TESIS - SF 142502

SOLUSI SIMETRI AKSIAL DALAM TEORI GRAVITASI $F(R)$

ABU FADLOL ARROSYIDI
NRP 1113 201 026

DOSEN PEMBIMBING:
Agus Purwanto D.Sc
Dr.ret.nat Bintoro Anang Subagyo

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

THESIS - SF 142502

AXIALLY SYMMETRIC SOLUTION IN $F(R)$ THEORIES OF GRAVITY

ABU FADLOL ARROSYIDI
NRP 1113 201 026

SUPERVISOR:
Agus Purwanto D.Sc
Dr.ret.nat Bintoro Anang Subagyo

MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF PHYSICS
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat mendapatkan gelar
Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
ABU FADLOL ARROSYIDI
NRP. 1113 201 026

Tanggal Ujian : 21 Juli 2016
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh

Agus Purwanto D.Sc
NIP. 19640811 199002 1 001 (Pembimbing I)

Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo
NIP. 19790719 2005011 1 015 (Pembimbing II)

Prof. Dr. Suasmoro
NIP. 19550210 198010 1 001 (Penguji I)

Dr. Triwikantoro, M.Sc
NIP. 19660114 199002 1 001 (Penguji II)

Direktur Program Pascasarjana

Prof.Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc, Ph.D
NIP. 19601202 198701 1 001

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
PROGRAM PASCASARJANA

SOLUSI SIMETRI AKSIAL DALAM TEORI GRAVITASI $F(R)$

Nama Mahasiswa	:	Abu Fadlol Arrosyidi
NRP	:	1113 201 026
Pembimbing	:	1. Agus Purwanto D.Sc
		2. Dr.ret.nat Bintoro Anang Subagyo

Abstrak

Telah dilakukan penurunan solusi bermuatan dan simetri aksial dalam teori gravitasi $f(R)$ dari solusi simetri bola menggunakan algoritma Newman-Janis termodifikasi. Pekerjaan utama kami adalah membentuk metrik Kerr-Newman dalam gravitasi $f(R)$ dan membandingkan hasilnya dengan solusi Kerr-Newman dalam gravitasi Einstein. Kami juga melakukan penelitian terkait kemungkinan singularitas yang muncul dimana dalam beberapa limit tertentu mendekati singularitas dalam gravitasi Einstein.

Kata-kunci: *Teori Gravitasi Einstein, Teori Gravitasi $f(R)$,Solusi Simetri Aksial, Algoritma Newmann-Janis, Konstanta Skalar Kurvatur,Solusi Kerr-Newman, Singularitas*

AXIALLY SYMMETRIC SOLUTION IN $F(R)$ THEORIES OF GRAVITY

Name	:	Abu Fadlol Arrosyidi
NRP	:	1113 201 026
Supervisors	:	1. Agus Purwanto D.Sc
		2. Dr.ret.nat Bintoro Anang Subagyo

Abstract

We have investigated charged and axially symmetric solutions for $f(R)$ gravity via modified Newman-Janis algorithm. Our main objectives is to re-derive construction of Kerr-Newman metric in $f(R)$ gravity and comparing their solutions in Einstein gravity. We also study possible singularities appear in some cases which approaching Einstein gravity in certain limit.

Key-words: *General Relativity, $f(R)$ Theory of Gravity,Axially Symmetric Solution, Newmann-Janis Algorithm, Constant Scalar Curvature, Newman-Janis solution, Singularity*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

LEMBAR PENGESAHAN v

ABSTRAK vii

ABSTRACT ix

KATA PENGANTAR xi

DAFTAR ISI xiii

BAB 1 PENDAHULUAN 1
- 1.1 Latar Belakang 1
- 1.2 Rumusan Masalah 3
- 1.3 Batasan Masalah 3
- 1.4 Tujuan 3
- 1.5 Manfaat 3

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA 5
- 2.1 Teori Gravitasi Einstein 5
  - 2.1.1 Persamaan Medan Einstein 6
- 2.2 Solusi Persamaan Medan Einstein 8
  - 2.2.1 Solusi Simetri Bola 8
  - 2.2.2 Solusi Simetri Aksial 11
- 2.3 Teori Gravitasi $f(R)$ 16

BAB 3 PEMBAHASAN 19
- 3.1 Solusi Persamaan Medan Gravitasi $f(R)$ 19
  - 3.1.1 Solusi Simetri Bola 19
  - 3.1.2 Solusi Simetri Aksial 22
- 3.2 Implikasi Fisis Solusi Persamaan Medan Gravitasi $f(R)$ 24
  - 3.2.1 Solusi Simetri Bola dalam Gravitasi $f(R)$ 24
  - 3.2.2 Solusi Simetri Aksial dalam Grafitasi $f(R)$ 28

BAB 4 KESIMPULAN DAN SARAN 37
- 4.1 Kesimpulan 37
- 4.2 Saran 37

LAMPIRAN 41

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fisika merupakan upaya menemukan pola-pola keteraturan alam dan membingkainya menjadi bagan berpikir yang runtut, yakni berupa kaitan logis antara konsep-konsep tertentu. Bagan berpikir itu secara matematis disajikan sebagai kaitan-kaitan matematis yang menghubungkan struktur-struktur matematis yang mewakili konsep-konsep tertentu sehingga fisika dan matematika memiliki kaitan yang erat (Rosyid,2012).

Beberapa hasil pengamatan dalam bidang astronomi dan astrofisika memperlihatkan kegagalan pandangan Newton dalam memberikan penjelasan dan prediksi perilaku benda-benda langit, misalnya tidak mampu menjelaskan terjadinya presesi orbit Merkurius. Masalah berikutnya dalam teori Newton, cahaya tidak akan terpengaruh oleh gravitasi. Demikian halnya, spektrum gelombang elektromagnetik secara umum. Oleh karena itu, sangat masuk akal jika gravitasi Newton tidak memperkirakan terjadinya pembelokan cahaya oleh gravitasi. Tetapi dalam kenyataan, Merkurius terlihat oleh Eddington meskipun berada di balik Matahari pada saat terjadi gerhana Matahari pada tahun 1930. Juga, teori gravitasi Newton tidak meramalkan keberadaan gelombang gravitasi (Krane,1992).

Pada tahun 1915, Albert Einstein memperkenalkan Teori Relativitas Umumnya. Menurut Einstein, hukum gravitasi Newton tidak berhasil menjelaskan lebih lanjut tantang gerak benda-benda langit, karena menurut hukum gravitasi Newton jika sebuah benda digerakkan maka gaya gravitasi benda tersebut terhadap benda lain akan berubah secara sepontan. Perubahan sepontan ini dengan kata lain berarti efek gravitasi antara benda tersebut merambat melebihi kecepatan cahaya, suatu yang dilarang dalam teori relativitas khusus (Purwanto, 2009;Anugraha, 2005). Einstein mengemukakan bahwa gravitasi adalah sebuah medan yang menyebabkan kelengkungan ruang waktu karena adanya sebuah benda yang bermassa.

Pada tahun 1916, Karl Schwarzschild bekerja untuk mendapatkan solusi dari persamaan medan Einstein yang menggambarkan evolusi geometri ruang-waktu. Schwarzchild mendapatkan solusi metrik yang bersifat bola dan merepresentasikan medan gravitasi di luar suatu partikel bersimetri bola dengan pusat partikel terletak pada pusat koordinat bola, Solusi ini tidak mempertimbangkan distribusi muatan dari sumber . Beberapa tahun setelahnya Reissner dan Nordstrom mendapatkan solusi perluasan dari metrik Schwarzschild dengan adanya kebergantungan pada distribusi muatan pada sumber massa yang melengkungkan ruang-waktu.

Secara astrofisika benda langit (planet, bintang, lubang hitam dan lain-lainnya) haruslah berotasi, sedankan solusi Schwarzschild adalah solusi untuk benda yang tak berotasi oleh karena itu perlu dibentuk persamaan metrik yang menyempurnakan metrik Schwarzschild tersebut. Pada tahun 1963 Kerr menemukan bentuk metrik ruang waktu untuk benda yang berotasi sebagai penyempurnaan metrik Schwarzschild.

Setelah penemuan metrik tersebut oleh Kerr, Newmann dan Janis dapat menunjukkan bahwa solusi Kerr dapat diturunkan dengan cara lain yang selanjutnya disebut algoritma Newmann-Janis. Algoritma ini jika dikenakan pada metrik Schwarzschild akan menghasilkan metrik Kerr dan saat algoritma ini dikenakan pada metrik Reissner-Nordstrom akan didapatkan bentuk metrik baru yang disebut metrik Kerr-Newman.

Teori teori gravitasi Einstein menjadi teori yang terbaik untuk menjelaskan masalah gravitasi selama 100 tahun terakhir. Teori gravitasi Einstein mampu menyediakan model kosmologi, seperti model Friedmann atau Leimatre yang mendeskripsikan evolusi alam semesta yang kita ketahui saat ini. Sampai sekarang teori gravitasi Einstein mampu melewati bayak tes eksperimental yang terkait dengannya. Pada beberapa dekade terkhir untuk menjelaskan pengamatan astrofisika yang berhubungan dengan kurva rotasi dari galaksi spiral kita memmunculkan konsep tentang dark matter. Tak lama kamudian kembali kita dipaksa menerima konsep dark energy untuk menjelaskan akselerasi dari ekspansi alam semesta yang didukung oleh pengamatan pergeseran merah dari supernova.

Adanya indikasi materi gelap pertama kali diamati oleh Frits Zwicky (Zwicky,1934) dengan mengamati gerak galaksi-galaksi anggota gugus galaksi Coma berdasarkan kecepatan gerak. Kemudian dilakukan oleh Vera Rubin, meneliti kecerahan bintang dan gas yang bergerak di beberapa galaksi di sekitar galaksi Bima Sakti menggunakan spektrograf. Pengamatan yang terkenal adalah bullet cluster, tabrakan antar dua kluster galaksi.Tabrakan kedua kluster galaksi tersebut mengakibatkan pusat massa tiap kluster, yang seharusnya di pusat massa baryon, ternyata tidak berada di pusat baryon (Rubin,1970). Sehingga seolah ada massa 'tambahan' yang tidak terlihat tapi bisa dideteksi melalui perlensaan gravitasi. Adanya massa tambahan inilah terindikasi adanya materi gelap. Keberadaan materi gelap ini bersifat stabil, tidak berinteraksi elektromagnetik dan bisa dideteksi keberadaannya melalui interaksi gravitasi. Fenomena bullet cluster menunjukkan sifat interaksi antar materi gelap sendiri ternyata cukup lemah (Clowe, 2006).

Saat ini, keberadaan materi tampak pada alam semesta diperkirakan sekitar 4% dari keseluruhan massa dan energi. Sekitar 23% disebut Materi Gelap (patikel-partikel yang berinteraksi hanya melalui interaksi lemah dan gravitasi), dan 75% adalah Energi Gelap. Kandidat Energi Gelap terbaik memiliki konstanta kosmologi positif sangat kecil yang diidentifikasi pada energi vakum dalam model standar (Fatibene dan Garruto , 2014). Di sisi lain baru-baru ini, penelitian-penelitian yang memodifikasi persamaan medan Einstein dengan mengesampingkan asumsi indikasi keberadaan materi gelap dan energi gelap juga semakin meningkat dan hal ini juga sangat mungkin dilakukan.

Kesenjangan dari fakta-fakta antara pengamatan dan perhitungan mendorong munculnya beberapa gagasan yang didasari oleh persamaan medan Einstein, yaitu kaitan antara materi dan energi dengan geometri ruang-waktu. Gagasan pertama, mengindikasikan keberadaan materi gelap dengan memodelkan ruas kanan pada persamaan medan Einstein (tensor kovarian energi-momentum). Gagasan kedua, memodifikasi ruas kiri persamaan medan Einstein, dengan asumsi tidak ada tambahan materi di luar materi yang tampak.

Salah satu modifikasi yang paling sederhana pada teori gravitasi Einstein adalah dengan menambah suku invariant dengan orde yang lebih tinggi dalam aksi Einstein-Hilbert standar, yang disebut sebagai teori gravitasi berorde tinggi, salah satu kelas dari teori ini adalah teori yang disebut teori gravitasi $f(R)$ yang diperoleh dari teori gravitasi Einstein dengan menambah suku dengan orde lebih tinggi pada skalar Ricci pada teori gravitasi Einstein. Motivasi untuk mempelajari teori adalah fakta bahwa dengan menambahkan suku ekstra pada aksi kita dapat mengatasi masalah evolusi alam semesta sebagaimana yang teramati tanpa memunculkan konsep dark matter dan dark energy [Sporea,2014].

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana mendapatkan solusi simetri Aksial dngan menggunakan algoritma Newmann-Janis serta arti fisinya dari teori $f(R)$,dengan demikian dapat diangkat dua rumusan masalah yaitu bagaimana Bentuk metrik simetri aksial dalam teori serta bagaimana implikasi fisis dari solusi tersebut.

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini tidak mengkaji bagaimana sifat termodinamika dari solusi simetri aksial.

1.4 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan solusi simetri aksial dari solusi simetri bola pada teori gravitasi $f(R)$ serta implikasi dari solusi tersebut.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diperoleh pada penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Mendapatkan solusi simetri aksial pada teori gravitasi $f(R)$ yang merupakan keumuman dari teori gravitasi Einstein.

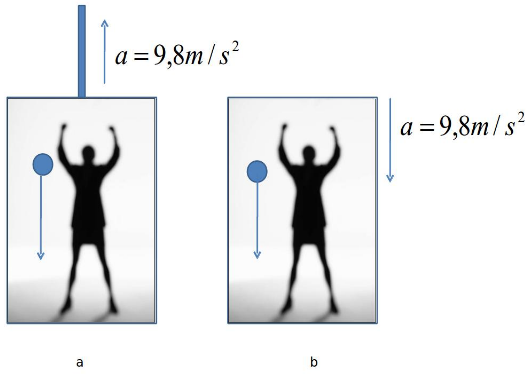
2. Mengatahui implikasi dari solusi simetri aksial pada teori gravitasi $f(R)$.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Gravitasi Einstein

Ketika teori gravitasi Einstein diperkenalkan pada tahun 1915, orang sudah mengenal mekanika Newton, relativitas khusus, dan gravitasi Newton. Mekanika Newton sangat berhasil di dalam menerangkan sifat gerak benda berkelajuan rendah. Namun mekanika ini gagal untuk benda yang kelanjuannya mendekatilaju cahaya. Di samping itu, transformasi Galileo gagal apabila diterapkan pada hukum-hukum seperti persamaan Maxwell yang sifatnya menjadi tidak kovarian di dalam kerangka inersial. Kekurangan ini ditutupi oleh Einstein dengan mengemukakan teori relativitas khusus (TRK) (Anugraha,2004). Hukum gravitasi Newton berhasil menerangkan fenomena gerak benda-benda langit yang dipengaruhi oleh interaksi gravitasi antar benda-benda tersebut dengan ketelitian tinggi. Namun sayangnya, hukum ini tidak konsisten dengan TRK. Jika sebuah benda berubah posisinya maka gaya gravitasi benda tersebut terhadap benda lain akan berubah dalam sekejap, atau terjadi aksi spontan. Dengan kata lain, efek gravitasi haruslah merambat dengan kelajuan melebihi kecepatan cahay, sesuatu yang bertentangan dengan TRK. Permaslahan tersebut dijawab oleh Einstein pada tahun 1915. TRK dibuat Einstein menjadi lebih umum dengan sebutan teori gravitasi Einstein dengan dilibatkannya pengaruh medan gravitasi. Teori gravitasi Einstein adalah teori geometri yang menjelaskan gravitasi, pengaruh sebaran massa, dan energi yang mengakibatkan perubahan ruang-waktu. Gravitasi dipandang oleh Einstein bukan sebagai gaya,akan tetapi lebih sebagai manifestasi kelengkungan ruang dan waktu. Menurut Einstein, geometri ruang-waktu ini dipengaruhi oleh sebaran massa dan energi. Ketika kumpulan massa dan energinya semakin besar, maka ruang-waktunya akan semakin melengkung.

Teori teori gravitasi Einstein ini dibangun atas dua asas, yaitu pertama, asas kesetaraan (principle of equivalence) dan kedua, kovariansi umum (general covariance)(Krane,1992; Purwanto, 2009). Untuk menjelaskan asas kesetaraan ini perlu diberikan penggambaran sebagai berikut. Misalnya seorang astronot berada di dalam roket yang masih berada pada landasannya di permukaan bumi. Sebuah benda yang dilepaskan teramati jatuh ke bawah dengan percepatan $g = 9,8 m/s^2$. Kemudian diandaikan roket tersebut berada di ruang angkasa dengan medan gravitasi amat kecil sehingga dapat diabaikan. Mesin peluncur kemudian dinyalakan sehingga memberikan percepatan yang dikendalikan tepat sebesar $g_r = 9,8 m/s^2$. Sekali lagi benda tersebut dilepaskan. Maka benda tersebut akan meluncur ke bawah dengan percepatan $a = 9,8 m/s^2$. Kedua percobaan yang bersifat angan-angan tersebut memberikan hasil sama.



Gambar 2.1: Pengamat dalam medan gravitasi sebesar $g = 9,8m/s^2$ merasa sama dengan pengamat yang dipercepat sebesar $a = 9,8m/s^2$

Einstein menggunakan hasil percobaan angan-angan "*gedanken experiment*" itu untuk mengemukakan asas kesetaraan yang berbunyi, "Tidak ada percobaan yang dapat dilakukan dalam daerah kecil (lokal) yang dapat membedakan medan gravitasi dengan sistem dipercepat yang setara". Pernyataan daerah kecil ini perlu disebutkan karena alasan berikut.Seandainya dilepaskan dua benda yang terpisah sejauh jarak kecil r, maka di dekat permukaan bumi setiap benda bergerak sepanjang lintasan jari-jari menuju pusat bumi sehingga kedua benda tersebut makin lama makin dekat. Namun jika lebar roket cukup kecil, perbedaannya tidak akan teramati. Hal ini persis seperti percobaan di dalam roket yang meluncur di ruang angkasa yang dilepaskan dengan percepatan tertentu (Anugraha, 2004).

Persamaan dari teori fisis akan mempunyai bentuk sama di setiap sistem koordinat. Prinsip ini mungkin dipenuhi oleh setiap teori dengan menuliskan persamaan di dalam bentuk invarian. Bentuk ini hanya diperoleh hanya dengan menggunakan tensor ruangwaktu dalam formulasi matematis yang disebut tensor.Secara umum, kuantitas fisis tidak kovarian. Sebagai contoh, persamaan Maxwell dalam bentuk vektor-tiga tidak invarian terhadap transformasi Lorentz. Tapi jika persamaan ini dituliskan dalam bentuk tensor maka mereka invarian terhadap transformasi Lorentz, dan semua transformasi koordinat. Teori gravitasi Einstein memakai formulasi matematis tensor untuk memenuhi asas kovariansinya.

Salah satu teknik yang paling berguna dalam proses fisika direpresentasikan oleh prisip aksi terkecil atau prinsip variasi. Menggunakan prinsip variasi ini akan membantu kita menurunkan persamaan karakteristik untuk fenomena tertentu. Persamaan medan Einstein kita turunkan dari prinsip ini.

2.1.1 Persamaan Medan Einstein

Prinsip variasi digunakan untuk menurunkan persamaan-persamaan gerak partikel dan persamaan medan dalam fisika, tidak terkecuali teori gravitasi

Einstein. Persamaan medan Einstein dapat diperoleh dari prinsip variasi untuk aksi dalam kondisi vakum

$$\delta I_G = \delta \int d\Omega \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_G = 0, \tag{2.1}$$

dengan $\mathcal{L}_G$ adalah rapat lagrangian gravitasi. Bentuk dari $\mathcal{L}_G$ adalah

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{16\pi G} R, \tag{2.2}$$

dengan G adalah konstanta gravitasi Newton dan R adalah skalar Ricci. Bentuk $\mathcal{L}_G$ menghasilkan bentuk variasi

$$\delta I_G = \delta \int d\Omega \sqrt{-g}\, R = 0. \tag{2.3}$$

Variasi terhadap metrik

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

dengan g merupakan determinan dari tensor metrik $g^{\mu\nu}$ yang menghasilkan

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{-\delta g}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{2.5}$$

subtitusi persamaan (2.5) pada persamaan (2.3) menghasilkan

$$\begin{aligned}
0 = \delta \int d\Omega \sqrt{-g}\, R &= \int d\Omega \sqrt{-g}\, \partial R + \int d\Omega\, R\, \delta\sqrt{-g} \\
&= \int d\Omega \left\{ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right\}. \\
0 &= \int d\Omega \sqrt{-g} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right\} \delta g^{\mu\nu} \\
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 0. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

persamaan (2.6) merupakan persamaan Medan Einstein dalam keadaan vakum.

Keberadaan materi memberikan sumbangan terhadap bentuk Lagrangian. Sumbangsih tersebut berupa Lagrangian materi $\mathcal{L}_m$ yang berkaitan dengan tensor kovarian energi momentum $T_{\mu\nu}$. Lagrangian materi ini memberikan bentuk umum untuk persamaan medan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.7}$$

dengan $\kappa = 8\pi G$.

Persamaan (2.7) adalah persamaan medan gravitasi yang diperoleh Einstein pada tahun 1915 (Landau, 1975). Sisi kiri pada persamaan tersebut menggambarkan kelengkungan ruang-waktu sedangkan pada ruas kananannya menggambarkan tentang distribusi sumber massa yang menyebabkan kelengkungan tersebut, demikial sebaliknya (Lihat apendik A untuk turunan persamaan medan Einstein).

2.2 Solusi Persamaan Medan Einstein

Solusi persamaan medan Einstein yang menggambarkan tentang benda-benda bermassa berserta kelengkungan ruang-ruang waktu disekelilingnya secara sederhana ada dua, yaitu solusi simetri bola dan solusi simetri aksial.

2.2.1 Solusi Simetri Bola

Solisi simetri bola dari persamaan medan Einstein dapat dibagi menjadi dua, yaitu solusi dari keadaan $T_{\mu\nu} = 0$ yang diperkenalkan Karl Schwarzchild dan solusi bermuatan $T_{\mu\nu} \neq 0$ yang diperkenalkan oleh Reissner-Nordstöm.

Pada tahun 1916, Karl Schwarzschild bekerja untuk mendapatkan solusi dari persamaan Einstein dalam vakum yang menggambarkan evolusi geometri ruang-waktu. Schwarzchild mendapatkan solusi metrik yang bersifat bola dan merepresentasikan medan gravitasi di luar suatu partikel bersimetri bola dengan pusat partikel terletak pada pusat koordinat bola. Solusi ini menghasilkankan adanya sebuah ruang yang di dalamnya gravitasi menyebabkan kelengkungan yang luar biasa sehingga ruang-waktu tidak dapat diamati dan cahaya pun tidak bisa keluar darinya sehingga ia disebut lubang hitam.

Reissner pada tahun 1916 dan Nordstöm pada tahun 1918 mendapatkan solusi untuk persamaan medan Einstein, solusi keduanya mirip dengan solusi Schwarzchild tapi dengan tambahan hadirnya muatan listrik dalam solusi tersebut.

2.2.1.1 Solusi Tak Bermuatan

Salah satu solusi persamaan medan Einstein diberikan oleh Karl Schwarzchild bagi medan statik dan bersimetri bola. Kondisi statik berarti $g_{\mu\nu}$ bergantung x^0, dan ds^2 invarian terhadap perubahan koordinat $x^0 \to -x^0$, maka tidak ada suku yang bersangkutan dengan $dx^j dx^0$ pada bentuk ds^2. Ini berarti bahwa $g_{j0} = g_{0j} = 0$.

Didekat obyek masif M ruang-waktu yang melengkung, garis dunia ds dari partikel dan berkas cahaya adalah geodesik, untuk mendapatkannya perlu diketahui tensor metrik $g_{\mu\nu}$ di dalam koordinat yang dipilih. dalam koordinat bola

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

dengan M sebagai titik pusatnya. jika M nol maka rumus jarak

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{2.8}$$

Jika massa M dinyalakan maka akan terjadi dua hal, ruang posisi akan melengkung sehingga lingkaran r tidak secara tepat berada pada jarak r dari pusat lingkaran, dan jam pada setiap permukaan r tidak teramati dari permukaan r yang lain. Efek ini dapat dituliskan dalam elemen jarak

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{2.9}$$

dengan $\nu = \nu(r), \lambda = \lambda(r)$.

