Nilai eigen minimum

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} = \lambda_0 &= \min_{f \neq 0} R(f) \\ &= \min_{f \neq 0} \frac{\sum_{i \rightarrow j} |f(i) - f(j)|^2 \phi(i) P(i, j)}{\sum_i |f(i)|^2 \phi(i)} \end{aligned}$$

Fungsi eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_{\min} = \lambda_0 = 0$  adalah  $h = D^{1/2} \cdot \mathbf{1}$  dengan  $\mathbf{1}$  adalah vektor kolom yang setiap entrinya adalah satu. Nilai eigen terkecil kedua yaitu  $\lambda_1$  memenuhi

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf_f \frac{R(f)}{2} \\ &= \inf_f \sup_c \frac{\sum_{i \rightarrow j} |f(i) - f(j)|^2 \phi(i) P(i, j)}{2 \sum_i |f(i)|^2 \phi(i)} \end{aligned}$$

Konstanta  $c$  dipilih sedemikian hingga memenuhi  $\int f(x) dx = 0$ . Fungsi eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_1$  adalah  $h = D^{1/2} \cdot f$  Untuk nilai eigen maksimum  $\lambda_{\max}$  diperoleh

$$\lambda_{\max} = \sup \sum_{i \rightarrow j} \frac{(f(i) - f(j))^2}{f(i)^2 d_i}.$$

Secara umum untuk setiap  $k$  didapatkan

$$\lambda_k = \inf \sum_{i \rightarrow j} \frac{(f(i) - f(j))^2}{f(i)^2 d_i}$$

nilai infimum diambil atas seluruh  $f$  yang tegak lurus terhadap subruang  $P_i$ , yang

dibangun oleh fungsi eigen  $\phi_i$  dan yang bersesuaian dengan setiap nilai eigen  $\lambda_i$  untuk  $i < k - 1$ . Misalkan  $\phi_i$  adalah fungsi eigen dari Laplacian yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_i$  untuk  $f_i = \phi_i \Phi^{-\frac{1}{2}}$  maka untuk setiap simpul  $x$ .

$$\begin{aligned} \lambda_i f_i(x) \phi(x) &= \left( f_i \left( \Phi - \frac{\Phi P + P^* \Phi}{2} \right) \right) (x) \\ &= \phi(x) f_i(x) - \frac{\sum_{y \rightarrow x} f_i(y) \phi(y) P(y, x)}{2} - \frac{\sum_{x \rightarrow y} f_i(y) P(x, y) \phi(x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_y (f_i(x) - f_i(y)) (\phi(y) P(y, x) + P(x, y) \phi(x)) \end{aligned}$$

## 4.2 Wavelet Graf Spektral dari Graf Berarah

Pada bagian ini dikonstruksi frame wavelet graf spektral untuk graf berarah. Spektrum Laplacian graf berarah digunakan untuk membangun frame wavelet ini. Berikut adalah penjelasan mengenai konstruksi wavelet graf spektral untuk graf berarah. Selanjutnya, Laplacian yang digunakan dalam konstruksi adalah Laplacian yang telah disimetriskan yaitu  $\mathcal{L}_{ds}$ . Akan tetapi untuk graf dengan matriks *adjacency*-nya singular (determinannya sama dengan nol) maka Laplaciannya tidak perlu disimetriskan lagi. Untuk memudahkan penulisan, Laplacian yang digunakan dalam konstruksi dinotasikan sebagai  $\mathcal{L}$ .

Konstruksi dimulai dengan membentuk Laplacian  $\mathcal{L}$  untuk graf berarah yang mempunyai bobot  $G = (V, E, w)$ . Selanjutnya, ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari Laplacian  $\mathcal{L}$ . Untuk lebih jelasnya, dinotasikan juga nilai eigen dan vektor eigen dari Laplacian sebagai himpunan pasangan  $\{(\lambda_\ell, \chi_\ell)\}_{\ell=0}^{N-1}$ . Seperti yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya, matriks  $\mathcal{L}$  merupakan matriks Hermitian sehingga dapat dituliskan spektrum dari Laplacian  $\mathcal{L}$  sebagai  $\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda_0 = \lambda_{\min}, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}$  dengan  $N$  adalah order atau banyaknya simpul dari graf berarah  $G$ .

Frame graf spektral yang dikonstruksi terdiri dari dua yaitu kernel wavelet graf spektral dan kernel *scaling* graf spektral. Sama halnya dengan filter wavelet pada garis bilangan real, kernel wavelet dapat berperan seperti filter *bandpass* yang dapat menangkap frekuensi sinyal yang tinggi. Demikian juga, kernel *scaling* graf spektral berperan seperti filter *lowpass* yang dapat menangkap frekuensi-frekuensi rendah.

