TUGAS AKHIR – KM184801

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP PEMETAAN QUASI-KONTRAKSI DI DALAM RUANG METRIK PARSIAL RECTANGULAR

MOHAMAD ILHAM DWI FIRMANSYAH
06111640000003

Dosen Pembimbing
Dr. Mahmud Yunus, M. Si

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

TUGAS AKHIR – KM184801

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP PEMETAAN QUASI-KONTRAKSI DI DALAM RUANG METRIK PARSIAL RECTANGULAR

MOHAMAD ILHAM DWI FIRMANSYAH
06111640000003

Dosen Pembimbing
Dr. Mahmud Yunus, M. Si

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya 2020

FINAL PROJECT – KM184801

ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF FIXED POINTS OF QUASICONTRACTION MAPPING IN RECTANGULAR PARTIAL METRIC SPACES

MOHAMAD ILHAM DWI FIRMANSYAH
06111640000003

Supervisor
Dr. Mahmud Yunus, M. Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty Of Science And Data Analytics
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP PEMETAAN QUASI-KONTRAKSI DI DALAM RUANG METRIK PARSIAL RECTANGULAR

ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF FIXED POINTS OF QUASICONTRACTION MAPPING IN RECTANGULAR PARTIAL METRIC SPACES

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
MOHAMAD ILHAM DWI FIRMANSYAH
NRP. 06111640000003

Menyetujui,
Dosen Pembimbing

Dr. Mahmud Yunus, M.Si
NIP. 19620407 198703 1 005

Mengetahui
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA
DEPARTEMEN MATEMATIKA

Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001
Surabaya, 31 Januari 2020

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP PEMETAAN QUASI-KONTRAKSI DI DALAM RUANG METRIK PARSIAL RECTANGULAR

Nama Mahasiswa	:	Mohamad Ilham Dwi Firmansyah
NRP	:	06111640000003
Departemen	:	Matematika FSAD-ITS
Pembimbing	:	Dr. Mahmud Yunus, M.Si

Abstrak

Konsep ruang metrik mengalami banyak perluasan, salah satu contohnya adalah ruang metrik parsial rectangular. Ruang metrik parsial rectangular secara khusus merupakan perluasan dari ruang metrik parsial dan ruang metrik rectangular. Masalah yang sering dibahas di dalam ruang metrik adalah masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap kontraksi Banach. Titik tetap kontraksi Banach sendiri mengalami perkembangan salah satu contohnya titik tetap pemetaan quasi-kontraksi. Pada tugas akhir ini diperoleh syarat cukup dari eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular. Lebih lanjut, dikonstruksi contoh yang menunjukkan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular.

Kata-kunci: *ruang metrik parsial, ruang metrik rectangular, ruang metrik parsial rectangular, titik tetap, pemetaan quasi-kontraksi.*

ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF FIXED POINTS OF QUASICONTRACTION MAPPING IN RECTANGULAR PARTIAL METRIC SPACES

Name	:	Mohamad Ilham Dwi Firmansyah
NRP	:	06111640000003
Department	:	Mathematics FSDA-ITS
Supervisor	:	Dr. Mahmud Yunus, M.Si

Abstract

Concept of metric space has many extensions, one example is rectangular partial metric spaces. Rectangular partial metric spaces are specifically an extension of partial metric spaces and rectangular metric spaces. A problem that is often discussed in metric spaces is the problem of the existence and uniqueness of fixed point Banach contraction. The fixed point Banach contraction itself has developed one of them is the principle of quasi-contraction mapping. In this final project, sufficient conditions are obtained from the existence and uniqueness of fixed points of quasi-contraction mapping in rectangular partial metric spaces. Furthermore, will be constructed of an example showing the problem of the existence and uniqueness of fixed points of quasi-contraction mapping in rectangular partial metric spaces.

Keywords: *partial metric space, rectangular metric space, partial rectangular metric space, fixed point, quasicontraction mapping.*

KATA PENGANTAR

بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Ucapan tahmid dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini yang berjudul

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP PEMETAAN QUASI-KONTRAKSI DI DALAM RUANG METRIK PARSIAL RECTANGULAR

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data (FSAD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW, yang telah membawa kita dari zaman yang penuh kegelapan menuju ke zaman yang terang benderang. Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Subchan, Ph.D selaku Kepala Departemen dan Ibu Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, MT selaku Sekretaris Departemen Matematika FSAD ITS.

2. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

3. Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si dan Ibu Drs. Sri Suprapti Hartiati, M.Si selaku dosen wali penulis yang sudah memberikan arahan selama kegiatan perkuliahan di ITS.

4. Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si selaku dosen yang membantu penulis dalam menentukan topik tugas akhir.

5. Ibu Prof. Erna Apriliani, M.Si selaku kepala Laboratorium Analisis, Aljabar, dan Pembelajaran Matematika dan juga sebagai dosen yang membantu penulis dalam menulis paper yang berkaitan dengan topik tugas akhir penulis.

6. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si, Ibu Soleha, S.Si, M.Si dan Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si selaku dosen penguji yang sudah memberikan masukan yang membangun kepada penulis.

7. Bapak dan Ibu dosen mata kuliah departemen dan mata kuliah bersama yang telah mengajarkan ilmu dan mendidik penulis selama perkuliahan.

8. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis sangat menghargai kritik dan saran dari pembaca untuk tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat membawa manfaat bagi semua pihak.

Surabaya, Januari 2020

Penulis

Ucapan Terimakasih

Penyelesaian penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis yang telah mendukung dan memotivasi penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak M.Sukari dan Ibu Farida selaku orang tua penulis yang selalu memberikan doa, semangat, dan dukungan dalam ibadah menuntut ilmu yang ditempuh oleh penulis selama ini.

2. Semua keluarga besar penulis di Madura yang telah menjadi motivasi besar penulis dalam menjalani perkuliahan.

3. Keluarga Kaderisasi IM Al-Fatih 39/40: Brilliyan Reyga Akbar Pramadana, Farid Kurniatama, Nasichah, Rina Gustina, Kristian Dwi Ratna Dewi, Reza Amalia Nur Hafidah, Yuda Hendriawan Budi Handoko, Shafira Herlinawati, Mayga Kiki yang telah menjadi keluarga terdekat penulis dan memberikan kesan yang mendalam selama di perkuliahan.

4. Yuda Hendriawan Budi Handoko, Shafira Herlinawati, Adillatul Lathifatun Jannah, dan Ari Ramadhana Hendrawan yang telah menjadi sahabat terdekat penulis dan selalu memberi semangat dan motivasi luar biasa kepada penulis selama menjalani perkuliahan.

5. Rif'an Amrozi dan Hafidh Dihas Okaviananda yang telah menjadi sahabat penulis selama menjalani perkuliahan dan menjadi teman seperjuangan di bidang analisis dan aljabar.

6. Departemen Kaderisasi IM 2017-2018 : Khafi Anillah, Kholisun Nisa', Indah Rahmadania, Yuda Hendriawan Budi Handoko, Wildan Zakky Al-Muntaha, Muhammad Nur Roziqin, Chozainurrohmah Safitri, Safira Nur Latifa, Shafira Herlinawati, Mayga Kiki yang telah memberikan pengalaman yang luar biasa selama di LDJ Ibnu Muqlah.
7. BPH IM KABINET AL-FATIH 39/40 : Muhammad Nur Roziqin, Muhammad Ardi Gunawan, Ulfa Inas Sayekti, Norma Bening Kurniawati, Septi Nurul Azizah, Ari Ramadhana Hendrawan, Shinta Amalia Muchlis Putri, Muhammad Nuchan Ubaidillah, Anggi Nurinda Pratiwi, Ahmad Ulul Albab, Ratna Ade Putri, Tiara Dwi Dikiyanti yang sudah memberikan pengalaman dan kesan yang tak terlupakan bagi penulis selama di LDJ Ibnu Muqlah.
8. Keluarga ASCI HiMATIKA ITS 2018-2019 : Yuda Hendriawan Budi Handoko, Soma Ushio, Ria Astutik, Atiq Ashdiqa Adzim, Achmad Afandy, Aldi Eka Wahyu Widianto, Azizah Wahyantika, Rahmarani Puspitasari, Muhamad Reza Al-Ramadhan, Rifky Daffa Prambodo yang sudah memberikan pengalaman yang tak terlupakan kepada penulis selama menjadi fungsionaris di HIMATIKA ITS.
9. Mahasiswa yang tergabung dalam *Olympiad Club* terutama Rif'an Amrozi, Hafidh Dihas Okaviananda, Yohanes A Crux Gosal, Hengky Kurniawan, Zuhair, Uzumaki Nagato Tenshou, Sie Evan Setiawan, Venansius Ryan Tjahjono, Alvian Alif Hidayatullah, Muhammad Solehuddin Yusuf, Ridho Nur Rahman Wijaya, yang sudah memberikan semangat dan tempat berdiskusi penulis selama di perkuliahan

10. Seluruh mahasiswa Matematika ITS angkatan 2016 yang telah menjadi keluarga penulis selama menjalani masa kuliah.

11. Siapapun anda yang telah tertulis di Lauhul Mahfudz, terimakasih telah menjadi semangat untuk penulis untuk selalu menjadi pribadi yang lebih baik.

12. Seluruh pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penulis mengucapkan terima kasih yang sangat dalam, atas doa dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Penulis juga mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak untuk perbaikan isi Tugas Akhir ini. Segala kritik dan saran akan penulis terima dan akan disambut dengan senang hati.

Surabaya, Januari 2020

M. I. D. Firmansyah

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Daftar Simbol

$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\mathbb{R}^n$	Himpunan hasil kartesian bilangan real dimensi n
$\mathbb{R}^+$	Himpunan bilangan real positif
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\emptyset$	Himpunan kosong
$\Leftrightarrow$	Ekivalen
$\sum$	Notasi Sigma
$\forall$	Untuk setiap
$\in$	Elemen atau anggota
$\neq$	Tidak sama dengan
$\notin$	Bukan elemen
$\subset$	Himpunan bagian sejati
$\subseteq$	Himpunan bagian tak sejati
$\cup$	Operasi gabungan pada himpunan
$\geq$	Lebih besar sama dengan
$\leq$	Lebih kecil sama dengan
$>$	Lebih besar
$<$	Lebih kecil
$\|x\|$	Harga mutlak dari x
$\sqrt{x}$	Akar dari x
$C[a,b]$	Himpunan semua fungsi kontinu pada [a,b]
$C[0,1]$	Himpunan semua fungsi kontinu pada [0,1]
sup	Supremum (batas atas terkecil)
max	Maksimum
Tx	Hasil pemetaan dari x oleh T
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	Limit barisan $\{x_n\}$

ε	Epsilon
d	Metrik
d_r	Metrik Rectangular
d_p	Metrik Parsial
d_{pr}	Metrik Parsial Rectangular

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penulisan tugas akhir. Selain itu, pada bab ini dijelaskan tentang sistematika penulisan tugas akhir yang berupa susunan bab pada penulisan tugas akhir.

1.1 Latar Belakang

Dalam perkembangan ilmu matematika, khususnya analisis fungsional, salah satu bahasan yang sering dikaji oleh ilmuwan adalah konsep ruang metrik. Ruang metrik pertama kali dikenalkan oleh ilmuwan matematika bernama Maurice Fréchet pada tahun 1906(Kreyszig, 1978). Sejak saat itu banyak ilmuwan melakukan penelitian terkait ruang metrik, salah satunya oleh Stefan Banach yang membahas tentang teorema titik tetap, khusunya berlakunya teorema titik tetap pemetaan kontraksi Banach pada ruang metrik pada tahun 1922. Selain itu, banyak juga ilmuwan memperkenalkan dan mengembangkan jenis-jenis ruang metrik yang lain.

Salah satu bukti perkembangan konsep ruang metrik adalah pada tahun 1994 seorang ilmuwan komputer Matthews mengenalkan konsep ruang metrik parsial(Matthews, 1994). Ruang metrik parsial ini memiliki perbedaan dengan ruang metrik. Pada ruang metrik parsial, jarak suatu titik ke dirinya sendiri tidak selalu nol. Sedangkan pada ruang metrik, jarak suatu titik ke dirinya sendiri selalu nol. Selain itu, Matthews juga mengembangkan perluasan prinsip kontraksi Banach dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial.

Seiring berjalannya waktu, ruang metrik terus mengalami banyak perkembangan, seorang ilmuwan bernama Branciari pada tahun 2000 mengenalkan konsep ruang metrik rectangular, yang memperluas pertidaksamaan segitiga pada ruang metrik dengan pertidaksamaan rectangular(Aydi, Karapinar, & Lakzian, 2012). Kemudian Branciari membuktikan berlakunya prinsip pemetaan kontraksi Banach pada ruang metrik rectangular. Akibat dari penemuan ruang metrik rectangular dan prinsip pemetaan kontraksi Banach ini, banyak matematikawan yang melakukan penelitian masalah titik tetap pada pemetaan di dalam ruang metrik rectangular.

Kemudian, perluasan dari ruang metrik parsial dan ruang metrik rectangular dikenalkan pertama kali oleh matematikawan asal India bernama Satish Shukla pada tahun 2014 yaitu ruang metrik parsial rectangular(Shukla, 2014). Salah satu objek yang diteliti oleh Shukla pada penelitiannya adalah masalah titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular. Penelitian lebih lanjut terkait dengan ruang metrik parsial rectangular ini masih sedikit dilakukan oleh ilmuwan matematika.

Oleh karena itu, pada tugas akhir ini dikaji kembali konsep ruang metrik parsial rectangular, serta kaitan dan hubungan antara ruang metrik parsial rectangular dengan ruang metrik. Selanjutnya, dibahas juga sifat-sifat konvergensi barisan, barisan Cauchy dan kelengkapan ruang yang berlaku di dalam ruang metrik parsial rectangular. Kemudian dibahas tentang masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular. Lebih lanjut lagi diberikan dan dikonstruksi contoh-contoh ruang metrik parsial rectangular dan pemetaan yang menunjukkan eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diberikan pada subbab sebelumnya, didapat beberapa rumusan masalah yang diangkat pada tugas akhir ini sebagai berikut :

1. Bagaimana karakterisasi dari eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan di dalam ruang metrik parsial rectangular?

2. Bagaimana contoh ruang dan pemetaan yang menunjukkan eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan di dalam ruang metrik parsial rectangular?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah mengkaji tentang syarat cukup eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah:

1. Mengkaji bagaimana karakterisasi dari eksistensi dan ketunggalan titik tetap di suatu pemetaan di dalam ruang metrik parsial rectangular.

2. Mengonstruksi contoh ruang metrik parsial rectnangular dan pemetaan yang memiliki titik tetap dan tunggal di dalam ruang metrik tersebut.

1.5 Manfaat

Manfaat penelitian ini antara lain:

1. Sebagai bahan acuan pembelajaran analisis fungsional khususnya teorema titik tetap di dalam ruang metrik parsial rectangular.

2. Diperoleh pengetahuan yang lebih mengenai sifat-sifat dari ruang metrik parsial rectangular, seperti halnya sifat konvergensi barisan, barisan Cauchy, dan kelengkapan ruang.

1.6 Sistematika Penulisan

Pada tugas akhir ini terdiri dari lima bab yaitu; pendahuluan, tinjauan pustaka, metode penelitian, analisis dan pembahasan, dan penutup. Berikut adalah deskripsi mengenai masing-masing bab antara lain :

1. BAB I PENDAHULUAN Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat dari penulisan tugas akhir serta sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Pada bab ini berisi tentang beberapa bahan materi yang mendukung dan berkaitan dengan penulisan tugas akhir, seperti riwayat penelitian terdahulu, ruang metrik, ruang metrik parsial, ruang metrik rectangular, teorema titik tetap, dan prinsip pemetaan quasi-kontraksi.

3. METODE PENELITIAN
   Pada bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan penelitian atau tugas akhir yang terdiri dari studi litelatur , mengkaji ruang metrik parsial rectangular, karakterisasi dan pembuktian masalah eksistesi dan ketunggalan titik tetap di dalam ruang metrik parsial rectangular, mengonstruksi contoh ruang dan pemetaan yang menunjukkan masalah

eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan di ruang metrik parsial rectangular, dan yang terakhir, penarikan kesimpulan dan penulisan buku tugas akhir.

4. ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Pada bab ini dijelaskan lebih detail tentang ruang metrik parsial rectangular. Dijelaskan juga bagaimana sifat-sifat barisan konvergen, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan pada ruang metrik parsial rectangular. Kemudian, dijelaskan mengenai prinsip pemetaan quasi-kontraksi yang berlaku pada ruang metrik parsial rectangular, dan bagaimana hubungan antara prinsip pemetaan tersebut dengan eksistensi dan ketunggalan titik tetep pemetaan pada ruang metrik parsial rectangular. Selain itu, pada bab ini dikonstruksi sebuah contoh ruang metrik parsial rectangular dan pemetaan di dalamnya yang menunjukkan eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan dengan prinsip pemetaan quasi-kontraksi.

5. PENUTUP
   Pada bab ini berisi kesimpulan dari apa yang dihasilkan pada bab analisis dan pembahasan sebelumnya, kemudian terdapat saran untuk pengembangan dan penelitian-penelitian yang akan datang.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan tentang penelitian-penelitian terdahulu yang berkaitan tentang topik tugas akhir. Kemudian, pada beberapa subbab dijelaskan meteri yang mendukung dan berkaitan dengan tugas akhir, seperti konsep ruang metrik, ruang metrik parsial, ruang metrik rectangular, serta dijelaskan definisi titik tetap dan prinsip pemetaan quasi-kontraksi yang berlaku pada suatu ruang metrik.

2.1 Penelitian Terdahulu

Ruang metrik pertama kali dikenalkan oleh M. Frechet pada tahun 1906 yang merupakan momen awal perkembangan analisis fungsional. Setelah itu tidak sedikit ilmuwan matematika yang memperluas konsep ruang metrik dan menemukan berbagai jenis ruang metrik. Salah satu diantaranya matematikawan sekaligus seorang ilmuwan komputer bernama Matthews pada tahun 1994 pertama kali memperkenalkan konsep ruang metrik parsial.

Konsep ruang metrik parsial ini memiliki perbedaan dengan ruang metrik yang dikenalkan Frechet. Hal yang membedakan antara ruang metrik dan ruang metrik parsial ialah pada ruang metrik jarak suatu titik ke dirinya selalu bernilai nol, sedangkan pada ruang metrik parsial jarak suatu titik ke dirinya sendiri tidak selalu nol. Matthews mengambangkan konsep ruang metrik parsial sebagai bagian dari penelitian notasi jaringan *datafloaw* dan menunjukkan bahwa prinsip kontraksi Banach dapat digeneralisasi untuk konteks ruang metrik parsial sebagai aplikasi dalam verifikasi program.

Seiring dengan berkembangnya konsep ruang metrik, ilmuwan bernama Branciari pada tahun 2000 memperkenalkan konsep ruang metrik rectangular atau dapat disebut juga ruang metrik Branciari yang memiliki perbedaan dengan ruang metrik. Perbedaan tersebut dapat dilihat pada petidaksamaan yang digunakan. Pertidaksamaan segitiga pada ruang metrik diperluas dengan pertidaksamaan rectangular pada ruang metrik rectangular.

Pada tahun 2014 seorang matematikawan dari India bernama S. Shukla memperkenalkan pengembangan ruang metrik rectangular dan ruang metrik parsial yaitu ruang metrik parsial rectangular (Shukla, 2014). Pada penelitian tersebut, Shukla tidak hanya membahas tentang ruang metrik parsial rectangular dan sifat kelengkapan ruang yang berlaku di dalamnya, namun juga dibahas tentang masalah teorema titik tetap pemetaan pada metrik parsial rectangular dengan prinsip pemetaan quasi-kontraksi.

Kemudian pada tahun 2014 penelitian yang tidak jauh berbeda dikemukakan oleh Nguyen Van Dung dan Vo Thi Le Hang yang menjelaskan hubungan antara ruang metrik rectangular dan ruang metrik parsial rectangular. Lebih lanjut, pada penelitian tersebut juga menunjukkan bahwa teorema titik tetap pada ruang metrik parsial rectangular dapat disimpulkan dari teorema titik tetap pada ruang metrik rectangular(Van & Le, 2014).