Persamaan 2.9 memberi elemen tensor metrik

$$g_{00} = -e^{2\nu}, g_{11} = e^{2\lambda}, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \sin^2\theta \tag{2.10}$$

atau dapat ditulis

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

bentuk kontra variannya

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Selanjutnya menghitung komponen simbol Cristoffel

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\tau}\left(\partial_\mu g_{\nu\tau} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\tau g_{\mu\nu}\right), \tag{2.13}$$

akan didapatkan total 64 komponen. Komponen-komponen yang tidak nol adalah

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{10} &= \Gamma^0_{01} = \nu', \\
\Gamma^1_{00} &= \nu' e^{2\nu-2\lambda}, \\
\Gamma^1_{11} &= \lambda', \\
\Gamma^1_{22} &= -re^{-2\lambda}, \\
\Gamma^1_{33} &= -r\sin^2\theta e^{-2\lambda}, \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma^3_{13} &= \Gamma^2_{31}\frac{1}{r}, \\
\Gamma^3_{23} &= \Gamma^2_{32} = \cot\theta.
\end{aligned}$$

Lalu menghitung tensor Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\tau \Gamma^\tau_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\tau_{\tau\nu} + \Gamma^\tau_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\rho\tau} - \Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\tau\mu}.$$

Komponen-komponen tensor Ricci yang tidak nol adalah

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right) e^{2\nu-2\lambda} \tag{2.14}$$

$$R_{11} = \nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} \tag{2.15}$$

$$R_{22} = (1 - \lambda' r + \nu' r)e^{-2\lambda} - 1 \tag{2.16}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta\{e^{-2\lambda}(1 - \lambda' r + \nu' r) - 1\} \tag{2.17}$$

Pada area yang sangat jauh dari sumber medan gravitasi atau di ruang kosong tensor Ricci lenyap, $R_{\mu\nu} = 0$. Kondisi ini memberikan

$$\begin{aligned} -\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\nu}{r} &= 0, & (2.18)\\ \nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} &= 0, & (2.19)\\ (1 - \lambda' r + \nu' r)e^{-2\lambda} - 1 &= 0. & (2.20) \end{aligned}$$

Selisihkan persamaan (2.19) dengan persamaan (2.18) memberikan

$$\lambda' + \nu' = 0,$$

sehingga

$$\lambda + \nu = konstan \qquad (2.21)$$

Untuk $r \to \infty$, maka $\nu, \mu \to 0$. Didalam limit ini elemen garis akan menjadi Minkowski. Akan didapat

$$\lambda' + \nu' = 0 \qquad \to \nu = -\lambda \qquad (2.22)$$

Kondisi ini membuat persamaan (2.20)

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = \frac{d}{dr}[re^{2\nu}] = 1$$

dengan mengintegralkannya

$$\begin{aligned} \int d[re^{2\nu}] &= \int dr \\ re^{2\nu} &= r - 2m \qquad (2.23) \end{aligned}$$

dengan $-2m$ adalah konstanta integrasi.

$$\begin{aligned} g_{00} &= -e^{2\nu} \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \qquad (2.24) \\ g_{11} &= e^{2\lambda} \\ &= e^{-2\nu} \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \qquad (2.25) \end{aligned}$$

Dengan demikian, elemen garis (2.9) menjadi

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.26)$$

Persamaan (2.26) dikenal sebagai solusi Schwarzschild atau elemen garis Schwarzschild. Elemen garis atau metrik ini menggambarkan medan gravitasi di luar sumber yang simetri bola serta tidak bergantung pada distribusi materi di dalam sumber.

2.2.1.2 Solusi Bermuatan

Solusi Reissner-Nordstrom merupakan generalisasi dari solusi Schwarzschild. Jika massa benda pada solusi Schwarzchild bermuatan total q, maka nilai tensor energi momentum $T_{\mu\nu}$ merupakan tensor energi momentum untuk medan elektromagnetik yang disebabkan muatan total q yang nilainya tidak nol.

Untuk medapatkan solusi ini, dimulai dengan persamamaan medan Einstein

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{2.27}$$

dengan tensor energi-momentum medan Maxwell

$$T_{\mu\nu} = -F_{\nu}^{\gamma}F_{\mu\gamma} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\gamma\lambda}F_{\gamma\lambda}, \tag{2.28}$$

dimana $F_{\mu\nu}$ merupakan tensor kuat medan $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Nilai T dari persamaan (2.28) adalah nol, sehingga persamaan (2.27)menjadi

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.29}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada solusi Schwarzchild, akan didapatkan metrik

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.30}$$

dengan

$$Q^2 = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0} \tag{2.31}$$

.

Jika diambil $Q = 0$, maka metrik tersebut akan kembali menjadi metrik Schwarzchlid. Metrik diatas disebut sebagai metrik Reisner-Nordstöm.

2.2.2 Solusi Simetri Aksial

Secara astrofisika benda langit (pelanet, bintang, lubang hitam dan lain-lainnya) haruslah berotasi, sedangkan solusi Schwarzschild adalah sebuah benda langit yang tidak berotasi, oleh karena itu perlu dibentuk persamaan metrik yang menyempurnakan solusi Schwarzschild tersebut. Pada tahun 1963 Kerr menemukan bentuk metrik ruang waktu bersimetri aksial yang menghasilkan adanya rotasi dari benda langit (Wiltshere,2009).

Newman dan Janis pada tahun 1965 membuat suatu algoritma yang mampu menunjukkan bahwa solusi Kerr dapat diperoleh dengan cara melakukan suatu transformasi kompleks dari solusi Schwarzchild. Metode yang sama digunakan pula pada solusi Reissner-Nordstöm untuk mendapatkan solusi simetri aksial yang menghasilkan solusi yang disebut sebagai metrik Kerr-Newmann. Metrik ini merepresentasikan suatu lubang hitam yang berotasi dan bermuatan.

2.2.2.1 Algoritma Newmann-janis

Solusi simetri aksial dapat diperoleh dari solusi simetri bola dengan menggunakan algoritma Newman-Janis (Newman dan Janis, 1965). Kita ambil bentuk solusi simetri bola seperti persamaan (2.9)

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2.32}$$

Mengikuti Newman-Janis, bentuk metrik tersebut dapat dituliskan dalam koordinat Eddington-Finkelstein (u, r, θ, ϕ)yang bernilai nol untuk suku g_{rr}. Menggunakan transformsi

$$dt = du + F(r)dr, \tag{2.33}$$

dengan

$$F(r) = \pm e^{\lambda(r)-\nu(r)},$$

akan merubah bentuk elemen garis persamaan (2.32) menjadi

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}du^2 \mp 2e^{\lambda(r)+\nu(r)}dudr + r^2 d\Omega^2. \tag{2.34}$$

Elemen garis ini dapat dibentuk dalam matriks

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & \mp e^{\lambda(r)+\nu(r)} & 0 & 0 \\ \mp e^{\lambda(r)+\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

yang bentuk kontra variannya

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mp e^{-\lambda(r)-\nu(r)} & 0 & 0 \\ \mp e^{-\lambda(r)-\nu(r)} & e^{-2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Matriks (2.36)dapat dituliskan dalam suku-suku null tetrad sebagai

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu, \tag{2.37}$$

dengan l^μ, n^μ, m^μ dan $\bar{m}^\mu$ harus memenuhi

$$l_\mu l^\mu = m_\mu m^\mu = n_\mu n^\mu = 0, \quad l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = -1, \quad l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0 \tag{2.38}$$

$\bar{m}^\mu$ menyatakan konjugat kompleks dari m^μ. Untuk tensor metrik (2.36), null tetradnya dipilih

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu \\ n^\mu &= -\frac{1}{2}e^{-2\lambda(r)}\delta_1^\mu + e^{-\lambda(r)-\nu(r)}\delta_0^\mu \\ m^\mu &= \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right) \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Koordinat r dikembangkan dari radius real menjadi variabel kompleks melalui transformasi berikut (Uretta, 2015)

$$r^p \longrightarrow \frac{Re(r)^{p+2}}{|r|^2} = \frac{\tilde{r}^{p+2}}{\tilde{r}^2 + a^2\cos^2\theta}, \tag{2.40}$$

sehingga null tertad persamaan (2.39) menjadi

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu \\ n^\mu &= -\frac{1}{2}e^{-2\lambda(r,\bar{r})}\delta_1^\mu + e^{-\lambda(r,\bar{r})-\nu(r,\bar{r})}\delta_0^\mu \\ m^\mu &= \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right) \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Langkah selanjutnya dari algoritma ini adalah mengembangkan suatu metrik baru yang diperoleh dengan transormasi

$$x^\mu \longrightarrow \tilde{x} = x^\mu + ia\cos\theta(\delta_1^\mu - \delta_0^\mu), \tag{2.42}$$

serta transformasi untuk null tetrad

$$Z_\alpha^\mu \longrightarrow \tilde{Z}_\alpha^\mu = Z_\alpha^\rho \frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial\tilde{x}^\rho}. \tag{2.43}$$

Transformasi (2.42) menghasilkan

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u - ia\cos\theta \\ \tilde{r} &= r + ia\cos\theta \\ \tilde{\theta} &= \theta \\ \tilde{\phi} &= \phi. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Hasil transformasi persamaan (2.44) dan transformasi (2.43) ini akan memberikan bentuk null tetrad yang baru

$$\begin{aligned} \tilde{l}^\mu &= \delta_1^\mu \\ \tilde{n}^\mu &= -\frac{1}{2}e^{-2\lambda(\tilde{r},\theta)}\delta_1^\mu + e^{-\lambda(\tilde{r},\theta)-\nu(\tilde{r},\theta)}\delta_0^\mu \\ \tilde{m}^\mu &= \frac{1}{(\tilde{r}+ia\cos\theta)\sqrt{2}}\left(ia\sin\theta(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{1}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Null tetarad baru jika dimasukkan dalam persamaan (2.37)akan menghasilkan komponen-komponen metrik kontravarian $g^{\mu\nu}$ sebagai berikut,

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & -e^{-\lambda-\nu} - \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ -e^{-\lambda-\nu} - \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & e^{-2\lambda} + \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

dengan $\rho^2 = \tilde{r}^2 + a^2\cos^2\theta$ serta $\lambda, \nu = \lambda(\tilde{r},\theta), \nu(\tilde{r},\theta)$. Untuk memudahkan kita dalam mendapatkan elemen garis maka tensor metrik di atas diubah dalam bentuk metrik kovarian $g_{\mu\nu}$

$$\begin{pmatrix} -e^{2\nu} & -e^{\lambda+\nu(r)} & 0 & a\sin^2\theta e^{\nu}(e^{\nu}-e^{\lambda}) \\ -e^{\lambda+\nu} & 0 & 0 & ae^{\lambda+\nu}\sin^2\theta \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ a\sin^2\theta e^{\nu}(e^{\nu}-e^{\lambda}) & ae^{\lambda+\nu}\sin^2\theta & 0 & \sin^2\theta[\rho^2 - a^2e^{\nu}(-2e^{\lambda}+e^{\nu})\sin^2\theta] \end{pmatrix} (2.47)$$

Metrik (2.47) dapat disederhanakan dengan transformasi lebih lanjut sehingga komponen non diagonal yang bernilai hanyalah $g_{\phi t}$. Prosedur ini membuat kita mudah membandingkan solusi ini dengan solusi Kerr-Newmann dalam koordinat Boyer-Lindquist.

Koordinat $\tilde{u}$ dan ϕ dapat didefinisikan ulang mengikuti transformasi berikut

$$d\bar{u} = dt + g(\tilde{r})d\tilde{r} \quad (2.48)$$

dan

$$d\phi = d\varphi + h(\tilde{r})d\tilde{r}, \quad (2.49)$$

dengan

$$g(\tilde{r}) = -\frac{e^{\lambda(\tilde{r},\theta)}(\rho^2 + a^2\sin^2\theta e^{\lambda(\tilde{r},\theta)+\nu(\tilde{r},\theta)})}{e^{\lambda(\tilde{r},\theta)}(\rho^2 + a^2\sin^2\theta e^{2\lambda(\tilde{r},\theta)})} \quad (2.50)$$

serta

$$h(\tilde{r}) = -\frac{ae^{2\lambda(\tilde{r},\theta)}}{\rho^2 + a^2\sin^2\theta e^{2\lambda(\tilde{r},\theta)}}. \quad (2.51)$$

Setelah transformasi (2.48) dan (2.49), tensor metrik kovarian (2.47) akan menjadi

$$\begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & ae^{\nu}(e^{\nu}-e^{\lambda})\sin^2\theta \\ 0 & \frac{\rho^2}{\rho^2e^{-2\lambda}+a^2\sin^2\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ ae^{\nu}(e^{\nu}-e^{\lambda})\sin^2\theta & 0 & 0 & \sin^2\theta[\rho^2 - a^2e^{\nu}(-2e^{\lambda}+e^{\nu})\sin^2\theta] \end{pmatrix} (2.52)$$

atau elemen garisnya

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\nu}dt^2 + \frac{\rho^2}{\rho^2e^{-2\lambda}+a^2\sin^2\theta}d\tilde{r}^2 + \rho^2d\theta^2 + [2ae^{\nu}(e^{\nu}-e^{\lambda})\sin^2\theta]dtd\varphi \\ &\quad + \sin^2\theta[\rho^2 - a^2e^{\nu}(-2e^{\lambda}+e^{\nu})\sin^2\theta]d\varphi^2, \end{aligned} \quad (2.53)$$

dengan $\lambda = \lambda(\tilde{r},\theta)$ dan $\nu = \nu(\tilde{r},\theta)$.

2.2.2.2 Solusi Tak Bermuatan

Solusi Schwarzchild memberi nilai $e^{2v(r)} = 1 - \frac{2m}{r}$. Bentuk $e^{2v(r)}$ mengantarkan kita mendapatkan solusi tak bermuatan simetri aksial mulai dari elemen garis persamaan (2.26)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2).$$

Tensor metrik dalam koordinat Eddington-Finkelstein (u, r, θ, ϕ) berbentuk

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \frac{2m}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

Null tetrad kompleks persamaan (2.39)-persamaan (2.41) menjadi

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu \\ n^\mu &= -\frac{1}{2}(1 - \frac{m}{\bar{r}} - \frac{m}{r})\delta_1^\mu + \delta_0^\mu \\ m^\mu &= \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right) \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Menggunakan hasil transformasi persamaan (2.44) dan transformasi (2.43), akan diperoleh null tetrad yang baru

$$\begin{aligned} \tilde{l}^\mu &= \delta_1^\mu \\ \tilde{n}^\mu &= -\frac{1}{2}(1 - \frac{m}{\bar{r}} - \frac{m}{r})\delta_1^\mu + \delta_0^\mu \\ \tilde{m}^\mu &= \frac{1}{(\tilde{r} + ia\cos\theta)\sqrt{2}}\left(ia\sin\theta(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{1}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Setelah dilakukan transformasi (2.48) dan (2.49), akan diperoleh tensor metrik kovarian dalam koordinat Boyer-Lindquist

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) & 0 & 0 & -\frac{2mra}{\rho^2}\sin^2\theta \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{2mra}{\rho^2}\sin^2\theta & 0 & 0 & \sin^2\theta\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) \end{pmatrix}, \tag{2.57}$$

atau dalam bentuk elemen garis

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4mra}{\rho^2}\sin^2\theta d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &\quad + \sin^2\theta\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) d\phi^2, \end{aligned} \tag{2.58}$$

dengan

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \quad (2.59)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr. \quad (2.60)$$

Persamaan (2.58) merupakan solusi Kerr yang menggambarkan sebuah benda berotasi dengan bentuk simetri aksial. Nilai a pada solusi ini sebanding dengan suku momentum sudut. Solusi ini akan kembali menjadi solusi Schwarzchild jika a bernilai nol.

2.2.2.3 Solusi Bermuatan

Solusi simetri aksial untuk kasus benda bermuatan diperoleh dengan cara yang sama dengan solusi tak bermuatan. Perbadaannya adalah nilai $e^{\mu\nu} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$. Perhitungan lebih lanjut menggunakan algoritma Newman-Janis serta dalam koordinat Boyer-Lindquist akan menghasilkan

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2m - Q^2}{\rho^2}\right)dt^2 + 2a\sin^2\theta\left(\frac{Q^2 - 2mr}{\rho^2}\right)d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &\quad + \sin^2\theta\left(r^2 + a^2 - \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2}(Q^2 - 2mr)\right)d\phi^2, \end{aligned} \quad (2.61)$$

dengan

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \quad (2.62)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr + Q^2. \quad (2.63)$$

Metrik persamaan (2.61) adalah metrik Kerr-Newmann. Metrik yang menggambarkan solusi aksial dari persamaan medan Einstein untuk sebuah massa m dengan muatan total q. Solusi ini mampu memunculkan adanya singularitas untuk suatu nilai r tertentu (Lihat lampiran B untuk penurunan solusi persamaan medan Einstein).

2.3 Teori Gravitasi $f(R)$

Teori gravitasi $f(R)$ merupakan salah satu jenis modifikasi teori gravitasi Einstein, dengan R merupakan skalar kelengkungan Ricci. Teori gravitasi $f(R)$ diusulkan pertama kali oleh Hans Adolp Buchdahl (1970) (Buchdahl, 1970). Teori gravitasi $f(R)$ akan ditinjau dengan pendekatan metrik (Capozziello,2011;Cembranos,2014;Sporea,2014), untuk keperluan kajian solusi yang mungkin dari teori gravitasi $f(R)$, kita mulai dari aksi

$$I = I_g + I_m, \quad (2.64)$$

dengan I_m merupakan aksi massa dan I_g adalah aksi gravitasi:

$$I_g = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R + f(R)). \quad (2.65)$$

Memvariasi aksi persamaan (2.64) tersebut terhadap $g^{\mu\nu}$, akan kita dapatkan persamaan medan dalam bentuk metrik:

$$R_{\mu\nu}(1 + F(R)) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + f(R)) + (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)F(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.66)$$

dengan $\Box = \nabla_\alpha \nabla^\alpha$ (∇ adalah turunan kovarian) dan $F(R) = df(R)/dR$. Perhitungan trace dari persamaan (2.66)menghasilkan :

$$R(1 + F(R)) - 2(R + f(R)) - 3\Box F(R) + 8\pi G = 0. \tag{2.67}$$

Tidak seperti dalam teori gravitasi Einstein, solusi vakum ($T = 0$) tidak selalu mengimplikasikan nilai nol pada skalar kurvaturnya $R = 0$. Dari persamaan (2.66), dapat diperoleh kondisi dengan konstanta vakum untuk skalar kurvatur $R = R_0$:

$$R_{\mu\nu}(1 + F(R)) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R_0 + f(R_0)) = 0, \tag{2.68}$$

sehingga tensor Riccinya dapat dituliskan:

$$R_{\mu\nu} = \frac{R_0 + f(R_0)}{2(1 + F(R_0))} g_{\mu\nu}, \tag{2.69}$$

dengan $1 + F(R_0) \neq 0$. Jika kita ambil trace dari persamaan (2.68),

$$R_0(1 + F(R)) - 2(R_0 + f(R_0)) = 0, \tag{2.70}$$

kita akan peroleh konstanta kurvatur solusi vakum (Lihat apendik C untuk penurunan teori gravitasi $f(R)$)

$$R_0 = \frac{2f(R_0)}{F(R_0) - 1}. \tag{2.71}$$

BAB 3
PEMBAHASAN

3.1 Solusi Persamaan Medan Gravitasi $f(R)$

Solusi persamaan gravitasi $f(R)$ yang dikaji dalam penelitian ini adalah solusi berbentuk simetri bola dan simetri aksial.Kasus simetri bola yang dibahas berhubungan dengan solusi Schwarzschlid dan Reisner-Nordstöm sedangkan solusi simetri aksial berhubungan dengan solusi Kerr dan solusi Kerr-Newmann.

3.1.1 Solusi Simetri Bola

Kasus simetri bola pada teori gravitasi $f(R)$ merupakan perluasan dari solusi simetri bola dalam teori gravitasi Einstein. Dalam teori gravitasi Einstein, kasus simetri bola yang dikaji adalah solusi simetri bola untuk benda tak bermuatan dan bermuatan. Kasus benda tak bermuatan merupakan solusi yang diperoleh Schwarzschild yang menafsirkan adalah suatu benda yang memiliki singularitas. Benda ini akhirnya dimakan sebagai lubang hitam. Kasus benda bermuatan adalah solusi Reisner-Nordstöm yang merupakan perumuman dari solusi Schwarzschild terkait muatan benda.

3.1.1.1 Solusi Tak Bermuatan

Solusi tak bermuatan dapat pula dikatakan solusi vakum dari teori gravitasi Einstein, sehingga nilai tensor energi momentum $T_{\mu\nu} = 0$. Untuk mendapatkan solusi ini, kita mulai dari elemen garis untuk kasus simetri bola

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3.1}$$

dengan $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Elemen garis persamaan (3.1), memberikan bentuk tensor metrik kovarian $g_{\mu\nu}$ berikut

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

dengan bentuk kontravarian dari tensor metrik diatas yaitu

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Nilai dari simbol Christoffel jenis ke-2 dari tensor metrik di atas adalah

$$\begin{aligned} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} &= g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

yang berjumlah sebanyak 64 komponen. Komponen-komponen yang tidak bernilai nol adalah:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = \nu' \\
\Gamma^1_{00} &= \nu' e^{(2\nu - 2\lambda)} \\
\Gamma^1_{11} &= \lambda' \\
\Gamma^1_{22} &= -re^{-2\lambda} \\
\Gamma^1_{33} &= -r\sin^2\theta\; e^{-2\lambda} \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot\theta.
\end{aligned}$$

Komponen-komponen simbol Cristoffel memberikan komponen-komponen tensor Ricci yang tidak nol sebagai berikut

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \left(-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right) e^{2\nu - 2\lambda} \\
R_{11} &= \nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} \\
R_{22} &= (1 - \lambda' r + \nu' r)e^{-2\lambda} - 1 \\
R_{33} &= \sin^2\theta R_{22}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Solusi yang akan dicari adalah solusi dengan konstanta kurvatur pada keadaan vakum R_0 untuk sebuah objek bermassa masif. Pada kasus ini, persamaan medan Einstein menjadi

$$R_{\mu\nu}(1 + f(R_0)) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R_0 + F(R_0)) = 0, \tag{3.6}$$

atau

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\frac{(R_0 + f(R_0))}{(1 + F(R_0))} g_{\mu\nu} \\
&= \frac{R_0}{4} g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Menggunakan persamaan (3.7) dan persamaan (3.5) akan diperoleh $\lambda = -\nu$, Sehingga bagian R_{22} memberikan

$$(1 + 2\nu' r)e^{2\nu} - 1 = \frac{R_0}{4} r^2. \tag{3.8}$$

Evaluasi lebih lanjut menghasilkan

$$e^{2\nu} = 1 + \frac{R_0}{12} r^2 - \frac{2m}{r}, \tag{3.9}$$

dengan $2m$ merupakan konstanta integrasi. Komponen m menyatakan parameter massa.

Subtitusikan persamaan (3.9) dalam persamaan (3.1) akan memberi elemen garis

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta_r}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3.10}$$

dengan

$$\Delta_r = r^2\left(1 + \frac{R_0}{12}r^2\right) - 2mr. \tag{3.11}$$

Elemen garis pada persamaan (3.10) dapat disebut sebagai solusi Schwarzchild dalam teori gravitasi $f(R)$.

3.1.1.2 Solusi Bermuatan

Solusi bermuatan dalam teori gravitasi Einstein pertama kali diperoleh Reisner-Nordström. Dalam kasus teori gravitasi $f(R)$, metode yang digunakan untuk mendapatkan solusi Reisner-Nordström sama dengan kasus teori gravitasi Einstein. Perbedaan dengan kasus teori gravitasi Einstein, solusi yang akan dicari adalah solusi dengan konstanta kurvatur pada keadaan vakum R_0. Pada kasus ini, persamaan (2.66) menjadi

$$R_{\mu\nu}(1 + f(R_0)) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R_0 + F(R_0)) - 8\pi G T_{\mu\nu} = 0, \tag{3.12}$$

atau

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\frac{(R_0 + f(R_0))}{(1 + F(R_0))}g_{\mu\nu} + \frac{8\pi G T_{\mu\nu}}{(1 + F(R_0))} \\ &= \frac{R_0}{4}g_{\mu\nu} + \frac{8\pi G T_{\mu\nu}}{(1 + F(R_0))}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nilai dari komponen tensor energi momentum yang tidak nol

$$\begin{aligned} T_{00} &= -\frac{1}{2}k^2 e^{-2\lambda} \\ T_{11} &= \frac{1}{2}k^2 e^{-2\nu} \\ T_{22} &= -\frac{1}{2}r^2 k^2 e^{-2\lambda - 2\nu} \\ T_{33} &= -\frac{1}{2}r^2 k^2 e^{-2\lambda - 2\nu}\sin^2\theta, \end{aligned} \tag{3.14}$$

dengan $k = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Menggunakan persamaan (3.13) untuk menghubungkan persamaan (3.5) dan (3.14) akan diperoleh $\lambda = -\nu$, sehingga bagian R_{22} memberikan

$$(1 + 2\nu' r)e^{2\nu} - 1 = \frac{R_0}{4}r^2 - \frac{8\pi G}{2(1 + F(R_0))}r^2 k^2,$$

dan evaluasi lebih lanjut menghasilkan

$$e^{2\nu} = 1 + \frac{R_0}{12}r^2 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2(1+F(R_0))}, \tag{3.15}$$

dengan $Q^2 = Gq^2/4\pi\epsilon_0^2$ yang menyatakan parameter muatan listrik dan m menyatakan parameter massa.

Subtitusikan persamaan (3.15) dalam persamaan (3.1) akan memberi elemen garis

$$ds^2 = -\frac{\Delta_{RN}}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta_{RN}}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3.16}$$

dengan

$$\Delta_{RN} = r^2\left(1 + \frac{R_0}{12}r^2\right) + \frac{Q^2}{1+F(R_0)} - 2mr, \tag{3.17}$$

Elemen garis pada persamaan (3.16) dapat disebut sebagai solusi Reisner-Nordstöm dalam teori gravitasi $f(R)$.Tidak seperti dalam kasus teori gravitasi Einstein, kontribusi muatan partikel dalam metrik memiliki tambahan faktor koreksi $(1+F(R))^{-1}$.