Dalam penelitian ini, frame dikarakterisasi oleh barisan filter graf spektral  $\{\hat{g}_m(\cdot)\}_{m=1, \dots, M}$ . Ini berarti, pada setiap simpul  $i \in V$  dalam graf  $G$ , terdapat

sebanyak  $M \cdot N$  kernel dengan bentuk

$$g_{i,m} = T_i g_m = \sqrt{N} \delta_i * g_m \quad (4.9)$$

$$= \sqrt{N} \widehat{g}_m(\mathcal{L}) \delta_i \quad (4.10)$$

$$= \sqrt{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{g}_m(\lambda_\ell) \chi_\ell^*(i) \chi_\ell \quad (4.11)$$

dengan  $T_i$  adalah operator translasi tergeneralisasi pada Persamaan 2.27 dan  $\delta_i$  adalah kronecker delta.

Selanjutnya, koefisien yang digunakan untuk menganalisis suatu fungsi sinyal  $f$  dapat ditulis dalam bentuk  $\{\langle f, g_{i,m} \rangle; i = 1, \dots, N\}$  untuk suatu nilai  $m$  yang telah ditetapkan. Koefisien ini diberikan oleh elemen  $\widehat{g}_m(\mathcal{L})f$  dengan

$$\widehat{g}_m(\mathcal{L}) = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \widehat{g}_m(\lambda_0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widehat{g}_m(\lambda_{N-1}) \end{bmatrix} \mathbf{U}^* \quad (4.12)$$

Matriks  $U$  adalah matriks unitary yang setiap entri kolomnya adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari  $\mathcal{L}$ .

Dalam penelitian ini ingin dihasilkan suatu frame wavelet yang merupakan *tight frame*. Menurut Shuman, dkk (2016) suatu frame yang *tight* lebih memudahkan dalam meningkatkan stabilitas numerik saat merekonstruksi sinyal dari suatu koefisien wavelet yang *noisy*. Hal yang dikerjakan adalah membangun suatu metode untuk membentuk barisan filter graf spektral sedemikian rupa sehingga frame yang terbentuk adalah *tight frame*. Lemma berikut merupakan generalisasi dari Lemma 5.8 pada Hammond, dkk(2011), yang menjamin filter yang dibentuk merupakan *tight frame*.

**Lemma 2.** Misalkan diberikan frame  $\{g_{i,m}\}$  untuk  $i = 0, \dots, N$  dan  $m = 1, \dots, M$  dengan  $g_{i,m} = T_i \widehat{g}_m$  dan didefinisikan jumlahan  $G(\lambda) = \sum_{m=1}^M [\widehat{g}_m]^2$ . Jika diperoleh  $G(\lambda) > 0$  untuk setiap  $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$  maka untuk setiap  $f \in \mathbb{R}^N$ , diperoleh

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M |\langle f, g_{i,m} \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2$$

dengan  $A = N \min_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L})} G(\lambda)$  dan  $B = N \max_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L})} G(\lambda)$ . Jika  $G(\lambda)$  konstan pada spektrum dari  $\mathcal{L}$  maka frame  $\{g_{i,m}\}$  merupakan *tight frame* sebab  $A = B$ .

*Bukti.* Dengan menggunakan relasi Parseval untuk transformasi Fourier diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M |\langle f, g_{i,m} \rangle|^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M |\langle \hat{f}, \widehat{T_i g_{i,m}} \rangle|^2 \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \left( \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_\ell) \sqrt{N} \hat{g}_m^*(\lambda_\ell) \chi_\ell(i) \right) \left( \sum_{\ell'=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_{\ell'}) \sqrt{N} \hat{g}_m^*(\lambda_{\ell'}) \chi_{\ell'}(i) \right)^* \\
&= N \sum_{\ell=0}^{N-1} |\hat{f}(\lambda_\ell)|^2 \sum_{m=1}^M |\hat{g}_m^*(\lambda_\ell)|^2 \\
&= N \sum_{\ell=1}^{N-1} |\hat{f}(\lambda_\ell)|^2 G(\lambda_\ell)
\end{aligned}$$

sebab  $\sum_{i=1}^N \chi_\ell(i) \chi_{\ell'}(i) = \delta_{\ell,\ell'}$  dengan jumlahan  $G(\lambda) = \sum_{m=1}^M |\hat{g}_m(\lambda)|^2$  sehingga diperoleh

1.  $A = N \min_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L})} \|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M |\langle f, g_{i,m} \rangle|^2$
2.  $B = N \max_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L})} \|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M |\langle f, g_{i,m} \rangle|^2$

Jika nilai  $G(\lambda)$  adalah konstan atau tetap untuk setiap  $\lambda$  maka  $\max_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L})} G(\lambda) = \min_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L})} G(\lambda)$ . Dengan kata lain, didapatkan  $A = B = G(\lambda)$  sehingga frame tersebut adalah *tight frame*.  $\square$