2.2 Ruang Metrik

Sebelum mempelajari konsep ruang metrik parsial rectangular dan masalah eksistensi serta ketunggalan titik tetapnya, dijelaskan terlebih dahulu konsep ruang metrik secara umum, contoh-contoh ruang metrik dan sifat-sifat barisan konvergen, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan dalam ruang metrik.

Definisi 2.2.1. *(Kreyszig, 1978) Ruang metrik adalah pasangan terurut* (X, d)*, dengan* X *adalah himpunan tak kosong dan* d *adalah metrik pada* X *(atau fungsi jarak pada* X*) yang didefinisikan sebagai fungsi* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *sedemikian hingga untuk semua* $x, y, z \in X$ *memenuhi :*
(M1) $d(x, y) \geq 0$;
(M2) $d(x, y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$;
(M3) $d(x, y) = d(y, x)$;
(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Berikut diberikan beberapa contoh dari ruang metrik yang disertai dengan pembuktiannya :

Contoh 2.2.1. (Kreyszig, 1978) Diberikan himpunan $X = \mathbb{R}$ dan didefinisikan fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Pasangan terurut (X, d) adalah ruang metrik.

Penjelasan Contoh 2.2.1 dapat diuraikan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$ akan ditunjukkan bahwa d merupakan fungsi metrik.

(1) Berdasarkan definisi fungsi d, fungsi d merupakan fungsi nilai mutlak, sehingga nilai dari fungsi d bernilai non-negatif untuk setiap x, y dan z elemen $\mathbb{R}$. Akibatnya sifat (M1) terpenuhi.

(2) ($\Rightarrow$) Jika $d(x, y) = |x - y| = 0$, maka $x - y = 0$ akibatnya $x = y$.

($\Leftarrow$) Jika $x = y$ maka $d(x, y) = |x - y| = |x - x| = 0$. Oleh karena itu sifat (M2) terpenuhi.

(3) Berdasarakan sifat nilai mutlak

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x),$$

sifat (M3) terpenuhi.

(4) Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |x-z+z-y| \\ &\leq |x-z|+|z-y| = d(x,z)+d(z,y), \end{aligned}$$

sifat (M4) terpenuhi.

Karena terpenuhi sifat (M1),(M2),(M3), dan (M4) dapat disimpulkan (X,d) adalah ruang metrik.

Contoh 2.2.2. (Kreyszig, 1978) Diberikan $X = \mathbb{R}^n$ dan didefinisikan untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$. Jika didefinisikan fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \tag{2.1}$$

untuk setiap $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ maka d merupakan suatu fungsi metrik. Pasangan (X,d) disebut **ruang metrik Euclid** di $\mathbb{R}^n$.

Penjelasan untuk Contoh 2.2.2 dapat diuraikan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, dengan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dan $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

(1) Berdasarkan bentuk fungsi d pada (2.1), jelas bahwa d merupakan fungsi bernilai non-negatif atau dengan kata lain $d(x,y) \geq 0$. Hal tersebut menunjukkan bahwa sifat (M1) terpenuhi.

(2) Berikut akan ditunjukkan untuk sifat (M2):
($\Rightarrow$) Jika $d(x,y) = 0$ dan diketahui bahwa $(x_i - y_i)^2 \geq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, maka agar persamaan tersebut terpenuhi haruslah $(x_i - y_i)^2 = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ atau dapat ditulis $x_i - y_i = 0 \Rightarrow x_i = y_i$

untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Terbukti $x = y$.

($\Leftarrow$) Jika $x = y$ yang artinya $x_i = y_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, atau dengan kata lain $x_i - y_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2} = 0. \end{aligned}$$

(3) Perhatikan bentuk

$$(x_i - y_i)^2 = ((-1)(y_i - x_i))^2 = (-1)^2 (y_i - x_i)^2 = (y_i - x_i)^2, \tag{2.2}$$

untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Berdasarkan bentuk (2.2) diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 \right)^{1/2} = d(x,y) \end{aligned}$$

sehingga untuk sifat (M3) terpenuhi.

(4) Untuk menunjukkan sifat (M4), digunakan Ketaksamaan Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{1/p} \tag{2.3}$$

dengan $a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \ldots, n$ dan $p \geq 1$(Kreyszig, 1978). Dengan menggunakan ketaksamaan (2.3) diperoleh

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}|(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i - y_i|^2\right)^{1/2} \\
&= d(x,z) + d(z,y).
\end{aligned}$$

Karena terpenuhi sifat (M1),(M2),(M3), dan (M4), akibatnya (X, d) adalah ruang metrik.

Contoh 2.2.3. (Kreyszig, 1978) Diberikan $X = C([a,b], \mathbb{R})$ merupakan himpunan semua fungsi bernilai real yang kontinu pada interval $[a,b]$. Didefinisikan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d(\mu_1, \mu_2) = \sup_{x \in [a,b]} \{|\mu_1(x) - \mu_2(x)|\}, \tag{2.4}$$

untuk setiap $f, g \in X$, maka (X, d) adalah ruang metrik.

Penjelasan Contoh 2.2.3 dapat diuraikan sebagai berikut. Sebelum menunjukkan d pada (2.4) adalah suatu metrik, terlebih dahulu harus ditunjukkan bahwa fungsi d adalah fungsi yang ***well define***. Diketahui bahwa μ_1 dan μ_1 merupakan fungsi kontinu pada $[a,b]$, maka fungsi $\mu_1 - \mu_2$ juga kontinu pada $[a,b]$, sehingga berakibat pula $|\mu_1 - \mu_2|$ kontinu pada $[a,b]$. Karena setiap fungsi kontinu pada interval tertutup dan terbatas adalah terbatas, maka fungsi $|\mu_1 - \mu_2|$ terbatas. Oleh sebab itu nilai dari

$$\sup_{x \in [a,b]} \{|\mu_1(x) - \mu_2(x)|\}$$

ada. Sehingga dapat disimpulkan bahwa d suatu fungsi yang ***well define***. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa d suatu metrik di X. Ambil sebarang $f, g, h \in X$

(1) Berdasarkan definisi fungsi d pada (2.4), fungsi d merupakan fungsi yang bernilai non-negatif atau dengan kata lain $d(\mu_1, \mu_2) \geq 0$. Sehingga sifat (M1) terpenuhi.

(2) ($\Rightarrow$) Diketahui

$$d(\mu_1, \mu_2) = \sup_{x \in [a,b]} \{|\mu_1(x) - \mu_2(x)|\} = 0, \qquad (2.5)$$

Karena $|\mu_1(x) - \mu_2(x)| \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]$, supaya persaman (2.5) terpenuhi haruslah $|\mu_1(x) - \mu_2(x)| = 0, \quad \forall x \in [a, b]$. Sehingga diperoleh $\mu_1(x) - \mu_2(x) = 0$ atau dengan kata lain $\mu_1(x) = \mu_2(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.
($\Leftarrow$) Diketahui $\mu_1(x) = \mu_2(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka didapat $\mu_1(x) - \mu_2(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]$. Sehingga diperoleh

$$d(\mu_1, \mu_2) = \sup_{x \in [a,b]} \{|\mu_1(x) - \mu_2(x)|\} = \sup_{x \in [a,b]} \{0\} = 0.$$

Berdasarkan hal tersebut, sifat (M2) terpenuhi.

(3) Sifat (M3) terpenuhi sebab,

$$\begin{aligned} d(\mu_1, \mu_2) &= \sup_{x\in[a,b]} \{|\mu_1(x) - \mu_2(x)|\} \\ &= \sup_{x\in[a,b]} \{|(-1)(\mu_2(x) - \mu_1(x))|\} \\ &= \sup_{x\in[a,b]} \{|(\mu_2(x) - \mu_1(x))|\} = d(\mu_2, \mu_1). \end{aligned} \tag{2.6}$$

(4) Untuk setiap $x \in [a, b]$ berlaku

$$|\mu_1(x) - \mu_2(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} \{\mu_1(x) - \mu_2(x)\} \tag{2.7}$$

dan

$$|\mu_2(x) - \mu_2(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} \{\mu_2(x) - \mu_2(x)\}. \tag{2.8}$$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned} |\mu_1(x) - \mu_2(x)| &\leq |\mu_1(x) - \mu_2(x)| + |\mu_2(x) - \mu_2(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} \{|\mu_1(x) - \mu_2(x)|\} \\ &\quad + \sup_{x\in[a,b]} \{|\mu_2(x) - \mu_2(x)|\} \\ &= d(\mu_1, \mu_3) + d(\mu_3, \mu_2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sehingga diperoleh $|\mu_1(x) - \mu_2(x)| \leq d(\mu_1, \mu_3) + d(\mu_3, \mu_2), \ \forall x \in [a, b]$. Karena $d(\mu_1, \mu_3)+d(\mu_3, \mu_2)$ batas atas dari $|\mu_1(x) - \mu_2(x)|$, maka berlaku

$$\sup_{x\in[a,b]} \{|\mu_1(x) - \mu_2(x)|\} \leq d(\mu_1, \mu_3) + d(\mu_3, \mu_2),$$

terbukti $d(\mu_1, \mu_2) \leq d(\mu_1, \mu_3)+d(\mu_3, \mu_2)$. Sehingga sifat (M4) terpenuhi.

Karena terpenuhi sifat (M1),(M2),(M3), dan (M4), akibatnya (X, d) adalah ruang metrik.

Berikut ini diberikan definisi dari barisan konvergen, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan ruang di dalam ruang metrik.

Definisi 2.2.2. *(Kreyszig, 1978) Suatu barisan $\{x_n\}$ di suatu ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen ke $x \in X$, dinotasikan dengan $x_n \to x$ untuk $n \to \infty$ atau $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, jika barisan bilangan real tak-negatif*

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \textit{saat} \quad n \to \infty;$$

dengan kalimat lain, untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$ untuk $n \geq N$.

Definisi 2.2.3. *(Kreyszig, 1978) Diberikan (X, d) suatu ruang metrik. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X disebut barisan Cauchy jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad \textit{apabila } m, n \geq N.$$

Definisi 2.2.4. *(Kreyszig, 1978) Diberikan (X, d) suatu ruang metrik dan $E \subseteq X$. Himpunan E dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di E konvergen di E. Jika X lengkap maka (X, d) ruang metrik lengkap.*

2.3 Ruang Metrik Parsial

Pada bagian ini dibahas definisi dari ruang metrik parsial. Kemudian diberikan contoh ruang metrik parsial dan teorema-teorema yang menunjukkan kaitan antara ruang metrik parsial dan ruang metrik biasa. Kemudian, diberikan definisi barisan konvergen, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan di dalam ruang metrik parsial.

Definisi 2.3.1. *(Matthews, 1994) Diberikan himpunan tak kosong X, fungsi $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ disebut metrik parsial pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi:*
(PM1) $x = y$ jika dan hanya jika $d_p(x,x) = d_p(x,y) = p(y,y)$;
(PM2) $d_p(x,x) \leq p(x,y)$;
(PM3) $d_p(x,y) = d_p(y,x)$;
(PM4) $d_p(x,z) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z) - d_p(y,y)$.
Pasangan (X, d_p) disebut sebagai ruang metrik parsial.

Berdasarkan Definisi 2.3.1, jika $d_p(x,y) = 0$ maka dengan menggunakan sifat (PM3) diperoleh $d_p(x,x) \leq 0$ akibatnya $d_p(x,x) = 0$ sehingga didapat $d_p(x,x) = d_p(x,y)$, berdasarkan (PM1) diperoleh $x = y$.

Setelah mengetahui definisi dari ruang metrik parsial, berikut ini diberikan beberapa contoh himpunan dan fungsi metrik yang memenuhi definisi ruang metrik parsial.

Contoh 2.3.1. (Alghamdi, Shahzad, & Valero, 2012) Diberikan himpunan $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dan sebuah fungsi $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ yang didefinisikan dengan $d_p(x,y) = \max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in X$. Fungsi d_p merupakan fungsi metrik parsial pada X.

Penjelasan untuk Contoh 2.3.1 dapat ditunjukkan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$.

(1) ($\Rightarrow$) Jika diketahui bahwa $x = y$, maka berdasarkan definisi fungsi d_p diperoleh

$$d_p(x,x) = d_p(x,y) = d_p(y,y). \tag{2.10}$$

($\Leftarrow$) Diketahui $d_p(x,x) = \max(x,x) = x = d_p(x,y) = \max(x,y)$, sehingga diperoleh $x \geq y$. Kemudian, diketahui $d_p(y,y) = \max(y,y) = y = d_p(x,y) = \max(x,y)$, sehingga diperoleh $x \leq y$. Karena berlaku $x \geq y$ dan $x \leq y$, dapat disimpulkan $x = y$, sehingga sifat (PM1) terpenuhi.

(2) Untuk menunjukkan sifat (PM2) dibagi menjadi beberapa kondisi. Untuk $x < y$, diperoleh $d_p(x,x) = \max(x,x) = x < y = \max(x,y) = d_p(x,y)$, dengan kata lain $d_p(x,x) < d_p(x,y)$. Untuk $x \geq y$, diperoleh $d_p(x,x) = \max(x,x) = x = \max(x,y) = d_p(x,y)$, dengan kata lain $d_p(x,x) = d_p(x,y)$. Terbukti $d_p(x,x) \leq d_p(x,y)$.

(3) Jelas bahwa $d_p(x,y) = \max(x,y) = \max(y,x) = d_p(y,x)$, sehingga sifat (PM3) terpenuhi.

(4) Untuk membuktikan (PM4), perlu dibagi beberapa kasus:

  (1) Untuk $x \geq z \geq y$
  Berdasarkan definisi fungsi d_p, $d_p(x,z) = \max(x,z) = x$, $d_p(x,y) = \max(x,y) = x$, $d_p(y,z) = \max(y,z) = z$, $d_p(y,y) = \max(y,y) = y$. Karena $z \geq y$ atau dengan kata lain $z - y \geq 0$, akibatnya berlaku $x \leq x + z - y \Rightarrow d_p(x,z) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z) - d_p(y,y)$.

  (2) Untuk $x \geq z$ dan $z < y$.
  Jika $x \geq y$, maka didapat $d_p(x,z) = \max(x,z) = x \leq x+y-y = \max(x,y)+\max(y,z)-\max(y,y) = d_p(x,y) + d_p(y,z) - d_p(y,y)$.
  Jika $x < y$, maka didapat $d_p(x,y) = \max(x,y) = x \leq y+y-y = \max(x,y)+\max(y,z)-\max(y,y) = d_p(x,y) + d_p(y,z) - d_p(y,y)$.

  (3) Untuk $x < z$ dan $z \geq y$.
  Jika $x \geq y$, maka $x - y \geq 0$, akibatnya $z \leq x + z - y \Rightarrow \max(x,z) \leq \max(x,y) + \max(y,z) - \max(y,y) = d_p(x,y) + d_p(y,z) - d_p(y,y)$.
  Jika $x < y$, maka didapat $d_p(x,z) = \max(x,z) =$

$z \leq y + z - y = \max(x, y) + \max(y, z) - \max(y, y) = d_p(x, y) + d_p(y, z) - d_p(y, y)$.

(4) Untuk $x < z < y$.
$d_p(x, z) = \max(x, z) = z \leq y + z - y = \max(x, y) + \max(y, z) - \max(y, y) = d_p(x, y) + d_p(y, z) - d_p(y, y)$.

Karena terpenuhi sifat (PM1),(PM2),(PM3), dan (PM4), akibatnya dapat disimpulkan (X, d_p) adalah ruang metrik parsial. Namun pada Contoh 2.3.1 bukanlah ruang merik, hal tersebut dapat dilihat jika dengan mengambil sebarang $x \in X$ dengan $x \neq 0$ maka $d_p(x, x) = x \neq 0$. Berikut diberikan contoh lain dari ruang metrik parsial.

Contoh 2.3.2. Diberikan $X = [0, +\infty)$ dan sebuah fungsi $d_p : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x^2 - y^2| + 5$ untuk setiap $x, y \in X$. Pasangan terurut (X, d_p) adalah ruang metrik parsial namun bukan ruang metrik.

Penjelasan Contoh 2.3.2 dapat diuraikan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y \in X$.

(1) ($\Rightarrow$) Jika $x = y$, maka didapat $d_p(x, y) = |x^2 - y^2| + 5 = |x^2 - x^2| + 5 = d_p(x, x) = d_p(y, y)$.
$\Leftarrow$ Jika $d_p(x, x) = d_p(x, y)$ artinya diperoleh $|x^2 - x^2| + 5 = |x^2 - y^2| + 5 \Rightarrow |x^2 - y^2| = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$, karena $x, y \in [0, +\infty)$ maka berakibat $x = y$. Berdasarkan hal tersebut sifat (PM1) terpenuhi.

(2) Sifat (PM2) terpenuhi sebab $d(x, x) = 3 \leq |x^2 - y^2| + 5 = d_p(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

(3) Sifat (PM2) terpenuhi sebab $d(x, y) = |x^2 - y^2| + 5 = |y^2 - x^2| + 5 = d_p(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$.

(4) Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga didapat

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= |x^2 - y^2| + 5 \\ &\leq |x^2 - z^2| + 5 + |z^2 - y^2| + 5 - 3 \qquad (2.11) \\ &= d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z). \end{aligned}$$

Sehingga terbukti $d_p(x,y) \leq d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z)$ untuk setiap $x, y, z \in X$, akibatnya sifat (PM4) terpenuhi.

Karena terpenuhi sifat (PM1),(PM2),(PM3), dan (PM4), akibatnya dapat disimpulkan (X, d_p) adalah ruang metrik parsial. Namun pada Contoh 2.3.2 bukanlah ruang merik, hal tersebut dapat dilihat jika dengan mengambil sebarang $x \in X$ dengan $x \neq 0$ didapat $d_p(x,x) = 3 \neq 0$.

Berkaitan dengan definisi ruang metrik parsial yang telah diberikan beserta contoh dan penjelasannya, terlihat jelas bahwa ruang metrik parsial merupakan perumuman dari ruang metrik. Hal tersebut dapat dilihat dari jarak antara suatu titik ke dirinya sendiri pada masing-masing ruang tersebut. Pada ruang metrik biasa jarak suatu titik ke dirinya selalu nol, sedangkan untuk ruang metrik parsial tidak selalu nol, sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap ruang metrik adalah ruang metrik parsial, namun tidak berlaku sebaliknya. Hal lain yang membedakan antara ruang metrik dengan ruang metrik parsial adalah pada pertidaksamaan yang digunakan pada masing-masing ruang, pada ruang merik menggunakan pertidaksamaan segitiga terlihat pada (M4) sedangkan pada ruang metrik parsial pada dasarnya menggunakan pertidaksaman segitiga namun pada ruas kanannya masih dikurangi dengan jarak elemen selain $x, y \in X$ dengan dirinya sendiri.

Berikut di bawah ini diberikan beberapa teorema yang menjelaskan tentang kaitan antara ruang metrik dengan ruang metrik parsial. Teorema di bawah ini menjelaskan bahwa untuk suatu fungsi metrik dapat dikonstruksi dari suatu fungsi metrik parsial.

Teorema 2.3.1. *(Matthews, 1994) Diberikan d_p adalah suatu metrik parsial pada himpunan tak kosong X. Jika didefinisikan fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan*

$$d(x,y) = 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y), \quad \forall\; x,y \in X \tag{2.12}$$

maka d adalah metrik pada X

Bukti. Ambil sebarang $x, y, z \in X$,

(1) Berikut akan ditunjukkan berlakuknya sifat (M1), diketahui d_p merupakan suatu metrik parsial sehingga d_p memenuhi sifat (PM2) dan (PM3) pada Definisi 2.3.1, akibtanya diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y) \\ &= d_p(x,y) - d_p(x,x) + d_p(x,y) - d_p(y,y) \\ &= d_p(x,y) - d_p(x,x) + p(y,x) - d_p(y,y) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(2) ($\Rightarrow$) Diketahui $d(x,y) = 0$, sehingga diperoleh $2d_p(x,y) = d_p(x,y) + d_p(x,y) = d_p(x,x) + d_p(y,y)$, persamaan tersebut terpenuhi jika $d_p(x,y) = d_p(x,x)$ dan $d_p(x,y) = d_p(x,x)$. Karena d_p metrik parsial akibatnya memenuhi (PM2) dan (PM3) pada Definisi 2.3.1, akibatnya diperoleh $x = y$.
($\Leftarrow$) Diketahui $x = y$, sehingga didapat

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y) \\ &= 2d_p(x,x) - d_p(x,x) - d_p(x,x) = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Berdasarkan (2.13) dapat disimpulkan sifat (M2) terpenuhi.