3.1.2 Solusi Simetri Aksial

Solusi simetri aksial pertama kali diperoleh Kerr tahun 1963 yang merupakan solusi perumuman dari solusi Schwarzchild. Jika solusi Schwarzchild menggambarkan benda statis maka solusi Kerr menggambarkan benda yang berotasi. Dua tahun setelahnya Newman dan Janis menciptakan suatu algoritma yang mampu mentransformasi solusi Schwarzchild menjadi solusi Kerr. Pengguanaan algoritma ini diperluas oleh Newmann-Janis dengan menerapkannya pada solusi Reisner-Nordstöm, yang merupakan solusi simetri aksial untuk benda bermassa m dengan muatan total q.

Algoritma Newman-Janis berhasil mentransformasi solusi simetri bola menjadi solusi simetri aksial pada teori gravitasi Einstein. Untuk mendapatkan hal yang serupa, maka metrik Newman-Janis diaplikasikan juga pada solusi statik dan bermuatan dalam teori gravitasi $f(R)$. Untuk mendapatkan solusi simetri aksial kita mulai dari solusi Reisner-Nordström dalam $f(R)$ atau elemen garis persamaan (3.17),

$$ds^2 = -\frac{\Delta_{RN}}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta_{RN}}dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

Pada persamaan (3.17) nilai $e^{2\nu} = \frac{\Delta_r}{r^2}$. Tensor metrik tersebut dalam koordinat Eddington-Finkelstein (u, r, θ, ϕ) berbentuk

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \Delta_{RN}r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Null tetrad kompleks persamaan (2.39)-(2.41) menjadi

$$\begin{aligned}
l^\mu &= \delta_1^\mu \\
n^\mu &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_0}{12}\frac{\tilde{r}^4}{r\bar{r}}+\frac{Q^2}{(1+F(R_0))r\bar{r}}-\frac{m}{\bar{r}}-\frac{m}{r}\right)\delta_1^\mu+\delta_0^\mu \\
m^\mu &= \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu+\frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Menggunakan hasil transformasi persamaan (2.44) dan transformasi (2.43), akan diperoleh null tetrad yang baru

$$\begin{aligned}
\tilde{l}^\mu &= \delta_1^\mu \\
\tilde{n}^\mu &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_0}{12}\frac{\tilde{r}^4}{r\bar{r}}+\frac{Q^2}{(1+F(R_0))r\bar{r}}-\frac{m}{\bar{r}}-\frac{m}{r}\right)\delta_1^\mu+\delta_0^\mu \\
&= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_0}{12}\frac{\tilde{r}^4}{\rho^2}+\frac{Q^2}{(1+F(R_0))\rho^2}-\frac{2m\tilde{r}}{\rho^2}\right)\delta_1^\mu+\delta_0^\mu \\
\tilde{m}^\mu &= \frac{1}{(\tilde{r}+ia\cos\theta)\sqrt{2}}\left(ia\sin\theta(\delta_0^\mu-\delta_1^\mu)+\delta_2^\mu+\frac{1}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

dengan $\rho^2=\tilde{r}^2+a^2\cos^2\theta$.

Setelah dilakukan transformasi (2.48) dan (2.49), serta dibentuk dalam koordinat Boyer-Lindquist, akan didapatkan tensor metrik kovarian

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}
-\frac{\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 & 0 & -\frac{a\sin^2\theta}{\rho^2}(r^2+a^2-\Delta_{KN}) \\
0 & \frac{\rho^2}{\Delta_{KN}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \rho^2 & 0 \\
-\frac{a\sin^2\theta}{\rho^2}(r^2+a^2-\Delta_{KN}) & 0 & 0 & \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\Delta_{KN}\right)
\end{pmatrix},$$

atau dalam bentuk elemen garis

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta}{\rho^2}dt^2-\frac{2a\sin^2\theta}{\rho^2}(r^2+a^2-\Delta_{KN})d\phi dt+\frac{\rho^2}{\Delta_{KN}}dr^2+\rho^2d\theta^2 \\
&\quad +\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\Delta_{KN}\right)d\phi^2,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

dengan penyederhanaan penulisan $\tilde{r}\to r$ dan

$$\rho^2 = r^2+a^2\cos^2\theta, \tag{3.22}$$

$$\Delta_{KN} = r^2+a^2+\frac{R_0}{12}r^4+\frac{Q^2}{1+F(R_0)}-2mr. \tag{3.23}$$

.

Persamaan (3.21) merupakan solusi simetri aksial untuk benda bermuatan masif pada teori gravitasi $f(R)$. Selanjutnya $\frac{Q^2}{1+F(R_0)}$ kita tuliskan sebagai $\tilde{Q}^2$ untuk menyederhanakan penulisan.

3.2 Implikasi Fisis Solusi Persamaan Medan Gravitasi $f(R)$

Implikasi fisis yang akan dikaji adalah masalah cakrawala peristiwa (*Event Horizon*) dan Permukaan pergeseran merah takhingga (*Surface of Infinite Redshift*). Cakrawala peristiwa muncul terkait singularitas dalam metrik ruang waktu schwarzschild. Singularitas metrik ini terkait nilai komponen g_{rr} yang bernilai takhingga saat nilai $r = 2m$. Untuk mengkajinya kita bahas masalah solusi statik (simetri bola) dalam teori gravitasi Einstein terlebuh dahulu lalu membandingkan dengan solusinya dalam teori gravitasi $f(R)$.

3.2.1 Solusi Simetri Bola dalam Gravitasi $f(R)$

Misalkan sebuah partikel jatuh secara radial menuju jari-jari Schwarzchild, partikel ini mulai jatuh saat $r = R$ dengan $\frac{dr}{dt} = 0$ seperti pada Gambar 3.1. Pergerakan partikel dideskripsikan oleh persamaan geodesik (Dalarsson, 2005)

$$\frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{3.24}$$

Dari hasil simbol Cristoffel pada solusi Schwarzchild, dan dengan $x^0 = -t$, $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$, persamaan geodesik dengan $\nu = 0$ adalah

$$\ddot{t} + \frac{2m}{r(r-2m)}\dot{t}\dot{r} = 0,$$

atau

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0. \tag{3.25}$$

Mengintegralkan persamaan tersebut akan didapat

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = K, \tag{3.26}$$

dengan K adalah konstanta integrasi.

Selanjutnya, metrik Schwarzchild untuk benda jatuh secara radial akan menjadi

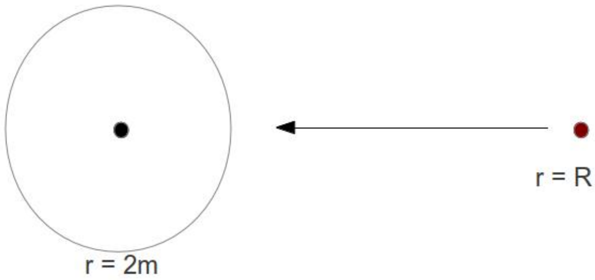
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2.$$

Menggunakan $ds^2 = -d\tau^2, \dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$, dan $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau}$, persamaan terakhir dapat ditulis ulang

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 = 1. \tag{3.27}$$

Mengambil $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau}\dot{t}$ akan memberi

$$\left[\left(\frac{r-2m}{r}\right) - \left(\frac{r}{r-2m}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)\right]\dot{t}^2 = 1. \tag{3.28}$$



Gambar 3.1: Pertikel jatuh secara radial menuju lubang hitam

Selanjutnya akan ditinkjau pada bats-batasnya. Kondisi batas $r = R$, $\frac{dr}{dt} = 0$ memberikan

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{r=R} = \left(\frac{R}{R-2m}\right)^{1/2} \tag{3.29}$$

sehingga untuk persamaan (3.26) didapat

$$\begin{aligned} K &= \left(1 - \frac{2m}{R}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_R \\ &= \left(\frac{R-2m}{R}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \left(\frac{r}{r-2m}\right)K \\ &= \left(\frac{r}{r-2m}\right)\left(\frac{R-2m}{R}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Memasukkan persamaan (3.30) ke persamaan (3.28) dan menata ulangnya akan didapat

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(r-2m)(2m)^{1/2}(R-r)^{1/2}}{r^{3/2}(R-2m)^{1/2}}. \tag{3.31}$$

Tanda minus dipilih karena benda jatuh ke pusat medan gravitasi, maka r berkurang seiring t yang bertambah. Akhirnya dengan menata ulang persamaan di atas kemudian mengintegralkannya akan didapat

$$t = -\left(\frac{R-2m}{2m}\right)^{1/2} \int_R^r \frac{\rho^{3/2}}{(\rho-2m)(R-\rho)^{1/2}} d\rho. \tag{3.32}$$

Persamaan (3.32) adalah waktu yang dibutuhkan oleh partikel yang melintas dari $r = R$ hingga sembarang r yang diukur dalam koordinat Schwarzchild, yaitu waktu yang diukur oleh pengamat yang berada sangat jauh dari medan gravitasi. Bentuk integral di atas akan menyimpang bila $\rho \to 2m$, untuk menyelidiki ini diambil $\rho = 2m + \varepsilon$, dengan ε sangat kecil, maka

$$\begin{aligned} t &= -\left(\frac{R-2m}{2m}\right)^{1/2}\int_{R-2m}^{r-2m}\frac{(2m+\varepsilon)^{3/2}}{\varepsilon(R-2m)^{1/2}}d\varepsilon \\ &= -2m\ln\left(\frac{r-2m}{R-2m}\right), \end{aligned}$$

atau

$$r - 2m = (R-2m)e^{-t/2m}. \quad (3.33)$$

Dari hasil terakhir kita dapatkan $t \to \infty$ saat $r \to 2m$, atau menurut pengamat yang sangat jauh, partikel yang jatuh ke jari-jari Schwarzschild akan semakin melambat saat mendekati jari-jari Schwarzschild dan akhirnya akan terlihat berhenti sebelum masuk dalam jari-jari Schwarzschild walaupun sebenarnya partikel tersebut masuk kedalamnya. Cahaya yang tersedot oleh lubang hitam akan mengalami pergeseran merah karena melawat tarikan gravitasi. Karena itulah benda yang mempunyai sifat seperti ini disebut lubang hitam.

Jari-jari Schwarzschild disebut pula sebagi cakrawala peristiwa, karena semua pengamatan yang terjadi didalamnya tersembunyi dari pengamat di luar. Area $r = 2m$ disebut cakrawala peristiwa karena merupakan batas peristiwa yang dapat diamati serta dapat disebut pula permukaan *infinite red-shift* karena dipermukaan ini cahaya akan mengalami pergeseran merah secara terus menerus.

Solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi Einstein memunculkan singularitas yang berbeda. Syarat singularitas pada suolusi Reisner-Nordstöm dipenuhi oleh

$$\begin{aligned} \Delta_r &= 0 \\ r^2 + Q^2 - 2Mr &= 0, \end{aligned}$$

yang merupakan persamaan kuadratik dalam r yang akar-akarnya

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}. \quad (3.34)$$

Nilai r_+ terkait solusi di luar sumber massa atau kita sebut r_{luar} dan r_- terkait solusi di dalam sumber massa yang kita sebut r_{dalam}. Pada tesis ini hanyalah kasus di luar saja yang dikaji. Suku yang berisikan muatan Q disyaratkan $Q^2 < m^2$. Penambahan muatan pada solusi ini hanya mengkoreksi besaran $r = 2m$ dalam solusi Schwarzchild.

Solusi Schwarzchild pada teori gravitasi $f(R)$ memberikan hasil tafsiran yang kurang lebih sama dengan solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi

Einstein. Pada kasus $f(R)$, singularitas pada solusi Schwarzchild dipenuhi saat

$$r^2 + \frac{R_0}{12}r^4 - 2mr = 0. \tag{3.35}$$

Solusi r dari persamaan (3.35)didapatkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0 \\
r_2 &= \frac{\frac{R_0}{3} - \left(\left\{-3m + \sqrt{\frac{9m^2\frac{R_0}{3}+1}{\frac{R_0}{3}}}\right\}(\frac{R_0}{3})^2\right)^{2/3}}{\frac{R_0}{3}\left(\left\{-3m + \sqrt{\frac{9m^2\frac{R_0}{3}+1}{\frac{R_0}{3}}}\right\}(\frac{R_0}{3})^2\right)^{1/3}} \\
r_3 &= -\frac{(1+i\sqrt{3})\frac{R_0}{3} + (1-i\sqrt{3})\left(\left\{-3m + \sqrt{\frac{9m^2\frac{R_0}{3}+1}{\frac{R_0}{3}}}\right\}(\frac{R_0}{3})^2\right)^{2/3}}{2\frac{R_0}{3}\left(\left\{-3m + \sqrt{\frac{9m^2\frac{R_0}{3}+1}{\frac{R_0}{3}}}\right\}(\frac{R_0}{3})^2\right)^{1/3}} \\
r_4 &= -\frac{(1-i\sqrt{3})\frac{R_0}{3} + (1+i\sqrt{3})\left(\left\{-3m + \sqrt{\frac{9m^2\frac{R_0}{3}+1}{\frac{R_0}{3}}}\right\}\frac{R_0}{12}(\frac{R_0}{3})^2\right)^{2/3}}{2\frac{R_0}{3}\left(\left\{-3m + \sqrt{\frac{9m^2\frac{R_0}{3}+1}{\frac{R_0}{3}}}\right\}(\frac{R_0}{3})^2\right)^{1/3}}.
\end{aligned}$$

Solusi r_2 dan r_3 memiliki komponen imajiner sehingga tidak memenuhi kriteria jari-jari suatu benda. Solusi yang mungkin adalah r_1 dan r_2. Dalam limit $R_0 \longrightarrow 0$, maka solusi r_2 akan kembali menjadi radius Schwarzchild

$$\lim_{R_0 \to 0} r_2 = 2m.$$

Kehadiran suku R_0 pada r_2 sama halnya dengan kehadiran suku Q^2 pada solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi Einstein yang mengkoreksi singularitas $r = 2m$.

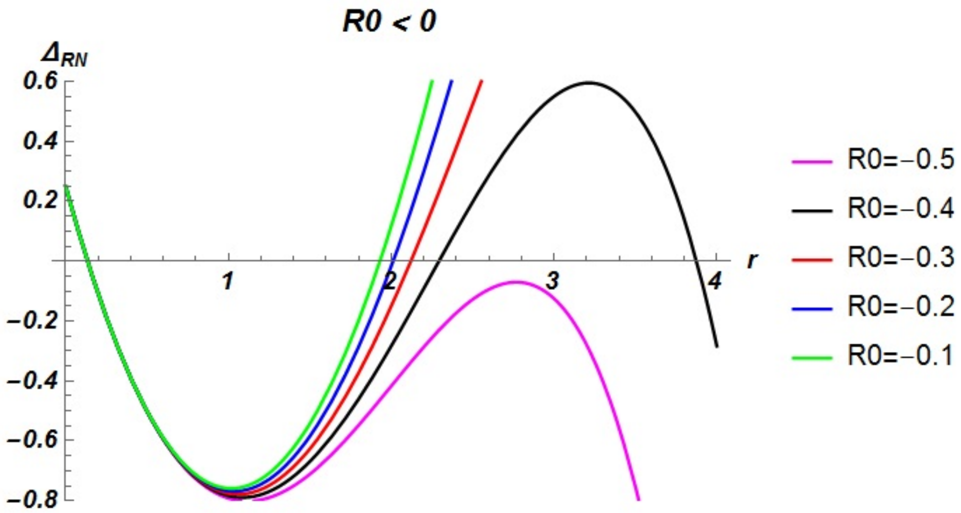
Singularitas dalam solusi Reisner-Nordstöm dalam teori gravitasi $f(R)$ diperoleh jika dipenuhi

$$\Delta_{RN} = r^2 + \frac{R_0}{12}r^4 - 2mr + \tilde{Q}^2 = 0. \tag{3.36}$$

Bentuk persamaan 3.36 akan memberikan empat solusi untuk r yaitu r_-, r_{dalam}, r_{luar} dan r_k. Solusi r_- merupakan solusi r yang selalu negatif sehingga kita abaikan. Solusi r_{dalam} dan r_{luar} adalah solusi yang sebanding dangan solusi r untuk di dalam dan luar benda sedangkan r_k adalah solusi baru akibat hadirnya suku R_0. Untuk mendalami hubungan antara r dengan Δ_{RN} dilakukan dengan menganalisa grafik yang diperoleh dari hubungan keduanya.

Untuk kasus $R_0 < 0$ ada beberapa nilai R_0 yang menhasilkan tiga buah perpotongan pada sumbu r,yaitu r_-, r_{dalam}, r_{luar} dan r_k. Dari Gambar 3.2 terlihat bahwa

$$r_{dalam} < r_{luar} < r_k. \tag{3.37}$$



Gambar 3.2: Grafik Δ_{RN} terhadap r untuk beberapa nilai $R_0 < 0$ dengan nilai $Q = 0.5$ dan $m = 1$.

r_{dalam} dan r_{luar} merupakan cakrawala peristiwa seperti halnya di teori gravitasi Einstein untuk kasus benda statik bermuatan dan r_k merupakan sumbangsih dari suku R_0 . Untuk nilai $R_0 > 0$,Gambar 3.3 menunjukkan adanya dua perpotongan grafik pada sumbu r. Hal ini menunjukkan nilai r_k pada $R_0 > 0$ akan menghilang. Dari grafik terlihat pula untuk R_0 yang semakin membesar maka nilai r_{luar} akan semakin mengecil.

Jika $R_0 = 0$, persamaan 3.36 akan menjadi

$$\Delta_{RN} \;=\; r^2 - 2mr + Q^2,$$

yang hanya mempunyai dua singularitas yaitu di r_{dalam} dan r_{luar} seperti ditunjukkan Gambar 3.4, dimana nampak perpotongan pada dua titik di sumbu r. Hal ini sesuai dugaan bahwa untuk $R_0 = 0$, maka kasus dalam teori gravitasi $f(R)$ akan kembali menjadi kasus teori gravitasi Einstein dimana solusi Reisner-Nordstöm mempunyai dua singularitas.

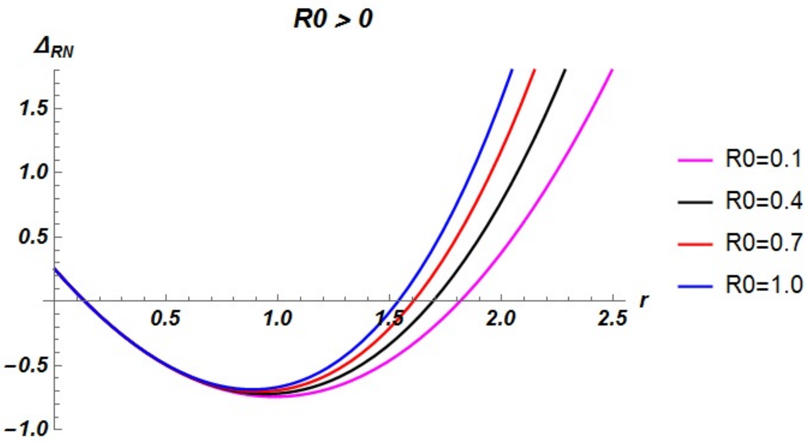
3.2.2 Solusi Simetri Aksial dalam Grafitasi $f(R)$

Untuk membahas implikasi solusi simetri aksial pertama-tama kita bahas kasus teori gravitasi Einstein. Dalam teori gravitasi Einstein, cakrawala peristiwa dapat dicari dari permukaan *hyper* null atau permukaan yang mempunyai kelengkungan yang sangat besar (singularitas). Persamaan permukaan *hyper* null adalah

$$f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0, \tag{3.38}$$

dan vektor normal yang merupakan vektor kovarian

$$n_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{3.39}$$



Gambar 3.3: Grafik Δ_{RN} terhadap r untuk beberapa nilai $R_0 > 0$ dengan nilai $Q = 0.5$ dan $m = 1$.

Solusi Kerr-Newman dalam teori gravitasi Einstein mempunyai singularitas saat dipenuhi $\Delta = 0$ sehingga

$$\begin{aligned} r^2 - 2mr + a^2 + Q^2 &= 0 \\ r = r_\pm &= m \pm \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2} \end{aligned} \tag{3.40}$$

Dengan r_+ seperti sebelumnya, merupakan solusi untuk daerah di luar sumber massa dan r_- untuk daerah di dalam sumber massa. Pembahasan pada bagian ini tetap diperuntukkan untuk r_+ saja (diluar sumber massa) atau

$$r = r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2}. \tag{3.41}$$

Maka persamaan permukaan *hyper* adalah

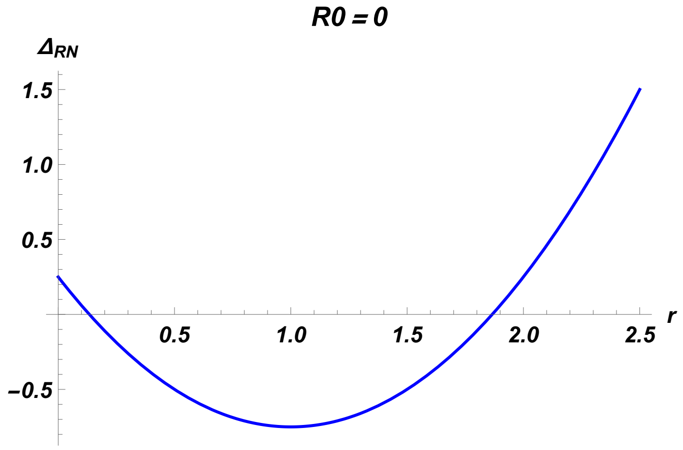
$$\begin{aligned} f &= r - r_+ \\ &= r - m - \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2} \end{aligned} \tag{3.42}$$

sehingga nilai n_μ adalah

$$n_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = (0, 1, 0, 0) \tag{3.43}$$

Permukaan *hyper* akan null jika $n^\mu n_\mu = 0$, tetapi

$$\begin{aligned} n^\mu n_\mu &= g^{\mu\nu} n_\nu n_\mu \\ &= g^{11} n_1 n_1 \\ &= g^{11} \\ &= \frac{\Delta}{\rho^2}. \end{aligned} \tag{3.44}$$



Gambar 3.4: Grafik Δ_{RN} terhadap r untuk $R_0 = 0$ dengan nilai $Q = 0.5$ dan $m = 1$.

.