Lemma 2 menyatakan bahwa jika filter dikonstruksi sedemikian rupa sehingga diperoleh jumlahan  $G(\lambda)$  bernilai konstan maka frame yang terbentuk adalah *tight frame*. Permasalahan setelah analisis adalah saat proses mendapatkan kembali (rekonstruksi) fungsi  $f$  dari koefisien-koefisien wavelet. Untuk suatu basis ortonormal, katakanlah barisan fungsi  $\{\psi_k\}$ , proses rekonstruksi fungsi  $f$  dapat ditulis dalam ekspansi

$$f = \sum_k \alpha_k \psi_k = \sum_k \langle \psi_k, f \rangle \psi_k$$

yang unik. Banyaknya basis adalah sesuai dengan dimensi ruang dimana basis tersebut berada. Namun secara numerik proses rekonstruksi ini kurang stabil sebab nilai  $\langle \psi_k, f \rangle$  harus tunggal sehingga ada kemungkinan terjadinya *noisy* pada ekspansi tersebut. Namun hal ini dapat diatasi melalui frame, sebab ekspansi dari frame tidak harus tunggal. Frame memiliki sifat yang hampir sama seperti basis yaitu dapat membangun ruang (merentang) tetapi tidak harus bebas linear. Shuman, dkk (2016) menyatakan bahwa dengan membentuk frame yang *tight* dapat

meningkatkan kestabilan numerik dalam proses rekonstruksi koefisien yang *noisy* ini. Informasi mengenai kestabilan numerik saat proses rekonstruksi fungsi  $f$  dari hasil kali dalam  $\langle f, g_{i,m} \rangle$  dapat diperoleh dari nilai batas frame  $A$  dan  $B$ .

Sesuai dengan Lemma 2, jika jumlahan  $G(\lambda)$  bernilai konstan maka untuk setiap fungsi  $f \in \mathbb{R}^N$  dapat ditulis dalam bentuk

$$\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M |\langle f, g_{i,m} \rangle|^2 = B \|f\|^2.$$

Hasil kali dalam  $\langle f, g_{i,m} \rangle$  merupakan koefisien wavelet atau hasil transformasi yang digunakan untuk menganalisis fungsi  $f$  dengan menggunakan wavelet.

Berikut adalah proses konstruksi frame graf spektral yang ditandai oleh pembentukan barisan filter graf spektral. Proses dimulai dengan mengkonstruksi sistem filter yang *uniform translate*. Lebih jelasnya diberikan  $\lambda_{\max}$  sebagai batas atas dari spektrum Laplacian  $\mathcal{L}$ . Kita ingin membentuk filter sebanyak  $M$  dari suatu kernel  $\hat{g}(\lambda)$  yang didefinisikan dengan diberikan konstanta  $a$  dan  $\mathcal{A}$  sehingga diperoleh

$$G(\lambda) = \sum_{m=1}^M [\hat{g}(\lambda - ma)]^2 = \mathcal{A} \text{ untuk } \lambda \in [0, \lambda_{\max}] \quad (4.13)$$

Hal ini dimaksudkan agar dapat dibentuk kernel  $\hat{g}^u(\lambda)$  sedemikian hingga Persamaan 4.13 berlaku dan juga memenuhi Lemma 2 yaitu  $G(\lambda)$  merupakan nilai yang konstan. Hal ini dimaksudkan agar saat menerapkan operator translasi tergeneralisasi  $T_i$  akan diperoleh frame yang *tight*.

Berikut adalah Teorema dalam Shuman, dkk (2015) yang membangun suatu metode untuk mengkonstruksi koleksi kernel dengan parameter yang memenuhi Persamaan 4.13.

**Teorema 1** (Shuman, dkk (2015)). *Misalkan  $K \in \mathbb{N}$  dan  $a_k \in \mathbb{R}$  untuk  $k \in \{0, 1, \dots, K\}$ , didefinisikan*

$$q(t) = \sum_{k=0}^K a_k \cos(2\pi kt); \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}. \quad (4.14)$$

*Maka untuk sebarang  $R \in \mathbb{N}$  yang memenuhi  $R \geq 2K$ ,*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} q^2 \left( t - \frac{M}{R} \right) = Ra_0^2 + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^K a_k^2, \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

Persamaan 4.15 menyatakan bahwa jumlahan dari kuadrat translasi uniform merupakan suatu fungsi konstan.