(3) Karena d_p metrik parsial, akibatnya memenuhi (PM3) pada Definisi 2.3.1, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y) \\ &= 2d_p(y,x) - d_p(y,y) - d_p(x,x) = d(y,x), \end{aligned} \tag{2.14}$$

oleh karena itu sifat (M3) terpenuhi.

(4) Berikut akan ditunjukkan berlakunya sifat (M4). Karena d_p metrik parsial memenuhi (PM4) pada Definisi 2.3.1, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y) \\ &\leq 2(d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z)) \\ &\quad -d_p(x,x) - d_p(y,y) \\ &= 2d_p(x,z) + 2d_p(z,y) - 2d_p(z,z) \\ &\quad -d_p(x,x) - d_p(y,y) \\ &= 2d_p(x,z) - d_p(x,x) - d_p(z,z) + \\ &\quad 2d_p(z,y) - d_p(z,z) - d_p(y,y) \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Karena terpenuhi (M1),(M2),(M3), dan (M4), dapat disimpulkan (X,d) adalah ruang metrik. □

Kemudian, diberikan definisi yang berkaitan dengan definisi barisan konvergen pada ruang metrik parsial, barisan Cauchy pada ruang metrik parsial serta bagaimana definisi kelengkapan ruangnya.

Definisi 2.3.2. *(Matthews, 1994)Diberikan (X,d_p) ruang metrik parsial dan barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang tersebut. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika*

$$\lim_{n\to\infty} d_p(x_n,x) = d_p(x,x) \tag{2.16}$$

Definisi 2.3.3. *(Matthews, 1994) Barisan* $\{x_n\}$ *di dalam ruang metrik parsial* (X, d_p) *disebut barisan Cauchy pada* (X, d_p)*, jika nilai dari* $\lim_{n,m\to\infty} d_p(x_n, x_m)$ *ada dan berhingga.*

Definisi 2.3.4. *(Matthews, 1994) Ruang metrik parsial* (X, p_r) *dikatakan ruang yang lengkap, jika untuk setiap barisan Cauchy* $\{x_n\}$ *di* X*, terdapat* $x \in X$ *sedemikian hingga*

$$\lim_{n,m\to\infty} d_p(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} d_p(x_n, x) = d_p(x, x). \tag{2.17}$$

2.4 Ruang Metrik Rectangular

Berikut ini diberikan definisi dari ruang metrik rectangular beserta contoh dan penjelasannya.

Definisi 2.4.1. *(Ege, 2015) Diberikan* X *himpunan tak kosong dan fungsi* $d_r : X \times X \to \mathbb{R}$*. Pasangan terurut* (X, d_r) *disebut ruang metrik rectangular jika untuk setiap* $x, y \in X$ *memenuhi :*
(RM1) $d_r(x, y) \geq 0$*;*
(RM2) $d_r(x, y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$*;*
(RM3) $d_r(x, y) = d_r(y, x)$*;*
(RM4) $d_r(x, y) \leq d_r(x, u) + d_r(u, v) + d_r(v, y)$ *untuk setiap titik berbeda* $u, v \in X \setminus \{x, y\}$*;*
Fungsi d_r *disebut metrik rectangular pada* X*.*

Berikut diberikan contoh ruang metrik rectangular beserta penjelasannya.

Contoh 2.4.1. (Roshan, Parvaneh, Kadelburg, & Hussain, 2016) Misalkan $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_7\} \subseteq \mathbb{R}$. Kemudian definisikan fungsi $d_r : X \times X \to \mathbb{R}$ dimana

$$d_r(a_i, a_j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1.5, & |i - j| = 1, \\ 7, & ij = 5, \\ 3.5, & \text{untuk yang lain,} \end{cases} \tag{2.18}$$

maka (X, d_r) merupakan ruang metrik rectangular.

Penjelasan dari Contoh 2.4.1 dapat ditunjukkan sebagai berikut. Ambil $a_i, a_j \in X$ dan $a_k, a_l \in X \setminus \{a_i, a_j\}$ dengan $a_k \neq a_l$.

(1) Berdasarkan definisi fungsi pada (2.18) jelas bahwa d_r merupakan fungsi yang bernilai non-negatif atau dengan kata lain $d_r(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$.

(2) Berdasarkan definisi fungsi pada (2.18) jelas terlihat bahwa $d_r(a_i, a_j) = 0$ jika dan hanya jika $i = j$.

(3) Jika $i = j$ maka jelas bahwa $d_r(a_i, a_j) = 0 = d_r(a_j, a_i)$. Jika $|i-j| = 1$ berakibat juga $|j-i| = 1$, maka diperoleh $d_r(a_i, a_j) = 1.5 = d_r(a_j, a_i)$. Jika $ij = 5$ berakibat pula $ji = 5$, maka diperoleh $d_r(a_i, a_j) = 7 = d_r(a_j, a_i)$. Untuk i dan j yang lain juga diperoleh $d_r(a_i, a_j) = 3.5 = d_r(a_i, a_j)$.

(4) Untuk membuktikan pertidaksamaan rectangularnya dibagi beberapa kasus. Misalkan saja jika $ij = 5$ maka
<u>Kasus 1</u> Untuk $|i-k| = 1, k \neq l, |j-l| = 1$ diperoleh,

$$\begin{aligned} d_r(a_i, a_j) = 7 &\leq 2 + 4 + 2 \\ &= d_r(a_i, a_k) + d_r(a_k, a_l) + d_r(a_l, a_j). \end{aligned}$$

<u>Kasus 2</u> Untuk $|i-k| = 1, |k-l| = 1, j \neq l$ diperoleh,

$$\begin{aligned} d_r(a_i, a_j) = 7 &\leq 2 + 2 + 4 \\ &= d_r(a_i, a_k) + d_r(a_k, a_l) + d_r(a_l, a_j). \end{aligned}$$

<u>Kasus 3</u> Untuk $i \neq k, |k-l| = 1, |l-j| = 1$ diperoleh,

$$\begin{aligned} d_r(a_i, a_j) = 7 &\leq 4 + 2 + 2 \\ &= d_r(a_i, a_k) + d_r(a_k, a_l) + d_r(a_l, a_j). \end{aligned}$$

<u>Kasus 4</u> Untuk $i \neq k, |k-l| = 1, l \neq j$ diperoleh,

$$\begin{aligned} d_r(a_i, a_j) = 7 &\leq 4 + 2 + 4 \\ &= d_r(a_i, a_k) + d_r(a_k, a_l) + d_r(a_l, a_j). \end{aligned}$$

<u>Kasus 5</u> Untuk $i \neq k, k \neq l, l \neq j$ diperoleh,

$$\begin{aligned} d_r(a_i, a_j) = 7 &\leq 4 + 4 + 4 \\ &= d_r(a_i, a_k) + d_r(a_k, a_l) + d_r(a_l, a_j). \end{aligned}$$

Karena terpenuhi (RM1),(RM2),(RM3), dan (RM4) maka (X, d_r) adalah ruang metrik rectangular.

Berkaitan dengan definisi ruang metrik rectangular yang diberikan sebelumnya, terlihat jelas bahwa ruang metrik rectangular merupakan perumuman dari ruang metrik. Hal tersebut dapat dilihat dari pertidaksmaan yang digunakan pada masing-masing ruang tersebut. Kemudian dapat disimpulkan bahwa setiap ruang metrik adalah ruang metrik rectangular, namun tidak berlaku sebaliknya.

Kemudian, diberikan definisi yang berkaitan dengan konvergensi barisan pada ruang metrik rectangular, barisan Cauchy pada ruang metrik rectangular serta ruang metrik rectangular yang lengkap.

Definisi 2.4.2. *(Branciari, 2000) Suatu barisan (x_n) dari titik dalam suatu metrik rectangular (X, d_r) dikatakan konvergen ke $x \in X$, dinotasikan dengan $x_n \to x$ untuk $n \to \infty$ atau $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, jika barisan bilangan real tak-negatif*

$$d_r(x_n, x) \to 0 \quad saat \quad n \to \infty;$$

dengan kalimat lain, untuk setiap setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_r(x_n, x) < \varepsilon$ untuk $n \geq N$.

Definisi 2.4.3. *(Branciari, 2000) Diberikan (X, d_r) suatu ruang metrik rectangular. Suatu barisan (x_n) di X dikatakan* *barisan Cauchy jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

$$d_r(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad \textit{apabila } m, n \geq N,$$

atau dapat ditulis $\lim_{n,m\to\infty} d_r(x_n, x_m) = 0.$

Definisi 2.4.4. *(Branciari, 2000) Diberikan (X, d_r) suatu ruang metrik rectangular dan $E \subseteq X$. Himpunan E dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di E mempunyai limit di E. Jika X lengkap maka (X, d_r) ruang metrik rectangular lengkap.*

2.5 Titik Tetap dan Pemetaan Quasi-Kontraksi

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai definisi titik tetap pemetaan dan prinsip pemetaan quasi-kontraksi yang berlaku pada ruang metrik.

Definisi 2.5.1. *(Kreyszig, 1978) Titik tetap dari pemetaan $T : X \to X$ adalah $x \in X$ yang dipetakan ke dirinya sendiri atau dinotasikan $Tx = x$.*

Untuk lebih jelasnya, berikut ini diberikan sebuah contoh titik tetap pemetaan pada bilangan real.

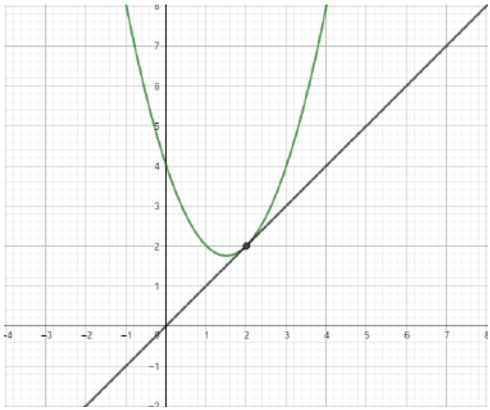
Contoh 2.5.1. Diberikan $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $Tx = x^2 - 3x + 4$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Titik tetap pemetaan dari T adalah $x = 2$.

Penjelasan dari Contoh 2.5.1 dapat diuraikan sebagai berikut. Titik tetap pemetaan dari T dapat dicari dengan memetakan x ke dirinya sendiri.

$$\begin{aligned} Tx &= x \\ x^2 - 3x + 4 &= x \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ (x-2)^2 &= 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Sehingga titik tetap dari T adalah $x = 2$.

Pada dasarnya untuk menentukan titik tetap T adalah dengan mencari titik potong T dengan garis $y = x$. Berikut ini diberikan ilustrasi menentukan titik tetap pada Contoh 2.5.1 menggunakan aplikasi *Geogebra*.



Gambar 2.1: Ilustrasi Titik Tetap

Berikut diberikan definisi dari prinsip pemetaan quasi-konraksi yang merupakan perkembangan dari prinsip pemetaan kontraksi Banach(Ćirić, 1974).

Definisi 2.5.2. *(Rezapour, Haghi, & Shahzad, 2010) Misalkan* (X, d) *ruang metrik, pemetaan* $T : X \to X$ *dikatakan pemetaan quasi-kontraksi jika terdapat* $\lambda \in [0, 1)$ *sedemikian hingga*

$$\begin{aligned} & d(Tx, Ty) \\ & \quad \leq \lambda \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Berikut teorema titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik.

Teorema 2.5.1. *(Ćirić, 1974) Diberikan* (X, d) *ruang metrik lengkap, jika* $T : X \to X$ *memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi maka* T *memiliki titik tetap tunggal.*

Berikut ini diberikan contoh kasus titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik.

Contoh 2.5.2. Diberikan ruang metrik (X, d) lengkap dengan $X = [0, 1]$ dan fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dimana

$$d(x, y) = |x - y| \tag{2.19}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Jika didefinisikan $T : X \to X$ dengan

$$Tx = \frac{x}{2}\ , \quad \text{untuk setiap } x \in X, \tag{2.20}$$

maka T merupakan pemetaan yang memiliki titik tetap tunggal. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut. Akan ditunjukkan bahwa T merupakan pemetaan quasi kontraksi, atau dengan kata lain terdapat $\lambda \in [0, 1)$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} &d(Tx, Ty) \\ &\quad \leq \ \lambda \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Perhatikan bahwa untuk $x = y$ jelas bahwa pemetaan yang diberikan memenuhi (2.21). Selanjutnya perhatikan untuk $x \neq y$ diperoleh

$$d\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right|,$$

dan

$$\max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

$$= \max\left\{d(x,y), d\left(x, \frac{x}{2}\right), d\left(y, \frac{y}{2}\right), d(x, \frac{y}{2}), d\left(y, \frac{x}{2}\right)\right\}$$
$$= \max\left\{|x-y|, \left|x - \frac{x}{2}\right|, |y - \frac{y}{2}|, \left|x - \frac{y}{2}\right|, \left|y - \frac{x}{2}\right|\right\}$$

Tanpa mengurangi perumuman misalkan $x > y$, diperoleh

$$\left|x - \frac{x}{2}\right| > \left|y - \frac{y}{2}\right| \tag{2.22}$$

dan

$$\left|x - \frac{x}{2}\right| > \left|y - \frac{x}{2}\right| \tag{2.23}$$

untuk $n \geq 2$. Selanjutanya karena $x > y$ dan $-y < -\dfrac{y}{n}$ maka diperoleh

$$|x-y| < \left|x - \frac{y}{2}\right| \tag{2.24}$$

untuk $n \geq 2$, kemudian karena $x > y$ maka $-\dfrac{x}{2} < -\dfrac{y}{2}$ sehingga berakibat

$$\left|x - \frac{y}{2}\right| > \left|x - \frac{x}{2}\right|, \tag{2.25}$$

untuk $n \geq 2$. Berdasarkan (2.22), (2.23), (2.24), dan (2.25) diperoleh nilai dari

$$\max\left\{d(x,y), d\left(x, \frac{x}{2}\right), d\left(y, \frac{y}{2}\right), d(x, \frac{y}{2}), d\left(y, \frac{x}{2}\right)\right\} = \left|x - \frac{y}{2}\right|.$$

Selajutnya dicari $\lambda \in [0, 1)$ sedemikian hingga memenuhi

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right| &\leq \lambda\left(\left|x - \frac{y}{2}\right|\right) \\ \Leftrightarrow |x-y| &\leq \lambda\,|2x-y| \\ \Leftrightarrow \frac{|x-y|}{|2x-y|} &\leq \lambda. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Perhatikan bahwa

$$\sup\left\{\frac{|x-y|}{|2x-y|},\ 0 \leq x, y \leq 1\ \wedge\ x \geq y\right\} = \frac{1}{2}.$$

Berdasarkan (2.26) dapat dipastikan terdapat λ yang dipilih dari $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ akibatnya T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi. Akibatnya berdasarkan Teorema 2.5.1 T memiliki titik tetap tunggal. Berdasarkan definisi pemetaan, titik tetap yang dimaksud yaitu di $x = 0 \in X$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan tentang bagaimana metode atau langkah–langkah dalam mengerjakan tugas akhir.

3.1 Studi literatur

Pada tahap ini dijelaskan beberapa referensi yang berkaitan dengan ruang metrik parsial rectangular dan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-konstraksi di dalam ruang metrik tersebut. Referensi yang mendukung tugas akhir ini meliputi pengertian dari definisi ruang metrik, ruang metrik rectangular, dan ruang parsial dan diberikan beberapa contoh dari masing-masing ruang tersebut. Kemudian, dijelaskan tentang definisi titik tetap pemetaan pada ruang metrik dan prinsip pemetaan quasi-kontraksi yang berlaku pada ruang metrik.

Pada studi literatur, referensi–referensi yang diperlukan dapat diperoleh melalui jurnal–jurnal atau *paper* yang sesuai dengan topik pada tugas akhir ini. Selain melalui jurnal – jurnal atau *paper* yang terkait, studi literatur dapat diperoleh melalui buku teks yang berkaitan dengan ruang metrik parsial rectangular dan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang tersebut.

3.2 Mengkaji Ruang Metrik Parsial Rectangular

Pada bagian ini dijelaskan tentang definisi formal dari ruang metrik parsial rectangular, kemudian diberikan beberapa contoh himpunan dan fungsi metriknya yang memenuhi kriteria-kriteria dari ruang metrik parsial rectangular. Selanjutnya diberikan teorema-teorema yang menjelaskan kaitan atau hubungan antara ruang metrik parsial rectangular dengan ruang metrik rectangular, kaitan yang dimaksud adalah dapat mengonstruksi ruang metrik parsial rectangular dari ruang metrik parsial dan ruang metrik rectangular ataupun sebaliknya.

Selanjutnya, diberikan definisi barisan konvergen, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan pada ruang metrik parsial rectangular, dimana sifat kelengkapan tersebut akan dipakai untuk mengetahui eksistensi dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik parsial rectangular.

3.3 Mengkaji Titik Tetap Pemetaan Quasi-Kontraksi di Dalam Ruang Metrik Parsial Rectangular

Pada tahap ini menjawab rumusan masalah yang pertama pada bab Pendahuluan. Setelah mengkaji tentang ruang metrik parsial rectangular beserta sifat barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapan di dalamnya, selanjutnya dikaji kaitan antara titik tetap pemetaan di dalam ruang metrik parsial rectangular dengan prinsip pemetaan quasi-kontraksi. Pada tahap ini diberikan syarat cukup dari eksitensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular beserta pembuktiannya.

Berikut langkah-langkah untuk mengtahui eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan di dalam ruang metrik parsial rectangular sebagai berikut.

1. Menjamin ruang metrik parsial rectangular adalah ruang yang lengkap.

2. Memeriksa pemetaan yang diberikan memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi

3. Konstruksi barisan iterasi $\{T^n x\}$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

4. Memeriksa barisan iterasi $\{T^n x\}$ merupakan barisan Cauchy.
5. Mengasumsikan barisan $\{T^n x\}$ konvergen ke $u \in X$, selanjutnya tunjukkan $Tu = u$.
6. Menunjukkan bahwa u tunggal.

3.4 Mengonstruksi Contoh Eksistensi dan Ketunggalan Titik Tetap Pemetaan Quasi-Konstraksi Pada Ruang Metrik Parsial Rectangular

Pada bagian ini menjawab rumusan masalah yang kedua pada bab Pendahuluan. Setelah mengkaji karakterisasi dan pembuktian dari eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular, kemudian pada bagian ini dikonstruksi contoh baru dan pemetaan yang seperti apa yang menunjukkan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap di dalam ruang metrik parsial rectangular dengan pemetaanya memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi. Cara yang digunakan dalam mengkonstruksi contoh bisa berupa :

1. Memodifikasi contoh yang sudah ada pada referensi. Modifikasi di sini dapat berupa mengubah ruang atau mengubah pemetaan yang sudah ada pada referensi. Kemudian ditunjukkan bahwa ruang tersebut lengkap dan pemetaan yang diberikan memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi.
2. Mengkonstruksi ruang metrik parsial rectangular dengan menggunakan teorema yang menunjukkan kaitan ruang metrik parsial rectangular dengan ruang metrik rectangular. Hasil konstruksi tersebut juga dapat disimpulkan kelengkapan dari ruang metrik parsial rectangular yang dikonstruksi.

3.5 Penarikan Kesimpulan

Tahap ini adalah tahapan terakhir pada pengerjaan tugas akhir ini. Tahap ini menjelaskan dan memaparkan kesimpulan dan hasil-hasil apa saja yang didapat selama pengerjaan Tugas akhir.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini diuraikan mengenai ruang metrik parsial rectangular, serta kaitan kelengkapan ruang antara ruang metrik parsial rectangular dan ruang metrik rectangular. Kemudian diberikan juga definisi pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular dan kaitannya dengan eksistensi dan ketunggalan pemetaan di dalamnya. Tidak hanya itu, dikonstruksi contoh ruang metrik parsial rectangular dan pemetaan di dalamnya yang menunjukkan eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi.

