



DISERTASI - KS186613

*GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE
LOGISTIC REGRESSION*

Studi Kasus: Pemodelan Status Indeks Pembangunan
Kesehatan Masyarakat dan Indeks Pembangunan
Manusia Kabupaten/Kota di Pulau Kalimantan

M. FATHURAHMAN
NRP. 06211360010001

Promotor:
Dr. Drs. Purnadi, M.Sc.

Co-Promotor:
Dr. Sutikno, S.Si., M.Si.
Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si.

Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2020

LEMBAR PENGESAHAN DISERTASI

Disertasi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar

Doktor (Dr.)

di

**Program Doktor Departemen Statistika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Oleh:

M. Fathurahman

NRP: 06211360010001

Tanggal Ujian: 27 Juli 2020

Periode Wisuda: September 2020

Disetujui oleh:

Pembimbing:

1. Dr. Drs. Purnadi, M.Sc.
NIP. 19620204 198701 1 001
2. Dr. Sutikno, S.Si., M.Si.
NIP. 19710313 199702 1 001
3. Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si.
NIP. 19700910 199702 2 001


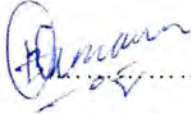

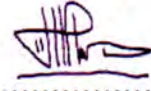

.....

.....

.....

Penguji:

1. Dr. Sri Wahyuningsih, S.Si., M.Si.
NIP. 19690413 200012 2 001
2. Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.
NIP. 19650603 198903 1 003
3. Dr. Bambang Widjanarko Otok, S.Si., M.Si.
NIP. 19681124 199412 1 001
4. Dr. Suhartono, S.Si., M.Sc.
NIP. 19710929 199512 1 001


.....

.....

.....

.....


Kepala Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data

Dr. Dra. Kartika Fithriasari, M.Si.
NIP. 19691212 199303 2 002

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam disertasi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar Doktor di suatu perguruan tinggi manapun. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Surabaya, Juli 2020

Yang menyatakan



M. Fathurahman

*Kupersembahkan karya ilmiah sederhana ini untuk
Istri tercinta Umi Hani 'in
Serta ketiga anakku tersayang
Muhammad Miftahul Muhtadin,
Hanifa Athaya Kamilah, dan
Muhammad Fahmi*

***GEOGRAPHICALLY WEIGHTED
MULTIVARIATE LOGISTIC REGRESSION***
**Studi Kasus: Pemodelan Status Indeks Pembangunan Kesehatan
Masyarakat dan Indeks Pembangunan Manusia Kabupaten/Kota
di Pulau Kalimantan**

Nama Mahasiswa : M. Fathurahman
NRP : 06211360010001
Promotor : Dr. Drs. Purhadi, M.Sc.
Co-Promotor : Dr. Sutikno, S.Si., M.Si.
Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

Penelitian ini membahas model *Multivariate Logistic Regression* (MLR) dan model *Geographically Weighted Multivariate Logistic Regression* (GWMLR). MLR adalah model regresi yang dikembangkan dari distribusi multinomial. Model GWMLR adalah model MLR dengan semua parameter bergantung pada lokasi geografis, dan penaksiran parameter dilakukan secara lokal pada setiap lokasi pengamatan menggunakan pembobot spasial. Tujuan penelitian ini adalah mengembangkan model MLR dan GWMLR, yang meliputi penaksiran parameter dan pengujian hipotesis. Pengembangan model difokuskan untuk dua respon biner dan terdapat dependensi antar respon. Model MLR dan GWMLR yang telah dikembangkan diterapkan pada pemodelan status Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat (IPKM) dan Indeks Pembangunan Manusia (IPM) kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018. Penaksiran parameter model menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan Metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) digunakan untuk pengujian hipotesis parameter model. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penaksir maksimum likelihood parameter model berbentuk implisit. Penaksir maksimum likelihood dapat diperoleh dengan prosedur iteratif menggunakan metode Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH). Statistik uji untuk pengujian hipotesis parameter secara asimtotik berdistribusi *chi-square* dan normal standar. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 adalah pertumbuhan ekonomi, Angka Partisipasi Murni (APM) Sekolah Menengah Pertama (SMP), persentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP, rasio dokter per 1000 penduduk, dan jumlah puskesmas.

Kata kunci: regresi logistik multivariat, *geographically weighted*, *maximum likelihood*, BHHH, *maximum likelihood ratio test*, data spasial, IPKM, IPM.

***GEOGRAPHICALLY WEIGHTED
MULTIVARIATE LOGISTIC REGRESSION***

**A Case Study: Modeling the Status of Public Health Development Index
and Human Development Index of Districts/Cities in Kalimantan Island**

Name of Student : M. Fathurahman
Identity Number : 06211360010001
Promotor : Dr. Drs. Purhadi, M.Sc.
Co-Promotor : Dr. Sutikno, S.Si., M.Si.
Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

This study discusses the Multivariate Logistic Regression (MLR) model and the Geographically Weighted Multivariate Logistic Regression (GWMLR) model. MLR is a regression model developed from a multinomial distribution. The GWMLR model is the MLR model with all parameters depending on geographic location, and parameter estimation is carried out locally at each observation location using spatial weighting. This study aims to develop the MLR and GWMLR models, which include parameter estimation and hypothesis testing. Model development is focused on two binary responses, and there are dependencies between responses. MLR and GWMLR models that have been developed are applied to modeling the status of the Public Health Development Index (PHDI) and Human Development Index (HDI) districts/cities in Kalimantan Island in 2018. The parameter estimation was done using the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method, and the Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT) method was used for hypothesis testing of model parameters. The results showed that the maximum likelihood estimator of the model parameters was an implicit form. The maximum likelihood estimator can be obtained by an iterative procedure using the Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH) method. The test statistics for hypothesis testing of the parameters have an asymptotic chi-square and normal standard distributions. Factors influencing the status of PHDI and HDI of districts/cities in Kalimantan Island, in 2018 were economic growth, the Net Enrollment Rate of junior high schools, the percentage of the population who have the minimum level of education in junior high school, the ratio of doctors per 1000 population, and the number of public health center.

Keywords: multivariate logistic regression, geographically weighted, maximum likelihood, BHHH, maximum likelihood ratio test, spatial data, PHDI, HDI.

KATA PENGANTAR

Penulis mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, karena hanya atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga disertasi dengan judul “*Geographically Weighted Multivariate Logistic Regression (Studi Kasus: Pemodelan Status Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat dan Indeks Pembangunan Manusia Kabupaten/Kota di Pulau Kalimantan)*” dapat terselesaikan sesuai dengan rencana.

Dalam menyusun disertasi ini, penulis tidak sedikit mengalami kesulitan dan hambatan berkaitan dengan hal-hal baru yang ditemukan. Akan tetapi berkat bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, penulis dapat menyelesaikannya. Oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada yang terhormat:

1. Dr. rer. pol. Heri Kuswanto, S.Si., M.Si., selaku Direktur Pascasarjana dan Pengembangan Akademik, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menimba ilmu di Program Doktor Ilmu Statistik, Departemen Statistika, Fakultas Sains dan Analitika Data (FSAD).
2. Direktorat Jenderal Sumberdaya Iptek dan Dikti, Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi yang telah memberikan beasiswa (BPPDN) kepada penulis.
3. Dr. Dra. Kartika Fithriasari, M.Si., selaku Kepala Departemen Statistika FSAD ITS Surabaya, yang telah memberikan ijin, bantuan, dan dukungan fasilitas untuk kelancaran penulisan disertasi ini.
4. Dr. rer. pol. Dedy Dwi Prastyo, S.Si., M.Si., selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Departemen Statistika FSAD ITS Surabaya, yang telah memberikan ijin, bantuan, dan dukungan fasilitas untuk kelancaran penulisan disertasi ini.
5. Dr. Drs. Puhadi, M.Sc., sebagai Promotor dan dosen wali yang telah memberikan motivasi, bimbingan, saran, dan kemudahan yang sangat membantu dalam penulisan disertasi ini.

6. Dr. Sutikno, S.Si., M.Si. dan Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si., sebagai Co-Promotor yang telah memberikan motivasi, bimbingan, saran, dan kemudahan yang sangat membantu dalam penulisan disertasi ini.
7. Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si., Dr. Bambang Widjanarko Otok, S.Si., M.Si., Dr. Suhartono, S.Si., M.Sc., dan Dr. Sri Wahyuningsih, S.Si., M.Si sebagai tim penilai disertasi yang telah memberikan saran dan masukan dalam perbaikan penulisan disertasi ini.
8. Keluarga besar dosen, staf tata usaha dan karyawan Departemen Statistika FSAD ITS Surabaya yang telah memberikan bekal ilmu dan bantuan kepada penulis sehingga sangat membantu dalam penulisan disertasi ini.
9. Keluarga besar civitas akademika Program Studi Statistika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman yang telah memberikan doa, motivasi, dan dukungan semangat kepada penulis.
10. Kedua orangtua penulis, H. Safruddin dan Hj. Misbah, serta kedua mertua penulis H. Muhammad Romsyamsi (alm) dan Hj. Rukun Subakti (alm), atas doa, motivasi, dukungan, baik moril maupun materil serta penyemangat untuk penulis.
11. Rekan-rekan mahasiswa Program Doktor Ilmu Statistik Departemen Statistika FSAD ITS Surabaya, yang selalu memberikan dorongan dan bantuan pemikiran dalam penulisan disertasi ini.

Akhirnya penulis berharap mudah-mudahan penulisan disertasi ini dapat digunakan sebagai pijakan awal dalam upaya memajukan ilmu pengetahuan. Meskipun demikian, karena keterbatasan penulis dalam menyusun penulisan disertasi ini, maka demi kesempurnaannya segala saran dan kritik yang membangun dari semua pihak sangat penulis harapkan.

Surabaya, Juli 2020

M. Fathurahman

DAFTAR ISI

| | Hal |
|---|------------|
| LEMBAR JUDUL | i |
| LEMBAR PENGESAHAN | iii |
| PERNYATAAN | v |
| PERSEMBAHAN | vii |
| ABSTRAK | ix |
| ABSTRACT | xi |
| KATA PENGANTAR | xiii |
| DAFTAR ISI | xv |
| DAFTAR TABEL | xix |
| DAFTAR GAMBAR | xxi |
| DAFTAR LAMPIRAN | xxiii |
| DAFTAR LAMBANG DAN ARTI | xxv |
| | |
| BAB 1 PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 6 |
| 1.3 Tujuan Penelitian | 7 |
| 1.4 Manfaat dan Orisinalitas Penelitian | 8 |
| 1.5 Batasan Masalah | 10 |
| 1.6 Sistematika Penulisan | 10 |
| | |
| BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA | 11 |
| 2.1 Distribusi Multinomial | 11 |
| 2.2 Tabel Kontingensi | 12 |
| 2.3 <i>Univariate Logistic Regression</i> | 13 |
| 2.3.1 Penaksiran Parameter | 14 |
| 2.3.2 Pengujian Hipotesis | 16 |
| 2.4 Data Spasial | 18 |

| | | |
|--------------|---|----|
| 2.5 | <i>Geographically Weighted Univariate Logistic Regression</i> ... | 19 |
| 2.5.1 | Penaksiran Parameter | 20 |
| 2.5.2 | Pengujian Hipotesis | 24 |
| 2.5.3 | Penentuan Pembobot Optimum | 26 |
| 2.6 | Asimtotik Normalitas Penaksir <i>Maximum Likelihood</i> | 29 |
| 2.7 | Pengujian Multikolinieritas | 31 |
| 2.8 | Pengujian Dependensi Variabel Respon | 32 |
| 2.9 | Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat | 33 |
| 2.9.1 | Tujuan dan Manfaat IPKM | 33 |
| 2.9.2 | Kerangka Konsep IPKM | 34 |
| 2.9.3 | Indikator Penyusun IPKM | 37 |
| 2.9.4 | Perhitungan IPKM | 40 |
| 2.10 | Indeks Pembangunan Manusia | 42 |
| 2.11 | Kerangka Konseptual Status IPKM dan IPM | 46 |
| BAB 3 | METODE PENELITIAN | 47 |
| 3.1 | Tahapan Penelitian Kajian Teori | 47 |
| 3.1.1 | Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model MLR | 47 |
| 3.1.2 | Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model GWMLR | 53 |
| 3.2 | Tahapan Penelitian Kajian Terapan | 61 |
| 3.2.1 | Sumber Data | 61 |
| 3.2.2 | Variabel Penelitian | 63 |
| 3.3 | Tahapan Analisis Data | 65 |
| BAB 4 | PENAKSIRAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MODEL MLR | 67 |
| 4.1 | Model MLR | 67 |
| 4.2 | Penaksiran Parameter Model MLR | 69 |
| 4.3 | Pengujian Hipotesis Model MLR | 75 |

| | |
|--|------------|
| 4.3.1 Uji Serentak | 76 |
| 4.3.2 Uji Parsial | 82 |
| BAB 5 PENAKSIRAN PARAMETER DAN PENGUJIAN | |
| HIPOTESIS MODEL GWMLR | 85 |
| 5.1 Model GWMLR | 85 |
| 5.2 Penaksiran Parameter Model GWMLR | 87 |
| 5.3 Pengujian Hipotesis Model GWMLR | 95 |
| 5.3.1 Uji Kesamaan Model MLR dan GWMLR | 95 |
| 5.3.2 Uji Serentak | 96 |
| 5.3.3 Uji Parsial | 102 |
| BAB 6 PENERAPAN MODEL MLR DAN GWMLR | |
| PADA PEMODELAN STATUS IPKM DAN IPM | |
| KABUPATEN/KOTA DI PULAU KALIMANTAN | 105 |
| 6.1 Deskripsi Data Penelitian | 105 |
| 6.2 Pemodelan Status IPKM dan IPM dengan MLR | 110 |
| 6.3 Pemodelan Status IPKM dan IPM dengan GWMLR | 114 |
| BAB 7 KESIMPULAN DAN SARAN | 125 |
| 7.1 Kesimpulan | 125 |
| 7.2 Saran | 129 |
| DAFTAR PUSTAKA | 131 |
| LAMPIRAN | 137 |
| RIWAYAT HIDUP PENULIS | 193 |