Akibat 1. Misalkan  $R$  dan  $K$  adalah bilangan integer yang memenuhi  $2 < R \leq M$  dan  $K < \frac{R}{2}$  dan  $M$  adalah banyaknya filter yang diinginkan. Didefinisikan kernel

$$\hat{h}(y) = \sum_{k=0}^K a_k \cos \left( 2\pi k \left( y - \frac{1}{2} \right) \right) \text{ untuk } 0 \leq y < 1.$$

dengan  $\{a_k\}_{k=0,1,\dots,K}$  adalah barisan koefisien real yang memenuhi

$$\sum_{k=0}^K (-1)^k a_k = 0. \quad (4.16)$$

Syarat ini menunjukkan bahwa  $\hat{h}(\cdot)$  kontinu. Maka

$$H(y) = \sum_{m=1-R}^{M-R} \left[ \hat{h} \left( y - \frac{m}{R} \right) \right]^2 = Ra_0^2 + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^K a_k^2, \forall y \in \left[ 0, \frac{M+1-R}{R} \right] \quad (4.17)$$

*Bukti.* Misalkan  $\hat{h}(y) = q(y)$  maka dari Teorema 1 diperoleh

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[ \hat{h} \left( y - \frac{m}{R} \right) \right]^2 = Ra_0^2 + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^K a_k^2, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Lebih lanjut, untuk  $y \in \left[ 0, \frac{M+1-R}{R} \right]$  diperoleh  $\hat{h} \left( y - \frac{m}{R} \right) = 0$  untuk  $m < 1 - R$  atau  $m > M + 1 - R$ . Perhatikan bahwa untuk  $m = M + 1 - R$ ,  $\hat{h} \left( y - \frac{m}{R} \right) = 0$  untuk setiap  $y \in \left[ 0, \frac{M+1-R}{R} \right)$  dan untuk  $y = \frac{M+1-R}{R}$  didapatkan

$$\hat{h} \left( y - \frac{m}{R} \right) = \hat{h}(0) = \sum_{k=0}^K (-1)^k a_k = 0.$$

□

Suatu wavelet tidak hanya dapat ditranslasikan tetapi juga harus dapat diskalakan agar dapat menangkap informasi frekuensi dari wavelet dengan baik. Dalam hal ini, penskalaan dilakukan terhadap spektrum dari Laplacian menggunakan fungsi *warping*  $\omega : [0, \lambda_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ini berarti sistem filter translasi uniform akan menggunakan spektrum yang telah di-*warp* sehingga bentuknya dapat ditulis

$$\hat{g}_m(\lambda) = \hat{g}_m^u(\omega(\lambda)), m = 1, \dots, M$$

dengan  $g_m^u$  menyatakan kernel yang sudah ditransalasi secara uniform. Fungsi *warping* ini haruslah fungsi yang tidak menurun (*non-decreasing*) dan merupakan fungsi yang *smooth*. Ini dimaksudkan agar filter hasil *warping* adalah filter yang *smooth* (yaitu turunannya ada dan kontinu). Dalam penelitian ini fungsi *warping* yang digunakan adalah fungsi logaritmik.

Beberapa kernel yang memenuhi Akibat 1 adalah kernel Hann, kernel Hamming dan Blackman window.

### 1. Kernel Hann dan Hamming

Berikut didefinisikan kernel Hann dan Hamming sebagai

$$\text{Hann/Hamming}(x) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi x}{M-1}, & \text{untuk } |x| < \frac{M-1}{2} \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \quad (4.18)$$

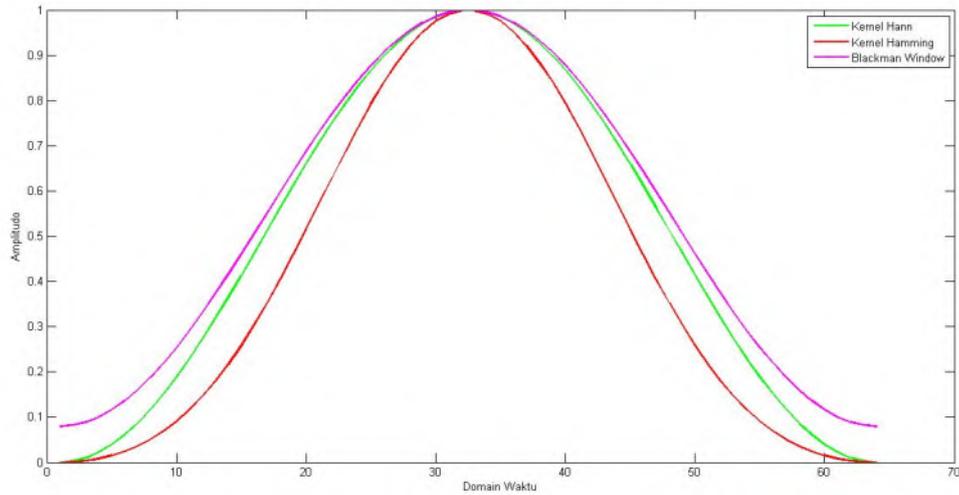
dengan  $M$  adalah jumlah kernel yang diinginkan. Untuk kernel Hann nilai  $\alpha$  yang dipilih adalah  $\alpha = 0.5$  dan untuk kernel Hamming nilai  $\alpha = 0.54$ .