4.1 Ruang Metrik Parsial Rectangular

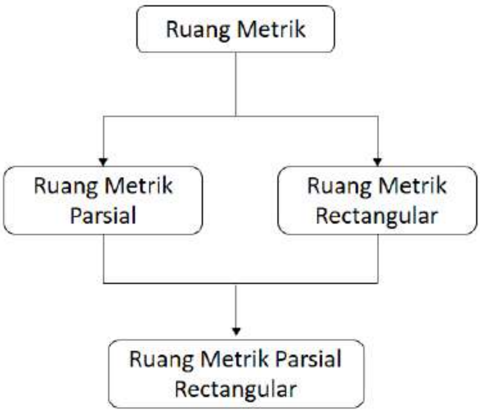
Berikut diberikan definisi dari ruang metrik parsial rectangular yang merupakan perumuman dari ruang metrik parsial dan ruang metrik rectangular yang didefinisikan oleh S.Sukhla pada (Shukla, 2014).

Definisi 4.1.1. *Diberikan* $X \neq \emptyset$ *dan didefinisikan fungsi* $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$. *Fungsi* d_{pr} *merupakan metrik parsial rectangular pada* X *jika untuk setiap* $x, y \in X$ *memenuhi:*
(MPR1) $d_{pr}(x,y) \geq 0$;
(MPR2) $x = y \Leftrightarrow d_{pr}(x,y) = d_{pr}(x,x) = d_{pr}(y,y)$;
(MPR3) $d_{pr}(x,x) \leq d_{pr}(x,y)$;
(MPR4) $d_{pr}(x,y) = d_{pr}(y,x)$;
(MPR5) $d_{pr}(x,y) \leq d_{pr}(x,u) + d_{pr}(u,v) + d_{pr}(v,y) - d_{pr}(u,u) - d_{pr}(v,v),\ \forall u,v \in X \setminus \{x,y\}, u \neq v.$
Pasangan (X, d_{pr}) *disebut ruang metrik parsial rectangular.*

Berdasarkan Definisi 4.1.1, jika $d_{pr}(x, y) = 0$ maka dengan menggunakan sifat (MPR3) diperoleh $d_{pr}(x, x) \leq 0$ akibatnya $d_{pr}(x, x) = 0$ sehingga didapat $d_{pr}(x, x) = d_{pr}(x, y)$, berdasarkan (MPR1) diperoleh $x = y$.

Berdasarkan definisi ruang metrik parsial rectangular yang diberikan, dapat disimpulkan bahwa ruang metrik parsial rectangular merupakan perumuman dari ruang metrik, ruang metrik parsial, dan ruang metrik rectangular. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa setiap ruang metrik parsial dan ruang metrik rectangular adalah ruang metrik parsial rectangular, namun tidak berlaku sebaliknya.

Selanjutnya gambar di bawah ini yang menunjukkan hubungan antara ruang metrik dengan ruang metrik parsial, ruang metrik rectangular, dan ruang metrik parsial rectangular yaitu sebagai berikut.



Gambar 4.1: Ruang Metrik dan Generalisasinya

Berikut diberikan oleh Sukhla pada (Shukla, 2014) contoh himpunan dan fungsi yang berlaku di dalamnya yang memenuhi definisi dari ruang metrik parsial rectangular, beserta penjelasannya.

Contoh 4.1.1. Misalkan $X = [0, a]$ dan $3 \leq a \leq b$ dengan $a, b \in \mathbb{R}^+$. Didefinisikan suatu fungsi $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d_{pr}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{jika } \ x = y, \\ \dfrac{3b + x + y}{2}, & \text{jika}\, x, y \in \{1,2\}, x \neq y, \\ \dfrac{b + x + y}{2}, & x, y \text{ lainnya.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Fungsi d_{pr} merupakan metrik parsial rectangular namun bukan metrik rectangular dan metrik parsial.

Penjelasan dari Contoh 4.1.1 dapat diuraikan sebagai berikut. Ambil $x, y \in X$ dan $w, z \in X \setminus \{x, y\}$ dengan $w \neq z$.

(1) Berdasarkan definisi fungsi d_{pr} pada (4.1), jelas bahwa d_{pr} merupakan fungsi yang bernilai non-negatif, hal tersebut menunjukkan bahwa sifat (MPR1) terpenuhi.

(2) ($\Rightarrow$) Jika $x = y$, dan berdasarkan definisi fungsi d_{pr} pada (4.1) maka didapat $d_{pr}(x, x) = d_{pr}(y, y) = d_{pr}(x, y) = x = y$.

($\Leftarrow$) Jika $d_{pr}(x, x) = d_{pr}(x, y) = d_{pr}(y, y)$ berdasarkan definisi fungsi d_{pr} yang diberikan, maka hal tersebut akan terpenuhi jika $x = y$.
Berdasarkan hal di atas sifat (MPR2) terpenuhi.

(3) Akan ditunjukkan sifat (MPR3) terpenuhi. Misalkan $x, y \in \{1, 2\}$ dengan $x \neq y$ diperoleh

$$d_{pr}(x, x) = x \leq \frac{3b + 1 + 2}{3} = \frac{3}{2}(b+1) = d_{pr}(x, y) \tag{4.2}$$

untuk $b \geq 3$. Misalkan nilai x dan y yang lain, diketahui bahwa $0 \leq x \leq a \leq b$ atau dapat ditulis $x \leq b \Rightarrow$

$2x \leq b + x$, karena juga $0 \leq y \leq b$ maka diperoleh $2x \leq b + x + y$. Sehingga didapat

$$d_{pr}(x, x) = x \leq \frac{b + x + y}{2} = d_{pr}(x, y). \qquad (4.3)$$

Terbukti $d_{pr}(x, x) \leq d_{pr}(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

(4) Berdasarkan definisi fungsi d_{pr}, dengan mudah dapat dibuktikan $d_{pr}(x, y) = d_{pr}(y, x)$, sehingga sifat (MPR4) terpenuhi.

(5) Untuk membuktikan sifat (MPR5) perlu dibagi menjadi beberapa kasus. Misalkan untuk $x \neq y$
<u>Kasus 1</u> :
Jika $x, y \in \{1, 2\}$ dan $w, z \notin \{1, 2\}$ dengan $w \neq z$,

$$\begin{aligned} d_{pr}(x, y) &= \frac{3b + 3}{2} \\ &\leq \frac{b + 1 + w}{2} + \frac{b + w + z}{2} + \frac{b + 2 + z}{2} - w - z \\ &= d_{pr}(x, w) + d_{pr}p(w, z) + d_{pr}(z, y) \\ &\quad -d_{pr}(w, w) - d_{pr}(z, z). \end{aligned}$$

<u>Kasus 2</u> :
Jika $x, y \notin \{1, 2\}$ dan $w, z \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} d_{pr}(x, y) = \frac{b + x + y}{2} &\leq \left(\frac{b + x + y}{2}\right) + 2b \\ &= \frac{b + x + 1}{2} + \frac{3b + 3}{2} + \frac{b + 2 + y}{2} - 1 - 2 \\ &= d_{pr}(x, w) + d_{pr}p(w, z) + d_{pr}(z, y) \\ &\quad -d_{pr}(w, w) - d_{pr}(z, z). \end{aligned}$$

Untuk kasus di atas, ketika nilai $w = 1$ dan $z = 2$, sedangkan untuk sebaliknya diperoleh hasil yang sama.
<u>Kasus 3</u> :
Jika $x, y \notin \{1,2\}$ dan $w, z \in X \setminus \{x,y\} \setminus \{1,2\}$,

$$
\begin{aligned}
d_{pr}(x,y) = \frac{b+x+y}{2} &\leq \frac{3b+x+y}{2} \\
&= \frac{b+x+w}{2} + \frac{b+w+z}{2} + \frac{b+z+y}{2} - w - z \\
&= d_{pr}(x,w) + d_{pr}p(w,z) + d_{pr}(z,y) \\
&\quad -d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z).
\end{aligned}
$$

Sedangkan untuk kasus $x, y \in X$ dengan $x = y$ jelas bahwa (MPR5) terpenuhi. Karena terpenuhi sifat (MPR1),(MPR2),(MPR3), (MPR4), dan (MPR5) sehingga dapat ditarik kesimpulan (X, d_{pr}) adalah ruang metrik parsial rectangular, namun bukan ruang metrik rectangular sebab $d_{pr}(x,x) \neq 0$ untuk setiap $x \in X$ dengan $x \neq 0$. Selain itu, (X, d_{pr}) bukan ruang metrik parsial sebab sifat (PM4) tidak terpenuhi, hal tersebut dapat dilihat sebagi berikut

$$
\begin{aligned}
d_{pr}(1,2) = \frac{3}{2}(b+1) &\geq d_{pr}(1,3) + d_{pr}(3,2) - d_{pr}(3,3) \\
&= \frac{1}{2}(b+4) + \frac{1}{2}(b+5) - 3 = b + \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Contoh 4.1.2. Diberikan himpunan $X = [0,1]$ dan fungsi $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$
d_{pr}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y+1}{2} & , \quad x \neq y, \\ \\ \dfrac{x+y}{2} & , \quad x = y. \end{cases} \tag{4.4}
$$

Pasangan (X, d_{pr}) merupakan ruang metrik parsial rectangular.

Penjelasan dari Contoh 4.1.2 dapat uraikan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $w, z \in X \setminus \{x, y\}$ dengan $w \neq z$.

(1) Berdasarkan himpunan X dan definisi fungsi pada (4.4) jelas bahwa $d_{pr} \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$. Sehingga sifat (MPR1) terpenuhi.

(2) Berdasarkan definisi fungsi pada (4.4) jelas bahwa $x = y$ jika dan hanya jika $d_r(x, x) = d_r(x, y) = d_r(y, y)$. Sehingga sifat (MPR2) terpenuhi.

(3) Perhatikan bahwa

$$d_{pr}(x, x) = \frac{x + x}{2} = x, \tag{4.5}$$

karena $x \leq 1$ didapat $2x \leq x + 1 \leq x + y + 1$ sehingga diperoleh

$$d_{pr}(x, x) = x \leq \frac{x + y + 1}{2} = d_{pr}(x, y). \tag{4.6}$$

Sehingga sifat (MPR3) terpenuhi.

(4) Berdasarkan definisi fungsi pada (4.4) jelas bahwa $d_{pr} = (x, y) = d_{pr}(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$, sehingga sifat (MPR4) terpenuhi.

(5) Untuk membuktikan sifat (MPR5) perlu dibagi beberapa kasus, untuk $x \neq y$ diperoleh

$$\begin{aligned} d_{pr}(x, y) = \frac{x + y + 1}{2} &\leq \frac{x + y + 3}{2} \\ &\leq \frac{x + w + 1}{2} + \frac{w + z + 1}{2} + \frac{z + y + 1}{2} - w - z \\ &= d_{pr}(x, w) + d_{pr}p(w, z) + d_{pr}(z, y) \\ &\quad -d_{pr}(w, w) - d_{pr}(z, z). \end{aligned}$$

sedangkan untuk $x = y$ diperoleh

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,y) &= x \leq x + \frac{3}{2} \\ &\leq \frac{x+w+1}{2} + \frac{w+z+1}{2} + \frac{z+y+1}{2} - w - z \\ &= d_{pr}(x,w) + d_{pr}p(w,z) + d_{pr}(z,y) \\ &\quad -d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z). \end{aligned}$$

Sehingga sifat (MPR5) terpenuhi.

Karena terpenuhi sifat (MPR1),(MPR2),(MPR3),(MPR4) dan (MPR5) sehingga dapat disimpulkan (X, d_{pr}) adalah ruang metrik parsial rectangular.

Contoh 4.1.3. Diberikan $A = \left\{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,$B = \{0, 3\}$, dan $X = A \cup B$. Jika diketahui $\alpha \geq 0$ suatu konstanta dan didefinsikan suatu fungsi $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d_{pr}(x,y) = \begin{cases} \alpha, & x = y; \\ x + \alpha, & x \in A \text{ dan } y \in B; \\ y + \alpha, & x \in B \text{ dan } y \in A; \\ 1 + \alpha, & x, y \text{ yang lain}, \end{cases} \tag{4.7}$$

maka pasangan (X, d_{pr}) adalah ruang metrik parsial rectangular.

Penjelasan untuk contoh di atas dapat diuraikan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $w, z \in X \setminus \{x, y\}$ dengan $w \neq z$.

(1) Berdasarkan definisi fungsi d_{pr} pada (4.7) diperoleh $d_{pr}(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$, sehingga sifat (MPR1) terpenuhi.

(2) Berdasarkan definisi fungsi d_{pr} pada (4.7) diperoleh untuk $x = y$ didapat $d_{pr}(x,x) = \alpha$ dan $d_{pr}(y,y) = \alpha$. Sehingga terbukti $d_{pr}(x,x) = d_{pr}(x,y) = d_{pr}(y,y)$ jika dan hanya jika $x = y$. Berdasarkan hal tersebut, sifat (MPR2) terpenuhi.

(3) Berdasarkan definisi fungsi d_{pr} pada (4.7) diperoleh $d_{pr}(x,x) = \alpha \leq d_{pr}(x,y)$ untuk setiap $x, y \in X$, sifat (MPR3) terpenuhi.

(4) Berdasarkan definisi fungsi pada (4.7) dapat diperoleh $d_{pr}(x,y) = d_{pr}(y,x)$, sifat (MPR4) terpenuhi.

(5) Untuk membuktikan sifat (MPR5) perlu dibagi beberapa kasus.
Kasus 1:
Misalkan $x, w \in B$ dengan $w \neq x$ dan $z, y \in A$ dengan $z \neq y$,

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,y) &= \frac{1}{2n_1} + \alpha \leq 2 + \frac{1}{2n_2} + \alpha \\ &= 1 + \alpha + \frac{1}{2n_2} + \alpha + 1 + \alpha - \alpha - \alpha \\ &= d_{pr}(x,w) + d_{pr}(w,z) + d_{pr}(z,y) \\ &\quad - d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z) \end{aligned}$$

untuk $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Kasus 2:
Misalkan $x, z \in B$ dengan $x \neq z$ dan $w, y \in A$ dengan $w \neq y$,

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,y) &= \frac{1}{2n_1} + \alpha \leq \frac{1}{n_2} + \frac{1}{2n_1} + \alpha \\ &= \frac{1}{2n_2} + \alpha + \frac{1}{2n_2} + \alpha + \frac{1}{2n_1} + \alpha - \alpha - \alpha \\ &= d_{pr}(x,w) + d_{pr}(w,z) + d_{pr}(z,y) \\ &\quad - d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z) \end{aligned}$$

untuk $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
<u>Kasus 3</u> :
Misalkan $x, w \in A$ dengan $w \neq x$ dan $z, y \in B$ dengan $z \neq y$.

$$\begin{aligned}
d_{pr}(x,y) &= \frac{1}{2n_1} + \alpha \leq 2 + \frac{1}{2n_2} + \alpha \\
&= 1 + \alpha + \frac{1}{2n_2} + \alpha + 1 + \alpha - \alpha - \alpha \\
&= d_{pr}(x,w) + d_{pr}(w,z) + d_{pr}(z,y) \\
&\quad - d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z)
\end{aligned}$$

untuk $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
<u>Kasus 4</u> :
Misalkan $x, z \in A$ dengan $z \neq x$ dan $y, w \in B$ dengan $w \neq y$,

$$\begin{aligned}
d_{pr}(x,y) &= \frac{1}{2n_1} + \alpha \leq \frac{1}{2n_2} + \frac{1}{2n_1} + \alpha \\
&= \frac{1}{2n_1} + \alpha + \frac{1}{2n_2} + \alpha + \frac{1}{2n_2} + \alpha - \alpha - \alpha \\
&= d_{pr}(x,w) + d_{pr}(w,z) + d_{pr}(z,y) \\
&\quad - d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z)
\end{aligned}$$

untuk $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

<u>Kasus 5</u> :
Misalkan $x, w, z \in A$ dengan $w \neq x \neq z$ dan $y \in B$.

$$\begin{aligned}
d_{pr}(x,y) &= \frac{1}{2n_1} + \alpha \leq 2 + \frac{1}{2n_2} + \alpha \\
&= 1 + \alpha + 1 + \alpha + \frac{1}{2n_2} + \alpha - \alpha - \alpha \\
&= d_{pr}(x,w) + d_{pr}(w,z) + d_{pr}(z,y) \\
&\quad - d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z)
\end{aligned}$$

untuk $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
<u>Kasus 6</u>:

Misalkan $x, w, z \in A$ dengan $w \neq x \neq z$ dan $z \in B$.

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,y) &= 1+\alpha \leq 1+\alpha+\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2} \\ &= 1+\alpha+\frac{1}{2n_1}+\alpha+\frac{1}{2n_2}+\alpha-\alpha-\alpha \\ &= d_{pr}(x,w)+d_{pr}(w,z)+d_{pr}(z,y) \\ &\quad -d_{pr}(w,w)-d_{pr}(z,z) \end{aligned}$$

untuk $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Kasus 7:
Misalkan $x, y, w, z \in A$ dengan $x \neq z \neq w$ dan
$y \neq z \neq w$.

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,y) &= 1+\alpha \leq 3+\alpha \\ &= 1+\alpha+1+\alpha+1+\alpha-\alpha-\alpha \\ &= d_{pr}(x,w)+d_{pr}(w,z)+d_{pr}(z,y) \\ &\quad -d_{pr}(w,w)-d_{pr}(z,z) \end{aligned}$$

Karena terpenuhi sifat (MPR1),(MPR2),(MPR3),(MPR4) dan (MPR5) sehingga dapat disimpulkan (X, d_{pr}) adalah ruang metrik parsial rectangular.

Berikut oleh Sukhla(Shukla, 2014) diberikan teorema yang menjelaskan bahwa dapat dikonstruksi fungsi metrik parsial rectangular dari sembarang fungsi metrik rectangular.

Teorema 4.1.1. *Diberikan sebarang ruang metrik rectangular (X, d_r) dan konstanta $\alpha > 0$, jika didefinisikan suatu fungsi $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan $d_{pr}(x,y) = d_r(x,y) + \alpha$ untuk setiap $x, y \in X$, maka fungsi d_{pr} adalah metrik parsial rectangular.*

Bukti. Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $w, z \in X \setminus \{x, y\}$ berbeda.

(1) Diketahui fungsi d_r suatu metrik rectangular, berdasarkan Definisi 2.4.1 memenuhi sifat (RM1)

artinya $d_r(x,y) \geq 0$. Karena diberikan konstanta $\alpha > 0$, akibatnya $d_{pr}(x,y) = d_r(x,y) + \alpha \geq 0$. Berdasarkan hal tersebut maka sifat (MPR1) terpenuhi.

(2) ($\Rightarrow$) Jika $x = y$, maka berdasarkan Definisi 2.4.1 memenuhi sifat (RM2) sehingga $d_r(x,y) = d_r(x,x) = d_r(y,y) = 0$, akibatnya $d_{pr}(x,y) = 0 + \alpha = d_r(x,x) + \alpha = d_{pr}(x,y)$. Dengan cara yang sama diperoleh $d_{pr}(x,y) = d_{pr}(y,y)$, sehingga terbukti $d_{pr}(x,x) = d_{pr}(x,y) = d_{pr}(y,y)$.

($\Leftarrow$) Jika $d_{pr}(x,y) = d_r(x,y) + \alpha = d_{pr}(x,x) = d_{pr}(y,y) = \alpha$, maka $d_r(x,y) = 0$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 memenuhi sifat (RM2), sehingga diperoleh $x = y$. Berdasarkan hal tersebut maka sifat (MPR2) terpenuhi.

(3) Berdasarkan definisi pemetaan diperoleh bahwa $d_{pr}(x,x) = \alpha$, kemudian karena d_r suatu fungsi metrik rectangular dan berdasarkan (MPR1) didapat $d_r(x,y) \geq 0$. Dengan menggunakan fakta tersebut, didapat $d_{pr}(x,x) = \alpha \leq d_r(x,y) + \alpha = d_{pr}(x,y)$. Berdasarkan hal tersebut maka sifat (MPR3) terpenuhi.