DAFTAR TABEL

| | | Hal |
|-----------|--|------------|
| Tabel 2.1 | : Pengamatan untuk Variabel Y_1 dan Y_2 | 12 |
| Tabel 2.2 | : Probabilitas dari Pengamatan untuk Variabel Y_1 dan Y_2 | 13 |
| Tabel 2.3 | : Nilai Maksimum dan Minimum dari Setiap Komponen IPM | 45 |
| Tabel 3.1 | : Jumlah Kabupaten/Kota dari 5 Provinsi di Pulau Kalimantan | 62 |
| Tabel 3.2 | : Variabel Penelitian | 63 |
| Tabel 3.3 | : Struktur Data Penelitian | 64 |
| Tabel 6.1 | : Deskripsi Status IPKM dan IPM Kabupaten/Kota | 105 |
| Tabel 6.2 | : Deskripsi Prediktor | 107 |
| Tabel 6.3 | : Nilai Odds Rasio Status IPKM dan IPM | 108 |
| Tabel 6.4 | : Nilai VIF Prediktor | 110 |
| Tabel 6.5 | : Hasil MLR Univariabel | 110 |
| Tabel 6.6 | : Hasil MLR Multivariabel | 112 |
| Tabel 6.7 | : Ringkasan Statistik Parameter Model GWMLR | 115 |
| Tabel 6.8 | : Nilai Taksiran Parameter dan Statistik Uji Parsial Model GWMLR Kota Samarinda | 116 |
| Tabel 6.9 | : Pengelompokan Kabupaten/Kota berdasarkan Variabel yang Signifikan dalam Model GWMLR | 118 |

DAFTAR GAMBAR

| | Hal |
|---|------------|
| Gambar 1.1 : <i>Road map</i> Penelitian | 9 |
| Gambar 2.1 : Hubungan antara <i>Bandwidth</i> dengan Pembobot | 28 |
| Gambar 2.2 : <i>Fixed Kernel Bandwidth</i> | 28 |
| Gambar 2.3 : Modifikasi Model Determinan Sosial Kesehatan | 35 |
| Gambar 2.4 : Kerangka Konsep IPKM 2018 | 36 |
| Gambar 2.5 : Kerangka Konseptual Status IPKM dan IPM | 46 |
| Gambar 3.1 : Peta Unit Penelitian | 62 |
| Gambar 6.1 : Deskripsi Status IPKM dan IPM berdasarkan Persentase Kategori | 106 |
| Gambar 6.2 : Pemetaan Status IPKM dan IPM berdasarkan Kategori | 107 |
| Gambar 6.3 : Pemetaan Variabel yang Signifikan | 119 |
| Gambar 6.4 : Nilai Taksiran Parameter yang Signifikan terhadap Model GWMLR untuk Pertumbuhan Ekonomi | 120 |
| Gambar 6.5 : Nilai Taksiran Parameter yang Signifikan terhadap Model GWMLR untuk APM SMP | 121 |
| Gambar 6.6 : Nilai Taksiran Parameter yang Signifikan terhadap Model GWMLR untuk Persentase Penduduk yang berpendidikan Minimal SMP | 122 |
| Gambar 6.7 : Nilai Taksiran Parameter yang Signifikan terhadap Model GWMLR untuk Rasio Dokter per 1000 Penduduk | 123 |
| Gambar 6.8 : Nilai Taksiran Parameter yang Signifikan terhadap Model GWMLR untuk Jumlah Puskesmas | 124 |

DAFTAR LAMPIRAN

| | Hal |
|--|------------|
| Lampiran 1 : Data Penelitian | 137 |
| Lampiran 2 : Script dan Output R Deskripsi Variabel Penelitian | 141 |
| Lampiran 3 : Script dan Output R Uji Dependensi Antar Variabel Penelitian | 143 |
| Lampiran 4 : Script MATLAB Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model MLR | 145 |
| Lampiran 5 : Script MATLAB Penentuan <i>Bandwidth</i> Optimum | 151 |
| Lampiran 6 : Script MATLAB Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model GWMLR | 155 |
| Lampiran 7 : Script MATLAB Pengujian Kesamaan Model MLR dan GWMLR | 161 |
| Lampiran 8 : Matriks Pembobot Spasial <i>Fixed Kernel Bi-Square</i> | 163 |
| Lampiran 9 : Output MATLAB Taksiran Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model GWMLR | 173 |

DAFTAR LAMBANG DAN ARTI

- Y_1 : Respon pertama untuk model MLR dan GWMLR.
- Y_2 : Respon kedua untuk model MLR dan GWMLR.
- Y_{11} : Pengamatan untuk respon model MLR dan GWMLR, dimana Y_1 mempunyai kategori bernilai 1 dan Y_2 mempunyai kategori bernilai 1 ($Y_1 = 1, Y_2 = 1$).
- Y_{10} : Pengamatan untuk respon model MLR dan GWMLR, dimana Y_1 mempunyai kategori bernilai 1 dan Y_2 mempunyai kategori bernilai 0 ($Y_1 = 1, Y_2 = 0$).
- Y_{01} : Pengamatan untuk respon model MLR dan GWMLR, dimana Y_1 mempunyai kategori bernilai 0 dan Y_2 mempunyai kategori bernilai 1 ($Y_1 = 0, Y_2 = 1$).
- Y_{00} : Pengamatan untuk respon model MLR dan GWMLR, dimana Y_1 mempunyai kategori bernilai 0 dan Y_2 mempunyai kategori bernilai 0 ($Y_1 = 0, Y_2 = 0$).
- \mathbf{x} : Vektor prediktor model MLR dan GWMLR.
- $\eta_1(\mathbf{x})$: Model marjinal untuk Y_1 pada MLR.
- $\eta_2(\mathbf{x})$: Model marjinal untuk Y_2 pada MLR.
- $\eta_3(\mathbf{x})$: Model simultan untuk Y_1 dan Y_2 pada MLR.
- $\pi_1(\mathbf{x})$: Probabilitas marjinal untuk Y_1 pada model MLR dan bergantung pada \mathbf{x} .
- $\pi_2(\mathbf{x})$: Probabilitas marjinal untuk Y_2 pada model MLR dan bergantung pada \mathbf{x} .
- $\pi_{11}(\mathbf{x})$: Probabilitas bersama untuk $Y_1 = 1$ dan $Y_2 = 1$ pada model MLR dan bergantung pada \mathbf{x} .
- $\pi_{10}(\mathbf{x})$: Probabilitas bersama untuk $Y_1 = 1$ dan $Y_2 = 0$ pada model

| | |
|------------------------|--|
| | MLR dan bergantung pada \mathbf{x} . |
| $\pi_{01}(\mathbf{x})$ | : Probabilitas bersama untuk $Y_1 = 0$ dan $Y_2 = 1$ pada model MLR dan bergantung pada \mathbf{x} . |
| $\pi_{00}(\mathbf{x})$ | : Probabilitas bersama untuk $Y_1 = 0$ dan $Y_2 = 0$ pada model MLR dan bergantung pada \mathbf{x} . |
| $\psi(\mathbf{x})$ | Odds rasio yang menunjukkan adanya dependensi antar respon pada model MLR dan GWMLR. |
| $\boldsymbol{\beta}$ | : Vektor parameter model MLR. |
| $\boldsymbol{\beta}_1$ | Vektor parameter model logit 1 untuk MLR. |
| $\boldsymbol{\beta}_2$ | Vektor parameter model logit 2 untuk MLR. |
| $\boldsymbol{\beta}_3$ | Vektor parameter model log-odds untuk MLR. |
| $L(\cdot)$ | : Fungsi likelihood. |
| $\ell(\cdot)$ | : Fungsi log-likelihood. |
| $\mathbf{I}(\cdot)$ | : Matriks Informasi Fisher. |
| $\mathbf{H}(\cdot)$ | : Matriks Hessian. |
| $\mathbf{g}(\cdot)$ | : Vektor gradien. |
| MLE | : <i>Maximum Likelihood Estimation</i> . |
| MLRT | : <i>Maximum Likelihood Ratio Test</i> . |
| BHHH | : Metode iterasi Berndt-Hall-Hall-Hausman. |
| Par | : Parameter model model MLR dan GWMLR. |
| Est | : Taksiran parameter model model MLR dan GWMLR. |
| Se | : <i>Standard error</i> taksiran parameter model model MLR dan GWMLR. |
| i | : Indeks untuk banyaknya pengamatan pada model MLR. |
| i, j | : Indeks untuk banyaknya pengamatan/lokasi dalam model GWMLR. |
| k | : Banyaknya prediktor pada model MLR dan GWMLR. |
| n | : Besarnya ukuran sampel. |
| r | : Indeks untuk banyaknya prediktor pada model MLR dan |

- GWMLR.
- s : Indeks untuk vektor komponen parameter model MLR dan GWMLR.
- l : Indeks untuk banyaknya iterasi pada proses iterasi BHHH pada model MLR dan GWMLR.
- Y_{ghi} : Pengamatan untuk respon Y_1 dan Y_2 untuk model MLR dan GWMLR pada pengamatan/lokasi ke- i , dimana $Y_1 = g$ dan $Y_2 = h$.
- $\zeta_1(\mathbf{x})$: Model marjinal untuk Y_1 pada GWMLR.
- $\zeta_2(\mathbf{x})$: Model marjinal untuk Y_2 pada GWMLR.
- $\zeta_3(\mathbf{x})$: Model simultan untuk Y_1 dan Y_2 pada GWMLR.
- $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$: Vektor parameter model GWMLR untuk lokasi ke- i .
- $\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)$: Vektor parameter model logit 1 untuk GWMLR pada lokasi ke- i .
- $\boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)$: Vektor parameter model logit 1 untuk GWMLR pada lokasi ke- i .
- $\boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)$: Vektor parameter model log-odds untuk GWMLR pada lokasi ke- i .
- \mathbf{u}_i : Vektor koordinat lintang dan bujur di lokasi ke- i .
- d_{ij} : Jarak *Euclidean* antara lokasi ke- i dan lokasi ke- j .
- b : *Bandwidth*.
- $CV(b)$: *Cross Validation* dengan *bandwidth* b .
- w_{ij} : Nilai pembobot spasial untuk lokasi ke- i dan lokasi ke- j .
- \mathbf{W} : Matriks pembobot spasial untuk semua lokasi.
- K : Jumlah parameter efektif dalam model MLR dan GWMLR.
- $p_1(\mathbf{x})$: Probabilitas marjinal untuk Y_1 pada model GWMLR dan bergantung pada \mathbf{x} .
- $p_2(\mathbf{x})$: Probabilitas marjinal untuk Y_2 pada model GWMLR dan bergantung pada \mathbf{x} .

- $p_{11}(\mathbf{x})$: Probabilitas bersama untuk Y_1 dan Y_2 pada model GWMLR dan bergantung pada \mathbf{x} , dimana $Y_1 = 1$ dan $Y_2 = 1$.
- $p_{10}(\mathbf{x})$: Probabilitas bersama untuk Y_1 dan Y_2 pada model GWMLR dan bergantung pada \mathbf{x} , dimana $Y_1 = 1$ dan $Y_2 = 0$.
- $p_{01}(\mathbf{x})$: Probabilitas bersama untuk Y_1 dan Y_2 pada model GWMLR dan bergantung pada \mathbf{x} , dimana $Y_1 = 0$ dan $Y_2 = 1$.
- $p_{00}(\mathbf{x})$: Probabilitas bersama untuk Y_1 dan Y_2 pada model GWMLR dan bergantung pada \mathbf{x} , dimana $Y_1 = 0$ dan $Y_2 = 0$.
- H_0 : Hipotesis nol.
- H_1 : Hipotesis alternatif.
- α : Tingkat signifikansi.
- \tilde{a} : Distribusi asimtotik.
- ω_1 : Himpunan parameter model dibawah hipotesis nol untuk MLR.
- Ω_1 : Himpunan parameter model dibawah populasi untuk MLR.
- Λ_1, G_1^2 : Statistik uji LR untuk uji serentak parameter model MLR.
- ν_1 : Derajat bebas distribusi *chi-square* pada daerah penolakan uji serentak parameter model MLR.
- $\chi_{(\alpha, \nu_1)}^2$: Nilai tabel distribusi *chi-square* untuk α dengan derajat bebas ν_1 .
- Z_1 : Statistik uji Wald untuk uji parsial parameter model MLR.
- Z_ν : Statistik uji Voung untuk uji kesamaan model MLR dan GWMLR.
- ω_2 : Himpunan parameter model dibawah hipotesis nol untuk GWMLR.
- Ω_2 : Himpunan parameter model dibawah populasi untuk GWMLR.
- Λ_2, G_2^2 : Statistik uji LR untuk uji serentak parameter model GWMLR.