Nilai $n^\mu n_\mu$ akan sama dengan nol jika $\Delta = 0$ atau $r = r_+$ atau

$$n^\mu n_\mu = 0 \quad \text{pada} \quad r = r_+, \tag{3.45}$$

Sehingga $r = r_+$ adalah permukaan *hyper* null. Cahaya yang merambat ke dalam lubang hitam Kerr-Newman setelah melalui permukaan ini tidak akan pernah keluar melalui permukaan ini. Cakrawala peristiwa untuk Kerr-Newman adalah:

$$r = r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2} \tag{3.46}$$

Kita tinjau sifat SIR dari solusi Kerr-Newman ini. Besar fraksi perubahan panjang gelombang ini dinyatakan dengan konstanta *redshift* z yang tidak berdimensi (Ryder, 2009) yaitu

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1, \tag{3.47}$$

dengan $c = \lambda v$ sehingga

$$\begin{aligned} z &= \frac{\frac{c}{v_0}}{\frac{c}{v_e}} - 1 \\ &= \frac{v_e}{v_0} - 1, \end{aligned} \tag{3.48}$$

dengan ν_e adalah besarnya frekuensi yang dipancarkan dan ν_o adalah frekuensi yang diterima observer (pengamat) di luar event horizon. Misalkan cahaya dipancarkan di r_2 dan diterima pengamat di r_1, maka

$$z = \frac{v_2}{v_1} - 1 = \sqrt{\frac{g_{00}(r_1)}{g_{00}(r_2)}} - 1 \tag{3.49}$$

dengan nilai $g_{00}(r)$ untuk ruang-waktu Kerr-Newman adalah

$$g_{00}(r) = -\left(1 - \frac{2mr - Q^2}{\rho^2}\right). \tag{3.50}$$

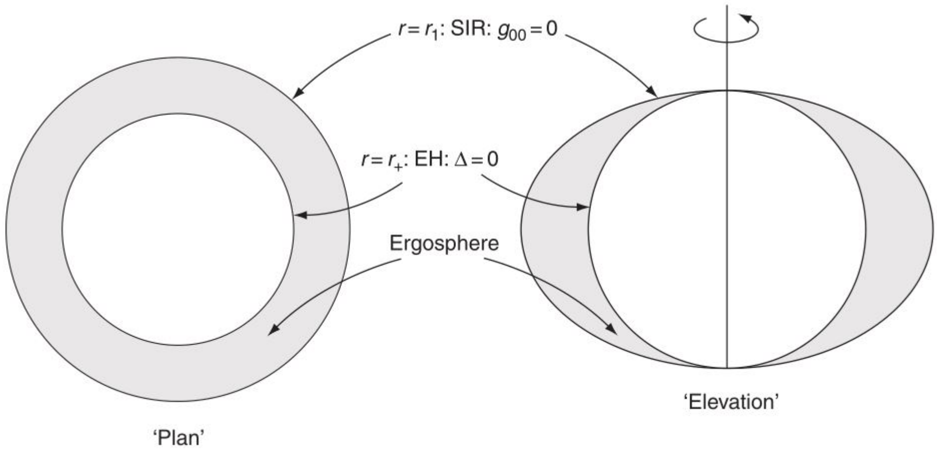
Asumsikan r_1 sangat jauh dari sumber ($r \to \infty$), sehingga tensor metrik akan kembali ke ruang-waktu datar (Minkowski):

$$g_{00}(r_1) = -1 \tag{3.51}$$

dan konstanta *redshift*:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{-g_{00}(r_2)}} - 1 \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2mr - Q^2}{\rho^2}}} - 1 \\ &= \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^2 - 2mr - Q^2}} - 1. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Saat $\rho^2 \to 2mr + Q^2$, maka $z \to \infty$ dan nilai g_{00} atau $g_{00} = 0$. SIR didenifisikan



Gambar 3.5: Ergosphere dan SIR pada lubang hitam Kerr-Newman

oleh suku g_{00}. Nilai $g_{00} = 0$ membuat persamaan (3.50) menjadi

$$
\begin{aligned}
\left(1 - \frac{2mr - Q^2}{\rho^2}\right) &= 0 \\
\frac{2mr - Q^2}{\rho^2} &= 1 \\
2mr - Q^2 &= \rho^2 \\
0 &= r^2 + a^2cos^2\theta - 2mr + Q^2 \\
r_{1,2} &= m \pm \sqrt{m^2 - a^2cos^2\theta - Q^2}. \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

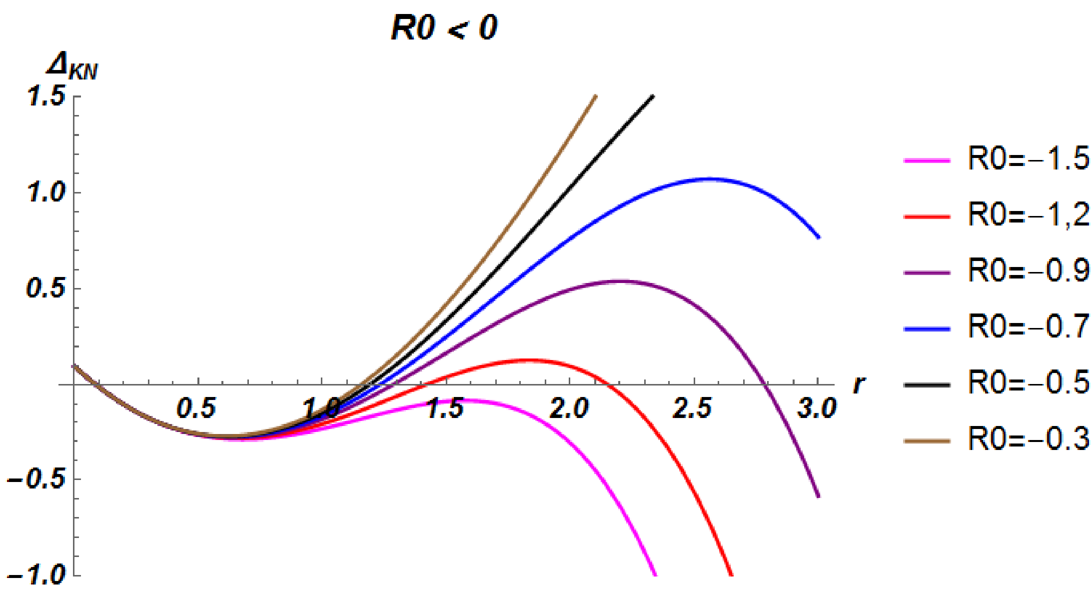
Untuk $r = r_1$, Kerr-Newman SIR:

$$r = r_1 = m + \sqrt{m^2 - a^2cos^2\theta - Q^2}. \qquad (3.54)$$

Cakrawala peristiwa dan SIR ditunjukan pada Gambar 3.5. Ergosphere adalah daerah diantara keduanya yang didefinisikan oleh :

$$m + \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2} = r_+ < r < r_1 = m + \sqrt{m^2 - a^2cos^2\theta - Q^2} \qquad (3.55)$$

Nilai a mempengaruhi bentuk dari ergosphere sehingga semakin besar nilai a semakin tidak pipih bentuk ergospherenya. Jika nilai $a = 0$ maka solusi ini akan kembali pada bentuk Schwarzchild atau dalam kata lain menjadi bentuk solusi simetri bola.



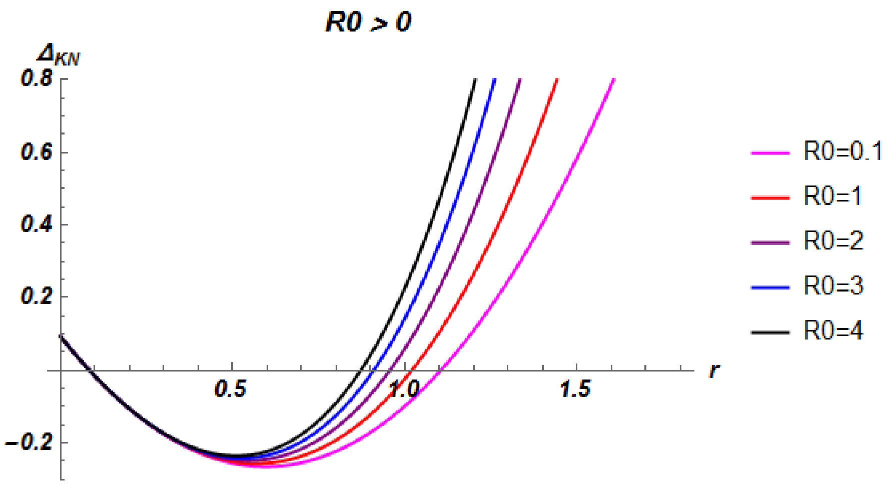
Gambar 3.6: Grafik Δ_{KN} terhadap r untuk beberapa nilai $R_0 < 0$ dengan nilai $Q = 0.1$, $a = 0.29$ dan $m = 0.6$.

Untuk mendapatkan cakrawala peristiwa dari solusi Kerr-Newman dalam teori gravitasi $f(R)$, syarat

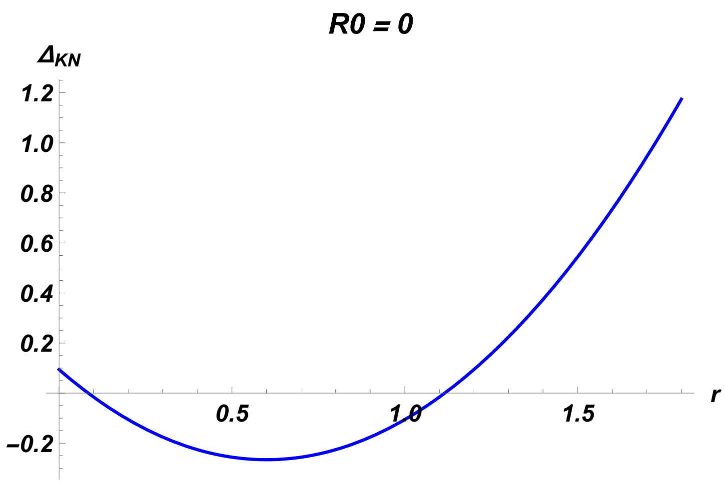
$$\Delta_{KN} = r^2 + a^2 + \frac{R_0}{12}r^4 + \tilde{Q}^2 - 2mr = 0, \qquad (3.56)$$

harus terpenuhi. Sedangkan untuk SIR singularitas akan terpenuhi jika

$$\Delta_{SIR} = g_{00} = r^2 + a^2 \cos^2\theta + \frac{R_0}{12} r^4 + \tilde{Q}^2 - 2mr = 0. \tag{3.57}$$

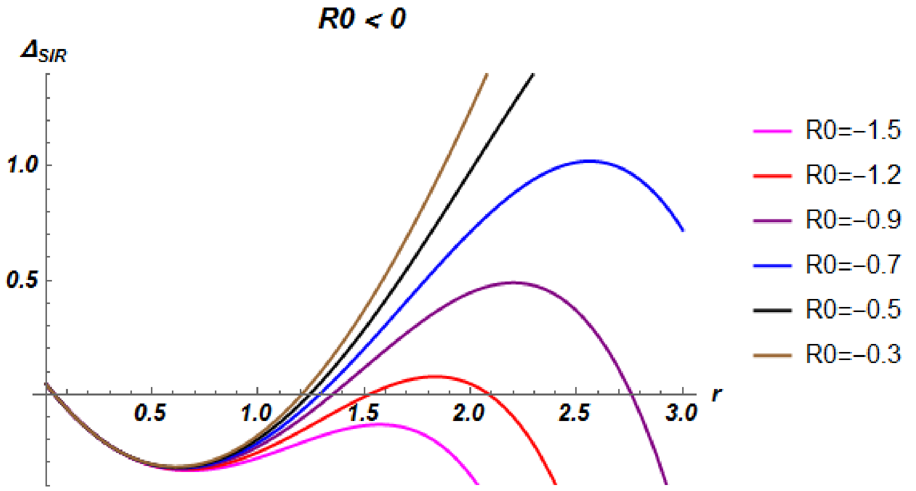


Gambar 3.7: Grafik Δ_{KN} terhadap r untuk beberapa nilai $R_0 > 0$ $Q = 0.1$, $a = 0.29$ dan $m = 0.6$.



Gambar 3.8: Grafik Δ_{KN} terhadap r untuk nilai $R_0 = 0$ $Q = 0.1$, $a = 0.29$ dan $m = 0.6$.

Kedua Δ ini akan memberikan empat nilai untuk r yaitu r_-, r_{dalam}, r_{luar} dan r_k seperti halnya dalam solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi $f(R)$. Solusi r_- merupakan solusi r yang selalu negatif sehingga kita abaikan. Solusi r_{dalam} dan r_{luar} adalah solusi yang sebanding dangan solusi r untuk di



Gambar 3.9: Grafik Δ_{SIR} terhadap r untuk beberapa nilai $R_0 < 0$ dengan nilai $Q = 0.1$, $a = 0.29$,$\theta = \pi/3$ dan $m = 0.6$.

dalam dan luar benda sedangkan r_k adalah solusi baru yang belum kita ketahui dampaknya. Analisis grafik antara r dengan Δ_{KN}.

Pada kasus cakrawala peristiwa, grafik Δ_{KN} terhadap r ditunjukkan Gambar 3.6 dan Gambar 3.7. Seperti dalam kasus Reisner-Nordström dalam teori gravitasi $f(R)$ pada grafik $R_0 < 0$ ada bebrapa nilai R_0 yang menghasilkan tiga buah perpotongan pada sumbu r, yaitu r_-, r_{dalam}, r_{luar} dan r_k. Dari Gambar 3.6 terlihat bahwa

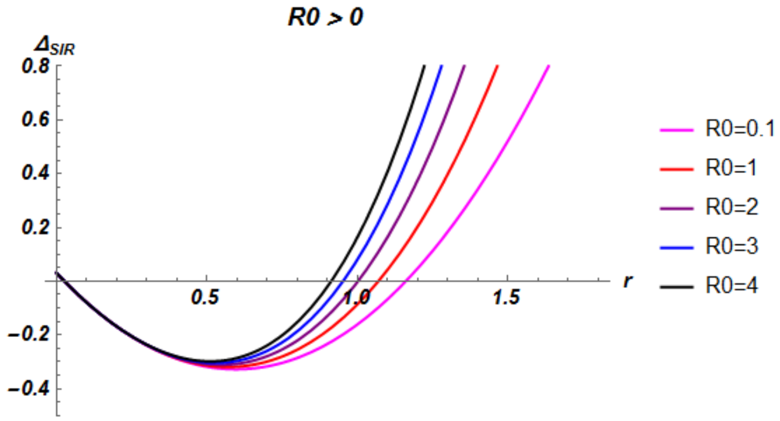
$$r_{dalam} < r_{luar} < r_k. \tag{3.58}$$

Nilai r_{dalam} dan r_{luar} merupakan cakrawala peristiwa seperti halnya di teori gravitasi Einstein untuk kasus solusi Kerr-Newman sedangkan r_k merupakan sumbangsih dari suku R_0 . Untuk nilai $R_0 > 0$, Gambar 3.7 menunjukkan adanya dua perpotongan pada sumbu r. Hal ini menunjukkan nilai r_k pada $R_0 > 0$ akan menghilang. Dari grafik terlihat pula untuk R_0 yang semakin membesar maka kedua titik singularitas akan mendekat. Untuk kasus limit teori gravitasi Einstein atau $R_0 = 0$ persamaan (3.56) menjadi

$$\Delta_{KN} = r^2 + a^2 + Q^2 - 2mr = 0.$$

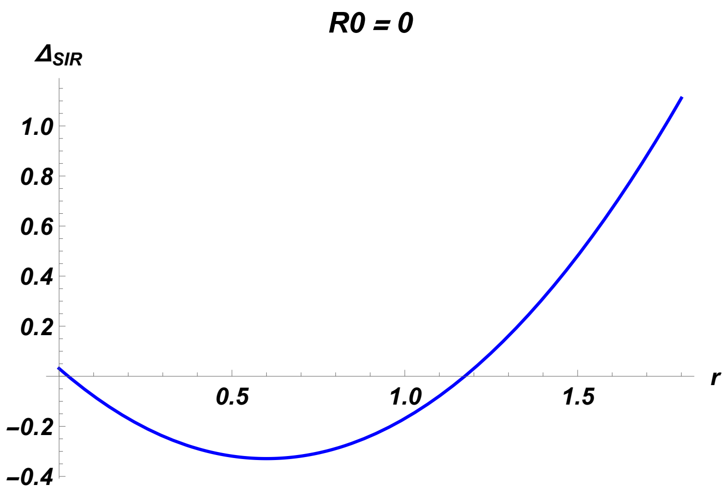
Jika dibuat grafik antara Δ_{KN} dengan r akan kita peroleh Gambar 3.8. Gambar 3.8 menunjukkan adanya dua titik perpotongan pada sumbu r. Dua titik tersebut menggambarkan r_{luar} dan r_{dalam} yang merupakan properti dari lubang hitam Kerr-Newman dalam teori gravitasi Einstein.

Grafik hubungan antara Δ_{SIR} dan r menunjukkan kemiripan dengan grafik pada cakrawala peristiwa. Perbedaannya terletak pada besarnya nilai Δ. Perbedaan ini mengindikasikan bahwa SIR haruslah lebih besar dibandingkan dari cakrawala peristiwa. Pada Gambar 3.9, untuk $R_0 < 0$ ada tiga buah



Gambar 3.10: Grafik Δ_{SIR} terhadap r untuk beberapa nilai $R_0 > 0$ dengan nilai $Q = 0.1$, $a = 0.29$,$\theta = \pi/3$ dan $m = 0.6$.

solusi terkait r_{dalam}, r_{luar} dan r_k. Sedangkan untuk $R_0 > 0$, Gambar 3.10 hanya mempunyai dua titik potong di sumbu r. Singularitas r_k pada nilai $R_0 > 0$ menghilang sehingga tertinggal r_{dalam} dan r_{luar} seperti halnya solusi dalam teori gravitasi Einstein.



Gambar 3.11: Grafik Δ_{SIR} terhadap r untuk nilai $R_0 = 0$ dengan nilai $Q = 0.1$, $a = 0.29$,$\theta = \pi/3$ dan $m = 0.6$.

Dalam limit $R_0 \longrightarrow 0$, karakter SIR pada teori gravitasi $f(R)$ menjadi sama dengan SIR pada teori gravitasi Einstein yaitu

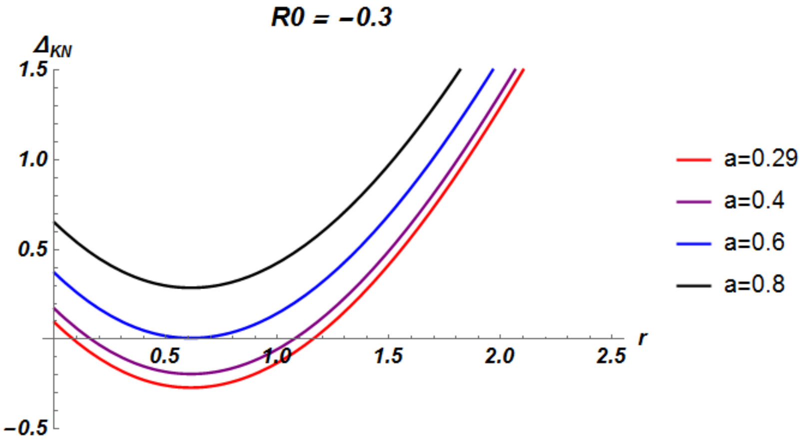
$$\begin{aligned} 0 &= r^2 + a^2 cos^2\theta - 2mr + Q^2 \\ r_{dalam,\, luar} &= m \pm \sqrt{m^2 - a^2 cos^2\theta - Q^2}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Grafik $R_0 = 0$ terkait SIR pada teori gravitasi $f(R)$ deberikan oleh Gambar 3.11. Dua buah titik potong pada sumbu r menyatakan r_{dalam} dan r_{luar}.

Pada SIR, hal yang membedakan antara hasil teori gravitasi $f(R)$ dan gravitasi Einstein ada pada penentu ukuran ergospherenya. Dalam teori gravitasi $f(R)$, ukuran ergosphere dipengaruhi oleh nilai R_0.

Tambahan singularitas r_k pada solusi dalam teori gravitasi $f(R)$ mengindikasikan adanya singularitas tambahan yang ukurannya lebih besar dari singularitas yang ada dalam solusi teori gravitasi Einstein.

Penambahan besar nilai a atau Q pada singulariras menyebabkan berubahnya singularitas.Grafik salah satu nilai R_0 dengan memvariasikan nilai a ditunjukkan oleh Gambar 3.12



Gambar 3.12: Variasi nilai a Dalam solusi Kerr-Newman dengan nilai $R_0 = -0.3$ $Q = 0.1$ dan $m = 0.6$.

Dari Gambar 3.12, Untuk nilai $a = 0.29; 0.4$ singularitas masih berupa dua titik yang tafsirannya seperti yang telah dibahas sebelumnya. Nilai $a = 0.6$ memberikan grafik dengan ektrema di Δ_{KN}. Hal ini mengindikasikan bahwa hanya ada singularitas. Satu buah singularitas ini menyatakan kemungkinan maksimal kecepatan sudut yang sesuai dengan muatan dan massa yang diberikan. Dengan kata lain, hal ini menyatakan kecepatan sudut maksimum yang diperbolehkan untuk lubang hitam. Nilai $a = 0.8$ memberikan grafik yang tidak memotong sumbu r, bentuk seperti ini disebut pula sebagai *naked singularity*. Hal ini berarti nilai $a = 0.8$ tidak diijinkan untuk nilai m dan Q yang diberikan.

BAB 4
KESIMPULAN DAN SARAN

Solusi simetri aksial dalam teori gravitasi $f(R)$ telah didapatkan. Solusi ini diperoleh dengan melakukan transformasi melalui algoritma Newman-Janis untuk solusi simetri bola dalam teori gravitasi $f(R)$.

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan diperoleh bentuk elemen garis simetri aksial dari teori gravitasi $f(R)$ diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Solusi ini merupakan perluasan dari solusi simetri aksial dalam teori gravitasi Einstein (Solusi Kerr-Newmann) yang menggambarkan sebuah benda yang memiliki massa dan muatan yang masif. Solusi ini jika dipilih $Q^2 = 0$ maka akan menjadi solusi simetri aksial untuk benda tanpa adanya muatan, jika dipilih $a = 0$ maka solusi simetri aksial akan berubah menjadi solusi simetri bola.

2. Konstanta a mengambil peranan dalam merubah bentuk kesimetrian dari solusi yang didapatkan. Mengikuti Kerr, konstanta a berkaitan dengan momentum sudut dari sumber. Solusi persamaan (3.21) jika kita set $R_0 = 0$ maka akan kembali menjadi solusi simetri aksial pada teori gravitasi Einstein. Oleh karena itu dapat dikatakan persamaan (3.21) merupakan perluasaan solusi simetri aksial dari teori gravitasi Einstein atau dapat disebut pula solusi Kerr-Newmann yang diperumum.

3. Pada solusi simetri bola Reisner-Nordström dan simetri aksial dalam teori gravitasi $f(R)$ dipeoleh adanya singularitas baru r_k saat nilai $R_0 < 0$. Nilai singularitas baru ini merupakan sumbangsih dari teori gravitasi $f(R)$.

4.2 Saran

Setelah melakukan kajian dalam penelitian ini terdapat hal yang penulis rekomendasikan untuk penelitian-penelitian berikutnya yaitu sebagai berikut:

1. Menyelidiki singularitas r_k apakah mempunyai suatu interpretasi fisis tertentu atau hanyalah suatu ketakstabilan solusi.

2. Menghususkan model $f(R)$ seperti model αR^n, $\alpha R + R^n$ dan lain-lainnya.

3. Mengkaji masalah termodinamika didalam lubang hitam (Cembranos, 2001)

LAMPIRAN A
Teori Gravitasi Einstein

Persamaan geodesik

Lagrangian didefinisikan sebagai fungsi dari koordinat dan turunan pertamanya:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) \tag{1.1}$$

Sehingga integral aksi adalah

$$I = \int_{s_A}^{s_B} \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) ds \tag{1.2}$$

Variasi integral aksi

$$\delta I = \int_{s_A}^{s_B} \delta\mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) ds = 0 \tag{1.3}$$

dengan

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(x^\mu + \delta x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds} + \delta\frac{dx^\mu}{ds}, s\right) - \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) \tag{1.4}$$

Suku pertama pada persamaan (1.4) diekspansikan dalam deret Taylor dengan mengambil suku ke-0 dan ke-1

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \\
&\quad + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)}\delta\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right) - \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)}\delta\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)}\frac{d}{ds}\delta x^\mu \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)}\delta x^\mu\right] \\
&\quad - \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)}\right]\delta x^\mu
\end{aligned} \tag{1.5}$$

pers.(1.5) disubstitusikan ke pers.(1.3)

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_{s_A}^{s_B} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) \right] \delta x^\mu ds \\
&\quad + \int_{s_A}^{s_B} d \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)} \delta x^\mu \right] \\
&= \int_{s_A}^{s_B} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) \right] \delta x^\mu ds \\
&\quad + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)} \delta x^\mu \right]_{s_A}^{s_B} \\
&= \int_{s_A}^{s_B} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) \right] \delta x^\mu ds \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

suku ke-3 pers.(1.6) lenyap karena

$$\delta x^\mu(s_A) = \delta x^\mu(s_B) = 0 \qquad (1.7)$$

karena

$$\delta I = \int_{s_A}^{s_B} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) \right] \delta x^\mu ds = 0 \qquad (1.8)$$

maka didapatkan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) = 0 \qquad (1.9)$$

pers.(1.9) disebut persamaan *Euler-Lagrange*.
Dari persamaan metrik

$$\begin{aligned}
dl^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
dl &= (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{dl}{ds} &= \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} \\
dl &= \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds
\end{aligned} \qquad (1.10)$$

Panjang kurva stasioner adalah

$$I = l(s) = \int dl = \int \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds. \qquad (1.11)$$

Persamaan (1.11) jika dibandingkan dengan pers.(1.2) akan didapatkan Lagrangian yaitu

$$\mathcal{L} = \left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.12}$$

Dari bentuk Lagrangian pers.(1.12) ini disubstitusikan ke dalam pers.(1.9). Suku ke-2 pers.(1.9) adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\partial\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)}\frac{\partial\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)}{\partial x^\lambda} \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{=1}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\underbrace{\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{=1}\left(g_{\mu\nu}\underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\right\}}_{=0}\frac{dx^\nu}{ds}\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\underbrace{\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{=1}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\right\}}_{=0}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

dan suku pertama adalah:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\lambda}{ds}\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\frac{dx^\lambda}{ds}\right)}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{=1}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}}{\partial\left(\frac{dx^\lambda}{ds}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\left(\frac{dx^\lambda}{ds}\right)}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}}_{=0}+g_{\mu\nu}\delta^\mu_\lambda\frac{dx^\nu}{ds}+g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\delta^\nu_\lambda\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\lambda}{ds}\right)} &= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{g_{\lambda\nu}\frac{dx^\nu}{ds}}_{\nu\to\mu} + g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{g_{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{ds} + g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\right\} \\
&= g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds} \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\lambda}{ds}\right)}\right) &= \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\right) \\
&= \frac{dg_{\mu\lambda}}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} + g_{\mu\lambda}\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right) \\
&= \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} + g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{ds^2} \\
&= g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} + \underbrace{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}}_{\nu\to\mu}\right\} \\
&= g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right\} \\
&= g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Dari pers.(1.13) dan pers.(1.15) jika disubstitusikan ke pers.(1.9), maka

$$\begin{aligned}
g_{\rho\lambda}\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right) &= 0 \\
g_{\rho\lambda}\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\
g_{\rho\lambda}\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\lambda,\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\
g^{\rho\lambda}\left\{g_{\rho\lambda}\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\lambda,\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right\} &= 0 \\
\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} &= 0.
\end{aligned}$$

Pers.(1.16) adalah persamaan geodesik.