(4) Berdasarkan Definisi 2.4.1 pada sifat (RM3) diperoleh $d_{pr}(x,y) = d_r(x,y) + \alpha = d_r(y,x) + \alpha = d_{pr}(y,x)$, maka sifat (MPR4) terpenuhi.

(5) Berdasarkan Definisi 2.4.1 pada sifat (RM4) diperoleh

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,y) &= d_r(x,y) + \alpha \\ &\leq d_r(x,w) + d_r(w,z) + d_r(z,y) - \alpha \\ &\leq d_r(x,w) + \alpha + d_r(w,z) + \alpha + d_r(z,y) \\ &\quad +\alpha - \alpha - \alpha \\ &= d_{pr}(x,w) + d_{pr}(w,z) + d_{pr}(z,y) \\ &\quad -d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z). \end{aligned}$$

Sehingga, berdasarkan hal tersebut sifat (MPR5) terpenuhi.

Karena terpenuhi sifat (MPR1),(MPR2),(MPR3), (MPR4), dan (MPR5) akibatnya dapat disimpulkan (X, d_{pr}) adalah ruang metrik parsial rectangular. $\square$

Berikut cara lain yang diberikan oleh Sukhla pada (Shukla, 2014) untuk mengkonstruksi suatu metrik parsial rectangular dari sembaran ruang metrik rectangular.

Teorema 4.1.2. *Diberikan sebarang (X, d_r) merupakan ruang metrik rectangular dan $x_0 \in X$ yang mempunyai sifat $d_r(x, x_0) \leq d_r(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$ berbeda. Jika didefinisikan fungsi $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan*

$$d_{pr}(x, y) = \frac{d_r(x, y) + d_r(x, x_0) + d_r(y, x_0)}{2}, \quad \forall x, y \in X \tag{4.8}$$

maka (X, d_{pr}) adalah suatu ruang metrik parsial rectangular.

Bukti. Ambil sebarang $x, y \in X$, kemudian dan $x_0 \in X$ sedemikian hingga $d_r(x, x_0) \leq d_r(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$. Akan dibuktikan d_{pr} suatu metrik parsial rectangular.

(1) Berdasarkan definisi dari fungsi d_{pr} pada (4.8), diperoleh $d_{pr}(x, y) \geq 0$, sehingga untuk sifat (MPR1) terpenuhi.

(2) $(\Leftarrow)$Jika $x = y$ diperoleh $d_{pr}(x, x) = d_r(x, x_0)$ dan $d_{pr}(y, y) = d_r(y, x_0)$, maka diperoleh $d_{pr}(x, x) = d_{pr}(x, y) = d_{pr}(y, y)$.
$(\Rightarrow)$ Jika $d_{pr}(x, y) = d_{pr}(x, x) = d_{pr}(y, y)$, maka diperoleh

$$\frac{d_r(x, y) + d_r(x, x_0) + d(y, x_0)}{2} = d_r(x, x_0) = d_r(y, x_0)$$

sehingga berakibat $d_r(x,y) = 0$, karena d_r metrik rectangular diperoleh $x = y$. Berdasarkan hal tersebut sifat (MPR2) terpenuhi.

(3) Berdasarkan definisi dari fungsi d_{pr} pada (4.8)didapat $d_{pr}(x,x) = d_r(x,x_0)$ dan karena $d_r(x,x_0) \leq d_r(x,y)$ diperoleh $2d_r(x,x_0) \leq d_r(x,y) + d_r(x,x_0)$, sehingga didapat

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,x) &= d_r(x,x_0) \\ &\leq \frac{d_r(x,y) + d_r(x,x_0) + d_r(y,x_0)}{2} \\ &= d_{pr}(x,y). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Berdasarkan hal tersebut sifat (MPR3) terpenuhi.

(4) Untuk sifat (MPR4) terpenuhi sebagaimana dapat ditunjukkan di bawah ini

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,y) &= \frac{d_r(x,y) + d_r(x,x_0) + d_r(y,x_0)}{2} \\ &= \frac{d_r(y,x) + d_r(y,x_0) + d_r(x,x_0)}{2} \\ &= d_{pr}(y,x). \end{aligned} \tag{4.10}$$

(5) Untuk membuktikan sifat (MPR5), ambil sebarang $x,y,w,z \in X$, $x \neq y,w,z \in X \setminus \{x,y\}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,y) &= \frac{d_r(x,y) + d_r(x,x_0) + d_r(y,x_0)}{2} \\ &\leq \tfrac{1}{2}\left[d_r(x,w) + d_r(w,z) + d_r(z,y)\right. \\ &\quad \left. + d_r(x,x_0) + d_r(y,x_0)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\left[d_r(x,w)+d_r(x,x_0)+d_r(w,x_0)\right] \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\left[d_r(w,z)+d_r(w,x_0)+d_r(z,x_0)\right] \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\left[d_r(z,y)+d_r(z,x_0)+d_r(y,x_0)\right] \\
&\quad -d_r(w,x_0)-d_r(z,x_0) \\
&= d_{pr}(x,w)+d_{pr}(w,z)+d_{pr}(z,y) \\
&\quad -d_{pr}(w,w)-d_{pr}(z,z)
\end{aligned}
$$

Karena terpenuhi (MPR1),(MPR2),(MPR3), (MPR4), dan (MPR5) akibatnya (X, d_{pr}) adalah ruang metrik parsial rectangular.

□

Contoh 4.1.4. Jika diberikan himpunan $A = \left\{ \dfrac{1}{2n} : n \in \mathbf{N} \right\}$ dan $X = A \cup \{0\}$ didefinisikan $d_r : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$
d_r(x,y) = \begin{cases} 0 \ , & \text{jika } x = y; \\ y \ , & \text{jika } x = 0,\ y \in A; \\ 1 \ , & \text{jika } x \neq y, \quad x \in X \setminus \{0\}, \end{cases} \tag{4.11}
$$

maka (X, d_{pr}) ruang metrik rectangular. Perhatikan bahwa $d_r(x,0) \leq d_r(x,y)$ untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x \neq y$. Jika didefinisikan $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$
\begin{aligned}
d_{pr}(x,y) &= \frac{d_{pr}(x,y)+d_{pr}(x,0)+d_{pr}(y,0)}{2} \\
&= \begin{cases} 0 \ , & \text{jika } x = y; \\ y \ , & \text{jika } x = 0,\ y \in A; \\ \dfrac{1+x+y}{2} \ , & \text{jika } x \neq y, \quad x \in X \setminus \{0\}, \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

maka (X, d_{pr}) adalah ruang metrik parsial rectangular.

Penjelasan dari Contoh 4.1.4 dapat diuraikan sebagai berikut. Akan ditunjukkan bahwa (X, d_r) ruang metrik rectangular.

(1) Berdasarkan definisi fungsi d_r pada (4.11) jelas bahwa untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $d_r(x, y) \geq 0$, sehingga sifat (RM1) terpenuhi.

(2) Berdasarkan definisi fungsi d_r pada (4.11) jelas bahwa $d_r(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$, sehingga sifat (RM2) terpenuhi.

(3) Berdasarkan definisi fungsi d_r pada (4.11) jelas bahwa $d_r(x, y) = d_r(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$. Akibatnya sifat (RM3) terpenuhi.

(4) Untuk menunjukkan sifat (RM4) perlu dibagi beberapa kasus.
Kasus 1: Jika $x = y$ dan $w, z \in X \setminus \{x, y\}$ maka jelas bahwa pertidaksamaan $d_r(x, y) \leq d_r(x, w) + d_r(w, z) + d_r(z, y)$ terpenuhi.
Kasus 2: Jika $x = 0$, $y \in A$, dan $w, z \in X \setminus \{x, y\}$,

$$\begin{aligned} d_r(x, y) = \frac{1}{2n_1} &\leq \frac{1}{2n_2} + 2 = \frac{1}{2n_2} + 1 + 1 \\ &= d_r(x, w) + d_r(w, z) + d_r(z, y), \end{aligned}$$

dengan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Kasus 3: Jika $x, y \in X \setminus \{0\}$, $x \neq y$, $w = 0$, dan $z \in X \setminus \{x, y\}$

$$\begin{aligned} d_r(x, y) = 1 &\leq \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2} + 1 \\ &= d_r(x, w) + d_r(w, z) + d_r(z, y), \end{aligned}$$

dengan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Kasus 4: Jika $x, y \in X \setminus \{0\}$, $x \neq y$, $z = 0$, dan $w \in X \setminus \{x, y\}$

$$\begin{aligned} d_r(x,y) = 1 &\leq 1 + \frac{1}{2n_2} + \frac{1}{2n_1} \\ &= d_r(x,w) + d_r(w,z) + d_r(z,y), \end{aligned}$$

dengan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

Karena terpenuhi (RM1),(RM2),(RM3), dan (RM4) maka (X, d_r) adalah ruang metrik rectangular. Misalkan $x = 0$ dan $y \in A$ dengan $y = \frac{1}{2n_1}$ untuk $n_1 \in \mathbb{N}$ diperoleh

$$d_r(x,0) = 0 \leq \frac{1}{2n_1} = d_r(x,y). \tag{4.13}$$

Misalkan $x, y \in A$ dimana $x = \frac{1}{2n_1}$ dan $y = \frac{1}{2n_2}$ untuk $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ dengan $n_1 \neq n_2$ diperoleh

$$d_r(x,0) = \frac{1}{2n_1} \leq 1 = d_r(x,y). \tag{4.14}$$

Berdasarkan (4.13) dan (4.14) terbukti bahwa $d_r(x,0) \leq d_r(x,y)$ untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x \neq y$. Berdasarkan Teorema 4.1.2 dengan mengambil $x_0 = 0 \in X$ berakibat fungsi d_{pr} pada (4.12) adalah fungsi metrik parsial rectangular.

Berikut dikonstruksi cara lain oleh penulis untuk mengkonstruksi metrik parsial rectangular dari ruang metrik rectangular.

Teorema 4.1.3. *Diberikan sebarang (X, d_r) adalah ruang metrik rectangular dengan $X = \mathbb{R}$. Jika didefinisikan suatu fungsi $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan*

$$d_{pr}(x,y) = \frac{|x| + |y| + d_r(x,y)}{2} \tag{4.15}$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, *maka* d_{pr} *adalah metrik parsial rectangular.*

Bukti. Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $w, z \in X \setminus \{x, y\}$ dengan $w \neq z$.

(1) Berdasarkan definisi d_{pr} jelas bahwa d_{pr} fungsi bernilai non-negatif sehingga sifat (MPR1) terpenuhi.

(2) ($\Rightarrow$) Jika $x = y$ dan karena d_r suatu metrik rectangular, maka berdasarkan Definisi 2.4.1 berlaku sifat (RM2).

$$d_{pr}(x, x) = \frac{|x| + |x| + d_r(x, x)}{2} = \frac{|x| + |x|}{2} = |x| \tag{4.16}$$

dan

$$d_{pr}(y, y) = \frac{|y| + |y| + d_r(y, y)}{2} = \frac{|y| + |y|}{2} = |y|, \tag{4.17}$$

karena $x = y$, berakibat $|x| = |y|$ atau dengan kata lain $d_{pr}(x, x) = d_{pr}(y, y)$. Perhatikan bahwa karena $x = y$

$$d_{pr}(x, y) = \frac{|x| + |y| + d_r(x, y)}{2} = \frac{|x| + |y|}{2} = |x| = d_r(x, x), \tag{4.18}$$

sehingga terbukti $d_{pr}(x, x) = d_{pr}(x, y) = d_{pr}(y, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

($\Leftarrow$) Jika $d_{pr}(x, x) = d_{pr}(x, y)$, maka berdasarkan (2.1) dapat ditulis

$$d_{pr}(x, y) = \frac{|x| + |y| + d(x, y)}{2} = d_{pr}(x, x) = |x|, \tag{4.19}$$

dari persamaan (4.19) diperoleh $|y| + d_r(x, y) = |x|$. Kemudian, diketahui $d_{pr}(x, x) = d_{pr}(y, y)$ maka diperoleh

$$|y| + d_r(x, y) = |x| = d_{pr}(x, x) = d_{pr}(y, y) = |y|. \tag{4.20}$$

Berdasarkan persamaan (4.20) diperoleh bahwa $d_r(x,y) = 0$. Karena d_r merupakan suatu metrik rectangular, berdasarkan Definisi 2.4.1 berarti d_r memenuhi sifat (RM2), sehingga diperoleh $x = y$. Berdasarkan hal tersebut, maka sifat (MPR2) terpenuhi.

(3) Berdasarkan definisi dari d_{pr}, diperoleh

$$2d_{pr}(x,y) = |x| + |y| + d_r(x,y) \geq |x| + |y|, \tag{4.21}$$

dari persamaan (4.16) dan (4.17) dan karena d_r adalah suatu metrik rectangular didapat

$$\begin{aligned} 2d_{pr}(x,y) &= |x| + |y| + d_r(x,y) \\ &\geq |x| + |y| \\ &= d_{pr}(x,x) + d_{pr}(y,y) \ . \\ &= d_{pr}(x,x) + d_{pr}(x,x) \\ &= 2d_{pr}(x,x) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dari (4.22) diperoleh $2d_{pr}(x,y) \geq 2d_{pr}(x,x)$, sehingga terbukti $d_{pr}(x,x) \leq d_{pr}(x,y)$ $\forall x, y \in X$, maka sifat (MPR3) terpenuhi.

(4) Dengan menggunakan sifat (RM3) pada Definisi 2.4.1, diperoleh

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,y) &= \frac{|x| + |y| + d_r(x,y)}{2} \\ &= \frac{|y| + |x| + d_r(y,x)}{2} \\ &= d_{pr}(y,x), \end{aligned} \tag{4.23}$$

untuk setiap $x, y \in X$, sehingga sifat (MPR4) terpenuhi.

(5) Berdasarkan definisi d_{pr} didapat

$$d_{pr}(x,y) = \frac{|x| + |y| + d_r(x,y)}{2},$$

sehingga diperoleh beberapa persamaan

$$d_r(x,y) = 2d_{pr}(x,y) - |x| - |y|, \tag{4.24}$$

$$d_r(x,z) = 2d_{pr}(x,z) - |x| - |z|, \tag{4.25}$$

$$d_r(z,w) = 2d_{pr}(z,y) - |z| - |w|, \tag{4.26}$$

$$d_r(w,y) = 2d_{pr}(w,y) - |w| - |y|. \tag{4.27}$$

Berdasarkan Definisi 2.4.1 sifat (RM4) berlaku pertidaksamaan

$$d_r(x,y) \leq d_r(x,z) + d_r(z,w) + d_r(w,y), \tag{4.28}$$

substitusi persamaan (4.24),(4.25),(4.26) dan (4.27) pada persamaan (4.28), didapat

$$\begin{aligned} &2d_{pr}(x,y) - |x| - |y| \\ &\quad \leq \quad 2d_{pr}(x,z) - |x| - |z| + 2d_{pr}(z,y) - |z| - |w| \\ &\qquad\quad +2d_{pr}(w,y) - |w| - |y| \\ &\quad = \quad 2d_{pr}(x,z) + 2d_{pr}(z,w) + 2d_{pr}(w,y) \\ &\qquad\quad -|x| - |y| - 2|w| - 2|z| \end{aligned} \tag{4.29}$$

Berdasarkan persamaan (4.28) diperoleh

$$\begin{aligned} &2d_{pr}(x,y) \\ &\quad \leq \quad 2d_{pr}(x,z) + 2d_{pr}(z,w) + 2d_{pr}(w,y) \\ &\qquad\quad -2d_{pr}(z,z) - 2d_{pr}(w,w). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Sehingga terbukti

$$\begin{aligned} d_{pr}(x,y) \quad \leq \quad & d_{pr}(x,w) + d_{pr}(w,z) + p(w,y) \\ & -d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z), \end{aligned} \tag{4.31}$$

untuk setiap $x, y, z \in X$, sehingga sifat (MPR5) terpenuhi.

Karena terpenuhi (MPR1),(MPR2),(MPR3), (MPR4), dan (MPR5) akibatnya (X, d_{pr}) adalah ruang metrik parsial rectangular.

$\square$

Tidak hanya itu saja, Sukhla pada (Shukla, 2014) juga menunjukkan bahwa dapat dikonstruksi fungsi metrik rectangular dari sebarang fungsi metrik parsial rectangular.

Teorema 4.1.4. *Diberikan $X \neq \emptyset$, jika (X, d_{pr}) adalah ruang metrik parsial rectangular dan didefinisikan fungsi $d_r : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan*

$$d_r(x,y) = 2d_{pr}(x,y) - d_{pr}(x,x) - d_{pr}(y,y), \quad \forall\ x,y \in X, \tag{4.32}$$

maka (X, d_r) adalah ruang metrik rectangular.

Bukti. Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $z, w \in X \setminus \{x, y\}$.

(1) Diketahui d_{pr} adalah metrik parsial rectangular, maka berlaku sifat (MPR3) dan (MPR4) pada Definisi 4.1.1, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d_r(x,y) &= 2d_{pr}(x,y) - d_{pr}(x,x) - d_{pr}(y,y) \\ &= d_{pr}(x,y) - d_{pr}(x,x) + d_{pr}(x,y) - d_{pr}(y,y) \\ &= d_{pr}(x,y) - d_{pr}(x,x) + d_{pr}(y,x) - d_{pr}(y,y) \\ &\geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Sehingga terbukti $d_r(x,y) \geq 0$, atau dengan kata lain untuk sifat (RM1) terpenuhi.

(2) $(\Rightarrow)$ Diketahui $d_r(x,y) = 0$, diperoleh persamaan $2d_{pr}(x,y) - d_{pr}(x,x) - d_{pr}(y,y) = 0$, supaya persamaan tersebut terpenuhi haruslah $d_{pr}(x,y) - d_{pr}(x,x) = 0$ dan $d_{pr}(x,y) - d_{pr}(y,y) = 0$. Sehingga diperoleh $d_{pr}(x,x) = d_{pr}(x,y) = d_{pr}(y,y)$, berdasarkan Definisi

4.1.1 sifat (MPR2) dapat disimpulkan $x = y$.

($\Leftarrow$) Diketahui $x = y$, sehingga dengan mudah didapat $d_r(x,y) = 2d_{pr}(x,y) - d_{pr}(x,x) - d_{pr}(y,y) = 2d_{pr}(x,x) - d_{pr}(x,x) - d_{pr}(x,x) = 0$.
Berdasarkan hal tersebut maka sifat (RM2) terpenuhi.

(3) Berdasarkan Definisi 4.1.1 sifat (MPR4) diperoleh

$$\begin{aligned} d_r(x,y) &= 2d_{pr}(x,y) - d_{pr}(x,x) - d_{pr}(y,y) \\ &= 2d_{pr}(y,x) - d_{pr}(y,y) - d_{pr}(x,x) \\ &= d_r(y,x), \end{aligned} \tag{4.33}$$

sehingga sifat (RM3) terpenuhi.

(4) Berdasarkan Definisi 4.1.1 sifat (MPR5), didapat

$$\begin{aligned} d_r(x,y) &= 2d_{pr}(x,y) - d_{pr}(x,x) - d_{pr}(y,y) \\ &\leq 2(d_{pr}(x,z) + d_{pr}(z,w) + d_{pr}(w,y) \\ &\quad -d_{pr}(z,z) - d_{pr}(w,w)) - d_{pr}(x,x) \\ &\quad -d_{pr}(y,y) \\ &= 2d_{pr}(x,z) + 2d_{pr}(z,w) + 2d_{pr}(w,y) \\ &\quad -2d_{pr}(z,z) - 2d_{pr}(w,w) - d_{pr}(x,x) \\ &\quad -d_{pr}(y,y) \\ &= [2d_{pr}(x,z) - d_{pr}(x,x) - d_{pr}(z,z)] \\ &\quad +[2d_{pr}(z,w) - d_{pr}(z,z) - d_{pr}(w,w)] \\ &\quad +[2d_{pr}(w,y) - d_{pr}(w,w) - d_{pr}(y,y)] \\ &= d_r(x,z) + d_r(z,w) + d_r(w,y), \end{aligned} \tag{4.34}$$

sehingga sifat (RM4) terpenuhi.