- ν_2 : Derajat bebas distribusi *chi-square* pada daerah penolakan uji serentak parameter model GWMLR.
- $\chi^2_{(\alpha, \nu_2)}$: Nilai tabel distribusi *chi-square* untuk α dengan derajat bebas ν_2 .
- Z_2 : Statistik uji untuk uji parsial parameter model GWMLR.
- $Z_{\alpha/2}$: Nilai tabel distribusi normal standar untuk $\alpha/2$.

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Regresi logistik merupakan model regresi yang sering digunakan untuk pemodelan hubungan antara variabel respon kualitatif (kategorik) dan satu atau lebih variabel prediktor. Model regresi logistik dapat juga digunakan untuk klasifikasi dan prediksi respon. Pemodelan dengan regresi logistik bergantung pada kategori dan banyaknya kategori pada respon. Model regresi logistik yang mempunyai respon dua kategori disebut model regresi logistik dikotomis (biner) atau sering disebut dengan model regresi logistik. Model regresi logistik yang mempunyai respon lebih dari dua kategori disebut model regresi logistik polikotomis. Model ini terbagi menjadi dua, yaitu model regresi logistik multinomial dan model regresi logistik ordinal (Hosmer, Lemeshow dan Sturdivant, 2013).

Penelitian ini difokuskan untuk pengembangan model regresi logistik multivariat untuk data spasial. Untuk mengembangkan model tersebut, dibutuhkan kajian tentang regresi logistik univariat dan regresi logistik multivariat. Regresi logistik univariat merupakan model regresi logistik yang mempunyai satu respon. Sedangkan regresi logistik multivariat merupakan model regresi logistik yang mempunyai dua atau lebih respon dan terdapat dependensi antar respon.

Penelitian yang mengkaji regresi logistik univariat diantaranya: Pregibon (1981) mengkaji penaksiran parameter, pendekatan numerik untuk penaksiran parameter, dan diagnosis pada model regresi logistik. Hosmer, Jovanovic, dan Lemeshow (1989) mengkaji penaksiran parameter, pengujian hipotesis, dan pemilihan model terbaik pada model regresi logistik. Bohning (1992) mengkaji algoritma komputasi untuk pemodelan regresi logistik multinomial. Bender dan Grouven (1997) mengkaji penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter model regresi logistik ordinal dengan metode *maximum likelihood estimation* (MLE) dan *likelihood ratio test* (LRT). Bianco dan Martinez (2009) mengkaji model regresi logistik *robust*. Hosseinian dan Morgenthaler (2011)

mengkaji penaksiran parameter model regresi logistik dengan pendekatan *least absolute deviation* (LAD). Yin, Wang dan Zhang (2014) mengkaji sifat-sifat asimtotik MLE pada model *two-step logit* yang dikembangkan dari model regresi logistik ordinal, yaitu eksistensi MLE, kecepatan konvergen dan normalitas asimtotik dari MLE.

Sebagai pengembangan dari regresi logistik univariat, telah dilakukan penelitian yang mengkaji regresi logistik multivariat. Dale (1986) mengkaji penaksiran parameter dengan metode MLE dan quasi-Newton. Pengujian hipotesis parameter menggunakan metode LRT dan untuk menguji adanya dependensi antar respon menggunakan *global cross-ratio* (GCR) atau odds rasio global. Palmgren (1989) mengkaji penaksiran parameter menggunakan metode MLE dan pendekatan numerik menggunakan algoritma *iteratively reweighted least squares* (IRLS). Cessie dan Houwelingen (1994) mengkaji penaksiran parameter dengan metode MLE dan iterasi Newton-Raphson, pengujian hipotesis parameter model dengan metode LRT, dan pengujian adanya dependensi antar respon menggunakan *tetrachoric* dan *odds ratio*. Glonek dan McCullagh (1995) mengkaji penaksiran parameter dengan metode MLE dan iterasi Newton-Raphson dan diterapkan pada data longitudinal. Shoukri, Martin, dan Mian (1995) dan Shoukri dan Mian (1996) mengkaji penaksiran parameter, kebaikan penaksir parameter, pengujian hipotesis parameter, dan pengujian dependensi antar respon menggunakan *kappa coefficient*. Molenberghs dan Lesaffre (1999) mengkaji penaksiran parameter model menggunakan metode MLE dan iterasi Newton-Raphson. O'Brien dan Dunson (2004) mengkaji pemodelan regresi logistik multivariat menggunakan pendekatan Bayesian. Islam, Chowdhury, dan Briollais (2012) dan El-Sayed, Islam, dan Alzaid (2013) mengkaji penaksiran parameter dan membandingkan beberapa metode pada pengujian hipotesis untuk dependensi antar respon.

Penelitian yang mengkaji pengembangan model regresi logistik tidak terbatas hanya untuk model regresi logistik yang telah diuraikan di atas, tetapi sudah dikembangkan model regresi logistik untuk data spasial. Beberapa penelitian yang mengembangkan model regresi logistik untuk data spasial diantaranya: Atkinson, German, Sear dan Clark (2003) mengembangkan model

Geographically Weighted Logistic Regression (GWLR) dan menerapkan pada analisis hubungan antara erosi sungai dengan faktor-faktor yang diduga mempengaruhinya. Luo dan Kanala (2008) dan Wang, Kockelman dan Wang (2011) mengembangkan kombinasi antara model regresi logistik multinomial dan *Geographically Weighted Regression* (GWR) yang disebut dengan model MNL GWR. Penaksiran parameter model menggunakan metode MLE dan iterasi Newton-Raphson. Purhadi, Rifada, dan Wulandari (2012) mengembangkan model *Geographically Weighted Ordinal Logistic Regression* (GWOLR). Model ini merupakan kombinasi antara model GWR dan regresi logistik ordinal. Penaksiran parameter model menggunakan metode MLE dan iterasi Newton-Raphson. Pengujian hipotesis parameter model menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Wardhani, Pramoedyo, dan Dianati (2014) mengembangkan model *Geographically Weighted Ordinal Logistic Regression Semiparametric* (GWOLRS). Model GWOLRS merupakan pengembangan dari model GWOLR. Prediktor yang digunakan pada model GWOLRS bersifat global dan lokal. Chen dan Yang (2012) mengkaji algoritma dan pemrograman untuk *Geographically Weighted Generalized Linear Models* (GWGLM) menggunakan *software* SAS yang dapat digunakan untuk model GWLR. Wu dan Zhang (2013) mengkaji perbandingan model *Geographically Weighted Logistic Model* (GWLM), *Logistic Mixed Model* (LMM), dan *Logistic Regression Model* (LRM) dan penerapannya pada pemodelan dan prediksi terjadinya *occurrence of cloud cover* sebagai fungsi fitur topografi dan suhu udara. Penaksiran parameter model menggunakan metode MLE dan *penalized-quasi likelihood*. Pengujian hipotesis parameter model menggunakan metode LRT. Pemilihan model terbaik menggunakan kriteria *Akaike's Information Criterion* (AIC). Rodrigues, de la Riva, dan Fotheringham (2014) mengkaji model GWLR untuk pemodelan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap terjadinya kebakaran hutan.

Beberapa kajian tentang regresi logistik untuk data spasial sebagaimana yang telah diuraikan di atas masih terbatas untuk kasus respon univariat. Dalam kenyataannya, tidak sedikit permasalahan dalam pemodelan data spasial yang melibatkan dua atau lebih respon yang berupa data kategorik dan terdapat dependensi antar respon, sehingga diperlukan analisis secara simultan. Berkaitan

dengan hal tersebut, pada penelitian ini dikembangkan model yang dapat digunakan untuk pemodelan regresi untuk data spasial yang mempunyai dua respon kategorik yang berdistribusi multinomial melalui *Geographically Weighted Multivariate Logistic Regression* (GWMLR).

Penerapan dari model GWMLR mengacu pada program pembangunan kesehatan yang tertuang dalam Undang-Undang Nomor 17 tahun 2007 tentang Rencana Pembangunan Jangka Panjang Nasional (RPJPN) tahun 2005 – 2025 dinyatakan bahwa dalam rangka mewujudkan sumber daya manusia yang berkualitas dan berdaya saing, maka kesehatan bersama-sama dengan pendidikan dan peningkatan daya beli masyarakat adalah tiga pilar utama untuk meningkatkan kualitas sumber daya manusia. Komposit dari tiga pilar utama ini selanjutnya dikenal dengan nama Indeks Pembangunan Manusia (IPM) (Kementerian Kesehatan, 2019).

IPM merupakan salah satu alat ukur yang dianggap dapat merefleksikan status pembangunan manusia. IPM merupakan suatu indeks komposit yang mengukur pencapaian rata-rata sebuah negara dalam tiga dimensi dasar pembangunan manusia yang dianggap sangat mendasar yaitu usia harapan hidup, pengetahuan, dan standar hidup layak. Dalam paradigma IPM, fokus utama ditujukan untuk pengembangan manusia, kemakmuran, keadilan, dan keberlanjutan. Dasar pemikiran paradigma ini mengacu kepada keseimbangan ekologi manusia dan tujuan utamanya adalah aktualisasi optimal potensi manusia (Kementerian Kesehatan, 2014).

Indikator kesehatan dalam IPM adalah Umur Harapan Hidup (UHH). UHH merupakan perkiraan lama hidup rata-rata penduduk dari sejak dilahirkan, dengan asumsi tidak ada perubahan pola mortalitas menurut umur. Namun muncul pertanyaan, apakah hanya cukup UHH yang panjang dapat mendukung pembangunan manusia? Diharapkan pembangunan manusia dari sektor kesehatan, selain mengupayakan agar penduduk dapat mencapai “umur hidup” yang panjang tetapi juga sehat berkualitas dan tidak bergantung pada orang lain. Selain itu, belum ada arah intervensi yang jelas khususnya di bidang kesehatan untuk meningkatkan UHH, sehingga diperlukan penjabaran yang lebih rinci dari indikator kesehatan yang terkait dengan UHH. Oleh karena itu, Badan Penelitian

dan Pengembangan Kesehatan (Balitbangkes) Kementerian Kesehatan menyusun Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat (IPKM). IPKM merupakan kumpulan indikator kesehatan yang dapat dengan mudah dan langsung diukur untuk menggambarkan masalah kesehatan. Serangkaian indikator kesehatan ini secara langsung maupun tidak langsung dapat berperan meningkatkan UHH yang panjang dan sehat (Kementerian Kesehatan, 2019). UHH juga dapat dijadikan sebagai salah satu alat untuk mengevaluasi kinerja pemerintah pada keberhasilan pembangunan kesehatan serta sosial ekonomi di suatu wilayah, termasuk didalamnya derajat kesehatan (Badan Pusat Statistik, 2014).

Kementerian Kesehatan (2019) telah mempublikasikan peringkat IPKM untuk provinsi dan kabupaten/kota di seluruh Indonesia. Semakin tinggi peringkat IPKM suatu provinsi atau kabupaten/kota, maka semakin baik kondisi kesehatan masyarakat di provinsi atau kabupaten/kota tersebut. Dari 5 provinsi yang ada di Pulau Kalimantan tahun 2018, Provinsi Kalimantan Timur menempati peringkat tertinggi dan Provinsi Kalimantan Tengah menempati peringkat terendah. Dari 56 kabupaten/kota, IPKM Kota Bontang, Kalimantan Timur menempati peringkat tertinggi, sedangkan peringkat IPKM terendah ditempati Kabupaten Kapuas, Kalimantan Tengah. Peringkat IPKM Kabupaten Malinau, Kalimantan Utara dan Kabupaten Penajam Paser Utara, Kalimantan Timur lebih tinggi dibanding IPKM Kota Palangkaraya, Kalimantan Tengah dan Kota Singkawang, Kalimantan Barat.

Seperti halnya pada IPKM, Badan Pusat Statistik (2019) mempublikasikan peringkat IPM untuk provinsi dan kabupaten/kota di seluruh Indonesia secara rutin setiap tahunnya. Pada tahun 2018, dari 5 provinsi yang ada di Pulau Kalimantan, Provinsi Kalimantan Timur berada di peringkat tertinggi dan Provinsi Kalimantan Barat di peringkat terendah. Dari 56 kabupaten/kota, Kota Palangkaraya, Kalimantan Tengah menempati peringkat tertinggi. Sedangkan Kabupaten Kayong Utara, Kalimantan Barat menempati peringkat terendah. Peringkat IPM Kabupaten Berau, Kalimantan Timur lebih tinggi dibanding Kota Singkawang, Kalimantan Barat.

Berdasarkan hasil publikasi peringkat IPKM dan IPM yang telah diuraikan di atas, terlihat bahwa terdapat kota yang mempunyai peringkat IPKM

dan IPM lebih rendah dibanding kabupaten atau terdapat kabupaten yang mempunyai peringkat IPKM atau IPM lebih tinggi dibanding kota. Hal ini menunjukkan bahwa peringkat IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 masih bervariasi.