### 2. Blackman Window

Blackman window didefinisikan sebagai

$$\text{Blackman}(x) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos \frac{2\pi x}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi x}{M-1}, & \text{untuk } |x| < \frac{M-1}{2} \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \quad (4.19)$$

Kernel Hann memenuhi Teorema 1 dan Akibat 1 dengan  $K = 1$ ,  $a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$ , kernel Hamming dengan  $K = 1$ ,  $a_0 = 0.54$ ,  $a_1 = 0.46$ , dan Blackman window memenuhi dengan  $K = 2$ ,  $a_0 = 0.42$ ,  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.08$ . Semua jumlahan dari barisan koefisien  $a_k$  untuk masing-masing kernel jelas memenuhi Persamaan 4.16. Kernel-kernel ini telah digunakan dalam analisis wavelet pada domain real sehingga dalam penelitian ini dikembangkan untuk dapat digunakan sebagai kernel pembentuk filter graf spektral untuk graf berarah. Dalam Gambar 4.4 merupakan gambar contoh bentuk kernel yang dapat memenuhi Teorema 1. Secara intuitif apabila diperhatikan support dari masing-masing kernel maka dapat disimpulkan bahwa kernel Hann dan Hamming lebih baik dari pada Blackman window. Sebab walaupun support dari ketiga kernel tersebut kompak (yaitu bernilai tidak nol hanya pada interval yang berhingga), interval support kernel Hann dan kernel Hamming lebih kecil sehingga memungkinkan waktu komputasi untuk mendapatkan koefisien dengan kernel Hann dan Hamming lebih cepat. Dalam mendapatkan koefisien wavelet graf spektral dengan kernel Hann diduga bahwa koefisien yang diperoleh Berikut adalah penje-



Gambar 4.4: Gambar Kernel Hann, Kernel Hamming dan Blackman Window

lasan pembentukan frame wavelet graf spektral untuk graf berarah menggunakan ketiga kernel yang telah disebutkan.

Misalkan untuk graf berarah  $\mathcal{G}$  dengan order  $N$  diperoleh nilai eigen  $\lambda_\ell$  untuk  $\ell = 0, 1, \dots, N-1$ . Maka setiap kernel dapat dibentuk dalam sistem filter pada Persamaan 4.11 sebagai berikut.

#### 4.2.1 Kernel Hann

Kernel Hann memenuhi Akibat 1 dengan  $K = 1$  dan  $a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$  sehingga dapat ditulis menjadi

$$\text{Hann}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cos \frac{2\pi\lambda}{M-1}, & \text{untuk } |\lambda| < \frac{M-1}{2} \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \quad (4.20)$$

Untuk memudahkan penulisan selanjutnya dimisalkan kernel Hann sebagai kernel  $\hat{g}$ . Jumlahan dari kuadrat kernel yang sudah ditranslasi secara uniform didapatkan untuk sebarang  $R \in \mathbb{N}$  dan  $R \geq 2$  sebab  $K = 1$  sesuai dengan Akibat 1 yaitu

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \sum_{m=1-R}^{M-R} \left[ \hat{g}\left(\lambda - \frac{m}{R}\right) \right]^2 \\ &= Ra_0^2 + \frac{R}{2}a_1^2 \\ &= R\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{R}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3R}{8} \end{aligned}$$

Selanjutnya, didefinisikan fungsi *warping*  $\omega : [0, \lambda_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$  yaitu  $\omega(x) = \log(x)$  sehingga untuk setiap  $\lambda \in [0, \lambda_{\max}]$  diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{m=1-R}^{M-R} |\widehat{g}_m(\lambda)|^2 &= \sum_{m=1-R}^{M-R} \widehat{g}_m(\omega(\lambda)) \\ &= R \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{R}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3R}{8} \end{aligned}$$

dengan  $m = 1, \dots, M$ . Hal ini sebab jumlahan kuadrat translasi uniform merupakan fungsi konstan sehingga untuk nilai  $\lambda$  manapun akan tetap konstan. Dari  $M$  filter dibentuk  $M - 1$  sebagai kernel wavelet graf spektral atau filter *bandpass* dan satu kernel sebagai kernel *scaling* atau filter *lowpass*.

Apabila diberikan suatu graf berarah  $\mathcal{G}$  dengan order  $N$  dan Laplacian graf berarah  $\mathcal{L}$  dengan himpunan pasangan nilai eigen dan vektor eigen Laplacian adalah  $\{(\lambda_\ell, \chi_\ell); \ell = 0, \dots, N - 1\}$ . Maka frame wavelet spektral untuk graf berarah yang dibentuk dengan kernel Hann pada simpul  $i$  dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} g_{i,m} &= T_i g_m = \sqrt{N} \delta_i * g_m \\ &= \sqrt{N} \widehat{g}_m(\mathcal{L}) \delta_i \\ &= \sqrt{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{g}_m(\lambda_\ell) \chi_\ell^*(i) \chi_\ell \\ &= \sqrt{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cos \frac{2\pi \lambda_\ell}{M-1} \chi_\ell^*(i) \chi_\ell \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $\{g_{i,m}; i = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M\}$  adalah *tight* frame untuk setiap  $\lambda \in [0, \lambda_{\max}]$  sesuai dengan Teorema 1.