Karena terpenuhi sifat (RM1),(RM2),(RM3), dan (RM4) akibatnya (X, d_r) adalah ruang metrik rectangular. $\square$

4.2 Konvergensi Barisan dan Kelengkapan pada Ruang Metrik Parsial Rectangular

Pada subbab ini dibahas tentang sifat-sifat barisan pada ruang metrik parsial rectangular meliputi barisan konvergen, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan metrik parsial rectangular. Kemudian, dibahas kaitan kelengkapan ruang antara ruang metrik parsial rectangular dengan ruang metrik parsial. Berikut diberikan definisi dari barisan konvergen di dalam ruang metrik parsial rectangular.

Definisi 4.2.1. *Diberikan (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular dan barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang tersebut. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika*

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = d_{pr}(x, x), \tag{4.35}$$

atau dengan kata lain untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $d_{pr}(x_n, x) - d_{pr}(x, x) < \varepsilon$ untuk $n \geq n_0$.

Pada definisi barisan konvergen di dalam ruang metrik parsial rectangular, hakikatnya sama dengan definisi barisan konvergen di ruang metrik. Jika pada ruang metrik (X, d) misalkan diberikan barisan $\{x_n\}$ pada X, berdasarkan Definisi 2.2.2 barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen di X jika terdapat $x \in X$ sedemikian hingga $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, atau dengan kata lain nilai dari $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x)$ adalah mendekati nilai jarak x ke dirinya sendiri. Sehingga dapat dituliskan $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = d(x, x)$, hal tersebut sama seperti definisi barisan konvergen dalam ruang metrik parsial rectangular, hal yang sedikit membedakan adalah pada nilai $\lim\limits_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x)$ tidak selalu nol sebab mengacu pada sifat jarak suatu titik ke dirinya sendiri pada ruang metrik parsial rectangular.

Selanjutnya, diberikan definisi dari barisan Cauchy di dalam ruang metrik parsial rectangular. Barisan Cauchy ini memiliki peranan penting dalam pembuktian teorema titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di ruang metrik parsial rectangular.

Definisi 4.2.2. *Barisan* $\{x_n\}$ *di dalam ruang metrik parsial rectangular* (X, d_{pr}) *disebut barisan Cauchy pada* (X, d_{pr})*, jika nilai dari* $\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m)$ *ada dan berhingga.*

Berdasarkan Definisi 4.2.2 terdapat sedikit perbedaan antara barisan Cauchy di dalam ruang metrik parsial rectangular dan ruang metrik. Pada ruang metrik (X, d) barisan $\{x_n\}$ di X disebut barisan Cauchy jika nilai dari $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$. Sedangkan pada ruang metrik parsial rectangular (X, d_{pr}) barisan $\{x_n\}$ di X disebut barisan Cauchy jika nilai dari $\lim_{n,m\to\infty}$ ada dan berhingga, tidak harus mendekati nol.

Kemudian, diberikan definisi kelengkapan dari ruang metrik parsial rectangular. Sifat kelengkapan ini penting untuk diketahui sebab digunakan untuk mengetahui eksistensi titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular.

Definisi 4.2.3. *Misalkan* (X, d_{pr}) *ruang metrik parsial rectangular disebut lengkap, jika untuk setiap barisan Cauchy* $\{x_n\}$ *di* X*, terdapat* $x \in X$ *sedemikian hingga*

$$\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = d_{pr}(x, x). \qquad (4.36)$$

Berikut ini diberikan contoh kasus yang menjelasakan masalah konvergensi barisan dan kelengkapan di dalam ruang metrik parsial rectangular.

Contoh 4.2.1. Misalkan (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular dengan X dan fungsi metrik d_{pr} berdasarkan

Contoh 4.1.3. Diberikan $\{x_n\}$ barisan di X dengan $x_n = \dfrac{1}{2n}$. Sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2n} + \alpha\right] = \alpha = p(0, 0) \tag{4.37}$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, 3) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2n} + \alpha\right] = \alpha = p(3, 3), \tag{4.38}$$

oleh karena itu, $\{x_n\}$ mempunyai dua nilai kekonvergenan yaitu 0 dan 3. Berdasarkan hal tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa barisan di ruang metrik parsial rectangular limit konvergensi barisannya tidak selalu tunggal.

Contoh 4.2.2. Misalkan $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, d_{pr})$ ruang metrik parsial rectangular dengan $d_{pr}(x, y) = \max(x, y)$, hal tersebut dapat ditunjukkan dengan $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, d_{pr})$ merupakan ruang metrik parsial pada Contoh 2.3.1. Misalkan diberikan barisan $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ di $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, d_{pr})$, maka berdasarkan Definisi 4.2.1 diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \max\left(\frac{1}{n}, x\right) = \max(0, x) = \max(x, x), \tag{4.39}$$

sehingga berdasarkan (4.39) terpenuhi untuk $x \geq 0$ artinya barisan $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ limit konvergensi barisannya tidak tunggal.

Dari Contoh 4.2.1 dan Contoh 4.2.2 yang telah diberikan, menunjukkan bahwa limit konvergensi barisan pada ruang metrik parsial rectangular tidak selalu tunggal, tidak seperti pada ruang metrik.

Contoh 4.2.3. Misalkan $X = (0,1]$ dan diberikan sebuah fungsi $d_{pr}(x,y) = |x^2 - y^2| + 3, \quad \forall x,y \in X$. Dengan menggunakan Teorema 4.1.1, terbukti bahwa (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular sebab (X, d_r) adalah ruang metrik sekaligus ruang metrik rectangular dengan definsi fungsi d_r adalah $d_r(x,y) = |x^2 - y^2|$ untuk setiap $x, y \in X$. Kemudian diberikan barisan $\{x_n\}$ di X dengan $x_n = \dfrac{1}{2n}$, barisan tersebut merupakan barisan Cauchy di X sebab

$$\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m}\right) = \lim_{n,m\to\infty}\left(\left|\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4m^2}\right| + 3\right) = 3. \tag{4.40}$$

Namun barisan $\{x_n\}$ tidak konvergen di X, sebab misalkan jika dicari

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}\left(\frac{1}{2n}, x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{4n^2} - x^2\right| + 3\right) = d_{pr}(x,x) = 3 \tag{4.41}$$

maka berakibat $x = 0 \notin (0,1]$, sehingga (X, p) tidak lengkap.

Berikut dikonstruksi beberapa teorema yang menjelaskan kaitan sifat kelengkapan antara ruang metrik parsial rectangular dan ruang metrik rectangular.

Teorema 4.2.1. *Diberikan sembarang ruang metrik parsial rectangular (X, d_{pr}) dan jika dikonstruksi fungsi d_r dengan*

$$d_r(x,y) = 2d_{pr}(x,y) - d_{pr}(x,x) - d_{pr}(y,y), \quad \forall\, x,y \in X, \tag{4.42}$$

maka (X, d_r) merupakan ruang metrik rectangular. Berdasarkan hal tersebut, ruang (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular lengkap jika dan hanya jika ruang (X, d_r) ruang metrik rectangular lengkap.

Bukti. Pada Teorema 4.1.4 telah dibuktikan bahwa (X, d_r) ruang metrik rectangular. Selanjutnya akan dibuktikan

bahwa (X, d_{pr}) lengkap jika dan hanya jika (X, d_r) lengkap.
$(\Rightarrow)$ Diketahui (X, d_{pr}) lengkap. Ambil sebarang barisan Cauchy $\{x_n\}$ di (X, d_{pr}), sehinga berdasarkan Definisi 4.2.2 nilai $\lim\limits_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m)$ ada dan berhingga. Misalkan nilai dari $\lim\limits_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m) = \lim\limits_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x_n) = \lim\limits_{m\to\infty} d_{pr}(x_m, x_m) = a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, sehingga didapat

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty} d_r(x_n, x_m) \\
&\quad = \lim_{n,m\to\infty} [2d_{pr}(x_n, x_m) - d_{pr}(x_n, x_n) - d_{pr}(x_m, x_m)] \\
&\quad = \lim_{n,m\to\infty} 2d_{pr}(x_n, x_m) - \lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_n) - \\
&\qquad \lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_m, x_m) \\
&\quad = 2a - a - a = 0,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

artinya $\lim\limits_{n,m\to\infty} d_r(x_n, x_m) = 0$, berdasarkan Definisi 2.4.3 dapat disimpulkan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di (X, d_r). Karena (X, d_{pr}) lengkap berkibat barisan Cauchy $\{x_n\}$ konvergen, katakanlah $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ sehingga berdasarkan Definisi 4.2.1 dan Definisi 4.2.3 diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = d_{pr}(x, x). \tag{4.44}$$

Berdasarkan (4.44) diperoleh $\lim\limits_{n\to\infty} [d_{pr}(x_n, x) - d_{pr}(x_n, x_n)] = 0$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} [d_{pr}(x_n, x) - d_{pr}(x, x)] = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} d_r(x_n, x) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} [2d_{pr}(x_n, x) - d_{pr}(x_n, x_n) - d_{pr}(x, x)] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} [d_{pr}(x_n, x) - d_{pr}(x_n, x_n)] \\
&\qquad + \lim_{n\to\infty} [d_{pr}(x_n, x) - d_{pr}(x, x)] \\
&\quad = 0 + 0 = 0,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

artinya $\lim_{n\to\infty} d_r(x_n, x) = 0$, berdasarkan Definisi 4.2.3 barisan $\{x_n\}$ konvregen juga di (X, d_r), sehingga karena setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di (X, d_r) konvergen di X terbukti bahwa (X, d_r) lengkap.

$(\Leftarrow)$ Diketahui (X, d_r) lengkap. Ambil sebarang barisan Cauchy $\{x_n\}$ di X, berdasarkan Definisi 2.4.3 didapat $\lim_{n,m\to\infty} d_r(x_n, x_m) = 0$ atau

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\to\infty} & d_r(x_n, x_m) \\ &= \lim_{n,m\to\infty} [2d_{pr}(x_n, x_m) - d_{pr}(x_n, x_n) - d_{pr}(x_m, x_m)] = 0.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Dengan menggunakan sifat (MPR3) pada Definisi 4.1.1 didapat

$$\begin{aligned}2d_{pr}(x_n, x_n) &\leq 2d_{pr}(x_n, x_m) \\ \Leftrightarrow d_{pr}(x_n, x_n) &\leq 2d_{pr}(x_n, x_m) - d_{pr}(x_n, x_n) \\ \Leftrightarrow d_{pr}(x_n, x_n) - d_{pr}(x_m, x_m) &\leq 2d_{pr}(x_n, x_m) - d_{pr}(x_n, x_n) \\ &\quad - d_{pr}(x_m, x_m) \\ \Leftrightarrow d_{pr}(x_n, x_n) - d_{pr}(x_m, x_m) &\leq d_r(x_n, x_m),\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan $|d_{pr}(x_n, x_n) - d_{pr}(x_m, x_m)| \leq d_r(x_n, x_m)$, sehingga barisan $\{d_{pr}(x_n, x_n)\}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atau nilai $\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x_n) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ akibatnya berdasarkan (4.46) diperoleh nilai dari $\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, sehingga berdasarkan Definisi 4.2.2 dapat disimpulkan bahwa barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di (X, d_{pr}). Selanjutnya karena ruang (X, d_r) adalah ruang yang lengkap akibatnya barisan Cauchy $\{x_n\}$ konvergen di (X, d_r), misalkan saja $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$, berdasarkan Definisi 2.4.2 diperoleh nilai dari $\lim_{n\to\infty} d_r(x_n, x) = 0$ atau dapat dituliskan

$$\lim_{n\to\infty} d_r(x_n, x)$$
$$= \lim_{n\to\infty} [2d_{pr}(x_n, x) - d_{pr}(x_n, x_n) - d_{pr}(x, x)] = 0. \tag{4.47}$$

Berdasarkan (4.47) diperoleh $\lim_{n\to\infty} [d_{pr}(x_n, x) - d_{pr}(x_n, x_n)] = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} [d_{pr}(x_n, x) - d_{pr}(x, x)] = 0$, sehingga didapat

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d_{pr}(x, x). \tag{4.48}$$

Dari (4.48) berdasarkan Definisi 4.2.1 $\{x_n\}$ konvergen di (X, d_{pr}), sehingga karena setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di (X, d_{pr}) konvergen di X terbukti bahwa (X, d_r) lengkap. Jadi terbukti (X, d_{pr}) lengkap jika dan hanya jika (X, d_r) lengkap. □

Berikut dikonstruksi oleh penulis teorema yang menunjukkan kaitan kelengkapan ruang antara ruang metrik parsial rectangular dan ruang metrik rectangular, dengan pendefinisian metrik parsial rectangular dibangun oleh metrik rectangular.

Teorema 4.2.2. *Jika diberikan (X, d_r) sembarang ruang metrik rectangular lengkap dan dikonstruksi fungsi d_{pr} dengan*

$$d_{pr}(x, y) = d_r(x, y) + \alpha, \quad \forall\ x, y \in X \tag{4.49}$$

dimana $\alpha \geq 0$, maka (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular lengkap.

Bukti. Pada Teorema 4.1.1 telah dibuktikan bahwa (X, d_r) ruang metrik parsial rectangular. Selanjutnya akan dibuktikan jika (X, d_r) lengkap maka (X, d_{pr}) juga lengkap. Ambil sebarang barisan Cauchy $\{x_n\}$ di (X, d_r), dengan menggunakan Definisi 2.4.3 didapat nilai $\lim_{n,m\to\infty} d_r(x_n, x_m) = 0$. Sehingga berdasarkan (4.49) diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m) &= \lim_{n,m\to\infty} [d_r(x_n, x_m) + \alpha] \\ &= \lim_{n,m\to\infty} d_r(x_n, x_m) + \alpha = \alpha, \end{aligned} \tag{4.50}$$

dari persamaan (4.50) didapat bahwa nilai $\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atau dengan kata lain nilai dari $\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m)$ ada dan berhingga. Berdasarkan Definisi 4.2.2 didapat bahwa $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di $\{x_n\}$. Selanjutnya karena (X, d_r) lengkap akibatnya sembarang barisan Cauchy $\{x_n\}$ konvergen di (X, d_r), berdasarkan Definisi 2.4.3 diperoleh $\lim_{n\to\infty} d_r(x_n, x) = 0$, sehingga berdasarkan definisi dari d_{pr} diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d_r(x_n, x) + \alpha = \alpha = d_{pr}(x, x), \tag{4.51}$$

sehingga dari (4.51) terbukti bahwa $\{x_n\}$ konvergen di (X, d_{pr}). Karena setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di (X, d_{pr}) konvergen di (X, d_r) sehingga dapat disimpulkan (X, d_{pr}) lengkap. $\square$

4.3 Teorema Titik Tetap Pemetaan Quasi-Kontraksi di Dalam Ruang Metrik Parsial Rectangular

Permasalahan titik tetap pemetaan merupakan objek yang menarik untuk dikaji di dalam ruang metrik parsial rectangular. Membahas tentang titik tetap, titik tetap sendiri pada penerapannya sering digunakan untuk menyelesaikan permasalahan penyelesaian persamaan linear dan persamaan integral, tidak hanya itu titik tetap juga dapat digunakan untuk menyelidiki eksistensi penyelesaian masalah syarat awal dan syarat batas dari sistem persamaan diferensial serta membantu menyelesaikannya.

Titik tetap juga sering digunakan dalam bidang komputasi yaitu saat mengkonstruksi sebuah iterasi dalam suatu perhitungan. Sebuah iterasi yang converegen merupakan iterasi yang diinginkan dan dapat diperoleh sebuah informasi di dalamnya. Hal tersebut dapat dikatakan bahwa iterasi tersebut memiliki titik tetap.

Prinsip Pemetaan quasi-kontraksi merupakan perluasan dari prinsip pemetaan kontraksi Banach yang pertama kali dikenalkan oleh Stefan Banach pada tahun 1922. Pemetaan quasi-kontraksi dikenalkan oleh ilmuan matematika Lj. B. Ciric pada tahun 1974. Lj. B. Ciric menggunakan prinsip pemetaan quasi-kontraksi untuk meneliti masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan di dalam ruang metrik(Ćirić, 1974). Hasil dari penelitian tersebut menerangkan bahwa jika suatu ruang metrik yang lengkap dan diberikan sebuah pementaan di dalamnya dan pemetaan tersebut memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi maka pemetaan tersebut memiliki titik tetap dan titik tetap tersebut tunggal adanya .

Hasil penelitian tersebut coba diterapkan oleh S. Sukhla di dalam ruang metrik parsial rectangular, dapat dilihat di (Shukla, 2014). Penelitian yang dilakukan oleh Sukhla mengungkapkan jika suatu pemetaan yang memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi pada ruang (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular lengkap maka pemetaan tersebut memiliki titik tetap yang bersifat tunggal. Tidak hanya itu, jika $u \in X$ merupakan titik tetap oleh T maka $d_{pr}(u, u) = 0$.

Berikut sebelum menjelasakan definisi dari prinsip pemetaan quasi-kontraksi, terlebih dahulu dikenalkan tentang definisi diameter dan orbit yang berlaku di dalam ruang metrik parsial rectangular.

Definisi 4.3.1. *Diberikan (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular dan pemetaan $T : X \to X$. Diameter dari $A \subset X$ atau dinotasikan $\delta[A]$, dimana*

$$\delta[A] = \sup\{d_{pr}(x, y) \mid x, y \in A\}. \tag{4.52}$$

Kemudian untuk setiap x elemen X, didefinisikan orbit dari T dengan

$$O(x, n) = \{x, Tx, T^2x, T^3x \ldots, T^nx\},$$

$$O(x, \infty) = \{x, Tx, T^2x, T^3x \ldots\}.$$

Berikut ini diberkan definisi dari prinsip pemetaan quasi kontrasi di dalam ruang metrik parsial rectangular oleh Sukhla (Shukla, 2014).

Definisi 4.3.2. *Diberikan (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular dan suatu pemetaan $T : X \to X$. Pemetaan T disebut pemetaaan quasi-kontraksi di X, jika terdapat konstanta $\lambda \in [0, 1)$ yang memenuhi*

$$\begin{aligned} d_{pr}(Tx, Ty) \leq \; & \lambda \max\{d_{pr}(x, y), d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(y, Ty), \\ & d_{pr}(x, Ty), d_{pr}(y, Tx)\}, \end{aligned} \tag{4.53}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Sebelum membahas tentang teorema titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di ruang metrik parsial rectangular, berikut berdasarkan (Shukla, 2014) diberikan lemma yang digunakan untuk mendukung dan mengetahui bagaimana eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular.

Lemma 4.3.1. *Diberikan (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular dan pemetaan $T : X \to X$. Jika T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi dengan konstanta $\lambda \in [0, 1)$ dan n suatu bilangan asli, maka untuk setiap $x, y \in X$ dan untuk semua i, j dimana $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ berlaku*

$$d_{pr}(T^i x, T^j x) \leq \lambda\delta[O(x, n)]. \tag{4.54}$$

Selanjutnya, terdapat bilangan positif $k \leq n$ sedemikian hingga berlaku $d_{pr}(x, T^k x) = \delta[O(x, n)]$.

Bukti. Ambil sebarang $T^i x, T^j x \in O[(x, n)]$ dimana $i, j \leq n$. Karena T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi, diperoleh

$$\begin{aligned}
& d_{pr}(T^i x, T^j x) \\
&= d_{pr}(TT^{i-1}x, TT^{j-1}x) \\
&\leq \lambda \max\big\{d_{pr}(T^{i-1}x, T^{j-1}x), d_{pr}(T^{i-1}x, TT^{i-1}x) \\
&\quad d_{pr}(T^{j-1}x, TT^{j-1}x), d_{pr}(T^{i-1}x, TT^{j-1}x), \\
&\quad d_{pr}(T^{j-1}x, TT^{i-1}x)\big\} \\
&= \lambda \max\big\{d_{pr}(T^{i-1}x, T^{j-1}x), d_{pr}(T^{i-1}x, T^i x), \\
&\quad d_{pr}(T^{j-1}x, T^j x), d_{pr}(T^{i-1}x, T^j x), d_{pr}(T^{i-1}x, T^j x)\big\} \\
&\leq \lambda\delta[O(x, n)].
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Berdasarkan definisi orbit dari T dan diameter δ dari suatu himpunan didapat untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ dimana $k \leq n$ berlaku $\delta[O(x,n)] = d_{pr}(x, T^k x)$.