Kajian ilmiah baik secara teori maupun terapan yang mengkaji faktor-faktor yang berpengaruh terhadap IPKM dan IPM telah dilakukan pada penelitian-penelitian sebelumnya. Fibriyani, Latra, dan Purhadi (2015) dalam penelitiannya menyebutkan faktor yang berpengaruh terhadap kombinasi antara status IPKM dan IPM adalah persentase penduduk miskin dan rasio dokter per 100.000 penduduk. Fathurahman, Purhadi, Sutikno, dan Ratnasari (2016) dalam penelitiannya menyebutkan faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM adalah persentase penduduk yang tamat perguruan tinggi dan persentase penduduk miskin. Sementara itu, Octavanny, Budiantara, dan Ratnasari (2017) menyebutkan faktor yang berpengaruh terhadap IPKM adalah angka kematian bayi, kepadatan penduduk, persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat, dan persentase rumah sehat. Samadi, Asdi, dan Efendi (2017) menyebutkan faktor yang berpengaruh terhadap IPM adalah persentase rumah yang mempunyai jamban sendiri, persentase kemiskinan, dan angka harapan sekolah.

Permasalahan muncul ketika sebagian besar hasil kajian tentang faktor-faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM dianalisis secara parsial, padahal dalam kenyataannya terdapat dependensi antara IPKM dan IPM. Selain itu, seringkali analisis dilakukan berdasarkan asumsi homogenitas spasial, padahal IPKM dan IPM untuk setiap kabupaten/kota dimungkinkan adanya heterogenitas spasial. Berkaitan dengan hal tersebut, pada penelitian ini dilakukan kajian untuk pemodelan spasial tentang faktor-faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM secara simultan menggunakan model MLR dan GWMLR.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang, kajian tentang MLR telah banyak dilakukan para peneliti. Permasalahan akan muncul pada pemodelan regresi logistik ketika diterapkan pada data spasial yang tidak stasioner (heterogenitas). Pemodelan regresi logistik global terhadap data spasial yang tidak stasioner akan

menghasilkan model yang tidak sesuai (*poor model*). Beberapa penelitian yang mengkaji regresi logistik yang mempertimbangkan adanya heterogenitas spasial telah dilakukan para peneliti, akan tetapi masih terbatas untuk kasus univariat. Padahal dalam penerapannya tidak sedikit permasalahan dalam *spatial categorical data* yang melibatkan dua atau lebih respon dan terdapat dependensi antar respon, sehingga perlu dianalisis secara simultan.

Berkaitan dengan hal tersebut, rumusan permasalahan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk penaksir parameter model MLR?
2. Bagaimana bentuk statistik uji, distribusi statistik uji, dan daerah penolakan pada pengujian hipotesis model MLR?
3. Bagaimana bentuk penaksir parameter model GWMLR?
4. Bagaimana bentuk statistik uji, distribusi statistik uji, dan daerah penolakan pada pengujian hipotesis model GWMLR?
5. Bagaimana model MLR dan GWMLR untuk memodelkan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018?
6. Faktor-faktor apa saja yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018?

1.3 Tujuan Penelitian

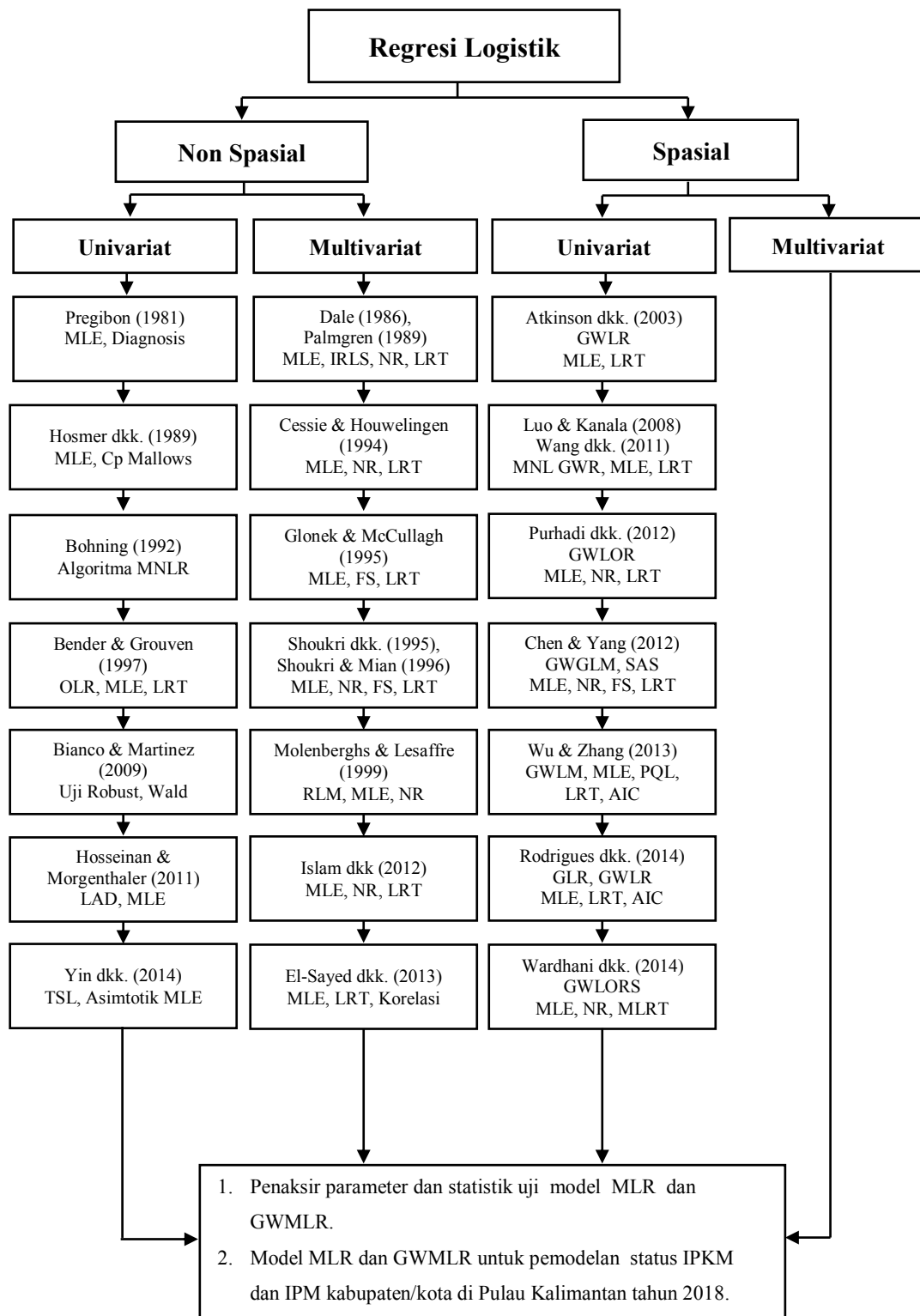
Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan bentuk penaksir parameter MLR.
2. Mendapatkan statistik uji, bentuk statistik uji, dan daerah penolakan pada pengujian hipotesis model MLR.
3. Mendapatkan bentuk penaksir parameter GWMLR.
4. Mendapatkan statistik uji, bentuk statistik uji, dan daerah penolakan pada pengujian hipotesis model GWMLR.
5. Mendapatkan model MLR dan GWMLR untuk memodelkan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018.
6. Mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018.

1.4 Manfaat dan Orisinalitas Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan ilmu statistik, khususnya pemodelan MLR untuk data spasial yang mempertimbangkan adanya heterogenitas spasial. Selain itu, model MLR dan GWMLR yang didapat dari kajian terapan dapat menjadi bahan pertimbangan bagi Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan Kementerian Kesehatan, Dinas Kesehatan Provinsi, dan Dinas Kesehatan Kabupaten/Kota yang ada di Pulau Kalimantan dalam meningkatkan derajat kesehatan, pembangunan kesehatan masyarakat, dan pembangunan manusia. Peningkatan derajat kesehatan, pembangunan kesehatan masyarakat, dan pembangunan manusia tersebut salah satunya dengan meningkatkan UHH yang panjang dan sehat melalui IPKM dan IPM dengan memperhatikan faktor-faktor yang potensial mempengaruhinya sesuai dengan karakteristik masing-masing kabupaten/kota.

Orisinalitas penelitian ini didasarkan pada penelitian sebelumnya, yaitu telah dikembangkan model MLR untuk banyaknya respon dan banyaknya kategori pada respon yang jumlahnya berbeda-beda. Penelitian ini mengembangkan model MLR yang memuat heterogenitas spasial, kajian penelitian sebelumnya masih terbatas untuk kasus univariat melalui model GWLR. Pada penelitian ini dikembangkan model GWMLR sebagai pengembangan dari model GWLR, yaitu model GWMLR yang mempunyai dua respon dan terdapat dependensi antar respon. Selain itu, orisinalitas penelitian ini terdapat pada kajian terapan, yaitu model MLR dan GWMLR untuk pemodelan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018. Orisinalitas penelitian ini diperjelas oleh *road map* penelitian yang disajikan pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Road map Penelitian

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Banyaknya respon pada model MLR dan GWMLR dalam penelitian ini dibatasi hanya untuk dua respon, dimana masing-masing respon mempunyai dua kategori dan terdapat dependensi antar respon.
2. Variabel respon model MLR dan GWMLR berdistribusi multinomial.
3. Kajian spasial yang digunakan adalah spasial tipe titik, dimana koordinat lokasi titik pengamatan dinyatakan dalam pasangan letak lintang (*latitude*) dan letak bujur (*longitude*). Letak koordinat sebagai titik setiap lokasi ditentukan di pusat pemerintahan kabupaten/kota.
4. Pembobot spasial yang digunakan untuk pemodelan GWMLR adalah pembobot *fixed kernel bi-square*.
5. Penentuan *bandwidth* optimum menggunakan metode *cross validation* (CV).
6. Penentuan penaksir parameter menggunakan metode MLE dan proses iterasi menggunakan metode Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH).

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan disertasi ini adalah diawali dengan pendahuluan disajikan pada bab 1, tinjauan pustaka dibahas pada bab 2, metode penelitian diuraikan pada bab 3. Kajian teori model MLR terdiri atas model, penaksiran parameter dan pengujian hipotesis disajikan pada bab 4. Kajian teori model GWMLR yang terdiri atas model, penaksiran parameter, dan pengujian hipotesis disajikan pada bab 5. Kajian terapan model MLR dan GWMLR untuk pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 disajikan pada bab 6. Bagian akhir adalah penutup yang meliputi kesimpulan dan saran untuk penelitian lanjutan disajikan pada bab 7.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menyajikan tinjauan pustaka yang berkaitan dengan model *Multivariate Logistic Regression* (MLR) dan *Geographically Weighted Multivariate Logistic Regression* (GWMLR). Tinjauan pustaka ini meliputi distribusi multinomial, tabel kontingensi, *Univariate Logistic Regression* (ULR), konsep data spasial, *Geographically Weighted Univariate Logistic Regression* (GWULR), asimtotik normalitas penaksir *maximum likelihood*, pengujian multikolinieritas, dan pengujian dependensi variabel respon. Pada akhir bab ini disajikan tinjauan pustaka yang berkaitan dengan penerapan model MLR dan GWMLR yaitu Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat (IPKM), Indeks Pembangunan Manusia (IPM), dan kerangka konseptual dari faktor-faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM.

2.1 Distribusi Multinomial

Distribusi multinomial merupakan distribusi diskrit multivariat yang dikembangkan dari distribusi binomial (Johnson, Kotz dan Balakrishnan, 1997). Misalkan variabel random Y mempunyai C kategori, maka $y_{gh} = 1$ jika percobaan ke- g mempunyai hasil kategori ke- h dan $y_{gh} = 0$ untuk yang lainnya, dengan $h = 1, 2, \dots, C$ dan $g = 1, 2, \dots, m$. Vektor variabel random $\mathbf{y}_g = [y_{g1} \ y_{g2} \ \dots \ y_{gC}]^T$ menyatakan percobaan multinomial dengan $\sum_{h=1}^C Y_{gh} = 1$. Misalkan $y_h = \sum_{g=1}^m y_{gh}$ menyatakan jumlah percobaan pada kategori ke- h , maka vektor variabel random $[Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_C]^T$ akan berdistribusi multinomial.

Misalkan $\pi_h = P(Y_{gh} = 1)$ menyatakan probabilitas hasil kategori ke- h untuk setiap percobaan. Fungsi distribusi probabilitas dari distribusi multinomial dinyatakan sebagai berikut:

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_{C-1} = y_{C-1}; m, \boldsymbol{\pi}) = \binom{m}{y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_{C-1}} \pi_1^{y_1} \pi_1^{y_1} \dots \pi_{C-1}^{y_{C-1}} \pi_C^{y_C}, \quad (2.1)$$

dimana $\pi_C = 1 - \pi_1 - \pi_2 - \dots - \pi_{C-1}$, $y_C = m - y_1 - y_2 - \dots - y_{C-1}$,

$$y_h = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{h=1}^C Y_h = m, \quad \text{dan } \boldsymbol{\pi} = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots \quad \pi_{C-1}]^T.$$

$$E(Y_h) = m \pi_h, \quad \text{Var}(Y_h) = m \pi_h (1 - \pi_h), \quad \text{Cov}(Y_h, Y_{h^*}) = m \pi_h \pi_{h^*}, \quad \text{untuk } h \neq h^*$$

(Agresti, 2013).