Tensor Kurvatur

Perubahan vektor kovarian A_μ

$$\Delta A_\mu = \oint_C \delta A_\mu = \oint_C \Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho dx^\nu \tag{1.16}$$

Dari teorema Stokes, integral kontur tertutup C dapat ditransformasi ke integral luasan S sehingga

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2}\oint_C [D_\gamma(\Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho) - D_\nu(\Gamma^\rho_{\mu\gamma} A_\rho)] dS^{\gamma\nu} \tag{1.17}$$

dengan D_γ adalah operator turunan kovarian. Operator ini dapat disimplifikasi menjadi operator turunan biasa non-tensor $D_\gamma \to \partial_\gamma$ seperti berikut

$$\begin{aligned} D_\gamma\left(\Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho\right) &\equiv D_\gamma C_{\mu\nu} \\ &= \partial_\gamma C_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\gamma} C_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\gamma\nu} C_{\mu\sigma} \end{aligned} \tag{1.18}$$

serta

$$\begin{aligned} D_\nu\left(\Gamma^\rho_{\mu\gamma} A_\rho\right) &\equiv D_\nu C_{\mu\gamma} \\ &= \partial_\nu C_{\mu\gamma} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} C_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\nu\gamma} C_{\mu\sigma} \end{aligned} \tag{1.19}$$

dari pers.(1.18) dan pers.(1.19), maka

$$\begin{aligned} D_\gamma\left(\Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho\right) - D_\nu\left(\Gamma^\rho_{\mu\gamma} A_\rho\right) &= D_\gamma C_{\mu\nu} - D_\nu C_{\mu\gamma} \\ &= \partial_\gamma C_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\gamma} C_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\gamma\nu} C_{\mu\sigma} \\ &\quad - \left(\partial_\nu C_{\mu\gamma} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} C_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\nu\gamma} C_{\mu\sigma}\right) \\ &= \partial_\gamma C_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\gamma} C_{\sigma\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} C_{\sigma\gamma} \end{aligned} \tag{1.20}$$

karena tensor permukaan merupakan tensor simetrik ($dS^{\gamma\nu} = dS^{\nu\gamma}$), maka

$$\begin{aligned} \left(D_\gamma C_{\mu\nu} - D_\nu C_{\mu\gamma}\right) dS^{\gamma\nu} &= \left(\partial_\gamma C_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\gamma} C_{\sigma\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} C_{\sigma\gamma}\right) dS^{\gamma\nu} \\ &= \left(\partial_\gamma C_{\mu\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} C_{\sigma\gamma} - \underbrace{\Gamma^\sigma_{\mu\gamma} C_{\sigma\nu}}_{\gamma\leftrightarrow\nu}\right) dS^{\gamma\nu} \\ &= \left(\partial_\gamma C_{\mu\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} C_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} C_{\sigma\gamma}\right) dS^{\gamma\nu} \\ &= \left(\partial_\gamma C_{\mu\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma}\right) dS^{\gamma\nu} \\ &= \left(\partial_\gamma \Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\gamma} A_\rho\right) dS^{\gamma\nu} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Dari pers.(1.21), maka simplifikasi $D_\gamma \to \partial\gamma$ bisa digunakan, sehingga pers.(1.17) menjadi:

$$\begin{aligned}
\Delta A_\mu &= \frac{1}{2}\oint_C \left[D_\gamma\left(\Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho\right) - D_\nu\left(\Gamma^\rho_{\mu\gamma}A_\rho\right)\right] dS^{\gamma\nu} \\
&= \frac{1}{2}\oint_C \left[\partial_\gamma\left(\Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho\right) - \partial_\nu\left(\Gamma^\rho_{\mu\nu}\gamma A_\rho\right)\right] dS^{\gamma\nu} \\
&= \frac{1}{2}\oint_C [\partial_\gamma\Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\gamma A_\rho \\
&\quad -\partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\gamma}A_\rho - \Gamma^\rho_{\mu\gamma}\partial_\nu A_\rho]dS^{\gamma\rho} \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

karena

$$\delta A_\rho = \Gamma^\lambda_{\rho\gamma}A_\lambda dx^\gamma \to \partial_\gamma A_\rho = \Gamma^\lambda_{\rho\gamma}A_\lambda \qquad (1.23)$$

$$\begin{aligned}
\Delta A_\mu &= \frac{1}{2}\oint_C \left[\partial_\gamma\Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\gamma}A_\lambda - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\gamma}A_\rho - \Gamma^\rho_{\mu\gamma}\Gamma^\lambda_{\rho\nu}A_\lambda\right] dS^{\gamma\rho} \\
&= \frac{1}{2}\oint_C \left[\partial_\gamma\Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\gamma}A_\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\gamma}A_\lambda - \Gamma^\rho_{\mu\gamma}\Gamma^\lambda_{\rho\nu}A_\lambda\right] dS^{\gamma\rho} \\
&= \frac{1}{2}\oint_C \left[\partial_\gamma\Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\gamma}A_\rho + \underbrace{\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\gamma}A_\lambda - \Gamma^\rho_{\mu\gamma}\Gamma^\lambda_{\rho\nu}A_\lambda}_{\lambda\leftrightarrow\rho}\right] dS^{\gamma\rho} \\
&= \frac{1}{2}\oint_C \left[\partial_\gamma\Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\gamma}A_\rho + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\gamma}A_\rho - \Gamma^\lambda_{\mu\gamma}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}A_\rho\right] dS^{\gamma\lambda} \\
&= \frac{1}{2}\oint_C \left[\partial_\gamma\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\gamma} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\gamma} - \Gamma^\lambda_{\mu\gamma}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}\right] A_\rho dS^{\gamma\lambda} \\
&\equiv \frac{1}{2}\oint_C R^\rho_{\mu\gamma\nu}A_\rho dS^{\gamma\lambda}, \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

dengan $R^\rho_{\mu\gamma\nu}$ adalah tensor kurvatur Riemann

$$R^\rho_{\mu\gamma\nu} = \partial_\gamma\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\gamma} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\gamma} - \Gamma^\lambda_{\mu\gamma}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} \qquad (1.25)$$

Tensor Ricci didefinisikan dari tensor kurvatur Riemann

$$R_{\mu\gamma} \equiv R^\rho_{\mu\gamma\rho} = \partial_\gamma\Gamma^\rho_{\mu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\gamma} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\gamma} - \Gamma^\lambda_{\mu\gamma}\Gamma^\rho_{\lambda\rho} \qquad (1.26)$$

serta scalar Ricci adalah

$$R \equiv R^\mu_\mu = g^{\mu\gamma}R_{\mu\gamma} \qquad (1.27)$$

Tensor Energi-Momentum

Diturunkan kembali persamaan *Euler-Lagrange* secara umum untuk rapat Lagrangian L yang bergantung kuantitas q dan turunan pertamanya $q_{,\mu}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \mathcal{L}(q, q_{,\mu})dVdt \\
&= \frac{1}{c}\int \mathcal{L}(q, q_{,\mu})d\Omega \\
\delta I &= \frac{1}{c}\int \delta\mathcal{L}(q, q_{,\mu})d\Omega \\
&= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}}\delta q_{,\mu}\right)d\Omega \\
&= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\delta\frac{\partial q}{\partial x^\mu}\right)d\Omega \\
&= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta q\right)d\Omega \\
&= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\delta q\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\right)\delta q\right)d\Omega \\
&= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \underbrace{\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\delta q\right\}}_{=0(\text{teorema } Gauss)} - \left\{\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\right\}\delta q\right)d\Omega \\
&= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\delta q\right)d\Omega \\
&= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\right)\delta q d\Omega \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.28}$$

sehingga didapatkan persamaan *Euler-Lagrange*:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} = 0 \tag{1.29}$$

Turunan pertama terhadap Lagrangian

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\frac{\partial(\partial_\nu q)}{\partial x^\mu} \\
&= \partial_\gamma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma q)}\frac{\partial q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\frac{\partial(\partial_\nu q)}{\partial x^\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma q)}\partial_\mu q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\partial_\mu\partial_\nu q \\
&= \underbrace{\partial_\gamma \left\{\partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma q)}\right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma q)}\partial_\gamma\partial_\mu q}_{\gamma\to\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\partial_\mu\partial_\nu q \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \partial_\nu \left\{\partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\right\} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} &= \partial_\nu \left\{\partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\right\} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}\delta^\nu_\mu &= \partial_\nu \left\{\partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\right\} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}\delta^\nu_\mu &= \partial_\nu \left\{\partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\right\} \\
0 &= \partial_\nu \left\{\partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L}\right\} \equiv \partial_\nu T^\nu_\mu \qquad (1.30)
\end{aligned}$$

maka

$$T^\nu_\mu = \partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L}, \qquad (1.31)$$

Pers.(1.31) adalah tensor energi-momentum.
Untuk Medan Elektromagnetik, rapat Lagrangian adalah

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \qquad (1.32)$$

karena $F = F(\partial_\mu A_\mu) \longrightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\mu)$, maka pers.(1.29) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0 \qquad (1.33)$$

Substitusi pers.(1.32) ke dalam pers.(1.33). Suku pertama pers.(1.33) adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= -\frac{\partial A_\mu J^\mu}{\partial A_\nu} \\
&= -\delta^\nu_\mu J^\mu \\
&= -J^\nu \qquad (1.34)
\end{aligned}$$

untuk suku ke-2:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left\{F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right\} \\
&= -\frac{1}{4}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left\{F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}\right\} \\
&= -\frac{1}{4}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}\left\{\frac{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F_{\rho\sigma} + F_{\alpha\beta}\frac{\partial\left(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho\right)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right\} \\
&= -\frac{1}{4}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}\left\{\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\right)F_{\rho\sigma} + F_{\alpha\beta}\left(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{4}\left\{\left(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - g^{\rho\nu}g^{\sigma\mu}\right)F_{\rho\sigma} + F_{\alpha\beta}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{4}\left\{F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}\right\} \\
&= -\frac{1}{4}\left\{F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\right\} \\
&= -\frac{1}{4}4F^{\mu\nu} \\
&= -F^{\mu\nu} \qquad (1.35)
\end{aligned}
$$

Substitusi pers.(1.34) dan pers.(1.35) ke dalam pers.(1.33) sehingga didapatkan

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \qquad (1.36)$$

Pers.(1.36) adalah persamaan Maxwell. Untuk keadaan tidak ada arus $J^\nu = 0$, maka

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.37)$$

Parameter q untuk medan elektromagnetik adalah A_μ, Tensor energi-momentum pers.(1.31) untuk medan elektromagnetik adalah

$$
\begin{aligned}
T^\nu_\mu &= \partial_\mu A_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L} \\
&= -F^{\nu\lambda}\partial_\mu A_\lambda + \frac{1}{4}\delta^\nu_\mu F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -F^{\nu\lambda}\left(\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu\right) - F^{\nu\lambda}\partial_\lambda A_\mu + \frac{1}{4}\delta^\nu_\mu F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -F^{\nu\lambda}F_{\mu\lambda} - F^{\nu\lambda}\partial_\lambda A_\mu + \frac{1}{4}\delta^\nu_\mu F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -F^{\nu\lambda}F_{\mu\lambda} - \partial_\lambda(F^{\nu\lambda}A_\mu) + \underbrace{A_\mu\partial_\lambda F^{\nu\lambda}}_{=0} + \frac{1}{4}\delta^\nu_\mu F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -F^{\nu\lambda}F_{\mu\lambda} - \partial_\lambda(F^{\nu\lambda}A_\mu) + \frac{1}{4}\delta^\nu_\mu F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \qquad (1.38)
\end{aligned}
$$

Karena $\partial_\nu T^\nu_\mu = 0$, maka suku ke-2:

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) &= \frac{1}{2}\left(\partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) + \underbrace{\partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu)}_{\nu\leftrightarrow\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) + \partial_\lambda \partial_\nu (F^{\lambda\nu} A_\mu)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) - \partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu)\right\} \\
&= 0 \qquad (1.39)
\end{aligned}$$

Sehingga pers.(1.38) menjadi

$$T^\nu_\mu = -F^{\nu\lambda} F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}\delta^\nu_\mu F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \qquad (1.40)$$

Persamaan Medan Einstein

Aksi medan gravitasi pada ruang vakum

$$I_G = \frac{1}{c}\int_\Omega \mathcal{L}_G\left(g_{\mu\nu}, \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,d\Omega \qquad (1.41)$$

Bentuk dari $\mathcal{L}_G$ adalah

$$\mathcal{L}_G = -\frac{c^4}{16\pi G} R \qquad (1.42)$$

Pers.(1.42)disubstitusikan ke pers.(1.41)

$$I_G = -\frac{c^3}{16\pi G}\int_\Omega R\sqrt{-g}\,d\Omega \qquad (1.43)$$

jika dilakukan variasi terhadap I_G di atas, maka

$$\delta I_G = -\frac{c^3}{16\pi G}\int_\Omega \delta\sqrt{-g}R\ d\Omega \qquad (1.44)$$

dengan

$$\begin{aligned}
\delta\left(\sqrt{-g}R\right) &= \delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) \\
&= \left(\delta\sqrt{-g}\right)g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu}\right)R_{\mu\nu} \\
&\quad +\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\delta R_{\mu\nu}\right) \qquad (1.45)
\end{aligned}$$

karena

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \qquad (1.46)$$

maka

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g}\delta g \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(-g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \qquad (1.47)
\end{aligned}$$

Subetitusi pers.(1.47) ke pers.(1.45)

$$\begin{aligned}
\delta\left(\sqrt{-g}R\right) &= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu}\right) R_{\mu\nu} \\
&\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\left(\delta R_{\mu\nu}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} R + \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu}\right) R_{\mu\nu} \\
&\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\left(\delta R_{\mu\nu}\right) \\
&= \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\left(\delta R_{\mu\nu}\right) \\
&\qquad (1.48)
\end{aligned}$$

dengan suku ke-3 adalah

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\rho}\right) \\
&= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu}\right) \\
&\quad + g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} + g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\nu} \\
&\quad - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\rho} - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\rho} \\
&\quad + \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\nu\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\nu\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}_{\text{suku tambahan=0}} \\
&= g^{\mu\nu}\delta\underbrace{\left(\partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu}\right)}_{\rho\to\lambda} \\
&\quad + g^{\mu\nu}\underbrace{\left(\Gamma^\rho_{\nu\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\rho_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)}_{\rho\to\gamma} \\
&\quad + \underbrace{g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}}_{\lambda\to\mu,\mu\to\rho,\rho\to\lambda} + \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\nu}}_{\rho\leftrightarrow\nu} \\
&\quad \underbrace{-g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\rho}}_{\lambda\to\mu,\mu\to\rho,\rho\to\lambda} - \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\nu\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}_{\nu\leftrightarrow\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}-\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\\
&\quad +g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\gamma_{\nu\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}-\Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\\
&\quad +g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}+g^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\\
&\quad -g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}-g^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\\
&= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}-\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\\
&\quad +g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\gamma_{\nu\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}-\Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\\
&\quad -\left(-g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\lambda}-g^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\lambda}\right)\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\\
&\quad +\left(-g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\nu}-g^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\nu}\right)\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Karena turunan kovarian tensor metrik adalah nol

$$\begin{aligned}
D_\lambda g^{\mu\nu} &= \partial_\lambda g^{\mu\nu}+\Gamma^\mu_{\rho\lambda}g^{\rho\nu}+\Gamma^\nu_{\rho\lambda}g^{\mu\rho}=0\\
\partial_\lambda g^{\mu\nu} &= -\Gamma^\mu_{\rho\lambda}g^{\rho\nu}-\Gamma^\nu_{\rho\lambda}g^{\mu\rho}
\end{aligned} \tag{1.50}$$

dan

$$\begin{aligned}
D_\nu g^{\mu\nu} &= \partial_\nu g^{\mu\nu}+\Gamma^\mu_{\rho\nu}g^{\rho\nu}+\Gamma^\nu_{\rho\nu}g^{\mu\rho}=0\\
\partial_\nu g^{\mu\nu} &= -\Gamma^\mu_{\rho\nu}g^{\rho\nu}-\Gamma^\nu_{\rho\nu}g^{\mu\rho}
\end{aligned} \tag{1.51}$$

pers.(1.50) dan pers.(1.51) disubstitusikan ke pers.(1.49)

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)-g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\\
&\quad -\partial_\lambda g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+\partial_\nu g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\\
&\quad +g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\gamma_{\nu\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}-\Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\\
&= g^{\mu\nu}\partial_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)-g^{\mu\nu}\partial_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\\
&\quad -\partial_\lambda g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+\partial_\nu g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\\
&\quad +g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\gamma_{\nu\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}-\Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\\
&= \underbrace{\partial_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)}_{\lambda\leftrightarrow\nu}-\partial_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\\
&\quad +\underbrace{\Gamma^\gamma_{\nu\gamma}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)}_{\lambda\leftrightarrow\nu}-\Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\\
&= \partial_\lambda\left(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}-g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\\
&\quad +\Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\left(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}-g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{1.52}$$

didefinisikan vektor-4

$$\omega^\lambda = g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}-g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{1.53}$$

serta menggunakan nilai simbol Christoffel

$$\Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}=\partial_\lambda\ln\sqrt{-g} \tag{1.54}$$

pers.(1.53) dan pers.(1.54) disubstitusikan ke dalam pers.(1.52) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \partial_\lambda \omega^\lambda + \Gamma^\gamma_{\lambda\gamma}\omega^\lambda \\ &= \partial_\lambda \omega^\lambda + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda \ln\sqrt{-g}\omega^\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\omega^\lambda\right) \end{aligned} \tag{1.55}$$

substitusi pers.(1.55) ke dalam pers.(1.48)

$$\begin{aligned} \delta\left(\sqrt{-g}R\right) &= \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\omega^\lambda\right) \\ &= \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\omega^\lambda\right) \end{aligned} \tag{1.56}$$

Pers.(1.56) disubstitusikan pers.(1.44) sehingga

$$\begin{aligned} \delta I_G &= -\frac{c^3}{16\pi G}\int_\Omega \left\{\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\omega^\lambda\right)}_{=0(\text{teorema } Gauss)}\right\} d\Omega \\ &= -\frac{c^3}{16\pi G}\int_\Omega \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} d\Omega \end{aligned} \tag{1.57}$$

Sedangkan aksi oleh massa sumber adalah

$$\delta I_M = \frac{1}{c}\int_\Omega \partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)d\Omega \tag{1.58}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) &= \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{gg^{\mu\nu}\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(-\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-\sqrt{-g}\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(\frac{1}{2}(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.59}$$

karena

$$T^{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M, \tag{1.60}$$

maka

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) &= \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M + 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\gamma\mu}g^{\lambda\nu}T_{\gamma\lambda}\delta g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\gamma\lambda}g^{\gamma\mu}g^{\lambda\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\gamma\lambda}\delta g^{\gamma\lambda} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.61}$$

pers.(1.61) disubstitusikan ke pers.(1.57) sehingga didapatkan

$$\delta I_M = \frac{1}{2c}\int_\Omega \sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{1.62}$$

Aksi total adalah

$$
\begin{aligned}
I &= I_G + I_M \\
\delta I &= \delta I_G + \delta I_M = 0 \\
\delta I_G = -\delta I_M & \qquad (1.63)
\end{aligned}
$$

dari pers.(1.57) dan pers.(1.62), didapatkan

$$
\begin{aligned}
\delta I_G &= -\delta I_M \\
-\frac{c^3}{16\pi G}\int_\Omega \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} d\Omega &= -\frac{1}{2c}\int_\Omega \sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad (1.64)
\end{aligned}
$$

Pers.(1.64) adalah persamaan medan Einstein. Dalam ungkapan tensor campuran, pers.(1.64) menjadi

$$
R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = \frac{8\pi G}{c^4}T^\mu_\nu \qquad (1.65)
$$

Jika dilakukan $\nu \to \mu$ pada semua suku pers.(1.65) di atas, maka

$$
\begin{aligned}
R^\mu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\mu R &= \frac{8\pi G}{c^4}T^\mu_\mu \\
R - \frac{1}{2}\left(\delta^0_0 + \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3\right)R &= \frac{8\pi G}{c^4}T \\
R - 2R &= \frac{8\pi G}{c^4}T \\
R &= -\frac{8\pi G}{c^4}T \qquad (1.66)
\end{aligned}
$$

Pers.(1.66) disubstitusikan ke dalam pers.(A.98) sehingga didapatkan ungkapan lain dari persamaan medan Einstein

$$
R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \qquad (1.67)
$$

LAMPIRAN B
Solusi Teori Gravitasi Einstein

Solusi Simetri Bola dalam Teori Gravitasi Einstein
Solusi Tak Bermuatan

Metrik dengan adanya sumber massa M pada koordinat bola:

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + V(r)dr^2 + W(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.1}$$

Misal diambil $Wr^2 = \hat{r}^2 \longrightarrow \hat{r} = \sqrt{W}r$ sehingga

$$\frac{d\hat{r}}{dr} = \sqrt{W}\left(1 + \frac{r}{2W}\frac{dW}{dr}\right) \tag{2.2}$$

$$V\ dr^2 = \frac{V}{W}\left(1 + \frac{r}{2W}\frac{dW}{dr}\right)^{-2} d\hat{r}^2 \equiv \hat{V}d\hat{r}^2 \tag{2.3}$$

sehingga $V \equiv \hat{V}$. Dengan cara yang sama maka bisa didapatkan $U \equiv \hat{U}$. Dengan mengganti r menjadi $\hat{r}$, maka elemen garis diatas akan menjadi

$$ds^2 = -\hat{V}(\hat{r})dt^2 + \hat{U}(\hat{r})dr^2 + \hat{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.4}$$

Dengan menghilangkan tanda topi pada persamaan di atas, maka

$$ds^2 = -V(r)dt^2 + U(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.5}$$

serta dipilih fungsi dari U dan V adalah

$$U(r) = e^{2\nu(r)}, \text{dan } V(r) = e^{2\lambda(r)} \tag{2.6}$$

maka elemen garisnya akan menjadi

$$ds^2 = -e^{2\nu}c^2dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + (r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.7}$$

Maka tensor metriknya

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

karena

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} \tag{2.9}$$

Maka bentuk kontravarian dari tensor metrik diatas adalah

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Persamaan untuk mencari simbol Christoffel adalah

$$\Gamma_{\mu,\upsilon\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\upsilon}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\upsilon}} - \frac{\partial g_{\upsilon\rho}}{\partial x^{\mu}}\right) \tag{2.11}$$

Maka untuk tensor metrik diatas, komponen-komponennya adalah

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,00} &= \frac{1}{2}\left(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{0,01} = \Gamma_{0,10} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(-e^{2\nu})}{\partial r}\right) \\
&= -\nu' e^{2\nu} \\
\Gamma_{0,02} &= \Gamma_{0,20} = \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{0,03} = \Gamma_{0,30} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{0,11} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}\right) \\
&= \frac{1}{2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \\
\Gamma_{0,12} = \Gamma_{0,21} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{01} + \partial_1 g_{20} - \partial_0 g_{12}\right) \\
&= \frac{1}{2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0 \\
\Gamma_{0,13} = \Gamma_{0,31} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{01} + \partial_1 g_{30} - \partial_0 g_{13}\right) \\
&= \frac{1}{2}(0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,22} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{02} + \partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{22}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{0,23} = \Gamma_{0,32} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{02} + \partial_2 g_{03} - \partial_0 g_{23}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{0,33} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{03} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,00} &= \frac{1}{2}\left(\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{01} - \partial_1 g_{00}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0 + 0 - \frac{\partial(-e^{2\nu})}{\partial r}\right) \\
&= \nu' e^{2\nu} \\
\Gamma_{1,01} = \Gamma_{1,10} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{10} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{01}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{1,02} = \Gamma_{1,20} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{10} + \partial_0 g_{21} - \partial_1 g_{02}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{1,03} = \Gamma_{1,30} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{10} + \partial_0 g_{31} - \partial_1 g_{03}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,11} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\lambda' e^{2\lambda}\right) \\
&= \lambda' e^{2\lambda} \\
\Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{21} - \partial_1 g_{12}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{1,13} = \Gamma_{1,31} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{31} - \partial_1 g_{13}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{1,22} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0 + 0 - (2r)\right) \\
&= -r \\
\Gamma_{1,23} = \Gamma_{1,32} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{12} + \partial_2 g_{31} - \partial_1 g_{23}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{1,33} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0 + 0 - \left(2r\sin^2\theta\right)\right) \\
&= -r\sin^2\theta \\
\Gamma_{2,00} &= \frac{1}{2}\left(\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0 + 0 - 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{2,01} = \Gamma_{2,10} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{20} + \partial_0 g_{12} - \partial_2 g_{01}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{2,02} = \Gamma_{2,20} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{20} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{02}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0 + 0 - 0\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{21} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{12}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0 + (2r) - 0\right) \\
&= r \\
\Gamma_{2,13} = \Gamma_{2,31} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{21} + \partial_1 g_{32} - \partial_2 g_{13}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{2,22} = \Gamma_{2,21} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{2,23} = \Gamma_{2,32} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{32} - \partial_2 g_{23}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{2,33} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(0 + 0 - \big(r^2. \sin\theta. \cos\theta\big)\Big) \\
&= -r^2. \sin\theta. \cos\theta \\
\Gamma_{3,00} &= \frac{1}{2}\left(\partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{3,01} = \Gamma_{3,10} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{30} + \partial_0 g_{13} - \partial_3 g_{01}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{3,02} = \Gamma_{3,20} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{30} + \partial_0 g_{23} - \partial_3 g_{02}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{3,03} = \Gamma_{3,30} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{30} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{03}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{3,11} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{31} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{3,12} = \Gamma_{3,21} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{31} + \partial_1 g_{23} - \partial_3 g_{12}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{31} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{13}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(0 + \big(2r\sin^2\theta\big) - 0\Big) \\
&= r\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{3,22} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{32} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{32} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{23}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(0 + \big(r^2. \sin\theta\cos\theta\big) - 0\Big) \\
&= r^2\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma_{3,33} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nilai simbol Christoffel Jenis ke-2 dapat dicari dengan menggunakan persamaan berikut:

$$
\Gamma^{\mu}_{\upsilon\rho} = g^{\mu\tau}\Gamma_{\tau,\upsilon\rho} \tag{2.12}
$$