$\square$

Berikut lemma di bawah ini menunjukkan bahwa orbit dari suatu pemetaan yang memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi bersifat terbatas.

Lemma 4.3.2. *Diberikan (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular dan pemetaan $T : X \to X$. Jika T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi dengan konstanta $\lambda \in [0,1)$, maka berlaku*

$$\delta[O(x,\infty)] \leq \frac{1}{1-\lambda} \max\{d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(x,T^2x)\}, \qquad (4.56)$$

untuk setiap $x \in X$.

Bukti. Untuk suatu $x \in X$, dapat dilihat bahwa barisan $\{\delta[O(x,n)]\}$ adalah barisan yang tidak turun. Sehingga didapat

$$\delta[O(x,\infty)] = \sup\{\delta[O(x,n)] \ : \ n \in \mathbb{N}\}. \qquad (4.57)$$

Selanjutnya cukup dibuktikan

$$\delta[O(x,n)] \leq \frac{1}{1-\lambda} \max\{d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(x,T^2x)\}. \qquad (4.58)$$

Misalkan $n = 1$.
Dapat dilihat bahwa $\delta[O(x,1)] = d_{pr}(x,Tx)$ sehingga dengan mudah diperoleh

$$\delta[O(x,1)] = d_{pr}(x,Tx) \leq \frac{1}{1-\lambda} \max\{d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(x,T^2x)\}, \qquad (4.59)$$

dengan $\lambda \in [0,1)$, pertidaksamaan (4.58) terpenuhi.
Misalkan $n = 2$.
Dengan menggunakan sifat (MPR3) pada definisi ruang metrik parsial dan T merupakan pemetaan quasi-kontraksi sehingga didapat

$$\begin{aligned} d_{pr}(Tx, T^2x) &= d_{pr}(Tx, TTx) \\ &\leq \lambda \max\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(x, Tx), \\ &\quad d_{pr}(Tx, T^2x), d_{pr}(x, T^2x), d_{pr}(Tx, Tx)\} \\ &= \lambda \max\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(Tx, T^2x), d_{pr}(x, T^2x)\}, \end{aligned} \tag{4.60}$$

untuk $\lambda \in [0,1)$.
Sehingga dapat juga disimpulkan

$$d_{pr}(Tx, T^2x) \leq \max\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(Tx, T^2x), d_{pr}(x, T^2x)\}, \tag{4.61}$$

dan dengan memperhatikan bentuk

$$\begin{aligned} \delta[O(x,2)] &= \delta[\{x, Tx, T^2x\}] \\ &= \sup\{\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(Tx, T^2x), d_{pr}(x, T^2x)\}\}, \end{aligned} \tag{4.62}$$

maka terbukti

$$\delta[O(x,2)] \leq \frac{1}{1-\lambda} \max\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(x, T^2x)\}. \tag{4.63}$$

Misalkan untuk $n \geq 3$
Berdasarkan lemma 4.3.1 didapat $\delta[O(x,n)] = p(x, T^kx)$ dimana $k \leq n$. Misalkan $k = 1, k = 2$ telah ditunjukkan pada tahap sebelumnya. Misalkan $k \geq 3$. Jika $Tx = x$ atau $T^2x = x$ atau $T^2x = Tx$ maka $T^k \in \{x, Tx\}$ sehingga diperoleh

$$d_{pr}(x, T^kx) \leq \frac{1}{1-\lambda} \max\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(x, T^2x)\}, \tag{4.64}$$

maka pertidaksamaan (4.58) terepenuhi.
Untuk kasus dimana $x, Tx, T^2x, T^3x, \ldots, T^nx$ semuanya berbeda. Dengan menggunakan (4.61) dan sifat (MPR5) diperoleh

$$\begin{aligned}
d_{pr}(x, T^kx) &\leq d_{pr}(x, Tx) + d_{pr}(Tx, T^2x) + d_{pr}(T^2x, T^kx) \\
&\quad - d_{pr}(Tx, Tx) - d_{pr}(T^2x, T^2x) \\
&\leq d_{pr}(x, Tx) + d_{pr}(Tx, T^2x) + d_{pr}(T^2x, T^kx) \\
&\leq d_{pr}(x, Tx) + \lambda \max\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(x, T^2x)\} \\
&\quad + d_{pr}(TTx, T^{k-1}Tx) \\
&\leq \max\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(x, T^2x)\} + \\
&\quad \lambda \max\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(x, T^2x)\} \\
&\quad + d_{pr}(TTx, T^{k-1}Tx) \\
&= (1 + \lambda) \max\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(x, T^2x)\} \\
&\quad + \delta[O(Tx, k-1)].
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Kemudian, berdasarkan Lemma 4.3.1 untuk suatu $l \in \{1, 2, 3, \ldots, k-1\}$ didapat

$$\begin{aligned}
\delta[O(Tx, k-1)] &= d_{pr}(Tx, T^lTx) \\
&\leq \lambda\delta[O(x, l+1)] \\
&\leq \lambda\delta[O(x, n)] \\
&= \lambda d_{pr}(x, T^kx).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Berdasarkan (4.66) diperoleh

$$\begin{aligned} d_{pr}(x, T^k) &\leq (1+\lambda)\max\{d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(x,T^2x)\} \\ &\quad + d_{pr}(TT^2x, T^{k-1}Tx) \\ &\leq (1+\lambda)\max\{d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(x,T^2x)\} \\ &\quad + \lambda^2 d_{pr}(x, T^k), \end{aligned} \tag{4.67}$$

berdasarkan (4.67) diperoleh

$$(1-\lambda^2)d_{pr}(x,T^k) \leq (1+\lambda)\max\{d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(x,T^2x)\}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow d_{pr}(x,T^k) &\leq \frac{1+\lambda}{1-\lambda^2}\max\{d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(x,T^2x)\} \\ &= \frac{1}{1-\lambda}\max\{d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(x,T^2x)\} \end{aligned} . \tag{4.68}$$

Sehingga terbukti

$$\begin{aligned} \delta[O(x,n)] &= d_{pr}(x,T^k) \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda}\max\{d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(x,T^2x)\}. \end{aligned} \tag{4.69}$$

$\square$

Setelah memahami lemma-lemma untuk mendukung dan mengetahui bagaimana karakteriktik eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di ruang metrik parsial rectangular. Selanjutnya, diberikan teorema yang menunjukkan eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan di dalam ruang metrik parsial rectangular. Dalam teorema ini diperlukan ruang metrik parsial rectangular lengkap sehingga setiap barisan Cauchy di ruang tersebut konvergen di dalam ruang tersebut.

Teorema 4.3.1. *Diberikan* (X, d_{pr}) *ruang metrik parsial rectangular lengkap dan pemetaan* $T : X \to X$. *Jika* T *memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi dengan kontansta* $\lambda \in [0, 1)$, *maka* T *memiliki titik tetap dan titik tetap tersebut bersifat tunggal. Jika* $u \in X$ *adalah titik tetap oleh* T *maka* $d_{pr}(u, u) = 0$.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa T memiliki titik tetap, terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa barisan iterasi $\{T^n x\}$ adalah suatu barisan Cauchy untuk sebarang $x \in X$.
Dengan menggunakan Lemma 4.3.1, misalkan $m, n \in \mathbb{N}$ tanpa mengurangi perumuman misalkan $m > n$ didapat

$$\begin{aligned} d_{pr}(T^n x, T^m x) &= d_{pr}(TT^{n-1}x, T^{m-n+1}T^{n-1}x) \\ &\leq \lambda\delta[O(T^{n-1}x, m-n+1)]. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Kemudian juga dengan menggunakan Lemma 4.3.1, maka terdapat suatu bilangan bulat positif $k \in \{1, 2, \ldots m - n + 1\}$ sedemikian hingga

$$\delta[O(T^{n-1}x, m-n+1)] = d_{pr}(T^{n-1}x, T^k T^{n-1}x); \tag{4.71}$$

selanjutnya, dengan menggunakan Lemma 4.3.1 dan berdasarkan (4.70) dan (4.71) diperoleh

$$\begin{aligned} d_{pr}(T^n x, T^m x) &\leq \lambda d_{pr}(T^{n-1}x, T^k T^{n-1}x) \\ &= \lambda d_{pr}(TT^{n-2}x, T^{k+1}T^{n-2}x) \\ &\leq \lambda^2 \delta[O(T^{n-2}x, m-n+2)] \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^n \delta[O(x, m)], \end{aligned} \tag{4.72}$$

secara bersamaan dengan menggunakan Lemma 4.3.2

diperoleh

$$d_{pr}(T^n x, T^m x) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \max\{d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(x, T^2 x)\} \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.73}$$

Berdasarkan (4.73) dengan $\lambda \in [0, 1)$ diperoleh

$$\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(T^n x, T^m x) = 0. \tag{4.74}$$

Sehingga dapat disimpulkan $\{T^n x\}$ adalah barisan Cauchy. Karena (X, d_{pr}) adalah ruang metrik parsial rectangular yang lengkap, maka terdapat suatu $u \in X$ sedemikian hingga

$$\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(T^n x, T^m x) = \lim_{n\to\infty} d_{pr}(T^n x, u) = d_{pr}(u, u) = 0. \tag{4.75}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa u adalah suatu titik tetap dari T. Misalkan $d_{pr}(Tu, u) > 0$ tanpa pengurangi perumuman dapat diasumsikan bahwa $T^n x \neq T^{n+1} x$, dan juga terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $T^n x \notin \{u, Tu\}$, untuk setiap $n > n_0$. Selanjutnya berdasarkan sifat (MPR5) didapat

$$\begin{aligned} d_{pr}(Tu, u) \ &\leq \ d_{pr}(Tu, T^{n+1} x) + d_{pr}(T^{n+1} x, T^n x) \\ &\quad + d_{pr}(T^n x, u), \quad \forall n > n_0. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Karena T memenuhi prinsip quasi-konstraksi, sehingga didapat

$$\begin{aligned} & d_{pr}(Tu, T^{n+1} x) = d_{pr}(Tu, TT^n x) \\ & \leq \ \lambda \max\{d_{pr}(u, T^n x), d_{pr}(u, Tu), d_{pr}(T^n x, TT^n x), \\ & \qquad d_{pr}(u, TT^n x), d_{pr}(T^n x, Tu)\} \quad . \\ & \leq \ \lambda \max\{d_{pr}(u, T^n x), d_{pr}(u, Tu), d_{pr}(T^n x, T^{n+1} x), \\ & \qquad d_{pr}(u, T^{n+1} x), d_{pr}(T^n x, Tu)\} \end{aligned} \tag{4.77}$$

Untuk nilai n yang begitu besar, maka berdasarkan (4.75) pertidaksamaan (4.77) menjadi

$$d_{pr}(Tu, T^{n+1}x) \leq \lambda \max\{d_{pr}(u, Tu), d_{pr}(T^n x, Tu)\}. \quad (4.78)$$

Jika $d_{pr}(Tu, T^n x) \leq d_{pr}(u, Tu)$, kemudian berdasarkan (4.75), (4.76), dan (4.78) maka diperoleh

$$d_{pr}(Tu, u) \leq d_{pr}(Tu, T^{n+1}x) \leq \lambda d_{pr}(Tu, u). \quad (4.79)$$

Berdasarkan (4.79) oleh karena $\lambda \in [0, 1)$ haruslah $d_{pr}(Tu, u) = 0$, akibatnya berdasarkan Definisi ruang metrik parsial rectangular didapat $Tu = u$.
Jika $d_{pr}(Tu, T^n x) \geq d_{pr}(u, Tu)$, untuk nilai n yang begitu besar didapat

$$\begin{aligned} d_{pr}(Tu, T^{n+1}x) &\leq \lambda d_{pr}(T^n x, Tu) \\ &\leq \lambda \left[d_{pr}(T^n x, u) + d_{pr}(u, T^{n+1}x) \right. \\ &\quad \left. + d_{pr}(T^{n+1}x, Tu)\right] \\ &= \lambda d_{pr}(T^{n+1}x, Tu). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Berdasarkan (4.80) karena nilai dari λ berada pada $[0, 1)$ haruslah $d_{pr}(T^{n+1}x, Tu) = 0$, sehingga berdasarkan (4.75) dan (4.76) diperoleh

$$d_{pr}(Tu, u) \leq d_{pr}(Tu, T^{n+1}) = 0. \quad (4.81)$$

Oleh karena $d_{pr}(Tu, u) \geq 0$ dan dari (4.81) diperoleh $d_{pr}(Tu, u) \leq 0$ akibatnya haruslah nilai $d_{pr}(Tu, u) = 0$. Sehingga berdasarkan definisi pada ruang metrik parsial rectangular didapat $Tu = u$, artinya u adalah titik tetap oleh T.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa titik tetap yang diperoleh tunggal adanya. Asumsikan $u, v \in X$ dengan $u \neq v$ merupakan titik tetap oleh T. Karena u dan v adalah titik tetap akibatnya $Tu = u, Tv = v$ dan $p(u,v) > 0$. Kemudian karena T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi diperoleh

$$\begin{aligned} d_{pr}(u,v) &= d_{pr}(Tu,Tv) \\ &\leq \lambda \max\{d_{pr}(u,u), d_{pr}(u,Tu), \\ &\quad d_{pr}(v,Tv), d_{pr}(u,Tv), d_{pr}(v,Tu)\} \\ &= \lambda \max\{d_{pr}(u,u), d_{pr}(u,u), \\ &\quad d_{pr}(v,v), d_{pr}(u,v), d_{pr}(v,u)\} \\ &= \lambda d_{pr}(u,v) < d_{pr}(u,v). \end{aligned} \tag{4.82}$$

Hal tersebut kontradiksi, maka haruslah $d_{pr}(u,v) = 0$ sehingga berdasarkan definisi pada ruang metrik parsial rectangular diperoleh $u = v$. Berdasarkan hal tersebut terbukti bahwa titik tetap di T tunggal. Selanjutnya misalkan $u \in X$ merupakan titik tetap di T dan $d_{pr}(u,u) > 0$.

Sehingga akan dibuktikan $d_{pr}(u,u) = 0$, karena T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi diperoleh

$$\begin{aligned} d_{pr}(u,u) &= d_{pr}(Tu,Tu) \\ &\leq \lambda \max\{d_{pr}(u,u), d_{pr}(u,Tu), \\ &\quad d_{pr}(u,Tu), d_{pr}(u,Tu), d_{pr}(u,Tu)\} \\ &= \lambda \max\{d_{pr}(u,u), d_{pr}(u,u), \\ &\quad d_{pr}(u,u), d_{pr}(u,u), d_{pr}(u,u)\} \\ &= \lambda d_{pr}(u,u) < d_{pr}(u,u). \end{aligned} \tag{4.83}$$

Hal tersebut kontradikasi, sehingga haruslah $d_{pr}(u,u) = 0$. $\square$

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh kasus yang menunjukkan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular. Beberapa contoh yang diberikan berasal dari hasil modifikasi pada referensi (Shukla, 2014) dan (Van & Le, 2014). Modifikasi disini dapat berupa mengubah ruang yang telah diberikan, mengubah fungsi metrik parsial rectangular yang telah ada, dan atau mengubah pemetaan yang diberikan pada referensi.

Selain itu juga, beberapa contoh lain yang diberikan merupakan hasil konstruksi penulis untuk menjawab rumusan masalah. Salah satu cara penulis untuk mengkonstruksi contoh adalah dengan menggunakan teorema-teorema yang sudah diberikan pada bahasan sebelumnya. Teorema yang digunakan seperti halnya teorema untuk mengkonstruksi fungsi metrik parsial rectangular dari fungsi metrik rectangular, atau teorema yang menunjukkan kaitan kelengkapan antara ruang metrik parsial rectangular dan ruang metrik rectangular.

Contoh 4.3.1. Diberikan ruang metrik parsial rectangular (X, d_{pr}) dengan $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dan didefinisikan pemetaan $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d_{pr}(x, y) = \begin{cases} x \quad , & x = y; \\ \dfrac{12 + x + y}{2} \quad , & x, y \in \{1, 2\}, \quad x \neq y; \\ \dfrac{4 + x + y}{2} \quad , & x, y \text{ yang lain.} \end{cases} \tag{4.84}$$

Jika didefinisikan pemetaan $T : X \to X$ dengan

$$T0 = T2 = T4 = 0, \quad T1 = 3, \quad T3 = 2,$$

maka T memiliki titik tetap dan bersifat tunggal.

Penjelasan dari Contoh 4.3.1 dapat diuraikan sebagai berikut. Berdasarkan Contoh 4.1.1 dengan mengambil nilai $b = 4$, sehingga terbukti bahwa Contoh 4.3.1 adalah ruang metrik parsial rectangular. Kemudian karena X adalah diskrit, artinya jika diberikan sembarang barisan Cauchy di (X, d_{pr}) maka barisan tersebut konvergen di (X, d_{pr}), akibatnya (X, d_{pr}) lengkap. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi atau dengan kata lain akan ditunjukkan terdapat $\lambda \in [0, 1)$ memenuhi

$$\begin{aligned} d_{pr}(Tx, Ty) \quad \leq \quad & \lambda \max\{d_{pr}(x, y), d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(y, Ty), \\ & d_{pr}(x, Ty), d_{pr}(y, Tx)\}, \end{aligned} \tag{4.85}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Untuk mempersingkat penulisan misalkan

$$\begin{aligned} M(x, y) \quad = \quad & \max\{d_{pr}(x, y), d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(y, Ty), \\ & d_{pr}(x, Ty), d_{pr}(y, Tx)\} \end{aligned} \tag{4.86}$$

Kemudian untuk menunjukkan hal tersebut dibagi beberapa kasus seperti di bawah ini:

Kasus 1 : Misalkan $x, y \in \{0, 2, 4\}$ jelas bahwa untuk setiap $\lambda \in [0, 1)$ memenuhi (4.85) sebab $d_{pr}(Tx, Ty) = 0$ untuk setiap $x, y \in \{0, 2, 4\}$.