Untuk $m = 1$, persamaan (2.1) dapat ditulis menjadi

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_{C-1} = y_{C-1}; 1, \boldsymbol{\pi}) = \pi_1^{y_1} \pi_2^{y_2} \dots \pi_{C-1}^{y_{C-1}} \pi_C^{y_C} = \prod_{h=1}^C \pi_h^{y_h}, \quad (2.2)$$

dimana y_1, y_2, \dots, y_{C-1} bernilai 0 atau 1.

2.2 Tabel Kontingensi

Tabel kontingensi merupakan tabel silang yang melibatkan dua atau lebih variabel kategorik. Dalam penelitian ini digunakan tabel kontingensi berukuran (2×2) . Tabel kontingensi ini memuat dua variabel kategorik dan masing-masing variabel mempunyai dua kategori. Misalkan variabel pertama dinotasikan dengan Y_1 dan variabel kedua dengan Y_2 , maka terbentuk tabel kontingensi berukuran (2×2) yang memiliki empat sel seperti pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Pengamatan untuk Variabel Y_1 dan Y_2

| Y_1 | Y_2 | |
|-----------|-----------|-----------|
| | $Y_2 = 1$ | $Y_2 = 0$ |
| $Y_1 = 1$ | Y_{11} | Y_{10} |
| $Y_1 = 0$ | Y_{01} | Y_{00} |

Pada Tabel 2.1, keempat sel memuat pengamatan untuk sepasang variabel Y_1 dan Y_2 yang masing-masing bernilai g dan h , yaitu $Y_{gh} = (Y_1 = g, Y_2 = h)$, untuk $Y_{gh}, g, h = 0, 1$. Probabilitas dari pengamatan untuk variabel Y_1 dan Y_2 pada Tabel 2.1 disajikan pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Probabilitas dari Pengamatan untuk Variabel Y_1 dan Y_2

| Y_1 | Y_2 | | Total |
|-----------|------------|-------------|-------------|
| | $Y_2 = 1$ | $Y_2 = 0$ | |
| $Y_1 = 1$ | π_{11} | π_{10} | π_1 |
| $Y_1 = 0$ | π_{01} | π_{00} | $1 - \pi_1$ |
| Total | π_2 | $1 - \pi_2$ | 1 |

Berdasarkan Tabel 2.1, terdapat variabel random Y_{11} , Y_{10} , Y_{01} , dan Y_{00} . Karena $\pi_{11} + \pi_{10} + \pi_{01} + \pi_{00} = 1$ dan $\pi_{00} = 1 - \pi_{11} - \pi_{10} - \pi_{01}$, maka variabel random Y_{11} , Y_{10} , Y_{01} , dan Y_{00} berdistribusi multinomial dengan probabilitasnya masing-masing π_{11} , π_{10} , π_{01} , dan π_{00} . Misalkan $\mathbf{y} = [Y_{11} \ Y_{10} \ Y_{01} \ Y_{00}]^T$, maka $\mathbf{y} \sim M(1; \pi_{11}, \pi_{10}, \pi_{01}, \pi_{00})$. Berdasarkan persamaan (2.2), fungsi probabilitas dari \mathbf{y} didefinisikan sebagai berikut:

$$P(Y_{11} = y_{11}, Y_{10} = y_{10}, Y_{01} = y_{01}, Y_{00} = y_{00}) = \prod_{g=0}^1 \prod_{h=0}^1 \pi_{gh}^{y_{gh}}, \quad 0 < \pi_{gh} < 1, \quad (2.3)$$

dimana $y_{gh} = 0, 1$; $g, h = 0, 1$; dan $y_{00} = 1 - y_{11} - y_{10} - y_{01}$.

2.3 Univariate Logistic Regression

Model *Univariate Logistic Regression* (ULR) merupakan model regresi logistik yang mempunyai satu variabel respon dengan dua kategori. Model ULR dapat digunakan untuk memodelkan hubungan antara satu variabel respon dan satu atau lebih variabel prediktor. Variabel prediktor yang digunakan dapat berupa data kualitatif (kategorik), data kuantitatif, atau gabungan antara data kualitatif dan kuantitatif. Untuk pembahasan selanjutnya variabel respon dan variabel prediktor, masing-masing disebut dengan respon dan prediktor.

Diberikan sampel random Y_1, Y_2, \dots, Y_n berdistribusi Bernoulli dengan parameter π , maka model regresi logistik dapat dinyatakan seperti persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{x}_i) &= \text{logit}(\pi(\mathbf{x}_i)) \\
&= \ln\left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i)}{1-\pi(\mathbf{x}_i)}\right) \\
&= \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{k_i} X_{ki} \\
&= \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

dimana

$\mathbf{x}_i = [1 \ X_{1i} \ X_{2i} \ \dots \ X_{ki}]^T$ adalah vektor prediktor,

$\boldsymbol{\beta}^T = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_k]$ adalah vektor parameter,

$\pi(\mathbf{x}_i)$ adalah probabilitas respon yang mempunyai kategori bernilai 1 untuk pengamatan ke- i dan bergantung pada prediktor pada pengamatan ke- i . Probabilitas $\pi(\mathbf{x}_i)$ dinyatakan seperti persamaan (2.5).

$$\pi(\mathbf{x}_i) = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i)}. \tag{2.5}$$

2.3.1 Penaksiran Parameter

Model ULR dapat diperoleh dengan melakukan penaksiran terhadap parameter modelnya. Metode *maximum likelihood estimation* (MLE) adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk menaksir parameter model ULR. Penaksiran parameter ini dimulai dengan mengambil n sampel random yang saling bebas, sedemikian sehingga variabel random $y_i \sim \text{Bernoulli}(\pi(\mathbf{x}_i))$. Berdasarkan fungsi probabilitas dari distribusi Bernoulli dapat diperoleh fungsi likelihood yang dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta}) &= \prod_{i=1}^n P(Y_i = y_i) \\
&= \prod_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i)^{y_i} (1 - \pi(\mathbf{x}_i))^{1-y_i} \\
&= \prod_{i=1}^n (\exp(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i))^{y_i} (1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i))^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Selanjutnya membentuk fungsi log-likelihood berdasarkan persamaan (2.6) yaitu

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\beta}) &= \ln L(\boldsymbol{\beta}) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i)).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Penaksir parameter dapat diperoleh dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood pada persamaan (2.7). Memaksimumkan fungsi likelihood dilakukan dengan cara menentukan turunan parsial pertama fungsi log-likelihood terhadap $\boldsymbol{\beta}$ kemudian disamakan dengan nol, yaitu:

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \pi(\mathbf{x}_i) = 0, \quad (2.8)$$

dimana $\pi(\mathbf{x}_i)$ seperti pada persamaan (2.5).

Berdasarkan persamaan (2.8) diperoleh sistem persamaan yang tidak eksplisit. Hal ini menunjukkan bahwa penaksir parameter model ULR yang diperoleh dengan metode MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian secara analitik. Untuk mendapatkan penaksir parameter digunakan pendekatan secara numerik menggunakan metode iterasi Newton-Raphson dengan formula:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}), \quad (2.9)$$

dimana

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}$ adalah penaksir ML parameter model ULR pada iterasi ke- l ,

$$\mathbf{g}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}) = \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0} \quad \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \right]_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}},$$

adalah vektor gradien, dengan turunan parsial pertama fungsi log-likelihood terhadap masing-masing parameter adalah

$$\left. \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \hat{\pi}(\mathbf{x}_i), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k^2} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}},$$

adalah matriks Hessian, dengan turunan parsial kedua fungsi log-likelihood terhadap masing-masing kombinasi parameter dari model adalah

$$\left. \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T \partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}} = - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \hat{\pi}(\mathbf{x}_i) (1 - \hat{\pi}(\mathbf{x}_i)). \quad (2.11)$$

Penaksir parameter diperoleh ketika iterasi telah mencapai kondisi konvergen, yaitu $\|\boldsymbol{\beta}_{(l+1)}(\mathbf{u}_i) - \boldsymbol{\beta}_{(l)}(\mathbf{u}_i)\| \leq \varepsilon$, dimana ε merupakan bilangan riil positif yang sangat kecil.

2.3.2 Pengujian Hipotesis

Pengujian hipotesis parameter model ULR meliputi pengujian parameter secara serentak dan pengujian parameter secara parsial. Kedua pengujian tersebut berturut-turut disebut dengan uji serentak dan uji parsial. Uji serentak digunakan untuk mengetahui adanya pengaruh prediktor terhadap respon secara serentak atau untuk mengetahui paling tidak ada satu prediktor yang berpengaruh terhadap respon. Sedangkan uji parsial adalah uji lanjutan dari uji serentak yang digunakan untuk mengetahui adanya pengaruh dari masing-masing prediktor terhadap respon secara individu.

Hipotesis yang digunakan untuk uji serentak diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \text{Paling sedikit terdapat satu } \beta_r \neq 0, \text{ untuk } r = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Untuk mendapatkan statistik uji untuk pengujian hipotesis pada persamaan (2.12) dapat digunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT).

Penentuan statistik uji dengan metode MLRT diawali dengan menentukan himpunan parameter model dibawah H_0 yaitu $\omega_a = \{\beta_0\}$ dan nilai

maksimum fungsi likelihood himpunan parameter model dibawah H_0 dapat ditulis seperti persamaan (2.13).

$$L(\hat{\omega}_a) = \text{maks } L(\omega_a) \\ = \prod_{i=1}^n (\exp(\hat{\beta}_0))^{y_i} (1 + \exp(\hat{\beta}_0))^{-1}. \quad (2.13)$$

Memaksimum fungsi likelihood pada persamaan (2.13) ekuivalen dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood

$$L(\hat{\omega}_a) = \text{maks } \ln L(\omega_a) \\ = \sum_{i=1}^n y_i \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \exp(\hat{\beta}_0)). \quad (2.14)$$

dimana $\hat{\beta}_0$ adalah penaksir ML parameter β_0 yang diperoleh dengan metode iterasi Newton-Raphson pada persamaan (2.9).

Selanjutnya menentukan himpunan parameter dibawah populasi yaitu $\Omega_a = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k\}$ dan nilai maksimum fungsi likelihood himpunan parameter dibawah populasi

$$L(\hat{\Omega}_a) = \text{maks } L(\Omega_a) = \prod_{i=1}^n (\exp(\hat{\beta}^T \mathbf{x}_i))^{y_i} (1 + \exp(\hat{\beta}^T \mathbf{x}_i))^{-1}, \quad (2.15)$$

dimana $\hat{\beta}$ adalah penaksir ML parameter β yang diperoleh dengan metode iterasi Newton-Raphson pada persamaan (2.9).

Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (2.13) dan persamaan (2.15), maka diperoleh statistik uji LR

$$G_a^2 = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega}_a)}{L(\hat{\Omega}_a)} \right) \\ = 2 \sum_{i=1}^n ([y_i \hat{\beta}^T \mathbf{x}_i - \ln(1 + \exp(\hat{\beta}^T \mathbf{x}_i))] - [y_i \hat{\beta}_0 - \ln(1 + \exp(\hat{\beta}_0))]). \quad (2.16)$$

Statistik uji G_a^2 pada persamaan (2.16) secara asimtotik berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebasnya adalah banyaknya parameter model dibawah populasi dikurangi banyaknya parameter model dibawah H_0 , yaitu $v_a = (k+1) - 1 = k$.

Daerah penolakan H_0 dari pengujian hipotesis pada persamaan (2.12) untuk tingkat signifikansi α adalah tolak H_0 jika nilai $G_a^2 > \chi_{(v_a; \alpha)}^2$.

Setelah dilakukan uji serentak dilanjutkan dengan uji parsial menggunakan hipotesis yang diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_r &= 0, \\ H_1 : \beta_r &\neq 0, r = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Statistik uji untuk pengujian hipotesis dari persamaan (2.17) adalah statistik Wald seperti persamaan (2.18).

$$Z_a = \frac{\hat{\beta}_r}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_r)}} \sim N(0,1), \quad (2.18)$$

dimana $Var(\hat{\beta}_r)$ diperoleh dari elemen diagonal ke $(k+1)$ dari matriks varians kovarians $Cov(\hat{\beta})$, dimana $Cov(\hat{\beta}) = [I(\hat{\beta})]^{-1} = -[H(\hat{\beta})]^{-1}$. $I(\hat{\beta})$ dan $H(\hat{\beta})$ adalah berturut-turut menyatakan matriks Informasi Fisher dan matriks Hessian. Daerah penolakan H_0 dari pengujian hipotesis pada persamaan (2.18) untuk tingkat signifikansi α adalah tolak H_0 jika nilai $|Z_a| > Z_{\alpha/2}$.