Nilai-nilai tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= g^{00}\Gamma_{0,00} \\
&= 0 \\
\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} &= g^{0\tau}\Gamma_{\tau,01} \\
&= g^{00}\Gamma_{0,01} = -e^{(-2\nu)}.\left(-\nu' e^{(2\nu)}\right) = \nu' \\
&= g^{01}\Gamma_{1,01} = 0 \\
&= g^{02}\Gamma_{2,01} = 0 \\
&= g^{03}\Gamma_{3,01} = 0 \\
\Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{20} &= g^{0\tau}\Gamma_{\tau,20} \\
&= g^{00}\Gamma_{0,20} \\
&= 0 \\
\Gamma^0_{03} = \Gamma^0_{30} &= g^{0\tau}\Gamma_{\tau,30} \\
&= g^{00}\Gamma_{0,30} \\
&= 0 \\
\Gamma^0_{11} &= g^{0\tau}\Gamma_{\tau,11} \\
&= g^{00}\Gamma_{0,11} \\
&= 0 \\
\Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21} &= g^{0\tau}\Gamma_{\tau,12} \\
&= g^{00}\Gamma_{0,12} \\
&= 0 \\
\Gamma^0_{13} = \Gamma^0_{31} &= g^{0\tau}\Gamma_{\tau,13} \\
&= g^{00}\Gamma_{0,13} \\
&= 0 \\
\Gamma^0_{22} &= g^{0\tau}\Gamma_{\tau,22} \\
&= g^{00}\Gamma_{0,22} \\
&= 0 \\
\Gamma^0_{23} = \Gamma^0_{32} &= g^{0\tau}\Gamma_{\tau,23} \\
&= g^{00}\Gamma_{0,23} \\
&= 0 \\
\Gamma^0_{33} &= g^{0\tau}\Gamma_{\tau,33} \\
&= g^{00}\Gamma_{0,33} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{00} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,00} \\
&= g^{11}\Gamma_{1,00} \\
&= e^{(-2\lambda)}.\big(\nu' e^{(2\nu)}\big) \\
&= \nu' e^{(2\nu-2\lambda)} \\
\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,01} \\
&= g^{11}\Gamma_{1,01} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{20} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,02} \\
&= g^{11}\Gamma_{1,02} \\
&= 0 \\
\Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{30} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,03} \\
&= g^{11}\Gamma_{1,03} \\
&= 0 \\
\Gamma^1_{11} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,11} \\
&= g^{11}\Gamma_{1,11} \\
&= e^{(-2\lambda)}.\big(\lambda' e^{(2\lambda)}\big) \\
&= \lambda' \\
\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,12} \\
&= g^{11}\Gamma_{1,12} \\
&= 0 \\
\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,13} \\
&= g^{11}\Gamma_{1,13} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,22} \\
&= g^{11}\Gamma_{1,22} \\
&= e^{(-2\lambda)}.\,(-r) \\
&= -re^{(-2\lambda)} \\
\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,23} \\
&= g^{11}\Gamma_{1,23} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,33} \\
&= g^{11}\Gamma_{1,33} \\
&= e^{(-2\lambda)}.\left(-r\sin^2\theta\right) \\
&= -r\sin^2\theta e^{(-2\lambda)} \\
\Gamma^2_{00} &= g^{1\tau}\Gamma_{\tau,00} \\
&= g^{22}\Gamma_{2,00} \\
&= 0 \\
\Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{10} &= g^{2\tau}\Gamma_{\tau,01} \\
&= g^{22}\Gamma_{2,01} \\
&= 0 \\
\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} &= g^{2\tau}\Gamma_{\tau,02} \\
&= g^{22}\Gamma_{2,02} \\
&= 0 \\
\Gamma^2_{03} = \Gamma^2_{30} &= g^{2\tau}\Gamma_{\tau,03} \\
&= g^{22}\Gamma_{2,03} \\
&= 0 \\
\Gamma^2_{11} &= g^{22}\Gamma_{2,11} \\
&= 0 \\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= g^{2\tau}\Gamma_{\tau,12} \\
&= g^{22}\Gamma_{2,12} \\
&= (r)^{-2}.(r) \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} &= g^{22}\Gamma_{2,13} \\
&= 0 \\
\Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{22} &= g^{22}\Gamma_{2,22} \\
&= 0 \\
\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} &= g^{22}\Gamma_{2,23} \\
&= 0 \\
\Gamma^2_{33} = \Gamma^2_{33} &= g^{22}\Gamma_{2,33} \\
&= (r)^{-2}.\left(-r^2\sin\theta\cos\theta\right) \\
&= -\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{00} &= g^{33}\Gamma_{3,00} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{01} = \Gamma^3_{10} &= g^{33}\Gamma_{3,01} \\
&= 0 \\
\Gamma^3_{02} = \Gamma^3_{20} &= g^{33}\Gamma_{3,02} \\
&= 0 \\
\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{10} &= g^{33}\Gamma_{3,03} \\
&= 0 \\
\Gamma^3_{11} &= g^{33}\Gamma_{3,11} \\
&= 0 \\
\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} &= g^{33}\Gamma_{3,12} \\
&= 0 \\
\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} &= g^{33}\Gamma_{3,13} \\
&= r^{-2}\sin^{-2}\theta.\left(r\sin^2\theta\right) \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} &= g^{33}\Gamma_{3,23} \\
&= r^{-2}\sin^{-2}\theta.\left(r^2\sin\theta.\cos\theta\right) \\
&= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= \cot\theta \\
\Gamma^3_{33} &= g^{33}\Gamma_{3,33} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Dari 64 komponen komponen simbol Christoffel di atas, komponen-komponen yang tidak bernilai 0 adalah:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = \nu' \\
\Gamma^1_{00} &= \nu' e^{(2\nu-2\lambda)} \\
\Gamma^1_{11} &= \lambda' \\
\Gamma^1_{22} &= -re^{-2\lambda} \\
\Gamma^1_{33} &= -r\sin^2\theta\ e^{-2\lambda} \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot\theta
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Tensor Ricci dapat dicari dengan menggunakan pers.(1.26)

$$R_{\tau\upsilon} = \partial\upsilon\Gamma^\gamma_{\tau\gamma} - \partial\gamma\Gamma^\gamma_{\tau\upsilon} + \Gamma^\rho_{\tau\gamma}\Gamma^\gamma_{\rho\upsilon} - \Gamma^\rho_{\tau\upsilon}\Gamma^\gamma_{\rho\gamma} \tag{2.14}$$

Tensor Ricci bersifat simetri ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$), maka hanya memiliki 10 komponen bebas. Untuk komponen $R_{i0}, (i = 1, 2, 3)$:

$$R_{i0} = \partial_0 \Gamma^{\sigma}_{i\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\sigma}_{i0} + \Gamma^{\rho}_{i\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho 0} - \Gamma^{\rho}_{i0}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} \tag{2.15}$$

dengan kondisi statik mensyaratkan bahwa $\partial_0 g_{\mu\nu} \equiv 0$ sehingga $\partial_0 \Gamma^{\sigma}_{i\sigma} \equiv 0$. Tensor Ricci menjadi

$$R_{i0} = -\partial_j \Gamma^{j}_{i0} + \Gamma^{\rho}_{ij}\Gamma^{j}_{\rho 0} - \Gamma^{\rho}_{i0}\Gamma^{j}_{\rho j} \tag{2.16}$$

Dengan menggunakan nilai $\Gamma^{i}_{j0} = 0$, $\Gamma^{\rho}_{0\rho} = 0$ dan $\Gamma^{0}_{ij} = 0$, maka didapatkan

$$R_{i0} = R_{0i} = 0 \tag{2.17}$$

sehingga komponen tensor Ricci yang tersisa adalah komponen dalam arah diagonal ($R_{\tau\tau}$). Nilai dari $R_{\tau\tau}$ ini adalah

$$R_{\tau\tau} = \partial_\tau \Gamma^{\gamma}_{\tau\gamma} - \partial\gamma \Gamma^{\gamma}_{\tau\tau} + \Gamma^{\rho}_{\tau\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\rho\tau} - \Gamma^{\rho}_{\tau\tau}\Gamma^{\gamma}_{\rho\gamma} \tag{2.18}$$

untuk $\tau = 0$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_0 \Gamma^{\gamma}_{0\gamma} - \partial\gamma \Gamma^{\gamma}_{00} + \Gamma^{\rho}_{0\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\rho 0} - \Gamma^{\rho}_{00}\Gamma^{\gamma}_{\rho\gamma} \\
&= 0 - \partial_1 \Gamma^{1}_{00} + \left(\Gamma^{0}_{0\gamma}\Gamma^{\gamma}_{00} + \Gamma^{1}_{0\gamma}\Gamma^{\gamma}_{01}\right) - \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{\gamma}_{1\gamma} \\
&= -\partial_1 \Gamma^{1}_{00} + \left(\Gamma^{0}_{0\gamma}\Gamma^{\gamma}_{00} + \Gamma^{1}_{0\gamma}\Gamma^{\gamma}_{01}\right) - \Gamma^{1}_{00}\left(\nu' + \lambda' + \frac{2}{r}\right) \\
&= -\partial_r \left(\nu' e^{(2\nu - 2\lambda)} + 2\nu'^2 e^{(2\nu-2\lambda)}\right) - \nu' e^{(2\nu-2\lambda)}\left(\nu' + \lambda' + \frac{1}{r}\right) \\
&= -\nu'' e^{(2\nu-2\lambda)} - \nu'\left(2\nu' - 2\lambda'\right) e^{(2\nu-2\lambda)} + 2\nu' e^{(2\nu-2\lambda)} \\
&\quad - \left(\nu' + \lambda' + \frac{2}{r}\right)\nu' e^{(2\nu-2\lambda)} \\
&= \left\{-\nu'' - \nu'.2\nu' + \nu'.2\lambda' + 2\nu'^2 - \nu'^2 + \nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r}\right\} e^{(2\nu-2\lambda)} \\
&= \left\{-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right\} e^{(2\nu-2\lambda)}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

untuk $\tau = 1$

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_1 \Gamma^{\gamma}_{1\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^{\gamma}_{11} + \Gamma^{\rho}_{1\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\rho 1} - \Gamma^{\rho}_{11}\Gamma^{\gamma}_{\rho\gamma} \\
&= \partial_1 \left(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\right) - \left(\partial_0 \Gamma^0_{11} \partial_1 \Gamma^1_{11} + \partial_2 \Gamma^2_{11} + \partial_3 \Gamma^3_{11}\right) \\
&\quad + \left\{\Gamma^0_{1\gamma}\Gamma^{\gamma}_{01} + \Gamma^1_{1\gamma}\Gamma^{\gamma}_{11} + \Gamma^2_{1\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{21} + \Gamma^3_{1\gamma}\Gamma^{\gamma}_{31}\right\} \\
&\quad -\Gamma^1_{11}\left(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\right) - \Gamma^2_{11}\left(\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23}\right) \\
&\quad -\Gamma^3_{11}\left(\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{33}\right) - \Gamma^0_{11}\left(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}\right) \\
&= \partial_1 \left(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\right) - \left(\partial_0 \Gamma^0_{11} \partial_1 \Gamma^1_{11} + \partial_2 \Gamma^2_{11} + \partial_3 \Gamma^3_{11}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{01} + \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{01} + \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{11}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^2_{10}\Gamma^0_{21} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{21}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^3_{10}\Gamma^0_{31} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{31} + \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31}\right) \\
&\quad -\Gamma^1_{11}\left(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{10}\right) - \Gamma^2_{11}\left(\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23}\right) \\
&\quad -\Gamma^3_{11}\left(\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{33}\right) - \Gamma^0_{11}\left(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_1 \left(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\right) - \partial_1 \Gamma^1_{11} \\
&\quad + \left(\Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\right) - \Gamma^1_{11}\left(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{0}\right) \\
&= \left(\nu'' + \lambda'' + \left(-\frac{1}{r^2}\right) + \left(-\frac{1}{r^2}\right)\right) - \lambda'' \\
&\quad + \left[(\nu')^2 + (\lambda')^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right] - \lambda'\left(\nu' + \lambda' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) \\
&= \nu'' + \lambda'' - \frac{2}{r^2} - \lambda'' + (\nu')^2 + (\lambda')^2 + \frac{2}{r^2} - \lambda'\left(\nu' + \lambda' + \frac{2}{r}\right) \\
R_{11} &= \nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

untuk $\tau = 2$

$$
\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_2 \Gamma^{\gamma}_{2\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^{\gamma}_{22} + \Gamma^{\rho}_{2\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\rho 2} - \Gamma^{\rho}_{22}\Gamma^{\gamma}_{\rho\gamma} \\
&= \partial_2 \left(\Gamma^0_{20} + \Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23}\right) - \left(\partial_1 \Gamma^1_{22} + \partial_2 \Gamma^2_{22} + \partial_3 \Gamma^3_{22} + \partial_0 \Gamma^0_{22}\right) \\
&\quad + \left\{\Gamma^0_{2\gamma}\Gamma^{\gamma}_{02} + \Gamma^1_{2\gamma}\Gamma^{\gamma}_{12} + \Gamma^2_{2\gamma}\Gamma^{\gamma}_{22} + \Gamma^3_{2\gamma}\Gamma^{\gamma}_{32}\right\} \\
&\quad - \left\{\Gamma^0_{22}\Gamma^{\gamma}_{0\gamma} + \Gamma^1_{22}\Gamma^{\gamma}_{1\gamma} + \Gamma^2_{22}\Gamma^{\gamma}_{2\gamma} + \Gamma^3_{22}\Gamma^{\gamma}_{3\gamma}\right\} \\
&= \partial_2 \left(\Gamma^0_{20} + \Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23}\right) - \left(\partial_1 \Gamma^1_{22} + \partial_2 \Gamma^2_{22} + \partial_3 \Gamma^3_{22} + \partial_0 \Gamma^0_{22}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^0_{20}\Gamma^0_{02} + \Gamma^0_{21}\Gamma^1_{02} + \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{02}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^1_{20}\Gamma^{0\gamma}_{12} + \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{12}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^2_{20}\Gamma^0_{22} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{22}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^3_{20}\Gamma^0_{23} + \Gamma^3_{21}\Gamma^1_{23} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23}\right) \\
&\quad - \left[\Gamma^1_{22}\left(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{22} &= -\csc^2\theta + e^{(-2\lambda)} - 2r\lambda' e^{(-2\lambda)} - 2e^{(-2\lambda)} \\
&\quad + re^{(-2\lambda)}\left(\nu' + \lambda' + \frac{2}{r}\right) + \cot^2\theta \\
&= \left(1 - 2r\lambda' - 2 + r\nu' + r\lambda' + 2\right)e^{(-2\lambda)} - \csc^2\theta + \cot^2\theta \\
&= \left(1 + r\nu' - r\lambda'\right)e^{(-2\lambda)} - 1 \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

untuk $\tau = 3$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_3 \Gamma^{\gamma}_{3\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^{\gamma}_{33} + \Gamma^{\rho}_{3\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\rho 3} - \Gamma^{\rho}_{33}\Gamma^{\gamma}_{\rho\gamma} \\
&= \partial_3 \left(\Gamma^0_{30} + \Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{33}\right) - \left(\partial_0 \Gamma^0_{33} + \partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33} + \partial_3 \Gamma^3_{33}\right) \\
&\quad + \left\{\Gamma^0_{3\gamma}\Gamma^{\gamma}_{03} + \Gamma^1_{3\gamma}\Gamma^{\gamma}_{13} + \Gamma^2_{3\gamma}\Gamma^{\gamma}_{23} + \Gamma^3_{3\gamma}\Gamma^{\gamma}_{33}\right\} \\
&\quad - \left\{\Gamma^0_{33}\Gamma^{\gamma}_{0\gamma} + \Gamma^1_{33}\Gamma^{\gamma}_{1\gamma} + \Gamma^2_{33}\Gamma^{\gamma}_{2\gamma} + \Gamma^3_{33}\Gamma^{\gamma}_{3\gamma}\right\} \\
&= -\partial_1 \Gamma^1_{33} - \partial_2 \Gamma^2_{33} + \left(\Gamma^0_{30}\Gamma^0_{03} + \Gamma^0_{31}\Gamma^1_{03} + \Gamma^0_{32}\Gamma^2_{03} + \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^1_{30}\Gamma^0_{13} + \Gamma^1_{31}\Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{13} + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^2_{30}\Gamma^0_{23} + \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{23} + \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}\right) \\
&\quad + \left(\Gamma^3_{30}\Gamma^0_{33} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{33}\right) \\
&\quad - \Gamma^1_{33}\left(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\right) \\
&\quad - \Gamma^2_{33}\left(\Gamma^0_{20} + \Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23}\right) \\
&= \sin^2\theta e^{(-2\lambda)} - 2r\lambda' \sin^2\theta e^{(-2\lambda)} - \left(-\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\
&\quad +2\left(-r\sin^2\theta e^{(-2\lambda)}\frac{1}{r}\right) + 2\left(-\sin\theta\cos\theta.\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \\
&\quad - \left(-r\sin^2\theta e^{(-2\lambda)}\left(\nu' + \lambda' + \frac{2}{r}\right)\right) - \left\{-\sin\theta\cos\theta.\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right\} \\
&= \sin^2\theta\left(1 - 2r\lambda' - 2 + r\nu' + r\lambda' + 2\right)e^{(-2\lambda)} \\
&\quad + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\cos^2\theta + \cos^2\theta\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \sin^2\theta\left[\left(1 + r\nu' - r\lambda'\right)e^{(-2\lambda)} - 1\right] \\
&= \sin^2\theta R_{22} \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Untuk kondisi dimana tidak ada materi dan energi (vakum), ($R_{\mu\nu} = 0$), maka pers.(2.19), pers.(2.20), pers.(2.21) menjadi

$$-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2}{r}\nu' = 0 \qquad (2.23)$$

$$\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 - \frac{2}{r}\lambda' = 0 \qquad (2.24)$$

$$\left(1 + r\nu' - r\lambda'\right)e^{(-2\lambda)} = 1 \qquad (2.25)$$

dengan menjumlahkan pers.(**??**) dan pers.(**??**)

$$\frac{-2}{r}\left(\nu' + \lambda'\right) = 0$$

atau

$$\begin{aligned}
\left(\nu' + \lambda'\right) &= 0 \\
\nu + \lambda &= \text{konstan} \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Pada $r \to \infty$, metrik harus kembali pada bentuk Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ sehingga ν dan $\lambda \to 0$.
maka

$$\nu + \lambda = 0 \to \nu = -\lambda \tag{2.27}$$

dengan memasukkan pers.(**??**) ke pers.(**??**)

$$(1 + 2r\nu')\, e^{(2\nu)} = \frac{d}{dr}\left[re^{(2\nu)}\right] = 1 \tag{2.28}$$

dengan mengintegralkan pers.(**??**), maka

$$\int d\left[re^{(2\nu)}\right] = \int dr\ re^{(2\nu)} = r + C \tag{2.29}$$

dengan C merupakan konstanta integrasi. Konstanta ini dihitung dengan pendekatan untuk medan lemah. Lagrangian non-relativistik berbentuk:

$$\begin{aligned} L &= -mc^2 - m\phi + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= -mc\left(c + \frac{\phi}{c} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c}\right) \\ &= -mc\left(c + \frac{\phi}{c} - \frac{1}{2}g_{ij}\frac{v^i}{c}v^j\right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

Pada koordinat kartesian, $g_{ij} = -\delta_{ij}$ sehingga pers.(2.30) menjadi:

$$L = -mc\left(c + \frac{\phi}{c} + \frac{1}{2}g_{ij}\frac{v^i}{c}v^j\right) \tag{2.31}$$

Integral aksi adalah

$$\begin{aligned} I &= \int Ldt \\ &= -mc\int\left(c + \frac{\phi}{c} + \frac{1}{2}g_{ij}\frac{v^i}{c}v^j\right)dt \\ &= -mc\int\left(\left(c + \frac{\phi}{c}\right) + \frac{1}{2}g_{ij}\frac{v^i}{c}\frac{dx^j}{dt}\right)dt \\ &= -mc\int\left(\left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)cdt + \frac{1}{2}g_{ij}\frac{v^i}{c}dx^j\right) \\ &= -mc\int ds \end{aligned} \tag{2.32}$$

maka

$$ds = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)cdt + \frac{1}{2}g_{ij}\frac{v^i}{c}dx^j \tag{2.33}$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)^2 c^2dt^2 + \left(1+\frac{\phi}{c^2}\right) g_{ij}\frac{v^i}{c}dx^jcdt + \underbrace{\frac{1}{4}\left(g_{ij}\frac{v^i}{c}dx^j\right)^2}_{\approx 0} \\
&\approx \left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)^2 c^2dt^2 + \left(1+\frac{\phi}{c^2}\right) g_{ij}dx^idx^j
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

dengan:

$$
\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)^2 = 1+\frac{2\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{c^4} \approx 1+\frac{2\phi}{c^2} \tag{2.35}
$$

serta

$$
\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right) g_{ij}dx^idx^j \approx g_{ij}dx^idx^j \tag{2.36}
$$

sehingga

$$
ds^2 \approx \underbrace{\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)}_{g_{00}} c^2dt^2 + g_{ij}dx^idx^j \tag{2.37}
$$

dibandingkan solusi Schawrszchild

$$
g_{00} = 1+\frac{C}{r} \tag{2.38}
$$

maka:

$$
\begin{aligned}
1+\frac{C}{r} &= 1+\frac{2\phi}{c^2} \\
C &= \phi\frac{2r}{c^2} \\
C &= -\frac{GM}{r}\frac{2r}{c^2} \\
C &= -\frac{2GM}{c^2} \\
C &\equiv -2m
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

dengan $m \equiv \frac{GM}{c^2}$. Maka elemen garisnya akan menjadi:

$$
ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2(dt)^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2d\Omega^2 \tag{2.40}
$$

Persamaan tersebut merupakan metrik Schwarzschild.