Kasus 2 : $x \in \{0, 2, 4\}, \quad y = 1$ diperoleh

1. jika $x = 0$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T0, T1) = d_{pr}(0, 3) \quad & \leq \quad \lambda M(0, 1) \\ \Leftrightarrow \frac{7}{2} \quad & \leq \quad \lambda \max\left\{\frac{5}{2}, 0, 4, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\} = 4\lambda \\ \Leftrightarrow \frac{7}{8} \quad & \leq \quad \lambda \end{aligned}$$

2. jika $x = 2$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T2,T1) = d_{pr}(0,3) &\leq \lambda M(2,1) \\ \Leftrightarrow \frac{7}{2} &\leq \lambda \max\left\{\frac{15}{2}, 3, 4, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right\} \\ &= \frac{15}{2}\lambda \\ \Leftrightarrow \frac{7}{15} &\leq \lambda \end{aligned}$$

3. jika $x = 4$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T4,T1) = d_{pr}(0,3) &\leq \lambda M(4,1) \\ \Leftrightarrow \frac{7}{2} &\leq \lambda \max\left\{\frac{9}{2}, 4, 4, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\} = \frac{9}{2}\lambda \\ \Leftrightarrow \frac{7}{9} &\leq \lambda \end{aligned}$$

Kasus 3 : $x \in \{0,2,4\}, \quad y = 3$ diperoleh

1. jika $x = 0$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T0,T3) = d_{pr}(0,2) &\leq \lambda M(0,3) \\ \Leftrightarrow 3 &\leq \lambda \max\left\{\frac{7}{2}, 0, \frac{9}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\} = \frac{9}{2}\lambda \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &\leq \lambda \end{aligned}$$

2. jika $x = 2$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T2,T3) = d_{pr}(0,2) &\leq \lambda M(2,3) \\ \Leftrightarrow 3 &\leq \lambda \max\left\{\frac{9}{2}, 3, \frac{9}{2}, 2, \frac{7}{2}\right\} = \frac{9}{2}\lambda \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &\leq \lambda \end{aligned}$$

3. jika $x = 4$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T4, T3) = d_{pr}(0, 2) &\leq \lambda M(4, 3) \\ \Leftrightarrow 3 &\leq \lambda \max\left\{\frac{11}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{7}{2}\right\} = \frac{11}{2}\lambda \\ \Leftrightarrow \frac{6}{11} &\leq \lambda \end{aligned}$$

Kasus 3: Misalkan $x = 1$ dan $y = 3$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T1, T3) = d_{pr}(0, 2) &\leq \lambda M(1, 3) \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2} &\leq \lambda \max\left\{4, 4, \frac{9}{2}, 3, \frac{15}{2}\right\} = \frac{15}{2}\lambda \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5} &\leq \lambda \end{aligned}$$

Kasus 4: Misalkan $x = y = 1$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T1, T1) = d_{pr}(3, 3) &\leq \lambda M(1, 1) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{} &\leq \lambda \max\{1, 4\} = 4\lambda \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} &\leq \lambda \end{aligned}$$

Kasus 4: Misalkan $x = y = 3$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T3, T3) = d_{pr}(2, 2) &\leq \lambda M(3, 3) \\ \Leftrightarrow \frac{2}{} &\leq \lambda \max\left\{3, \frac{9}{2}\right\} = \frac{9}{2}\lambda \\ \Leftrightarrow \frac{4}{9} &\leq \lambda \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan di atas, dapat dipilih $\lambda \in [7/8, 1)$ akibatnya (4.85) terpenuhi untuk setiap $x, y \in X$, sehingga dapat disimpulkan bahwa T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi. Dengan demikian berdasarkan Teorema 4.3.1 dapat disimpulkan T memiliki titik tetap yang bersifat tunggal, dapat dilihat dari definisi pemetaan titik tunggal yang dimaksud yaitu di $x = 0 \in X$.

Berikut ini dikonstruksi contoh lain ruang metrik parsial rectangular dan didefinisikan suatu pemetaan di dalamnya yang memenuhi pemetaan quasi-kontraksi dan memiliki titik tetap tunggal.

Contoh 4.3.2. Diberikan $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ dan jika didefinisikan $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d_{pr}(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{jika } x = y = 0, \\ |x - y| + \alpha & , \quad x, y \text{ yang lain,} \end{cases} \tag{4.87}$$

dimana α konstanta positif, maka (X, d_{pr}) merupakan ruang metrik parsial rectangular. Kemudian jika di definsikan pemetaan $T : X \to X$ dengan

$$T0 = T2 = \cdots = T10 = 0$$

$$T1 = 0, \quad T5 = T9 = 3, \quad T3 = T7 = 2$$

maka T memiliki titik tetap dan bersifat tunggal.

Penjelasan dari Contoh 4.3.2 dapat diuraikan sebagai berikut. Jika didefinisikan fungsi $d_r : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in X$, diperoleh berdasarkan Contoh 2.2.1 (X, d_r) merupakan ruang metrik sekaligus juga ruang metrik rectangular. Berdasarakan Teorema 4.1.1 karena d_r metrik rectangular, diperoleh d_{pr} metrik parsial rectangular atau dengan kata lain (X, d_{pr}) merupakan ruang metrik parsial rectangular. Karena (X, d_r) ruang metrik rectangular lengkap, berdasarkan Teorema 4.2.2 diperoleh (X, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular lengkap. Selanjutnya akan diselidiki apakah pemetaan T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi di (X, d_{pr}), artinya akan ditunjukkan terdapat $\lambda \in [0,1)$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} d_{pr}(Tx, Ty) &\leq \lambda \max\{d_{pr}(x,y), d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(y,Ty), \\ & \quad d_{pr}(x,Ty), d_{pr}(y,Tx)\}, \end{aligned} \tag{4.88}$$

untuk setiap $x, y \in X$.
Untuk mempersingkat penulisan misalkan

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \max\{d_{pr}(x,y), d_{pr}(x,Tx), d_{pr}(y,Ty), \\ & \quad d_{pr}(x,Ty), d_{pr}(y,Tx)\}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Misalkan $A = \{1,2,4,6,8,10\}$, $B = \{5,9\}$, dan $C = \{3,7\}$. Untuk menunjukkan T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi perlu dibagi beberapa kasus.
Kasus 1 : Jika $x, y \in A$ jelas bahwa T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi sebab $d_{pr}(Tx, Ty) = 0$ untuk setiap $x, y \in A$.
Kasus 2 : Jika $x, y \in B$

1. jika $x = y = 5$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T5, T5) = d_{pr}(3,3) = \alpha &\leq \lambda M(5,5) = 2 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 2} &\leq \lambda \end{aligned}$$

2. jika $x = y = 9$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T9, T9) = d_{pr}(3,3) = \alpha &\leq \lambda M(9,9) = 6 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 6} &\leq \lambda \end{aligned}$$

3. jika $x = 5$ dan $y = 9$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T5, T9) = d_{pr}(3,3) = \alpha &\leq \lambda M(9,9) = 6 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 6} &\leq \lambda \end{aligned}$$

<u>Kasus 3</u> : Jika $x, y \in C$

1. jika $x = y = 3$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T3, T3) = d_{pr}(2,2) = \alpha &\leq \lambda M(3,3) = 1 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 1} &\leq \lambda \end{aligned}$$

2. jika $x = y = 7$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T7, T7) = d_{pr}(2,2) = \alpha &\leq \lambda M(9,9) = 4 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 4} &\leq \lambda \end{aligned}$$

3. jika $x = 3$ dan $y = 7$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T3, T7) = d_{pr}(2,2) = \alpha &\leq \lambda M(3,7) = 5 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 6} &\leq \lambda \end{aligned}$$

<u>Kasus 4</u> : Jika $x \in B$ dan $y \in C$

1. jika $x = 5$ dan $y = 3$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T5, T3) = d_{pr}(3,2) = 1 + \alpha &\leq \lambda M(5,3) = 3 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} &\leq \lambda \end{aligned}$$

2. jika $x = 5$ dan $y = 7$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T5, T7) = d_{pr}(3,2) = 1 + \alpha &\leq \lambda M(5,7) = 5 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \alpha}{7 + \alpha} &\leq \lambda \end{aligned}$$

3. jika $x = 9$ dan $y = 3$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T9, T3) = d_{pr}(3,2) = 1 + \alpha &\leq \lambda M(9,3) = 7 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 1}{\alpha + 7} &\leq \lambda \end{aligned}$$

4. jika $x = 9$ dan $y = 7$ maka

$$\begin{aligned} d_{pr}(T9, T7) = d_{pr}(3,2) = 1 + \alpha &\leq \lambda M(9,7) = 7 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 1}{\alpha + 7} &\leq \lambda \end{aligned}$$

<u>Kasus 5</u> : Jika $x = 5$, $y \in \{1, 2, 4\}$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T5, Ty) = d_{pr}(3,0) = 3 + \alpha &\leq \lambda M(5,y) = 5 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 3}{\alpha + 5} &\leq \lambda \end{aligned}$$

<u>Kasus 6</u> : Jika $x = 5$, $y \in \{6, 8, 10\}$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T5, Ty) = d_{pr}(3,0) = 3 + \alpha &\leq \lambda M(5,y) = y + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 3}{\alpha + y} &\leq \lambda \end{aligned}$$

<u>Kasus 7</u> : Jika $x = 9$, $y \in \{1, 2, 4, 6, 8\}$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T9, Ty) = d_{pr}(3,0) = 3 + \alpha &\leq \lambda M(9,y) = 9 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 3}{\alpha + 9} &\leq \lambda \end{aligned}$$

<u>Kasus 8</u> : Jika $x = 9$, $y = 10$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T9, T10) = d_{pr}(3,0) = 2 + \alpha &\leq \lambda M(9,10) = 10 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 3}{\alpha + 10} &\leq \lambda \end{aligned}$$

<u>Kasus 9</u> : Jika $x = 7$, $y \in \{1, 2, 4, 6\}$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T7, Ty) = d_{pr}(2,0) = 2 + \alpha &\leq \lambda M(7,y) = 7 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 2}{\alpha + 7} &\leq \lambda \end{aligned}$$

<u>Kasus 10</u> : Jika $x = 7$, $y \in \{8, 10\}$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T7, Ty) = d_{pr}(3,0) = 2 + \alpha &\leq \lambda M(7,y) = y + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 2}{\alpha + y} &\leq \lambda \end{aligned}$$

<u>Kasus 11</u> : Jika $x = 3$, $y \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T3, Ty) = d_{pr}(2, 0) = 2 + \alpha &\leq \lambda M(3, y) = 3 + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 2}{\alpha + 3} &\leq \lambda \end{aligned}$$

<u>Kasus 12</u> : Jika $x = 3$, $y \in \{4, 6, 8, 10\}$

$$\begin{aligned} d_{pr}(T3, Ty) = d_{pr}(2, 0) = 2 + \alpha &\leq \lambda M(3, y) = y + \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha + 2}{\alpha + y} &\leq \lambda \end{aligned}$$

Dari uraian di atas dapat dipastikan terdapat λ yang dipilih dari $\lambda \in \left[\max\left\{\frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{\alpha+3}{\alpha+5}, \frac{\alpha+2}{\alpha+3}, \frac{\alpha+1}{\alpha+3}\right\}, 1\right)$ akibatnya T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi, sehingga berdasarkan Teorema 4.3.1 dapat disimpulkan T memiliki titik tetap yang bersifat tunggal. Berdasarkan definisi yang diberikan diperoleh titik tetap yang dimaksud yaitu di $x = 0 \in X$.

Contoh 4.3.3. Diberikan (X, d_{pr}) merupakan ruang metrik parsial rectangular lengkap dengan $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dan fungsi $d_{pr} : X \times X \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $d_{pr}(x, y) = \max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in X$. Jika didefinisikan pemetaan $T : X \to X$ dengan

$$Tx = \alpha x \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \tag{4.90}$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka T memiliki titik tetap dan titik tetap tersebut bersifat tunggal.

Penjelasan dari Contoh 4.3.3 dapat diuraikan sebagai berikut. Pasangan terurut (X, d_{pr}) merupakan ruang metrik parsial rectangular dijamin pada Contoh 2.3.1 yang menunjukkan bahwa (X, d_{pr}) merupakan ruang metrik parsial. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi. Ambil sebarang $x, y \in X$, misalkan $x = y = 0$ jelas bahwa prinsip pemetaan quasi-kontraksi terpenuhi. Selanjutnya misalkan $x = y \neq 0$ perhatikan bahwa $d_{pr}(Tx, Ty) = d_{pr}(\alpha x, \alpha y)$, sehingga diperoleh $d_{pr}(Tx, Ty) = \alpha x$. Selanjutnya mencari nilai dari

$$\max\{d_{pr}(x, y), d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(y, Ty), d_{pr}(x, Ty), d_{pr}(y, Tx)\}$$

$$= \max\{d_{pr}(x, x), d_{pr}(x, Tx)\} = \max\{\max\{x, x\}, \max\{x, \alpha x\}\}.$$

$$= x.$$

Dengan demikian diperoleh pertidaksamaan

$$\begin{aligned} d_{pr}(Tx, Ty) \quad &\leq \lambda \quad \max\{d_{pr}(x, y), d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(y, Ty), \\ &\qquad\quad d_{pr}(x, Ty), d_{pr}(y, Tx)\} \\ &\Leftrightarrow \alpha x \leq \lambda x \Rightarrow \alpha \leq \lambda \end{aligned} \tag{4.91}$$

Kemudian untuk $x \neq y$ tanpa mengurangi perumuman misalkan $x > y$, karena $x > y$ diperoleh $\alpha x > \alpha y$ sehingga didapat

$$d_{pr}(Tx, Ty) = d_{pr}(\alpha x, \alpha y) = \alpha x = \max\{\alpha x, \alpha y\} = \alpha x.$$

Selanjutnya dicari nilai

$$\max\{d_{pr}(x, y), d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(y, Ty), d_{pr}(x, Ty), d_{pr}(y, Tx)\}$$

$$= \max\{d_{pr}(x, y), d_{pr}(x, \alpha x), d_{pr}(y, \alpha y), d_{pr}(x, \alpha y), d_{pr}(y, \alpha x)\}$$

$$= \max\{\max\{x, y\}, \max\{x, \alpha x\}, \max\{y, \alpha y\}, \max\{x, \alpha y\}, \max\{y, \alpha x\}\},$$

karena $x > y$ berakibat $x > \alpha x > \alpha y$ sehingga diperoleh nilai dari

$$\max\{d_{pr}(x, y), d_{pr}(x, Tx), d_{pr}(y, Ty), d_{pr}(x, Ty), d_{pr}(y, Tx)\} = x.$$

Selajutnya dicari $\lambda \in [0, 1)$ sedemikian hingga memenuhi

$$\alpha x \leq \lambda x \Leftrightarrow \alpha \leq \lambda \tag{4.92}$$

Berdasarkan (4.92) dapat dipastikan terdapat λ yang dipilih dari $\lambda \in [\alpha, 1)$ dengan $0 < \alpha < 1$, sehingga dapat disimpulkan T memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi. Sehingga berdasarkan Teorema 4.3.1 dapat disimpulkan T memiliki titik tetap yang bersifat tunggal. Sehingga akan dicari $x^* \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ yang merupakan titik tetap oleh T atau $Tx^* = x^*$. Sebelum itu dikonstruksi barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ untuk suatu $x_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Berdasarkan pada pembuktikan Teorema 4.3.1, titik tetap dari T adalah limit konvergensi dari barisan Cauchy $\{x_n\}$. Sehingga akan diselidiki terlebih dahulu bahwa barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Ambil sembarang $x_0 \in X$ perhatikan bahwa

$$\begin{gathered} Tx_0 = \alpha x_0 \\ T^2 x_0 = Tx_1 = \alpha^2 x_0, \\ T^3 x_0 = T^2 x_1 = Tx_2 = \alpha^3 x_0, \\ \vdots \\ T^n x_0 = \alpha^n x_0, \end{gathered}$$

sehingga didapat $x_n = \alpha^n x_0$ untuk suatu $x_0 \in X$ dan $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n,m \to \infty} d_{pr}(x_n, x_m) &= \lim_{n,m \to \infty} d_{pr}(T^n x_0, T^m x_0) \\ &= \lim_{n,m \to \infty} d_{pr}(\alpha^n x_0, \alpha^m x_0) \\ &= \lim_{n,m \to \infty} \max\{\alpha^n x_0, \alpha^m x_0\} \qquad (4.93) \\ &= \max\{0, 0\} \\ &= 0 < \infty. \end{aligned}$$

Berdasarakan (4.93) didapat bahwa $\{x_n\}$ barisan Cauchy. Karena ruang (X, d_{pr}) lengkap, akibatnya dapat dipastikan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = Tx_{n-1}$ untuk konvergen di X. Sehingga dapat dituliskan terdapat $x^* \in X$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} \lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m) &= \lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x^*) = d_{pr}(x^*, x^*) \\ &= \lim_{n\to\infty} d_{pr}(\alpha^n x_0, x^*) \\ &= d_{pr}(0, x^*) = \max\{0, x^*\} \\ &= \max\{x^*, x^*\} \end{aligned} . \tag{4.94}$$

Berdasarkan persamaan (4.94) diperoleh $x^* = 0$, sehingga titik tetap oleh T yang bersifat tunggal adalah $x^* = 0 \in X$.

BAB V
PENUTUP

Berdasarkan uraian dari bab-bab sebelumnya, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari tugas akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, kesimpulan dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Syarat cukup dari eksistensi dan ketunggalan titik tetep pemetaan quasi-kontraksi di dalam ruang metrik parsial rectangular adalah ruang tersebut harus lengkap dan pemetaan yang diberikan memenuhi prinsip pemetaan quasi-kontraksi.

2. Dalam tugas akhir ini telah dikonstruksi contoh ruang metrik parsial rectangular dan pemetaan di dalamnya yang menunjukkan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan quasi-kontraksi pada ruang tersebut.

3. Terdapat hubungan antara ruang metrik parsial rectangular dan ruang metrik rectangular. Hubungan di sini artinya dapat dikonstruksi suatu fungsi metrik parsial rectangular dari sembarang fungsi metrik rectangular, begitu juga sebaliknya.

4. Berdasarkan hasil konstruksi dari kesimpulan nomor 3, diperoleh kaitan sifat kelengkapan ruang metrik parsial rectangular dengan kelengkapan ruang metrik rectangular.

5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah :

1. Meneliti pengembangan ruang metrik parsial rectangular dan teorema titik tetap pemetaan quasi-kontraksi yang berlaku pada ruang tersebut dalam masalah penerapan kehidupan sehari-hari.

2. Pada tugas akhir ini ditemukan bahwa limit konvergensi barisan dalam ruang metrik parsial rectangular tidak selalu tunggal, maka dari itu disarankan untuk mengkaji lebih lanjut masalah konvergensi barisan dalam ruang tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

References

Alghamdi, M. A., Shahzad, N., & Valero, O. (2012). On fixed point theory in partial metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, *2012*(1), 175.

Aydi, H., Karapinar, E., & Lakzian, H. (2012). Fixed point results on a class of generalized metric spaces. *Mathematical Sciences*, *6*(1), 46.

Branciari, A. (2000). A fixed point theorem of banach-caccioppoli type on a class of generalized metric spaces.

Ćirić, L. B. (1974). A generalization of banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical society*, *45*(2), 267–273.

Ege, O. (2015). Complex valued rectangular b-metric spaces and an application to linear equations. *J. Nonlinear Sci. Appl*, *8*(6), 1014–1021.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications* (Vol. 1). wiley New York.

Matthews, S. G. (1994). Partial metric topology. *Annals of the New York Academy of Sciences-Paper Edition*, *728*, 183–197.

Rezapour, S., Haghi, R., & Shahzad, N. (2010). Some notes on fixed points of quasi-contraction maps. *Applied Mathematics Letters*, *23*(4), 498–502.

Roshan, J. R., Parvaneh, V., Kadelburg, Z., & Hussain, N. (2016). New fixed point results in b-rectangular metric spaces. *Nonlinear Anal. Model. Control*, *21*(5), 614–634.

Shukla, S. (2014). Partial rectangular metric spaces and fixed point theorems. *The Scientific World Journal*, *2014*.

Van, D. N., & Le, H. V. T. (2014). A note on partial rectangular metric spaces. *Mathematica Moravica*, *18*(1), 1–8.

BIODATA PENULIS

Nama lengkap Mohamad Ilham Dwi Firmansyah lebih sering dipanggil Firman atau Ilham, lahir di Blitar, 07 September 1998. Sebelum menempuh bangku perkuliahan, penulis memulai pendidikan formal mulai dari SDN Krampon 1 (2004-2010), SMP Negeri 1 Torjun (2010-2013), SMAN 1 Sampang (2013-2016). Pada tahun 2016, penulis meneruskan pendidikan ke jenjang S1 di Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), melalui jalur SNMPTN. Pada masa perkuliahan penulis aktif dalam berbagai organisasi antara lain Lembaga Dakwah Jurusan Matematika Ibnu Muqlah sebagai Kepala Biro Mentoring Departemen Kaderisasi (2017-2018), Ketua Departemen Kaderisasi (2018-2019), HIMATIKA ITS sebagai staf Olympiad Division Aplied Science Departemen (2017-2018), Head of Olympiad Division Aplied Science Departemen (2018-2019). Penulis juga memiliki pengalaman sebagai asisten dosen mata kuliah Matematika 1&2, Asisten Laboratorium Ilmu Komputer.

Saat menjalani kuliah, penulis mengambil Bidang minat Ilmu Komputer dan Bidang minat Analisis Aljabar. Penulis juga mempunyai pengalaman magang di PT. Multipolar Technology. Tbk, Tanggerang sebagai Front End Developer di Divisi Mobile. Adapun kritik dan saran atau informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email penulis: *ilhamath0709@gmail.com* atau *LinkedIn* Mohamad Ilham Dwi Firmansyah.