2.4 Data Spasial

Data spasial adalah data stokastik yang diperoleh dari hasil observasi yang memuat dua informasi, yaitu lokasi dan pengukuran. Sifat stokastik tersebut mengakibatkan informasi suatu lokasi akan memberikan pengaruh pada lokasi lain atau masing-masing lokasi mempunyai keragaman data yang berbeda. Hal ini sesuai dengan prinsip Tobler dalam Miller (2004), bahwa segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang dekat lebih mempunyai pengaruh daripada sesuatu yang jauh. Pengaruh spasial antar wilayah dapat dikelompokkan menjadi dua bagian, yaitu ketergantungan (dependensi) spasial dan keragaman (heterogenitas) spasial.

Dependensi spasial merupakan suatu kejadian yang menunjukkan adanya hubungan fungsional antara kejadian di suatu lokasi pengamatan dengan kejadian di lokasi pengamatan lainnya. Dependensi spasial mengacu pada hubungan antara data spasial berdasarkan sifat dari variabel yang diamati dengan ukuran dan

bentuk untuk setiap lokasi. Semakin kecil unit spasial, maka semakin besar probabilitas bahwa unit di dekatnya akan bergantung secara spasial. Jika unit spasial panjang dan sempit, kemungkinan dependensi spasial dengan unit di dekatnya akan lebih besar dibandingkan dengan unit lainnya.

Dalam pemodelan regresi global diasumsikan bahwa hubungan dalam pemodelan adalah sama di setiap lokasi pengamatan dimana data diambil, yang sering disebut dengan asumsi homogenitas (Charlton dan Fotheringham, 2009). Pemodelan regresi global dengan asumsi tersebut akan menghasilkan parameter yang sama untuk setiap lokasi, sementara untuk data spasial sangat dimungkinkan adanya keragaman secara kewilayahan yang disebut dengan heterogenitas spasial. Menurut Miller (2004) heterogenitas spasial menunjukkan adanya keragaman data dalam hubungan secara kewilayahan. Hal ini mengakibatkan parameter global yang diduga dari data yang memuat heterogenitas spasial tidak menggambarkan dengan baik fenomena spasial di wilayah tertentu.

2.5 Geographically Weighted Univariate Logistic Regression

Model *Geographically Weighted Univariate Logistic Regression* (GWULR) merupakan pengembangan dari model ULR. Model ini menghasilkan estimasi parameter model yang bersifat lokal untuk setiap titik atau lokasi dimana data tersebut dikumpulkan. Variabel respon pada model GWULR diprediksi dengan variabel prediktor, dimana masing-masing koefisien regresinya bergantung pada lokasi dimana data tersebut diamati.

Diberikan sampel random Y_1, Y_2, \dots, Y_n berdistribusi Bernoulli dengan parameter p dan $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$ merupakan vektor koordinat dua dimensi (lintang dan bujur) di lokasi ke- i , maka model GWULR dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 h(\mathbf{x}_i) &= \text{logit}(p(\mathbf{x}_i)) = \ln\left(\frac{p(\mathbf{x}_i)}{1-p(\mathbf{x}_i)}\right) \\
 &= \beta_0(\mathbf{u}_i) + \beta_1(\mathbf{u}_i)X_{1i} + \beta_2(\mathbf{u}_i)X_{2i} + \dots + \beta_{ki}(\mathbf{u}_i)X_{ki} \\
 &= \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i,
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

dimana

$\mathbf{x}_i = [1 \ X_{1i} \ X_{2i} \ \dots \ X_{ki}]^T$ adalah vektor prediktor,

$\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) = [\beta_0(\mathbf{u}_i) \ \beta_1(\mathbf{u}_i) \ \beta_2(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \beta_k(\mathbf{u}_i)]$ adalah vektor parameter, dan

$\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$ adalah vektor variabel geografis untuk pengamatan pada lokasi ke- i , dimana u_{1i} dan u_{2i} adalah berturut-turut menyatakan letak lintang dan bujur

lokasi ke- i . Probabilitas $p(\mathbf{x}_i)$ adalah probabilitas respon yang mempunyai kategori bernilai 1 pada lokasi ke- i dan bergantung pada prediktor pada lokasi ke- i . Probabilitas $p(\mathbf{x}_i)$ dinyatakan dengan formula:

$$p(\mathbf{x}_i) = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}. \quad (2.20)$$

2.5.1 Penaksiran Parameter

Penaksiran parameter model GWULR dilakukan dengan metode MLE, yaitu menentukan penaksir dari parameter dengan memaksimumkan fungsi likelihood. Misalkan diberikan n sampel random dari variabel random $y_i \sim \text{Bernoulli}(p(\mathbf{x}_i))$. Berdasarkan fungsi probabilitas dari distribusi Bernoulli dan ketergantungan terhadap lokasi, maka fungsi likelihood lokasi ke- i dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) &= \prod_{j=1}^n P(Y_j = y_j) \\ &= \prod_{j=1}^n p(\mathbf{x}_j)^{y_j} (1 - p(\mathbf{x}_j))^{1-y_j} \\ &= \prod_{j=1}^n [\exp(\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j)]^{y_j} [1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j)]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Berdasarkan persamaan (2.21) dibentuk fungsi log-likelihood

$$\ell(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \ln L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{j=1}^n y_j \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j - \sum_{j=1}^n \ln[1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j)]. \quad (2.22)$$

Dalam model GWULR, koefisien regresi memiliki nilai yang berbeda-beda untuk masing-masing lokasi yang menunjukkan sifat lokal dari model. Oleh karena itu untuk menentukan penaksir parameter pada lokasi ke- i diperlukan

informasi dari lokasi yang lain (misalnya lokasi ke- j) dengan pembobot w_{ij} , dimana penentuan pembobot optimum disajikan pada subbab 2.5.3. Fungsi log-likelihood lokasi ke- i pada persamaan (2.22) dapat dituliskan sebagai fungsi log-likelihood terboboti untuk lokasi ke- i , yaitu:

$$\ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j - \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln[1 + \exp(\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j)]. \quad (2.23)$$

Penaksir parameter $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ dapat diperoleh dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood pada persamaan (2.23). Memaksimumkan fungsi log-likelihood tersebut dilakukan dengan cara menentukan turunan parsial pertama fungsi log-likelihood terhadap $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ kemudian disamakan dengan nol, yaitu:

$$\frac{\partial \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j \mathbf{x}_j - \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j p(\mathbf{x}_j) = 0, \quad (2.24)$$

dimana $p(\mathbf{x}_j)$ seperti pada persamaan (2.20).

Berdasarkan persamaan (2.24) diperoleh bentuk penaksir ML parameter model GWULR yang tidak eksplisit. Hal ini menunjukkan bahwa metode MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian secara analitik. Untuk mendapatkan penaksir parameter dibutuhkan pendekatan secara numerik melalui metode iterasi Newton-Raphson. Alasan digunakan metode ini karena analisisnya lebih mudah dan sederhana dibanding pendekatan numerik dengan metode lainnya. Jika vektor gradien dan matriks Hessian diketahui, maka metode iterasi Newton-Raphson dapat dengan mudah dan sederhana untuk digunakan dalam penyelesaian optimasi untuk bentuk penaksir parameter yang tidak eksplisit. Proses iterasi Newton-Raphson diformulasikan sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i)) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i)), \quad (2.25)$$

dimana

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i)$ adalah penaksir parameter pada lokasi ke- i untuk iterasi ke- l , $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i))$ adalah vektor gradien pada lokasi ke- i untuk iterasi ke- l , yaitu

$$\mathbf{g}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i)) = \left[\frac{\partial \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} \quad \dots \quad \frac{\partial \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} \right]_{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i)},$$

dengan elemen-elemennya adalah turunan parsial pertama fungsi log-likelihood pada persamaan (2.23) terhadap masing-masing parameter seperti pada persamaan (2.26).

$$\left. \frac{\partial \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} \right|_{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j \mathbf{x}_j - \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \hat{p}(\mathbf{x}_j), \quad (2.26)$$

$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i))$ adalah matriks Hessian pada lokasi ke- i untuk iterasi ke- l , yaitu

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i)) = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0^2(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i) \partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1^2(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i) \partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_k(\mathbf{u}_i) \partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_k(\mathbf{u}_i) \partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_k^2(\mathbf{u}_i)} \end{array} \right]_{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i)},$$

dimana elemen-elemennya adalah turunan parsial kedua fungsi log-likelihood terboboti terhadap masing-masing kombinasi parameter seperti pada persamaan (2.27).

$$\left. \frac{\partial^2 \ell^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)} \right|_{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i)} = - \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \hat{p}(\mathbf{x}_j) (1 - \hat{p}(\mathbf{x}_j)). \quad (2.27)$$

Jika persamaan (2.26) dan persamaan (2.27) disubstitusikan pada persamaan (2.25), maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l+1)}(\mathbf{u}_i) &= \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i) + \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j) [1 - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)] \right)^{-1} \times \\ &\quad \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} y_j \mathbf{x}_j - \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j) \right) \\ &= \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i) + \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j) [1 - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)] \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j [y_j - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)] \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j) [1 - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)] \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j) \left(\frac{y_j - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)}{\hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)} \right) \right) + \\ &\quad \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j) [1 - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)] \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i) \right), \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l+1)}(\mathbf{u}_i) = \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j w_{ij} \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j) [1 - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)] \mathbf{x}_j^T \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j w_{ij} \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j) \times \left[\frac{y_j - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)}{\hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)} + [1 - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j)] \mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i) \right] \right). \quad (2.28)$$

dimana

$$\hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_j) = \frac{\exp(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j)}{1 + \exp(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j)}. \quad (2.29)$$

Dalam notasi matriks, persamaan (2.28) dapat ditulis menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l+1)}(\mathbf{u}_i) = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}_{(l)}(\mathbf{u}_i) \mathbf{X} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}_{(l)}(\mathbf{u}_i) \mathbf{Z}_{(l)}(\mathbf{u}_i) \right), \quad (2.30)$$

dimana

$\mathbf{W}(\mathbf{u}_i)$ adalah matriks pembobot untuk lokasi ke- i ,

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}_i) = \text{diag}(w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}).$$

$\mathbf{A}_{(l)}(\mathbf{u}_i)$ adalah matriks pembobot varians untuk setiap lokasi- i pada iterasi ke- l ,

$$\mathbf{A}_{(l)}(\mathbf{u}_i) = \text{diag} \left[\hat{\pi}_{(l)}(\mathbf{x}_1)(1 - \hat{\pi}_{(l)}(\mathbf{x}_1)), \hat{\pi}_{(l)}(\mathbf{x}_2)(1 - \hat{\pi}_{(l)}(\mathbf{x}_2)), \dots, \hat{\pi}_{(l)}(\mathbf{x}_n)(1 - \hat{\pi}_{(l)}(\mathbf{x}_n)) \right].$$

$\mathbf{Z}_{(l)}(\mathbf{u}_i)$ adalah vektor *adjusted* dari variabel dependen pada iterasi ke- l ,

$$\mathbf{Z}_{(l)}(\mathbf{u}_i) = \left[z_{1(l)}(\mathbf{u}_i), z_{2(l)}(\mathbf{u}_i), \dots, z_{n(l)}(\mathbf{u}_i) \right]^T,$$

$$z_{i(l)}(\mathbf{u}_i) = \left[\frac{y_i - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_i)}{\hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_i)} + (1 - \hat{p}_{(l)}(\mathbf{x}_i)) \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i) \right].$$

Penaksir parameter untuk lokasi ke- i dapat diperoleh ketika iterasi telah mencapai kondisi konvergen, yaitu $\|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l+1)}(\mathbf{u}_i) - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}(\mathbf{u}_i)\| \leq \varepsilon$, dimana ε merupakan bilangan riil positif yang sangat kecil.

Jika tidak ditulis indeks dari iterasinya, maka kondisi konvergen persamaan (2.30) dapat ditulis menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i) = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}(\mathbf{u}_i) \mathbf{X} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}(\mathbf{u}_i) \mathbf{Z}(\mathbf{u}_i) \right). \quad (2.31)$$

Banyaknya parameter efektif model GWULR dapat dihitung dengan nilai *trace* dari *hat matrix*, yaitu:

$$K = \text{trace}(\mathbf{H}), \quad (2.32)$$

dimana $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}(\mathbf{u}_i) \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}(\mathbf{u}_i))$.

2.5.2 Pengujian Hipotesis

Pengujian hipotesis parameter model GWULR meliputi uji kesamaan model ULR dan GWULR, uji serentak, dan uji parsial. Uji kesamaan model regresi logistik dan GWULR digunakan untuk mengetahui adanya pengaruh faktor geografis terhadap model GWULR. Uji serentak digunakan untuk mengetahui paling tidak terdapat satu prediktor yang berpengaruh signifikan terhadap respon pada lokasi pengamatan. Uji parsial digunakan untuk mengetahui secara spesifik prediktor yang berpengaruh signifikan terhadap respon pada setiap lokasi pengamatan. Hipotesis yang digunakan untuk uji kesamaan model ULR dan GWULR adalah:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_r(\mathbf{u}_i) &= \beta_r, \quad r = 1, 2, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ H_1 : &\text{Paling sedikit ada satu } \beta_r(\mathbf{u}_i) \neq \beta_r. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Hipotesis pada persamaan (2.33) merupakan hipotesis untuk model *non-nested*, sehingga dapat digunakan statistik uji dari uji Voung yang ditemukan oleh Voung (1989) dengan statistik uji:

$$Z^* = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2}}, \quad (2.34)$$

dimana

$$q_i = y_i \hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i - \ln(1 + \exp(\hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i)) + \ln(1 + \exp(\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}_i)) - y_i \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}_i,$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}^T$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{u}_i)$ berturut-turut merupakan penaksir parameter yang diperoleh dari metode iterasi Newton-Raphson pada persamaan (2.9) dan persamaan (2.25).