Solusi Bermuatan

Sama seperti pada kasus Schwarzschild, untuk benda bermassa M dan bermuatan Q. Persamaan medan Einstein (1.67)

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{2.41}$$

Dengan masing-masing komponen Tensor Ricci sama seperti solusi Schwarzschild

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right) e^(2\nu - 2\lambda) \tag{2.42}$$

$$R_{11} = \nu'' + (\nu')^2 - \nu'\lambda' - \nu'\lambda' - \frac{2\lambda'}{r} \tag{2.43}$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')\, e^{2\lambda} - 1 \tag{2.44}$$

Tetapi komponen tensor enegi-momentumnya tidak nol

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \tag{2.45}$$

Tensor kuat medan $F_{\mu\nu}$ bersifat anti-simetri dengan

$$\partial_{[\rho}F_{\mu\nu]} = 0 \tag{2.46}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3!}\left(\partial_\rho F_{\mu\nu} - \partial_\rho F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} - \partial_\nu F_{\mu\rho} + \partial_\mu F_{\nu\rho} - \partial_\mu F_{\rho\nu}\right) &= 0 \\
\left(\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\mu F_{\nu\rho}\right) &= 0 \\
\left(2\partial_\rho F_{\mu\nu} + 2\partial_\nu F_{\rho\mu} + 2\partial_\mu F_{\nu\rho}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

maka

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 \tag{2.48}$$

untuk $\rho = 0$, maka pers.(2.48) menjadi

$$\begin{aligned}
\partial_0 F_{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\nu F_{0\mu} + \partial_\mu F_{\nu 0}}_{\mu\leftrightarrow\nu} &= 0 \\
\partial_0 F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{0\mu} + \partial_\nu F_{\mu 0} &= 0 \\
\partial_0 F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{0\mu} - \partial_\nu F_{0\mu} &= 0 \\
\partial_0 F_{\mu\nu} &= 0
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Karena medan listrik di luar benda bermuatan total q hanya dalam arah radial

$$E = E(r) \equiv f(r) \tag{2.50}$$

maka hanya komponen F_{01} dan F_{10} yang tidak bernilai nol yaitu

$$F_{01} = f(r) = -F_{10} \tag{2.51}$$

Sehingga tensor kuat medan $F_{\mu\nu}$ adalah

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

Untuk bentuk tensor campuran adalah

$$\begin{aligned} F^{\rho}_{\nu} &= g^{\rho\mu} F_{\mu\nu} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r^2 sin^{2\theta})^{-1} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & f & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$F^{\rho}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -fe^{-2\nu} & 0 & 0 \\ -fe^{-2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

dan bentuk tensor kontravariannya adalah

$$\begin{aligned} F^{\rho\lambda} &= g^{\lambda\nu} F^{\rho}_{\nu} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r^2 sin^{2\theta})^{-1} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & -fe^{-2\nu} & 0 & 0 \\ -fe^{-2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & fe^{-4\nu} & 0 & 0 \\ -fe^{-4\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.55}$$

Dari pers.(2.48), maka nilai komponen diagonal dari tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$ adalah

$$\begin{aligned}
T_{00} &= -F_{0\rho}F_0^{\rho} + \frac{1}{4}g_{00}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \\
&= -F_{00}F_0^0 - F_{01}F_0^1 + \frac{1}{4}g_{00}(F_{0\sigma}F^{0\sigma} + F_{1\sigma}F^{1\sigma}) \\
&= 0 - F_{01}F_0^1 + \frac{1}{4}g_{00}(F_{01}F^{01} + F_{01}F^{11}) \\
&= 0 - F_{01}F_0^1 + \frac{1}{4}g_{00}2F_{01}F^{01} \\
&= 0 - F_{01}F_0^1 + \frac{1}{2}(-e^{2\nu})F_{01}F^{01} \\
&= 0 - f(-fe^{-4\lambda}) - \frac{1}{2}(e^{2\nu})(fe^{-4\nu}.fe^{-2\lambda}) \\
&= 0 - f(-fe^{-4\lambda}) - \frac{1}{2}f^2(e^{-2\nu-2\lambda}) \\
&= f^2e^{-4\lambda} - \frac{1}{2}f^2(e^{-2\nu-2\lambda}) \qquad (2.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= -F_{1\rho}F_1^{\rho} + \frac{1}{4}g_{11}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= -F_{10}F_1^0 - F_{1k}F_1^k + \frac{1}{4}g_{11}(F_{0\sigma}F^{0\sigma} + F_{1\sigma}F^{1\sigma}) \\
&= -F_{10}F_1^0 + \frac{1}{4}g_{11}(F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10}) \\
&= -F_{10}F_1^0 + \frac{1}{2}g_{11}F_{01}F^{01} \\
&= -(-f)(-fe^{-2\nu}) + \frac{1}{2}e^{2\lambda}f.fe^{-4\nu} \\
&= -f^2e^{-2\nu} + \frac{1}{2}f^2e^{2\lambda-4\nu} \\
&= -f^2e^{-2\nu}(1 + \frac{1}{2}e^{2\lambda-2\nu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{22} &= -F_{2\rho}F_2^{\rho} + \frac{1}{4}g_{22}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{4}g_{22}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{4}g_{22}(F_{0\sigma}F^{0\sigma} + F_{k\sigma}F^{k\sigma})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_{22} &= \frac{1}{4}g_{22}(F_{01}F^{01}+F_{10}F^{10}) \\
&= \frac{1}{4}g_{22}(f^2e^{-4\nu}+f^2e^{-4\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}r^2f^2e^{-4(\nu+\lambda)} \\
&= \frac{1}{2}r^2f^2e^{-4(\nu-\nu)} \\
&= \frac{1}{2}r^2f^2
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{33} &= -F_{3\rho}F_3^\rho+\frac{1}{4}g_{33}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{4}g_{33}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{4}g_{33}(F_{0\sigma}F^{0\sigma}+F_{k\sigma}F^{k\sigma}) \\
&= \frac{1}{4}g_{33}(F_{01}F^{01}+F_{10}F^{10}) \\
&= \frac{1}{2}g_{33}F_{01}F^{01} \\
&= \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta.f.fe^{-4\nu} \\
&= \frac{1}{2}r^2f^2e^{-4\nu}.\sin^2\theta \\
&= T_{22}\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

dari persamaan medan Einstein

$$R_{\mu\nu}=8\pi G\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{2.59}$$

dengan

$$
\begin{aligned}
T &= g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \\
&= g^{\mu\nu}(-F_{\mu\rho}F_\nu^\rho+\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) \\
&= -F_{\mu\rho}g^{\mu\nu}F_\nu^\rho+\frac{1}{4}\underbrace{\delta_\nu^\nu}_{=4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= \underbrace{-F_{\mu\rho}F^{\mu\rho}}_{\mu\to\rho,\rho\to\sigma}+F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= -F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}+F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.60}
$$

sehingga

$$R_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu} \tag{2.61}$$

dengan komponen diagonal masing-masing adalah untuk komponen-00 dan komponen-11

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= 8\pi G T_{00} \\
\left(-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right) &= 8\pi G f^2 \left(e^{-2\lambda} - \frac{1}{2}e^{-2\nu}\right)
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= 8\pi G T_{11} \\
\left(-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}\right) &= 8\pi G \left(-f^2 e^{-2\nu}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-2\nu+2\lambda}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

pers.(2.62) dikalikan $e^{2\lambda}$ menjadi

$$
\left(-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right) e^{2\lambda} = 8\pi G f^2 \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2\nu+2\lambda}\right)
\tag{2.64}
$$

pers.(2.63) dikalikan $e^{2\nu}$ menjadi

$$
\left(-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}\right) e^{2\nu} = -8\pi G - f^2 \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2\nu+2\lambda}\right)
\tag{2.65}
$$

pers.(2.64) dijumlahkan dengan pers.(2.65), sehingga

$$
\begin{aligned}
-\frac{2\nu'}{r} - \frac{2\lambda'}{r} &= 0 \\
-\nu' - \lambda' &= 0 \\
-\nu - \lambda &= \text{konstan}
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

Pada $r \to \infty$, metrik kembali ke bentuk Minkowski sehingga $e^{2\nu} \to 1$ dan $e^{2\lambda} \to 1$, maka $\nu = 0$ dan $\lambda = 0$, sehingga

$$
\begin{aligned}
\nu + \lambda &= 0 \\
\nu &= -\lambda
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

Bentuk eksplisit dari f pada pers.(2.52) dapat dicari dengan menggunakan pers.(2.50) yaitu di sekitar muatan q, besar medan listriknya adalah

$$
f(r) = E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}
\tag{2.68}
$$

Solusi Simetri Aksial

Untuk mempersingkat penulisan, diambil konstanta c=1.
Dari metrik Reissner-Nordstrom:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (2.69)$$

untuk menghilangkan singularitas di $r = 2m$, maka diperkenalkan koordinat waktu yang baru yaitu $cu = ct - r^*$ sehingga

$$\begin{aligned} t &= u + r^* \\ dt^2 &= du^2 + 2du\ dr^* + dr^{*2} \end{aligned} \qquad (2.70)$$

r^* adalah tortoise koordinat yang memenuhi hubungan

$$dr = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dr^* \qquad (2.71)$$

kemudian pers. dan pers. dimasukkan ke dalam pers.1 sehingga

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 \\ &\quad + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^2 dr^{*2} + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 \\ &\quad + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dr{*}2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(dt^2 - dr{*}2\right) + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(du^2 + 2du\ dr^* + dr^{*2} - dr{*}2\right) + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(du^2 + 2du\ dr^*\right) + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) 2du^2 \\ &\quad -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) 2du \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) du^2 - 2du\ dr + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \qquad (2.72)$$

sehingga tensor metrik dari metrik di atas adalah:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (2.73)$$

bentuk kontravarian dari tensor metrik di atas dapat dicari dengan cara:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= 1 \\ g^{-1}_{\mu\nu}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= g^{-1}_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} &= g^{-1}_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} &= \frac{1}{|g_{\mu\nu}|}\text{Adj}\{g_{\mu\nu}\} \end{aligned} \tag{2.74}$$

dengan $|g_{\mu\nu}|$ adalah:

$$\begin{aligned} |g_{\mu\nu}| &= \begin{vmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} \\ &= -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} \\ & \quad -(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} \\ &= 0+1\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} \\ &= -1\begin{vmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} \\ &= -r^4\sin^2\theta \end{aligned} \tag{2.75}$$

Serta $\text{Adj}\{g_{\mu\nu}\}$ adalah sebagai berikut:
Untuk komponen-00, maka:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = 0$$

Untuk komponen-01 = 10:

$$\begin{aligned} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} &= -1(-1)\begin{vmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} \\ &= r^4\sin^2\theta \end{aligned}$$

Untuk komponen-02 = 20:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = 0$$

Untuk komponen-03 = 30:

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Untuk komponen-11:

$$\begin{vmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) r^4 \sin^2\theta$$

Untuk komponen-12 = 21:

$$-\begin{vmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = 0$$

Untuk komponen-13 = 31:

$$\begin{vmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Untuk komponen-22:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} &= -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} \\ &\quad -(-1)\begin{vmatrix} -c & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} \\ &= -r^2\sin^2\theta \end{aligned} \tag{2.76}$$

Untuk komponen-23 = 32:

$$-\begin{vmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Untuk komponen-33:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{vmatrix} \\ &= -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} \\ &\quad -(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & r^\theta \end{vmatrix} \\ &= -r^2 \end{aligned}$$

Sehingga tensor metrik kontravarian $g^{\mu\nu}$ menjadi:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} &= \frac{1}{|g_{\mu\nu}|}\text{Adj}\{g^{\mu\nu}\} \\
&= \frac{1}{-r^4\sin^2\theta} \\
&\quad \begin{pmatrix} 0 & r^4\sin^2\theta & 0 & 0 \\ r^4\sin^2\theta & \left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)r^4\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \qquad (2.77)
\end{aligned}$$

karena elemen garis dalam pernyataan tensor metrik adalah

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\
&= -l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu + m_\mu \bar{m}_\nu + m_\nu \bar{m}_\mu
\end{aligned}$$

kemudian dilakukan $\nu \leftrightarrow \mu$ pada suku ke-2 dan ke-4 sehingga:

$$ds^2 = -2l_\mu n_\nu + 2m_\mu \bar{m}_\nu \qquad (2.78)$$

Kemudian dipilih suku-suku vektor-4 null dari metrik Reissner Nordstrom diatas. Pemilihan ini bebas asalkan memenuhi sifat-sifat vektor-4 null yang telah didefinisikan. Dari metrik Reissner-Nordstrom:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)du^2 - 2du\ dr + r^2 d\Omega^2 \\
&= -\left[\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)du + 2dr\right]du \\
&\quad + r\left(d\theta + i\ \sin\theta\ d\phi\right) r\left(d\theta - i\ \sin\theta\ d\phi\right) \qquad (2.79)
\end{aligned}$$

sehingga pemilihan komponen vektor-4 null adalah:

$$l_\mu dx^\mu = du \qquad (2.80)$$

sehingga $l_\mu = (1,0,0,0)$.
Kemudian untuk komponen n_μ:

$$\begin{aligned}
-2n_\mu dx^\mu &= -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)du + 2dr \\
n_\mu dx^\mu &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)du + dr \qquad (2.81)
\end{aligned}$$

sehingga $n_\mu = \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right), 1, 0, 0\right)$.
Untuk komponen m_μ:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}m_\mu dx^\mu &= r\left(d\theta + i\ \sin\theta\ d\phi\right)\\ &= \frac{r}{\sqrt{2}}\left(d\theta + i\ \sin\theta\ d\phi\right)\end{aligned} \tag{2.82}$$

Sehingga $m_\mu = (0, 0, 1, i\ \sin\theta)$.
$\bar{m}_\mu$ adalah kompleks konjugat dari m_μ sehingga $\bar{m}_\mu = (0, 0, 1, -i\ \sin\theta)$.

Maka kompenen-komponen vektor-4 null yang telah dipilih adalah:

$$\begin{aligned}l_\mu &= (1, 0, 0, 0)\\ n_\mu &= \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right), 1, 0, 0\right)\\ m_\mu &= (0, 0, 1, i\ \sin\theta)\\ \bar{m}_\mu &= (0, 0, 1, -i\ \sin\theta)\end{aligned} \tag{2.83}$$

bentuk kontravarian dari masing-masing komponen vektor-4 null di atas dapat dicari menggunakan tensor metrik kontravarian:

$$Z^\mu = g^{\mu\nu} Z_\nu \tag{2.84}$$

sehingga

$$l^\mu = g^{\mu\nu} l_\nu \tag{2.85}$$

nilai untuk masing-masing $\mu = (0, 1, 2, 3)$ adalah:
untuk $\mu = 0$

$$\begin{aligned}l^0 &= g^{0\nu} l_\nu\\ &= g^{00}l_0 + g^{01}l_1 + g^{02}l_2 + g^{03}l_3\\ &= 0\end{aligned}$$

untuk $\mu = 1$

$$\begin{aligned}l^1 &= g^{1\nu} l_\nu\\ &= g^{10}l_0 + g^{11}l_1 + g^{12}l_2 + g^{13}l_3\\ &= -1 + 0 + 0 + 0\\ &= 1\end{aligned}$$

untuk $\mu = 2$

$$\begin{aligned}l^2 &= g^{2\nu} l_\nu\\ &= g^{20}l_0 + g^{21}l_1 + g^{22}l_2 + g^{23}l_3\\ &= 0\end{aligned}$$

untuk $\mu = 3$

$$\begin{aligned} l^3 &= g^{3\nu} l_\nu \\ &= g^{30} l_0 + g^{31} l_1 + g^{32} l_2 + g^{33} l_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan:

$$l^\mu = (0, -1, 0, 0) \tag{2.86}$$

Kemudian untuk n^μ dengan masing-masing $\mu = (0, 1, 2, 3)$ adalah:

$$n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu \tag{2.87}$$

untuk $\mu = 0$

$$\begin{aligned} n^0 &= g^{0\nu} n_\nu \\ &= g^{00} n_0 + g^{01} n_1 + g^{02} n_2 + g^{03} n_3 \\ &= 0 + (-1).1 + 0 + 0 \\ &= -1 \end{aligned} \tag{2.88}$$

untuk $\mu = 1$

$$\begin{aligned} n^1 &= g^{1\nu} n_\nu \\ &= g^{10} n_0 + g^{11} n_1 + g^{12} n_2 + g^{13} n_3 \\ &= (-1)\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right).1 + 0 + 0 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \end{aligned} \tag{2.89}$$

untuk $\mu = 2$

$$\begin{aligned} n^2 &= g^{2\nu} n_\nu \\ &= g^{20} n_0 + g^{21} n_1 + g^{22} n_2 + g^{23} n_3 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.90}$$

untuk $\mu = 3$

$$\begin{aligned} n^3 &= g^{3\nu} n_\nu \\ &= g^{30} n_0 + g^{31} n_1 + g^{32} n_2 + g^{33} n_3 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.91}$$

untuk $\mu = 4$

$$\begin{aligned} n^4 &= g^{4\nu} n_\nu \\ &= g^{40} n_0 + g^{41} n_1 + g^{42} n_2 + g^{43} n_3 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (2.92)$$

sehingga didapatkan:

$$n^\mu = \left(-1, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right), 0, 0\right) \qquad (2.93)$$

Kemudian untuk m^μ dengan masing-masing $\mu = (0, 1, 2, 3)$ adalah:

$$m^\mu = g^{\mu\nu} m_\nu \qquad (2.94)$$

untuk $\mu = 0$

$$\begin{aligned} m^0 &= g^{0\nu} m_\nu \\ &= g^{00} m_0 + g^{01} m_1 + g^{02} m_2 + g^{03} m_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

untuk $\mu = 1$

$$\begin{aligned} m^1 &= g^{1\nu} m_\nu \\ &= g^{10} m_0 + g^{11} m_1 + g^{12} m_2 + g^{13} m_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

untuk $\mu = 2$

$$\begin{aligned} m^2 &= g^{2\nu} m_\nu \\ &= g^{20} m_0 + g^{21} m_1 + g^{22} m_2 + g^{23} m_3 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{r^2} \frac{r}{\sqrt{2}} + 0 \\ &= \frac{1}{r\sqrt{2}} \end{aligned}$$

untuk $\mu = 3$

$$\begin{aligned} m^3 &= g^{3\nu} m_\nu \\ &= g^{30} m_0 + g^{31} m_1 + g^{32} m_2 + g^{33} m_3 \\ &= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{ir\ \sin\theta}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{i}{r\sqrt{2}\sin\theta} \end{aligned}$$

sehingga didapatkan:

$$m^\mu = \frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,1,\frac{i}{\sin\theta}) \tag{2.95}$$

$\bar{m}$ adalah kompleks ku=onjugat dari m sehingga:

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,1,-\frac{i}{\sin\theta}) \tag{2.96}$$

Maka bentuk kontravarian dari komponen vektor-4 null adalah

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0,-1,0,0) \\ n^\mu &= (-1,\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right),0,0) \\ m^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,1,\frac{i}{\sin\theta}) \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,1,\frac{i}{\sin\theta}) \end{aligned} \tag{2.97}$$

atau

$$\begin{aligned} l^\mu\partial_\mu &= -\partial_r \\ n^\mu\partial_\mu &= -\partial_u+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\partial_r \\ m^\mu\partial_\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\partial_\theta+\frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi\right) \\ m^\mu\partial_\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\partial_\theta-\frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi\right) \end{aligned} \tag{2.98}$$

Kemudian nilai r dijadikan dalam bentuk kompleks sehingga:

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0,-1,0,0) \\ n^\mu &= (-1,\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{r}-\frac{m}{\bar{r}}+\frac{Q^2}{r\bar{r}}\right),0,0) \\ m^\mu &= \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}}(0,0,1,\frac{i}{\sin\theta}) \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,1,\frac{i}{\sin\theta}) \end{aligned} \tag{2.99}$$

atau

$$
\begin{aligned}
l^\mu \partial_\mu &= -\partial_r \\
n^\mu \partial_\mu &= -\partial_u + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{r} - \frac{m}{\bar{r}} + \frac{Q^2}{r\bar{r}}\right)\partial_r \\
m^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}}\left(\partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi\right) \\
\bar{m}^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi\right)
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

setelah itu dilakukan transformasi

$$
x^\rho \to x'^\rho = x^\rho + ia\cos\theta(\delta_0^\rho - \delta_1^\rho) \tag{2.101}
$$

dengan a adalah suatu konstanta yang akan ditentukan kemudian sehingga:

$$
\begin{aligned}
u \to u' &= u + ia\ \cos\theta \\
r \to r' &= r - ia\ \cos\theta \\
\theta \to \theta' &= \theta \\
\phi \to \phi' &= \phi
\end{aligned}
\tag{2.102}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
u &= u' - ia\ \cos\theta = u' - ia\ \cos\theta' \\
r &= r' + ia\ \cos\theta = r' + ia\ \cos\theta'
\end{aligned}
\tag{2.103}
$$

dengan v', r', θ', ϕ' adalah kuantitas riil. Vektor-vektor basis bertransformasi dengan menggunakan aturan rantai:

$$
\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}
$$

atau dapat dituliskan :

$$
\partial_\mu \to \partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu \tag{2.104}
$$

sehingga untuk masing-masing $\mu = (0, 1, 2, 3)$ didapatkan:

$$
\begin{aligned}
\partial_0 \to \partial_{0'} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^0}\partial_\nu \\
\partial_{u'} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial u'}\partial_\nu \\
&= \frac{\partial u}{\partial u'}\partial_u + \frac{\partial r}{\partial u'}\partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial u'}\partial_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial u'}\partial_\phi \\
&= \partial_u
\end{aligned}
\tag{2.105}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_1 \to \partial_{1'} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^1}\partial_\nu \\
\partial_{r'} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial r'}\partial_\nu \\
&= \frac{\partial u}{\partial r'}\partial_u + \frac{\partial r}{\partial r'}\partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial r'}\partial_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial r'}\partial_\phi \\
&= \partial_r
\end{aligned}
\tag{2.106}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_2 \to \partial_{2'} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^2}\partial_\nu \\
\partial_{\theta'} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial \theta'}\partial_\nu \\
&= \frac{\partial u}{\partial \theta'}\partial_u + \frac{\partial r}{\partial \theta'}\partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial \theta'}\partial_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta'}\partial_\phi \\
&= ia\ \sin\theta'\ \partial_u - ia\ \sin\theta'\ \partial_r + \partial_\theta
\end{aligned}
\tag{2.107}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_3 \to \partial_{3'} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^3}\partial_\nu \\
\partial_{\phi'} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial \phi'}\partial_\nu \\
&= \frac{\partial u}{\partial \phi'}\partial_u + \frac{\partial r}{\partial \phi'}\partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial \phi'}\partial_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial \phi'}\partial_\phi \\
&= \partial_\phi
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

Maka komponen-komponen vektor-4 null menjadi:

$$
l^\mu\partial_\mu = -\partial_r \to l'^\mu\partial_{\mu'} = -\partial_{r'} = -\partial_r \tag{2.109}
$$

$$
\begin{aligned}
n^\mu\partial_\mu \to n'^\mu\partial_{\mu'} &= -\partial_{u'} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{r'} - \frac{m}{\bar{r'}} + \frac{Q^2}{r'\bar{r'}}\right)\partial_{r'} \\
&= -\partial_u + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{r' + ia\ \cos\theta'} - \frac{m}{r' - ia\ \cos\theta'}\right)\partial_r \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{(r' + ia\ \cos\theta')(r' - ia\ \cos\theta')}\right)\partial_{r'} \\
&= -\partial_u + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2mr' - Q^2}{r'^2 + a^2\cos^2\theta'}\right)\partial_r
\end{aligned}
\tag{2.110}
$$

$$
\begin{aligned}
m^{\mu}\partial_{\mu} \rightarrow m'^{\mu}\partial_{\mu'} &= \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}}\left(\partial_{\theta'} + \frac{i}{\sin\theta}\partial_{\phi'}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia\ \cos\theta')}\left(ia\ \sin\theta'\partial_{v'} - ia\ \sin\theta'\partial_{r'} + \partial_{\theta'} + \frac{i}{\sin\theta'}\partial_{\phi'}\right)
\end{aligned} \tag{2.111}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{m}^{\mu}\partial_{\mu} \rightarrow \bar{m'}^{\mu}\partial_{\mu'} &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\partial_{\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\partial_{\phi}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia\ \cos\theta')}(-ia\ \sin\theta'\partial_{v'} + ia\ \sin\theta'\partial_{r'} \\
&\quad +\partial_{\theta'} - \frac{i}{\sin\theta'}\partial_{\phi'})
\end{aligned}
$$

dengan menghilangkan tanda $'$ pada persamaan-persamaan di atas, maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
l^{\mu}\partial_{\mu} &= -\partial_r \\
n^{\mu}\partial_{\mu} &= -\partial_u + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2mr - Q^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\partial_r \\
m^{\mu}\partial_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)}\left(ia\ \sin\theta\partial_v - ia\ \sin\theta\partial_r + \partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi\right) \\
\bar{m}^{\mu}\partial_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)}\left(-ia\ \sin\theta\partial_v + ia\ \sin\theta\partial_r + \partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi\right)
\end{aligned} \tag{2.112}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
l^{\mu} &= (0, -1, 0, 0) \\
n^{\mu} &= (-1, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2mr - Q^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right), 0, 0) \\
m^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)}\left(ia\ \sin\theta, -ia\ \sin\theta, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right) \\
\bar{m}^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)}\left(-ia\ \sin\theta, ia\ \sin\theta, 1, -\frac{i}{\sin\theta}\right)
\end{aligned} \tag{2.113}
$$

Selanjutnya komponen-komponen tensor metrik kontravarian $g^{\mu\nu}$ dapat dibentuk yaitu:

$$
g^{\mu\nu} = -l^{\mu}n^{\nu} - l^{\mu}n^{\nu} + m^{\mu}\bar{m}^{\nu} + m^{\nu}\bar{m}^{\mu} \tag{2.114}
$$

masing-masing komponen tersebut adalah

$$\begin{aligned}
g^{00} &= -l^0 n^0 - l^0 n^0 + m^0 \bar{m}^0 + m^0 \bar{m}^0 \\
&= -2l^0 n^0 + 2m^0 \bar{m}^0 \\
&= 0 + 2\frac{ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)} . \frac{-ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)} \\
&= \frac{a^2\ \sin^2\theta}{(r^2 + a^2\ \cos^2\theta)} \\
&= \frac{a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2} \qquad (2.115)
\end{aligned}$$

dengan

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta \qquad (2.116)$$

$$\begin{aligned}
g^{01} &= g^{10} \\
&= -l^0 n^1 - l^1 n^0 + m^0 \bar{m}^1 + m^1 \bar{m}^0 \\
&= 0 - (-1).(-1) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)}(ia\ \sin\theta) . \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)}(ia\ \sin\theta) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)}(-ia\ \sin\theta) . \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)}(-ia\ \sin\theta) \\
&= -\left(1 + \frac{a^2 \sin^2\theta}{r^2 + a^2 \cos^2\theta}\right) \\
&= -\left(\frac{r^2 + a^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta}{r^2 + a^2 \cos^2\theta}\right) \\
&= -\left(\frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2\theta}\right) \\
&= -\left(\frac{r^2 + a^2}{\rho^2}\right) \qquad (2.117)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{02} &= g^{20} \\
&= -l^0 n^2 - l^2 n^0 + m^0 \bar{m}^2 + m^2 \bar{m}^0 \\
&= 0 + \frac{ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)} . \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)} . \frac{-ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)} \\
&= 0 \qquad (2.118)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g^{03} &= g^{30} \\
&= -l^0 n^3 - l^3 n^0 + m^0 \bar{m}^3 + m^3 \bar{m}^0 \\
&= 0 + \frac{ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)} . \frac{-i}{\sqrt{2}\sin\theta(r + ia\ \cos\theta)} \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}\sin\theta(r - ia\ \cos\theta)} . \frac{-ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)} \\
&= \frac{a}{r^2 + a^2\cos^2\theta} \\
&= \frac{a}{\rho^2}
\end{aligned} \tag{2.119}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{11} &= -l^1 n^1 - l^1 n^1 + m^1 \bar{m}^1 + m^1 \bar{m}^1 \\
&= -2 l^1 n^1 + 2 m^1 \bar{m}^1 + \\
&= -2.(-1).\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2mr - Q^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) \\
&\quad + 2.\frac{-ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)} . \frac{ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)} \\
&= 1 - \frac{2mr - Q^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta} + \frac{a^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} \\
&= 1 - \frac{2mr - Q^2}{\rho^2} + \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} \\
&= \frac{\rho^2 - 2mr + Q^2 + a^2\sin^2\theta}{\rho^2} \\
&= \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta - 2mr + Q^2 + a^2\sin^2\theta}{\rho^2} \\
&= \frac{r^2 + a^2 - 2mr + Q^2}{\rho^2}
\end{aligned} \tag{2.120}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{12} &= g^{21} \\
&= -l^1 n^2 - l^2 n^1 + m^1 \bar{m}^2 + m^2 \bar{m}^1 \\
&= 0 + \frac{-ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)} . \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta(r + ia\ \cos\theta)} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta(r - ia\ \cos\theta)} . \frac{ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.121}
$$

$$\begin{aligned}
g^{13} &= g^{31} \\
&= -l^1n^3 - l^3n^1 + m^1\bar{m}^3 + m^3\bar{m}^1 \\
&= 0 + \frac{-ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)}.\frac{-i}{\sqrt{2}\sin\theta(r + ia\ \cos\theta)} \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}\sin\theta(r - ia\ \cos\theta)}.\frac{ia\ \sin\theta}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)} \\
&= -\frac{a}{r^2 + a^2\cos^2\theta} \\
&= -\frac{a}{\rho^2}
\end{aligned} \tag{2.122}$$

$$\begin{aligned}
g^{22} &= -l^2n^2 - l^2n^2 + m^2\bar{m}^2 + m^2\bar{m}^2 \\
&= -2l^2n^2 + 2m^2\bar{m}^2 \\
&= 0 + 2\frac{1}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)}.\frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta(r + ia\ \cos\theta)} \\
&= \frac{1}{r^2 + a^2\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{\rho^2}
\end{aligned} \tag{2.123}$$

$$\begin{aligned}
g^{23} &= g^{32} \\
&= -l^2n^3 - l^3n^2 + m^2\bar{m}^3 + m^3\bar{m}^2 \\
&= 0 + \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia\ \cos\theta)}.\frac{-i}{\sqrt{2}\sin\theta(r + ia\ \cos\theta)} \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}\sin\theta(r - ia\ \cos\theta)}.\frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\ \cos\theta)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.124}$$

$$\begin{aligned}
g^{33} &= -l^3n^3 - l^3n^3 + m^3\bar{m}^3 + m^3\bar{m}^3 \\
&= -2l^3n^3 + 2m^3\bar{m}^3 \\
&= 0 + 2\frac{i}{\sqrt{2}\sin\theta(r - ia\ \cos\theta)}.\frac{-i}{\sqrt{2}\sin\theta(r + ia\ \cos\theta)} \\
&= \frac{1}{\sin^2\theta(r^2 + a^2\cos^2\theta)} \\
&= \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}
\end{aligned} \tag{2.125}$$