#### 4.2.2 Kernel Hamming

Kernel Hamming memenuhi Akibat 1 dengan  $K = 1$  dan  $a_0 = 0.54$  dan  $a_1 = 0.46$  sehingga dapat ditulis menjadi

$$\text{Hamming}(\lambda) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi \lambda}{M-1}, & \text{untuk } |\lambda| < \frac{M-1}{2} \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \quad (4.21)$$

Untuk memudahkan penulisan selanjutnya dimisalkan kernel Hamming sebagai kernel  $\hat{h}$ . Jumlahan dari kuadrat kernel yang sudah ditranslasi secara uniform didapat

atkan untuk sebarang  $R \in \mathbb{N}$  dan  $R \geq 2$  sebab  $K = 1$  sesuai dengan Akibat 1 yaitu

$$\begin{aligned}
H(\lambda) &= \sum_{m=1-R}^{M-R} \left[ \widehat{h} \left( \lambda - \frac{m}{R} \right) \right]^2 \\
&= Ra_0^2 + \frac{R}{2}a_1^2 \\
&= R(0.54)^2 + \frac{R}{2}(0.46)^2 \\
&= 0.2916R + 0.1058R = 0.3974R
\end{aligned}$$

Selanjutnya, didefinisikan fungsi *warping*  $\omega : [0, \lambda_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$  yaitu  $\omega(x) = \log(x)$  sehingga untuk setiap  $\lambda \in [0, \lambda_{\max}]$  diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1-R}^{M-R} \widehat{h}_m(\lambda) &= \sum_{m=1-R}^{M-R} \widehat{h}_m(\omega(\lambda)) \\
&= R(0.54)^2 + \frac{R}{2}(0.46)^2 \\
&= 0.2916R + 0.1058R = 0.3974R
\end{aligned}$$

dengan  $m = 1, \dots, M$ . Hal ini sebab jumlahan kuadrat translasi uniform merupakan fungsi konstan sehingga untuk nilai  $\lambda$  manapun akan tetap konstan. Dari  $M$  filter dibentuk  $M - 1$  sebagai kernel wavelet graf spektral atau filter *bandpass* dan satu kernel sebagai kernel *scaling* atau filter *lowpass*.

Misal diberikan suatu graf berarah  $\mathcal{G}$  dengan order  $N$  dan Laplacian graf berarah  $\mathcal{L}$  dengan himpunan pasangan nilai eigen dan vektor eigen Laplacian adalah  $\{(\lambda_\ell, \chi_\ell); \ell = 0, \dots, N - 1\}$ . Maka frame wavelet spektral untuk graf berarah yang dibentuk dengan kernel Hamming pada simpul  $i$  dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
h_{i,m} &= T_i h_m = \sqrt{N} \delta_i * h_m \\
&= \sqrt{N} \widehat{h}_m(\mathcal{L}) \delta_i \\
&= \sqrt{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{h}_m(\lambda_\ell) \chi_\ell^*(i) \chi_\ell \\
&= \sqrt{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} 0.54 + (1 - 0.54) \cos \frac{2\pi \lambda_\ell}{M-1} \chi_\ell^*(i) \chi_\ell
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $\{h_{i,m}; i = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M\}$  adalah *tight* frame untuk setiap  $\lambda \in [0, \lambda_{\max}]$  sesuai dengan Teorema 1.

### 4.2.3 Blackman window

Salah satu fungsi yang juga memenuhi Akibat 1 adalah Blackman window dengan  $K = 2$  dan  $a_0 = 0.42$ ,  $a_1 = 0.5$  dan  $a_2 = 0.08$  atau dapat ditulis menjadi

$$\text{Blackman}(\lambda) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos \frac{2\pi\lambda}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi\lambda}{M-1}, & \text{untuk } |\lambda| < \frac{M-1}{2} \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \quad (4.22)$$

Pada Gambar 4.4 dapat dilihat bahwa support Blackman window lebih luas dibanding kernel Hann dan kernel Hamming. Namun Blackman window juga dapat dikonstruksi menjadi frame wavelet graf spektral yang *tight*. Untuk pengujian kompleksitas dalam penerapannya, perlu dikaji lebih lanjut penggunaan ketiga kernel ini dalam pembentukan frame. Misalkan Blackman window dinotasikan sebagai  $\hat{b}$ . Jumlahan dari kuadrat kernel yang sudah ditranslasi secara uniform didapatkan untuk sebarang  $R \in \mathbb{N}$  dan  $R > 4$  sebab  $K = 1$  sesuai dengan Akibat 1 yaitu

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \sum_{m=1-R}^{M-R} \left[ \hat{b} \left( \lambda - \frac{m}{R} \right) \right]^2 \\ &= R a_0^2 + \frac{R}{2} (a_1^2 + a_2^2) \\ &= R(0.42)^2 + \frac{R}{2} ((0.5)^2 + (0.02)^2) \\ &= 0.1756R + 0.125R + 0.0002R = 0.3008R \end{aligned}$$