Daerah penolakan H_0 untuk tingkat signifikansi α adalah tolak H_0 jika nilai

$$|Z^*| > Z_{\alpha/2}.$$

Pengujian hipotesis selanjutnya adalah pengujian parameter model GWLR secara serentak. Uji serentak ini menggunakan hipotesis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
H_0 &: \beta_1(\mathbf{u}_i) = \beta_2(\mathbf{u}_i) = \dots = \beta_k(\mathbf{u}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
H_1 &: \text{Paling sedikit ada satu } \beta_r(\mathbf{u}_i) \neq 0, \quad r = 1, 2, \dots, k.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Statistik uji untuk pengujian hipotesis pada persamaan (2.35) dapat diperoleh dengan metode MLRT. Metode ini dilakukan dengan membandingkan nilai maksimum dari fungsi likelihood untuk himpunan parameter dibawah H_0 terhadap himpunan parameter dibawah populasi.

Langkah awal penentuan statistik uji dengan metode MLRT adalah menentukan himpunan parameter model dibawah H_0 yaitu $\omega_b = \{\beta_0(\mathbf{u}_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ dan nilai maksimum fungsi likelihood himpunan parameter model dibawah H_0

$$\begin{aligned}
L(\hat{\omega}_b) &= \text{maks } L(\omega_b) \\
&= \prod_{i=1}^n (\exp(\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)))^{y_i} (1 + \exp(\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)))^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Memaksimum fungsi likelihood pada persamaan (2.36) ekuivalen dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood

$$\begin{aligned}
L(\hat{\omega}_b) &= \text{maks } \ln L(\omega_b) \\
&= \sum_{i=1}^n y_i \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i) - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \exp(\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i))).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

dimana $\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)$ adalah penaksir ML parameter $\beta_0(\mathbf{u}_i)$ yang diperoleh dengan metode iterasi Newton-Raphson pada persamaan (2.25).

Selanjutnya menentukan himpunan parameter dibawah populasi yaitu $\Omega_b = \{\beta_0(\mathbf{u}_i), \beta_1(\mathbf{u}_i), \dots, \beta_k(\mathbf{u}_i); i = 1, 2, \dots, n\}$ dan nilai maksimum fungsi likelihood himpunan parameter dibawah populasi seperti pada persamaan (2.38).

$$L(\hat{\Omega}_b) = \text{maks } L(\Omega_b) = \prod_{i=1}^n [\exp(\hat{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)]^{y_i} [1 + \exp(\hat{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)]^{-1}, \tag{2.38}$$

dimana $\hat{\beta}(\mathbf{u}_i)$ adalah penaksir ML parameter $\beta(\mathbf{u}_i)$ yang diperoleh dengan metode iterasi Newton-Raphson pada persamaan (2.25).

Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (2.37) dan persamaan (2.38), maka diperoleh statistik uji LR, yaitu:

$$\begin{aligned}
G_b^2 &= -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega}_b)}{L(\hat{\Omega}_b)} \right) \\
&= 2 \sum_{i=1}^n ([y_i \hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i - \ln(1 + \exp(\hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i))] - [y_i \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i) - \ln(1 + \exp(\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)))]).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Statistik uji G_b^2 pada persamaan (2.39) secara asimtotik berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebasnya adalah banyaknya parameter efektif seperti pada persamaan (2.32), yaitu $v_b = K$. Daerah penolakan H_0 dari pengujian hipotesis pada persamaan (2.35) untuk tingkat signifikansi α adalah tolak H_0 jika nilai $G_b^2 > \chi_{(\alpha, v_b)}^2$.

Setelah dilakukan uji serentak dilanjutkan dengan uji parsial menggunakan hipotesis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
H_0 &: \beta_r(\mathbf{u}_i) = 0, \\
H_1 &: \beta_r(\mathbf{u}_i) \neq 0, \quad r = 1, 2, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Statistik uji untuk pengujian hipotesis dari persamaan (2.40) adalah statistik Wald, yaitu:

$$Z_b = \frac{\hat{\beta}_r(\mathbf{u}_i)}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_r(\mathbf{u}_i))}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1), \tag{2.41}$$

dimana $\text{Var}(\hat{\beta}_r(\mathbf{u}_i))$ diperoleh dari elemen ke $(k+1)$ dari matriks Hessian $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i))$ pada lokasi ke- i . Daerah penolakan H_0 dari pengujian hipotesis pada persamaan (2.41) untuk tingkat signifikansi α adalah tolak H_0 jika nilai $|Z_b| > Z_{\alpha/2}$.

2.5.3 Penentuan Pembobot Optimum

Dalam Fotheringham, Brunson, dan Charlton (1998) dinyatakan bahwa fungsi pembobot spasial model GWR berbasis pada kedekatan lokasi pengamatan ke- i dengan lokasi pengamatan lainnya tanpa adanya hubungan yang dinyatakan secara eksplisit. Beberapa fungsi pembobot spasial digunakan untuk menggambarkan hubungan antara lokasi pengamatan ke- i dengan lokasi pengamatan lainnya.

Salah satu pembentukan fungsi pembobot yang berdasarkan kelokalan adalah dengan cara mengeluarkan pengamatan yang memiliki jarak dari lokasi pengamatan ke- i lebih besar dari suatu nilai d yang ditentukan. Fungsi pembobotnya adalah sebagai berikut:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } d_{ij} < d \\ 0, & \text{untuk } d_{ij} \text{ yang lain,} \end{cases} \quad (2.42)$$

dimana d_{ij} adalah jarak Euclidean antara lokasi pengamatan ke- i dengan lokasi pengamatan ke- j yang dinyatakan dengan formula:

$$d_{ij} = \sqrt{(u_{1i} - u_{1j})^2 + (u_{2i} - u_{2j})^2}. \quad (2.43)$$

Penggunaan fungsi ini akan menyederhanakan pembentukan model, karena hanya sebagian data saja yang digunakan untuk membentuk model, yaitu yang memiliki jarak dari lokasi pengamatan ke- i lebih kecil daripada d . Akan tetapi, fungsi tersebut memiliki masalah diskontinuitas, yaitu parameter yang dihasilkan dapat berubah secara drastis ketika lokasi pengamatan berubah.

Untuk mengatasi masalah diskontinuitas pembobot, Brunson, Fotheringham, dan Charlton (1996) memberikan solusi dengan cara membentuk w_{ij} sebagai fungsi kontinu dari d_{ij} . Salah satu fungsi yang sering digunakan adalah fungsi pembobot *Gaussian* atau disebut dengan fungsi *fixed kernel Gaussian* yang dinyatakan seperti persamaan (2.44).

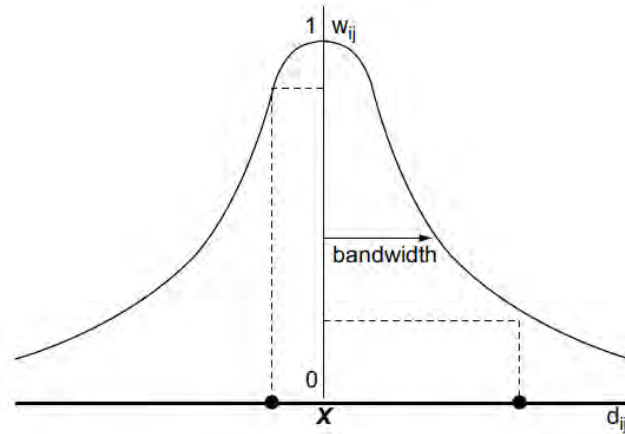
$$w_{ij} = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d_{ij}}{b} \right)^2 \right], \quad (2.44)$$

dimana b adalah parameter *non-negative* yang disebut dengan *bandwidth*. *Bandwidth* merupakan pengontrol keseimbangan antara kemulusan fungsi dan kesesuaian fungsi terhadap data. Nilai pembobot dari suatu data akan mendekati 1 jika jaraknya berdekatan atau berhimpitan dan akan semakin mengecil sehingga mendekati nol jika jaraknya semakin jauh.

Selain fungsi pembobot *fixed kernel Gaussian*, Brunson dkk. (1996) juga menggunakan fungsi *fixed kernel bi-square* seperti persamaan (2.45).

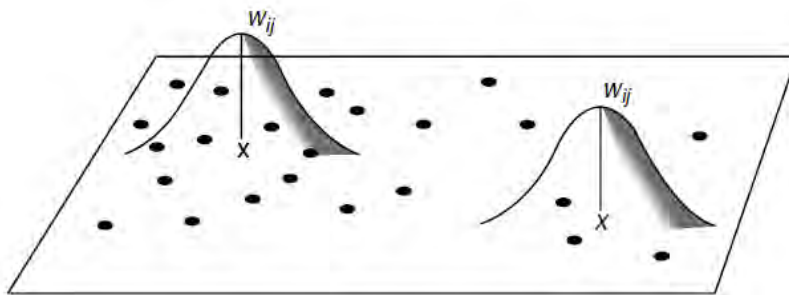
$$w_{ij} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{d_{ij}}{b} \right)^2 \right]^2, & \text{untuk } d_{ij} < b \\ 0, & \text{untuk } d_{ij} \geq b. \end{cases} \quad (2.45)$$

Hubungan antara *bandwidth* dengan fungsi pembobot disajikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Hubungan antara *Bandwidth* dengan Pembobot
(Fotheringham dkk, 2002)

Fungsi *fixed kernel Gaussian* dan *bi-square* pada persamaan (2.44) dan (2.45) mempunyai *bandwidth* yang sama di setiap lokasi pengamatan seperti yang disajikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 *Fixed Kernel Bandwidth* (Fotheringham dkk., 2002)

Berdasarkan pembobot fungsi *fixed kernel Gaussian* dan *bi-square*, jika nilai *bandwidth* mendekati tidak terhingga, maka pembobot (w_{ij}) yang dihasilkan antar lokasi pengamatan akan mendekati 1, sehingga parameter yang ditaksir akan seragam dan model GWR yang dihasilkan akan mendekati model regresi global. Sebaliknya, jika nilai *bandwidth* semakin kecil, penaksiran parameter akan semakin tergantung pada lokasi pengamatan ke- i , sehingga nilai variansi yang

dihasilkan akan semakin besar. Untuk mengatasi hal ini harus ditentukan nilai *bandwidth* optimum pada pemodelan GWR.

Menurut Fotheringham dkk. (2002) salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk menentukan *bandwidth* optimum adalah metode *cross-validation* (CV). Berdasarkan Fotheringham dkk. (2002), Wang dkk. (2011), dan Purhadi dkk. (2012), nilai CV pada penelitian ini dapat diperoleh dengan formula:

$$CV(b) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=0}^1 \sum_{g=0}^1 (y_{=i,gh} - \hat{\pi}_{\neq i,gh}(b))^2, \quad (2.46)$$

dimana $y_{=i,gh}$ adalah variabel indikator dimana pengamatan di lokasi (\mathbf{u}_i) dihilangkan dari proses penaksiran, sehingga $y_{=i,gh} = 1$ jika pengamatan Y_1 dan Y_2 di lokasi (\mathbf{u}_i) mempunyai kategori $Y_1 = g$ dan $Y_2 = h$ dan 0 untuk yang lain. $\hat{\pi}_{\neq i,gh}(b)$ adalah nilai taksiran probabilitas pengamatan Y_1 dan Y_2 di lokasi (\mathbf{u}_i) mempunyai kategori $Y_1 = g$ dan $Y_2 = h$. Nilai *bandwidth* (b) optimum diperoleh dari nilai CV terkecil.

2.6 Asimtotik Normalitas Penaksir *Maximum Likelihood*

Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) merupakan salah satu metode yang sangat baik digunakan untuk menentukan penaksir dari parameter suatu model. Ide dasar dari MLE adalah mencari nilai parameter yang memberi peluang yang paling besar untuk mendapatkan data yang terobservasi sebagai estimator.

Misalkan Y adalah variabel random dengan fungsi densitas probabilitas $f(y, \boldsymbol{\theta})$ dengan $\boldsymbol{\theta}$ adalah vektor parameter. Jika Y_1, Y_2, \dots, Y_n merupakan sampel random berukuran n dari variabel random Y , maka fungsi likelihood dinyatakan sebagai

$$L(\boldsymbol{\theta}) = f(y_1, y_2, \dots, y_n | \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \boldsymbol{\theta}).$$

Penaksir ML untuk $\boldsymbol{\theta}$ adalah nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimalkan fungsi likelihood. MLE mempunyai sifat asimtotik normalitas yang dijelaskan dalam Teorema 2.1 (Pawitan, 2001).