Sehingga tensor metrik kontravarian adalah

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2} & -\left(\frac{r^2+a^2}{\rho^2}\right) & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ -\left(\frac{r^2+a^2}{\rho^2}\right) & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{2.126}$$

karena $\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta$, maka:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2} & -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{2.127}$$

Bentuk kovarian dari tensor metrik di atas adalah

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{|g^{\mu\nu}|}\mathrm{Adj}\{g^{\mu\nu}\} \tag{2.128}$$

dengan

$$\begin{aligned} |g^{\mu\nu}| &= \begin{vmatrix} \frac{a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2} & -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{vmatrix} \\ &= \frac{a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2}\left[\frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^4\sin^2\theta}\right)\right] \\ &\quad + \frac{a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2}\left(-\frac{a}{\rho^2}\right)\frac{a}{\rho^4} \\ &\quad + \frac{\rho^2+a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2}\left[-\frac{\rho^2 a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^4\sin^2\theta}\right)\right] \\ &\quad + \frac{\rho^2+a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(-\frac{a}{\rho^2}\right)\frac{a}{\rho^4}\right] \\ &\quad + \left(-\frac{a}{\rho^2}\right)\left[-\frac{\rho^2+a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2}\left(\frac{a}{\rho^4}\right)\right] \\ &\quad + \left(-\frac{a}{\rho^2}\right)\left[-\frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2}\left(\frac{a}{\rho^4}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{\rho^4\sin^2\theta} \end{aligned} \tag{2.129}$$

Serta komponen-komponen Adj$\{g^{\mu\nu}\}$ adalah:
Untuk komponen-00:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{vmatrix} &= \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{vmatrix} \\
&\quad + \left(-\frac{a}{\rho^2}\right)\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\rho^2} \\ -\frac{a}{\rho^2} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2}\frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \\
&\quad + \left(-\frac{a}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{a}{\rho^2}\right) \\
&= \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2-a^2\sin^2\theta}{\rho^6\sin^2\theta} \\
&= \frac{\rho^2-2mr+Q^2}{\rho^6\sin^2\theta} \qquad (2.130)
\end{aligned}$$

Untuk komponen-01=komponen-10:

$$\begin{aligned}
-\begin{vmatrix} -\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{vmatrix} &= \frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{vmatrix} \\
&\quad \frac{a}{\rho^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\rho^2} \\ \frac{a}{\rho^2} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{1}{\rho^4\sin^2\theta} - \frac{a^2}{\rho^6} \\
&= \frac{1}{\rho^4\sin^2\theta} \qquad (2.131)
\end{aligned}$$

Untuk komponen-02=komponen-20:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & \frac{a}{\rho^2} & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.132)$$

Untuk komponen-03=komponen-30:

$$
-\begin{vmatrix} -\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\rho^2} \\ -\frac{a}{\rho^2} & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
+\frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2}\left(-\frac{a}{\rho^4}\right)
$$

$$
= a\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^6}
$$

$$
-a\frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^6}
$$

$$
= a\frac{r^2+a^2}{\rho^6}
$$

$$
-a\frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^6}
$$

$$
= \frac{(2mr-Q^2)a}{\rho^6} \tag{2.133}
$$

Untuk komponen-11:

$$
\begin{vmatrix} \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{vmatrix} = \frac{a^2}{\rho^6} - \frac{a^2}{\rho^6} = 0 \tag{2.134}
$$

Untuk komponen-12=komponen-21:

$$
-\begin{vmatrix} \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & -\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & \frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.135}
$$

Untuk komponen-13=komponen-31:

$$
\begin{vmatrix} \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & -\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{a^3\sin^2\theta}{\rho^6}
$$

$$
-a\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^6}
$$

$$
= -\frac{a}{\rho^4} \tag{2.136}
$$

Untuk komponen-22;

$$
\begin{vmatrix}
\frac{a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2} & -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & \frac{a}{\rho^2} \\
-\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} \\
\frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2}\begin{vmatrix} \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} \\ -\frac{a}{\rho^2} & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\end{vmatrix} \\
&\quad +\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\begin{vmatrix} -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & -\frac{a}{\rho^2} \\ \frac{a}{\rho^2} & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\end{vmatrix} \\
&\quad +\frac{a}{\rho^2}\begin{vmatrix} -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2}\end{vmatrix} \\
&= \frac{a^2\ \sin^2\theta}{\rho^2}\left(\frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^4\sin^2\theta}-\frac{a^2}{\rho^4}\right) \\
&\quad +\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\left(-\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^4\sin^2\theta}+\frac{a^2}{\rho^4}\right) \\
&\quad +\frac{a}{\rho^2}\left(+a\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^4}-a\frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^4}\right) \\
&= -\frac{(\rho^2+a^2\sin^2\theta)^2}{\rho^6\sin^2\theta}+\frac{a^2(\rho^2+a^2\sin^2\theta)}{\rho^6}+\frac{a^2}{\rho^6} \\
&= -\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}
\end{aligned} \tag{2.137}
$$

Untuk komponen-23=komponen-32:

$$
-\begin{vmatrix}
\frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & -\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 \\
-\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & 0 \\
\frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0
\end{vmatrix} = 0 \tag{2.138}
$$

Untuk komponen-33:

$$
\begin{vmatrix} \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & -\frac{r^2+a^2}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{r^2+a^2}{\rho^2} & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{vmatrix} = \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^4}
$$

$$
+\frac{r^2+a^2}{\rho^2}\left(-\frac{r^2+a^2}{\rho^4}\right)
$$

$$
= \frac{1}{\rho^6}\left(a^2\sin^2\theta\left(r^2+a^2-2mr+Q^2\right)\right)
$$

$$
-\frac{1}{\rho^6}\left(r^2+a^2\right)^2
$$

$$
= \frac{1}{\rho^6}\left(a^2\sin^2\theta\Delta-\left(r^2+a^2\right)^2\right) \qquad (2.139)
$$

dengan

$$
\Delta = r^2+a^2-2mr+Q^2 \qquad (2.140)
$$

Sehingga tensor metrik kontravarian adalah:

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \frac{1}{|g^{\mu\nu}|}\text{Adj}g^{\mu\nu} \\
&= -\rho^4\sin^2\theta \\
&\times \begin{vmatrix} \frac{\rho^2-2mr+Q^2}{\rho^6\sin^2\theta} & \frac{1}{\rho^4\sin^2\theta} & 0 & \frac{(2mr-Q^2)a}{\rho^6} \\ \frac{1}{\rho^4\sin^2\theta} & 0 & 0 & -\frac{a}{\rho^4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} & 0 \\ \frac{(2mr-Q^2)a}{\rho^6} & -\frac{a}{\rho^4} & 0 & \frac{1}{\rho^6}\left(a^2\sin^2\theta\Delta-\left(r^2+a^2\right)^2\right) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2mr-Q^2}{\rho^2}\right) & -1 & 0 & -\frac{(2mr-Q^2)a\ \sin^2\theta}{\rho^2} \\ -1 & 0 & 0 & a\ \sin^2\theta \\ & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{(2mr-Q^2)a\ \sin^2\theta}{\rho^2} & a\ \sin^2\theta & 0 & -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(a^2\sin^2\theta\Delta-\left(r^2+a^2\right)^2\right) \end{pmatrix}$$

Maka elemen garisnya adalah

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-\frac{2mr-Q^2}{\rho^2}\right)du^2 - 2du\ dr - 2a\ \sin^2\frac{(2mr-Q^2)\theta}{\rho^2}du\ d\phi \\ &\quad +2a\sin^2\theta dr\ d\phi + \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(a^2\sin^2\theta\Delta - \left(r^2+a^2\right)d\phi^2\right) \end{aligned}$$

LAMPIRAN C
Persamaan Medan Teori Gravitasi $f(R)$

Kita mulai dari Aksi

$$\begin{aligned} S &= S_G + S_M \\ &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) + \int d^4x L_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M) \end{aligned} \tag{3.1}$$

untuk mendapatkan persamaan medannya, kita akan memvariasi kedua aksi tersebut terhadap $g^{\mu\nu}$. Untuk aksi gravitasinya

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \frac{1}{2\kappa^2}\int \delta\{d^4x\sqrt{-g}f(R)\} \\ &= \frac{1}{2\kappa^2}\int \{f(R)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta f(R)\}d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa^2}\int \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} f(R) + \sqrt{-g}\frac{\partial f(R)}{\partial R}\delta R\right\} d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa^2}\int \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} f(R) + \sqrt{-g}F(R)\delta R\right\} d^4x, \end{aligned}$$

dengan $F(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R}$, kita evaluasi terlebih dahulu δR

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) \qquad (3.2) \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}) \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \nabla^\mu\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \nabla_\sigma g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}). \qquad (3.3) \end{aligned}$$

Pada persamaan terakhir ada variasi terhadap simbol Crisstoffel, maka untuk mendapatkan bentuk sederhana dari δR kita selesaikan terlebih dahulu masalah simbol Christoffel

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}). \tag{3.4}$$

Variasi dari simbol Christoffel

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\delta\{g^{\lambda\rho}(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho})\} \\ &= \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\rho}(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) + \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\delta(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Perkalian simbol Christoffel dengan tensor metrik memeberikan

$$\begin{aligned}
g_{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g_{\rho\alpha}g^{\lambda\rho}(g_{\mu\rho,\nu}+g_{\nu\rho,\mu}-g_{\mu\nu,\rho}) \\
&= \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\alpha}(g_{\mu\rho,\nu}+g_{\nu\rho,\mu}-g_{\mu\nu,\rho}) \\
g_{\rho\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(g_{\mu\rho,\nu}+g_{\nu\rho,\mu}-g_{\mu\nu,\rho}),
\end{aligned}$$

sehingga

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta g^{\lambda\rho}g_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\delta(g_{\mu\rho,\nu}+g_{\nu\rho,\mu}-g_{\mu\nu,\rho}). \tag{3.6}$$

Relasi antara turunan kovarian dan turunan biasa diberikan oleh

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho} &= \delta g_{\nu\rho,\mu}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\rho}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\delta g_{\nu\lambda} \\
\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho} &= \delta g_{\rho\mu,\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\delta g_{\lambda\mu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\delta g_{\rho\lambda} \\
\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu} &= \delta g_{\mu\nu,\rho}-\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}\delta g_{\lambda\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta g_{\mu\lambda}.
\end{aligned}$$

Dari ketiga relasi tersebut dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\delta g_{\nu\rho,\mu} &= \nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\rho}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\delta g_{\nu\lambda} \\
\delta g_{\rho\mu,\nu} &= \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\delta g_{\lambda\mu}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\delta g_{\rho\lambda} \\
\delta g_{\mu\nu,\rho} &= \nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu}+\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}\delta g_{\lambda\nu}+\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta g_{\mu\lambda}.
\end{aligned}$$

Menjumlahkan * dan ** serta menguranginya dengan *** diperoleh

$$\begin{aligned}
\delta g_{\nu\rho,\mu}+\delta g_{\rho\mu,\nu}-\delta g_{\mu\nu,\rho} &= \nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\rho}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\delta g_{\nu\lambda}+\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho} \\
&\quad +\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\delta g_{\lambda\mu}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\delta g_{\rho\lambda}-\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}\delta g_{\lambda\nu} \\
&\quad -\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta g_{\mu\lambda} \\
&= \nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho}+\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho}-\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu}+2\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta g_{\rho\lambda}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Variasi simbol Christoffel sekarang bisa dituliskan

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \delta g^{\lambda\rho}g_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho}+\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho}-\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu})+g^{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta g_{\rho\lambda} \\
&= \delta g^{\lambda\rho}g_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}+g^{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta g_{\rho\lambda}+\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho}+\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho}-\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu}) \\
&= \delta(g_{\rho\lambda}g^{\lambda\rho})\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho}+\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho}-\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho}+\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho}-\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu}). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan turunan kovarian dari variasi tensor metrik kovarian digunakan relasi berikut

$$\begin{aligned}
\delta g_{\nu\rho} &= -g_{\nu\alpha}g_{\rho\lambda}\delta g^{\alpha\lambda} \\
\delta g_{\mu\rho} &= -g_{\mu\alpha}g_{\rho\lambda}\delta g^{\alpha\lambda} \\
\delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

sehingga variasi simbol Christoffel dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\{\nabla_\mu(-g_{\nu\alpha}g_{\rho\lambda}\delta g^{\alpha\lambda}) + \nabla_\nu(-g_{\mu\alpha}g_{\rho\lambda}\delta g^{\alpha\lambda}) \\
&\quad -\nabla_\rho(-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta})\} \\
&= -\frac{1}{2}\{g^{\lambda\rho}g_{\nu\alpha}g_{\rho\lambda}\nabla_\mu\delta g^{\alpha\lambda} + g^{\lambda\rho}g_{\mu\alpha}g_{\rho\lambda}\nabla_\nu\delta g^{\alpha\lambda} - g^{\lambda\rho}\nabla_\rho g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}\} \\
&= -\frac{1}{2}\{g_{\nu\alpha}\nabla_\mu\delta g^{\alpha\lambda} + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu\delta g^{\alpha\lambda} - \nabla^\lambda g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}\} \\
&= -\frac{1}{2}\{g_{\nu\alpha}\nabla_\mu\delta g^{\alpha\lambda} + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu\delta g^{\alpha\lambda} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^\lambda g^{\alpha\beta}\}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Jika bentuk terakhir ini dikalikan dengan tensor metrik $g^{\nu\mu}$ akan diperoleh

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}g^{\nu\mu}\{g_{\nu\alpha}\nabla_\mu\delta g^{\alpha\sigma} + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu\delta g^{\alpha\sigma} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^\sigma g^{\alpha\beta}\} \\
&= -\frac{1}{2}\{\delta^\mu_\alpha\nabla_\mu\delta g^{\alpha\sigma} + \delta^\nu_\alpha\delta_\nu\delta g^{\alpha\sigma} - \delta^\nu_\alpha g_{\nu\beta}\nabla^\sigma\delta g^{\alpha\beta}\} \\
&= -\frac{1}{2}\{\delta_\alpha g^{\alpha\sigma} + \nabla_\alpha\delta g^{\alpha\sigma} - \delta^\nu_\alpha g_{\nu\beta}\nabla^\sigma\delta g^{\alpha\beta} \\
&= -\nabla_\alpha g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\nabla^\sigma\delta g^{\alpha\beta}. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Dari perhitungan-perhitungan yang telah dilakukan, maka variasi untuk $\Gamma^\gamma_{\gamma\nu}$

$$\delta\Gamma^{\gamma}_{\gamma\nu} = \frac{1}{2}g^{\gamma\rho}\{\nabla_\gamma\delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu\delta g_{\sigma\rho} - \nabla_\rho\delta g_{\sigma\nu}\}. \qquad (3.11)$$

Perkaliannya dengan tensor metrik $g^{\nu\mu}$ menghasilkan

$$\begin{aligned}
g^{\nu\mu}\delta\Gamma^{\gamma}_{\gamma\nu} &= \frac{1}{2}\{g^{\gamma\rho}\nabla_\gamma g^{\nu\mu}\delta g_{\nu\rho} + g^{\nu\mu}\nabla_\nu g^{\gamma\rho}\delta g_{\gamma\rho} - g^{\gamma\rho}\nabla_\rho g^{\nu\mu}\delta g_{\gamma\nu}\} \\
&= -\frac{1}{2}\{g^{\gamma\rho}\nabla_\gamma g^{\nu\mu}g_{\nu\alpha}g_{\rho\beta}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\nu\mu}\nabla_\nu g^{\gamma\rho}g_{\gamma\alpha}g_{\rho\lambda}\delta g^{\alpha\lambda} \\
&\quad -g^{\gamma\rho}\nabla_\rho g^{\nu\mu}g_{\gamma\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}\} \\
&= -\frac{1}{2}\{g^{\gamma\rho}\nabla_\gamma\delta^\mu_\alpha g_{\rho\beta}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\nu\mu}\nabla_\nu\delta^\rho_\alpha g_{\rho\lambda}\delta g^{\alpha\lambda} - g^{\gamma\rho}\nabla_\rho\delta^\mu_\beta g_{\gamma\alpha}\delta g^{\alpha\beta}\} \\
&= -\frac{1}{2}\{g^{\gamma\rho}\nabla_\gamma g_{\rho\beta}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\nu\mu}\nabla_\nu g_{\alpha\lambda}\delta g^{\alpha\lambda} - g^{\gamma\rho}\nabla_\rho g_{\gamma\alpha}\delta g^{\alpha\beta}\} \\
&= -\frac{1}{2}\{g^{\gamma\rho}\nabla_\gamma g_{\rho\beta}\delta g^{\alpha\beta} - g^{\gamma\rho}\nabla_\rho g_{\gamma\alpha}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\nu\mu}\nabla_\nu g_{\alpha\lambda}\delta g^{\alpha\lambda}\}.
\end{aligned}$$

Pada suku pertama dilakukan $\alpha \leftrightarrow \beta$ akan kita dapatkan

$$\begin{aligned}
g^{\nu\mu}\delta\Gamma^{\gamma}_{\gamma\nu} &= -\frac{1}{2}\{g^{\gamma\rho}\nabla_\gamma g_{\alpha\rho}\delta g^{\alpha\beta} - g^{\gamma\rho}\nabla_\rho g_{\gamma\alpha}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\nu\mu}\nabla_\nu g_{\alpha\lambda}\delta g^{\alpha\lambda}\} \\
&= -\frac{1}{2}\{\nabla^\rho g_{\alpha\rho}\delta g^{\alpha\beta} - \nabla^\gamma g_{\gamma\alpha}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla^\mu g_{\alpha\lambda}\delta g^{\alpha\lambda}\} \\
&= -\frac{1}{2}\{\nabla^\rho g_{\alpha\rho}\delta g^{\alpha\beta} - \nabla^\rho g_{\alpha\rho}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla^\mu g_{\alpha\lambda}\delta g^{\alpha\lambda}\} \\
&= -\frac{1}{2}\nabla^\mu g_{\alpha\lambda}\delta g^{\alpha\lambda}.
\end{aligned}$$

Kembali pada δR, dengan menggunakan hasil-hasil yang telah dikerjakan di atas

$$\begin{aligned}\delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}) \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma(-\nabla_\alpha\delta g^{\alpha\sigma} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\nabla^\sigma\delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\nabla^\sigma\delta g^{\alpha\beta}) \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma(-\nabla_\alpha\delta g^{\alpha\sigma} + g_{\alpha\beta}\nabla^\sigma\delta g^{\alpha\beta}) \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla^\sigma\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Variasi S_G sekarang dapat kita tuliskan

$$\begin{aligned}\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa^2}\int\{-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + F(R)\{R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu \\ &\quad +g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla^\sigma\}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x.\end{aligned}$$

Variasi aksi massanya

$$\begin{aligned}\delta S_M &= \delta\int L_M d^4 \\ &= \int \delta L_M d^4 \\ &= \int \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial L_M}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}d^4x \\ &= -\frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4, \qquad (3.12)\end{aligned}$$

dengan

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial L_M}{\partial g^{\mu\nu}}. \qquad (3.13)$$

Prinsip variasi memberikan

$$\delta S = \delta S_G + \delta S_M = 0, \qquad (3.14)$$

sehingga

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{2\kappa^2}\int\{F(R)R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla^\sigma F(R) \\ &\quad -\frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \kappa^2 T_{\mu\nu}\}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Kita peroleh

$$F(R)R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla^\sigma F(R) - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \qquad (3.16)$$

DAFTAR PUSTAKA

Anugraha, R.,2004, Pengantar Teori Relativitas dan Kosmologi, Gadjah Mada University press, Yogyakarta.

Arrosyidi, A.F.,2012, Solusi Schwarzchild dan Kerr untuk Persamaan Medan Gravitasi Einstein, Skripsi Universitas Airlangga, Surabaya.

A. Buchdahl, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **150**, 1-8, (1970).

Capozziello, S. dan Faraoni, V., 2011, Beyond Einstein Gravity; A Survei of Gravitational Theories for Cosmology And Astrophysics, Springer,Napoli.

Carroll S.M, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*, San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004).

Cembranos, J.A.R.,De La Cruz-Dombritz, Romero, P.J.,2014, Int. J. Geom. Methods Mod. Physics. 11,1 doi:10.1142/S0219887814500017.

Clowe, D., Bradac, M., Gonzalez, A. H., Markevitch, M., Randall, S. W., Jones, C.,dan Zaritsky, D. 2006, ApJ, 648, L109

M. Dalarsson, N. Dalarsson *Tensor Calculus, Relativity, and Cosmology: A First Course*, Elsevier.Inc, 2005

Fatibene, L. dan Garruto, S., 2014, *Extended Gravity*, arXiv:1403.7036v1 [gr-qc] 27 Mar 2014.

Irawan, A.,2016, Kajian Ruang waktu Kerr-Newmann dalam Gravitasi Einstein, Tugas Akhir Institut Teknologi sepuluh Nopember, Surabaya.

Krane, K.S., 1992, Fisika Modern (terjemahan), UI-Press, Jakarta.

Landau, L.D., Lifshiftz, E.M., 1975, The Classiscal Theory of Field, Butter-Worth Heineimann, New York.

Newman, E.T and Janis A.I, 1965, Note on Kerr spinning-particle metric, *Journal of Mathematical Physics*,**6**,915-917.

Purwanto, A., 2009, Pengantar Kosmologi, ITS Press, Surabaya

Rosyid, M.F., 2012, Eksotika Struktur Diferensial dalam Fisika: Sekumpulan Gambaran Lokal Menjelaskan Watak Global, disampaikan dalam Seminar Nasional Fisika (SNF) di Universitas Negeri Semarang.

Rubin V.C. and W.K.Ford, Jr., Astrophys. J. **159**, 379-404, (1970). doi:10.1086/150317

Ryder, L.,2009,Introduction to General Relativity, Cambridge University Press, New York.

Spoera, C.A.,2014, Note on $f(R)$ Theories of Gravity, arXive:1403.3852v2[gr-qc]

Uretta, E.J.,Socolovsky, M., 2015, Extended Newman-Janis algorithm for rotating and Kerr-Newman de Sitter and anti de Sitter metrics. arXive:1504.01728v2[qr-qc]

Wiltshere,D., Visser, M., dan Scott, S.M., 2009, The Kerr Spacetime, Rotating Black Holes in General Relativity, Cambridge University Press, New York.

Zwicky, F.,Baade W ,On Super Novae. *Proc Natl Acad Sci USA*,**20**(20), 259-263,(1934).

BIODATA PENULIS

Abu Fadlol Arrosyidi dilahirkan di lamongan tanggal 28 Oktober 1988. Anak ketiga dari ketiga bersaudara ini dilahirkan dalam lingkungan pesantren yang sangat kental. Masa-masa SD hingga SMA banyak dihabiskan untuk menghafal kitab-kitab Arab klasik. Pada tahun 2007 penulis masuk di jurusan Fisika Universitas Airlangga melalui jalur Beasiswa Santri Berprestasi DEPAG RI dan tahun 2013 melanjutkan S2 di jurusan Fisika Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Penulis selama menjadi mahasiswa di UA. aktif dalam Himpunan Mahasiswa Fisika UA. dan Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia.

Dijurusan Fisika penulis mengambil Bidang minat Fisika Teori dengan fokus studi masalah gravitasi. Selama kuliah, penulis pernah menjadi asisten Fisika Dasar I (UA), asisten Fisika Moderen (UA), asisten Fisika Kuantum (UA), dan asisten Fisika Matematika (ITS).