Selanjutnya, didefinisikan fungsi *warping*  $\omega : [0, \lambda_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$  yaitu  $\omega(x) = \log(x)$  sehingga untuk setiap  $\lambda \in [0, \lambda_{\max}]$  diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{m=1-R}^{M-R} \hat{b}_m(\lambda) &= \sum_{m=1-R}^{M-R} \hat{b}_m(\omega(\lambda)) \\ &= R(0.42)^2 + \frac{R}{2} ((0.5)^2 + (0.02)^2) \\ &= 0.1756R + 0.125R + 0.0002R = 0.3008R \end{aligned}$$

dengan  $m = 1, \dots, M$ . Hal ini sebab jumlahan kuadrat translasi uniform merupakan fungsi konstan sehingga untuk nilai  $\lambda$  manapun akan tetap konstan. Dari  $M$  filter dibentuk  $M - 1$  sebagai kernel wavelet graf spektral atau filter *bandpass* dan satu kernel sebagai kernel *scaling* atau filter *lowpass*.

Misal diberikan suatu graf berarah  $\mathcal{G}$  dengan order  $N$  dan Laplacian graf berarah  $\mathcal{L}$  dengan himpunan pasangan nilai eigen dan vektor eigen Laplacian adalah

$\{(\lambda_\ell, \chi_\ell); \ell = 0, \dots, N-1\}$ . Maka frame wavelet spektral untuk graf berarah yang dibentuk dengan Balckman window pada simpul  $i$  dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 b_{i,m} &= T_i b_m = \sqrt{N} \delta_i * b_m \\
 &= \sqrt{N} \widehat{b}_m(\mathcal{L}) \delta_i \\
 &= \sqrt{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{b}_m(\lambda_\ell) \chi_\ell^*(i) \chi_\ell \\
 &= \sqrt{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} 0.42 + 0.5 \cos \frac{2\pi\lambda_\ell}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi\lambda_\ell}{M-1} \chi_\ell^*(i) \chi_\ell
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $\{b_{i,m}; i = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M\}$  adalah *tight* frame untuk setiap  $\lambda \in [0, \lambda_{\max}]$  sesuai dengan Teorema 1.

## BAB V

### SIMPULAN DAN SARAN

Dari analisa dan pembahasan yang sudah dilakukan, dapat dibuat simpulan serta beberapa saran untuk penelitian selanjutnya

#### 5.1 Simpulan

Dari penelitian yang telah dilakukan ditarik simpulan sebagai berikut

1. Sifat-sifat Laplacian graf berarah yang harus dipenuhi agar dapat digunakan dalam konstruksi wavelet graf spektral adalah Laplacian graf berarah yang mempunyai nilai eigen real mencakup:
  - a. Laplacian graf berarah yang didefinisikan  $L_d = \mathcal{D} - \mathcal{A}$  diduga mempunyai nilai eigen real jika Laplacian merupakan matriks singular.
  - b. Laplacian graf berarah dengan pendekatan *random walk* yang merupakan matriks kompleks Hermitian
2. Bentuk frame wavelet graf spektral untuk graf berarah dengan menggunakan spektrum Laplacian graf berarah yaitu
  - i. Frame dikarakterisasi oleh barisan filter graf spektral  $\{\hat{g}_m(\cdot)\}_{m=1,\dots,M}$ . Ini berarti, pada setiap simpul dalam graf berarah  $G$ , terdapat sebanyak  $M.N$  kernel dengan bentuk

$$\begin{aligned}
 g_{i,m} &= T_i g_m = \sqrt{N} \delta_i * g_m \\
 &= \sqrt{N} \widehat{g}_m(\mathcal{L}) \delta_i \\
 &= \sqrt{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{g}_m(\lambda_\ell) \chi_\ell^*(i) \chi_\ell
 \end{aligned}$$

dengan  $T_i$  adalah operator translasi tergeneralisasi dan  $\delta_i$  adalah kronecker delta.

- ii. Koefisien wavelet untuk suatu fungsi  $f \in \mathbb{R}^N$  diberikan oleh  $\{f, g_{i,m}\}$

#### 5.2 Saran

Beberapa saran terkait permasalahan yang belum terselesaikan dalam penelitian ini yang harus dilanjutkan yaitu

- i. Pada penelitian ini proses konstruksi filter graf spektral hanya menggunakan spektrum Laplacian yang real. Untuk itu penelitian selanjutnya dapat mengembangkan konstruksi frame wavelet graf spektral dengan menggunakan setiap bentuk nilai eigen dan vektor eigen yang mungkin baik real maupun kompleks.
- ii. Informasi tentang kestabilan numerik saat proses rekonstruksi fungsi  $f$  dari hasil kali dalam fungsi  $f$  dengan frame wavelet dapat diperoleh dari batas frame  $A$  dan  $B$ . Oleh karena itu, menentukan nilai optimal dari  $A$  dan  $B$  adalah suatu hal menarik yang perlu dikaji lebih lanjut dari penelitian ini.
- iii. Penelitian selanjutnya dapat menggunakan teori ini untuk penerapan analisis wavelet untuk sinyal yang terletak pada jaringan yang berbentuk graf berarah yang mempunyai bobot.
- iv. Pada proses *warping*, fungsi *warping* yang digunakan adalah fungsi logaritmik. Dengan memperhatikan syarat yang harus dipenuhi oleh fungsi *warping* maka penelitian selanjutnya dapat melakukan *warping* dengan fungsi selain logaritmik.
- v. Penelitian selanjutnya dapat membahas lebih detail mengenai proses rekonstruksi dan komputasi dari wavelet graf spektral.
- vi. Dapat dilakukan penelitian terkait dengan spektrum Laplacian yang singular.

## DAFTAR PUSTAKA

- Banerjee, A. (2008), *The spectrum of the graph Laplacian as a tool for analyzing structure and evolution of networks*, Tesis Ph.d., Universitat Leipsig, Jerman.
- Boley, D., Ranjan, G., dan Zhang, Z. (2011), "Commute times for a directed graph using an asymmetric Laplacians", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 435, No.2, hal. 224 – 242.
- Chung, F. (2005), "Laplacians and the Cheeger inequality for directed graphs", *Annals of Combinatorics*, Vol.9, No.1, hal. 1–19.
- Coifman, R., Maggioni, M., Chui, C., dan Donoho, D. (2006), "Special Issue: Diffusion Maps and Wavelets Diffusion wavelets", *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol.21, No.1, hal. 53–94.
- Drew, M., Sheth, K. (2015), "A Wavelet Analysis Approach for Categorizing Air Traffic Behavior", *15th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations Conference*, hal. 2731.
- Hammond, D.K., Vandergheynst, P., dan Gribonval, R. (2011), "Wavelets on graphs via spectral graph theory", *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol.30, No.2, hal.129–150.
- Leonardi, N., Van De Ville, D. (2013), "Tight wavelet frames on multislice graphs", *Signal Processing, IEEE Transactions on*, Vol. 61, No.13, hal. 3357–3367.
- Lovász, L. (1993), "Random walks on graphs", *Combinatorics, Paul erdos is eighty*, Vol.2, hal. 1–46.
- Meyer, C.D. (2000), *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.
- Mohan, D.M., Asif, M.T., Mitrovic, N., Dauwels, J., dan Jaillet, P. (2014), "Wavelets on graphs with application to transportation networks", *Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2014 IEEE 17th International Conference on*, hal. 1707–1712.

- Pham, M., Mercier, G., dan Michel, J. (2014), "Wavelets on graphs for very high resolution multispectral image texture segmentation", *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2014 IEEE International*, hal. 2273–2276.
- Shuman, D.I., Narang, S.K., Frossard, P., Ortega, A., Vandergheynst, P., dan lainnya. (2013), "The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains", *Signal Processing Magazine, IEEE*, Vol.30, No.3, hal. 83–98.
- Shuman, D.I., Wiesmeyr, C., Holighaus, N., dan Vandergheynst, P. (2015), "Spectrum-adapted tight graph wavelet and vertex-frequency frames", *Signal Processing, IEEE Transactions on*, Vol. 63, No.16, hal. 4223–4235.
- Shuman, D.I., Ricaud, B., dan Vandergheynst, P. (2016), "Vertex-frequency analysis on graphs", *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 40, No.2, hal. 260–291.

## BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Farly Oktriany Haning, lahir di Lidamanu pada tanggal 9 Oktober 1990. Penulis adalah anak ketiga dari enam bersaudara dan putri tunggal dari pasangan Bapak Jeky Soleman Haning dan Ibu Welhelmina Henuk di Kabupaten Rote Ndao, Nusa Tenggara Timur. Penulis menempuh pendidikan formal di SD Inpres Lidamanu (1997-2003), SMPN I Rote Barat Daya (2003-2006) dan SMAN I Rote Barat Daya (2006-2009). Kemudian penulis melanjutkan pendidikan S1 di jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana, Kupang (2009-2013). Pada tahun 2014, penulis mendapatkan kesempatan melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember melalui Beasiswa Afirmasi dari Lembaga Pengelola Dana Pendidikan (LPDP) Kementerian Keuangan Republik Indonesia. Bidang minat yang didalami penulis adalah Analisis dan Aljabar dengan penelitian tesis berkaitan dengan analisis wavelet. Penulis dapat dihubungi melalui email [farlyoktriany.haning@gmail.com](mailto:farlyoktriany.haning@gmail.com) atau [icafarlyhaning@yahoo.co.id](mailto:icafarlyhaning@yahoo.co.id).