Teorema 2.1

Misalkan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ merupakan penaksir ML untuk $\boldsymbol{\theta}$. Untuk nilai sebenarnya (*true value*) $\boldsymbol{\theta}_0$, maka mempunyai sifat asimtotik normalitas:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{a}{\sim} N(\boldsymbol{\theta}_0, [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}),$$

dimana

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0 \partial \boldsymbol{\theta}_0^T} \right].$$

Bukti:

Misalkan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ merupakan penaksir ML dari $\boldsymbol{\theta}$, maka vektor gradiennya sama dengan nol, yaitu

$$\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0},$$

dimana

$$\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left. \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}.$$

Jika $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ diekspansi menurut deret Taylor orde 1 disekitar nilai parameter $\boldsymbol{\theta}_0$, maka diperoleh:

$$\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0), \quad (2.47)$$

dimana, $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) = \left. \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}$ merupakan matriks Hessian yang dievaluasi untuk nilai $\boldsymbol{\theta}_0$.

Karena $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}$, maka persamaan (2.47) dapat ditulis menjadi

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) = [-\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0). \quad (2.48)$$

Jika kedua ruas dari persamaan (2.48) dikalikan dengan \sqrt{n} , maka diperoleh

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) = [-\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1} \sqrt{n} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0). \quad (2.49)$$

Berdasarkan sifat konsisten dari MLE, yaitu $P \lim(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{0}$ berakibat,

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} [-\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1} \sqrt{n} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0). \quad (2.50)$$

Persamaan (2.50) dapat ditulis menjadi

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} [-\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1} \sqrt{n} \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0). \quad (2.51)$$

Berdasarkan teorema limit pusat untuk $\sqrt{n} \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)$, dimana $E[\sqrt{n} \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)] = \mathbf{0}$ dan

$$Var[\sqrt{n} \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)] = -E[\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)], \text{ diperoleh}$$

$$Var[\sqrt{n} \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)] = -E[\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]. \quad (2.52)$$

Memperhatikan $P \lim [-\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)] = -E[\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]$ yang merupakan suatu matriks

konstan, maka persamaan (2.52) dapat ditulis menjadi

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) [-\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1} \sqrt{n} \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \{-E[\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}\} \{-E[\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]\} \{-E[\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}\}),$$

atau

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, -E[-\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}). \quad (2.53)$$

Berdasarkan persamaan (2.53), penaksir ML untuk $\boldsymbol{\theta}$ berdistribusi normal asimtotik, yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \overset{a}{\sim} N(\boldsymbol{\theta}_0, [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}). \quad (2.54)$$

2.7 Pengujian Multikolinieritas

Multikolinieritas merupakan salah satu pelanggaran terhadap asumsi pada pemodelan regresi yang melibatkan lebih dari satu prediktor. Jika terdapat korelasi antar prediktor, maka terdapat multikolinieritas dalam model regresi. Model regresi yang memuat multikolinieritas akan mengakibatkan *standard error* penaksir parameter model regresi menjadi besar. Sehingga mengakibatkan kesimpulan yang diperoleh pada pengujian hipotesis parameter menjadi bias. Multikolinieritas dalam model regresi dapat dideteksi berdasarkan nilai *Variance Inflation Factor* (VIF). Suatu model regresi terdapat multikolinieritas jika memiliki nilai VIF lebih dari 10 (Kutner, Nachtsheim, dan Neter, 2004).

Menurut Rencher (2000), nilai VIF untuk prediktor X_r dapat dihitung menggunakan formula:

$$VIF_r = \frac{1}{1 - R_r^2} = \frac{JKT_r}{JKS_r}, \quad (2.55)$$

dimana R_r^2 menyatakan koefisien determinasi model regresi dari prediktor X_r yang diregresikan terhadap $(k-1)$ prediktor yang lainnya, yaitu $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}, X_{r+1}, \dots, X_k$. Koefisien determinasi pada persamaan (2.55) dihitung menggunakan formula:

$$R_r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (X_{ri} - \hat{X}_{ri})^2}{\sum_{i=1}^n (X_{ri} - \bar{X}_r)^2} = \frac{JKR_r}{JKT_r}, \quad (2.56)$$

dimana

X_{ri} adalah nilai pengamatan ke- i untuk prediktor ke- r ,

\hat{X}_{ri} adalah nilai taksiran dari X_{ri} dan $\bar{X}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ri}$,

JKR_r adalah jumlah kuadrat regresi untuk prediktor ke- r ,

JKS_r adalah jumlah kuadrat sisaan (*error*) untuk variabel prediktor ke- r ,

JKT_r adalah jumlah kuadrat total untuk prediktor ke- r .

2.8 Pengujian Dependensi Variabel Respon

Hubungan (dependensi) antar respon merupakan syarat yang harus dipenuhi dalam pemodelan regresi multivariat. Respon yang digunakan dalam penelitian ini adalah dua variabel kategorik, yaitu Y_1 dan Y_2 , dimana masing-masing Y_1 dan Y_2 mempunyai dua kategori bernilai 0 dan 1. Untuk mengetahui adanya dependensi antara Y_1 dan Y_2 dilakukan pengujian hipotesis menggunakan metode MLRT (Bilder dan Loughin, 2015). Hipotesis yang digunakan adalah:

$H_0 : \pi_{gh} = \pi_g \pi_h$, untuk $g, h = 0, 1$ (Tidak terdapat dependensi antar respon),

$H_1 : \pi_{gh} \neq \pi_g \pi_h$, untuk beberapa g, h (Terdapat dependensi antar respon). (2.57)

Statistik uji yang digunakan untuk pengujian hipotesis pada persamaan (2.57) adalah:

$$G^2 = 2 \sum_{g=0}^1 \sum_{h=0}^1 n_{gh} \ln \left(\frac{n_{gh}}{e_{gh}} \right), \quad (2.58)$$

dimana n_{gh} dan e_{gh} adalah berturut-turut menyatakan frekuensi pengamatan dan nilai harapan (*expected value*) dari frekuensi pengamatan untuk respon $Y_1 = g$ dan $Y_2 = h$, pada setiap sel pada tabel kontingensi (2×2) (Tabel 2.1), dengan $g, h = 0, 1$. Formula dari e_{gh} adalah $e_{gh} = n_{g+} n_{+h} / n$, dengan masing-masing dari n_{g+} dan n_{+h} adalah total frekuensi pengamatan untuk respon $Y_1 = g$ dan $Y_2 = h$. Sedangkan n adalah besarnya ukuran sampel.

Statistik LR pada persamaan (2.58) berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas 1, yaitu χ_1^2 . Daerah penolakan H_0 pada tingkat signifikansi α untuk pengujian hipotesis pada persamaan (2.57) adalah tolak H_0 jika nilai $G^2 > \chi_{(\alpha, 1)}^2$.

2.9 Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat

Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat (IPKM) merupakan indikator komposit yang menggambarkan kemajuan pembangunan kesehatan, diformulasikan dari data kesehatan berbasis komunitas yaitu Riset Kesehatan Dasar (Riskesdas), Survei Sosial Ekonomi Nasional (Susenas), dan Survei Potensi Desa (Podes). IPKM pertama kali dikembangkan oleh Balitbangkes pada tahun 2010 dengan menggunakan data survei tahun 2007 dan 2008 yang disebut dengan IPKM 2007 (Kementerian Kesehatan, 2010a).

2.9.1 Tujuan dan Manfaat IPKM

Tujuan dari pengembangan dan penyusunan IPKM adalah untuk memperkaya informasi indikator kesehatan yang dapat menggambarkan keberhasilan pembangunan kesehatan masyarakat dan sebagai salah satu alat monitor keberhasilan pembangunan kesehatan masyarakat melalui penentuan peringkat provinsi dan kabupaten/kota. IPKM dapat dimanfaatkan sebagai (Kementerian Kesehatan 2014, 2019):

1. Pembuatan dasar perencanaan program pembangunan kesehatan di kabupaten/kota.

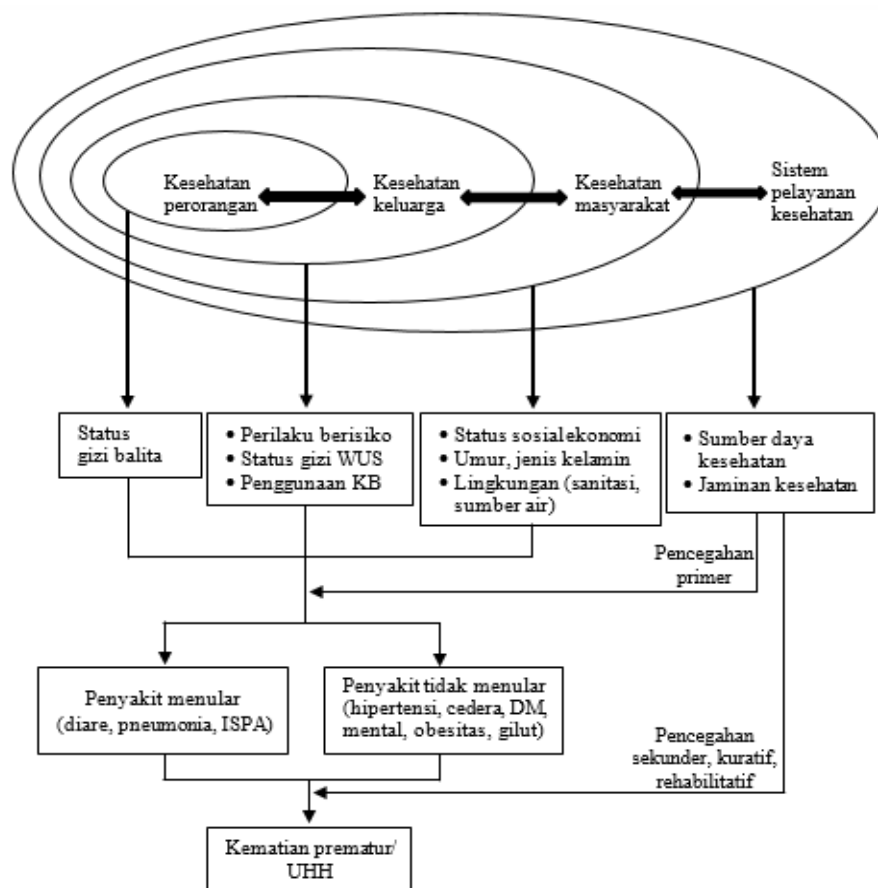
2. Penyusunan bahan advokasi pemerintah pusat ke pemerintah provinsi maupun kabupaten/kota, agar terpacu memperbaiki peringkat dengan melakukan prioritas program kesehatan beserta sumber dayanya.
3. Salah satu kriteria dan pertimbangan penentuan alokasi dana bantuan kesehatan dari pusat ke provinsi atau kabupaten/kota, dan dari provinsi ke kabupaten/kota.

2.9.2 Kerangka Konsep IPKM

IPKM dikembangkan berdasarkan beberapa aspek seperti indikator pembangunan kesehatan yang selama ini sudah digunakan, faktor determinan kesehatan dan prioritas program kesehatan. Indikator pembangunan kesehatan yang selama ini sudah digunakan di Indonesia mengacu pada prioritas pembangunan kesehatan dan informasi besaran masalah dari survei nasional. Beberapa indikator pembangunan kesehatan adalah kesehatan balita, kematian ibu, kematian bayi, penyakit menular dan penyakit tidak menular, kesehatan reproduksi, perilaku berisiko serta status gizi kelompok rentan. Indikator utama pembangunan kesehatan tersebut mempunyai beberapa faktor determinan yang berkaitan satu sama lain dan dapat bersifat determinan bersama dari indikator kunci kesehatan. Secara umum, faktor determinan kesehatan mencakup aspek perilaku dan lingkungan yang mendukung. Secara umum, faktor determinan kesehatan mencakup aspek perilaku dan lingkungan yang mendukung. Secara lebih spesifik faktor perilaku dipengaruhi oleh aspek sosial, ekonomi, budaya, dan demografi. Sementara lingkungan yang kondusif lebih berkaitan dengan aspek input seperti program kesehatan yang mencakup kebijakan, program dan strategi intervensi, serta sumber daya yang mendukung. Prioritas program kesehatan pada dasarnya mengarah pada penyelesaian besaran masalah di populasi, tingkat keparahan dan dampaknya bagi kehidupan masyarakat yang lebih luas serta ketersediaan upaya preventif, kuratif, dan rehabilitatif (Kementerian Kesehatan, 2014).

Beberapa model pendekatan kesehatan masyarakat telah dikembangkan oleh organisasi ataupun institusi di tingkat global. Menurut Newberry and Taylor (2005), salah satu model yang cukup komprehensif dalam pendekatan kesehatan masyarakat adalah model determinan sosial kesehatan yang mencakup berbagai

tingkatan ekologi seperti kesehatan usia dini, peran keluarga, masyarakat, dan sistem pelayanan. Secara umum pada level usia dini, keluarga, masyarakat dan sistem pelayanan, kesehatan masyarakat dipengaruhi oleh beberapa faktor determinan yang saling terkait seperti biofisikal, psikososial, individual, masyarakat, usia dini, keluarga, dan determinan sistem pelayanan. Kesehatan masyarakat dipengaruhi oleh berbagai faktor yang saling terkait satu sama lain, sehingga untuk meningkatkan kesehatan masyarakat berarti mempertimbangkan juga determinan yang mempengaruhi baik dari aspek sosial, budaya, ekonomi, biologis, dan psikososial seperti yang disajikan pada Gambar 2.3.

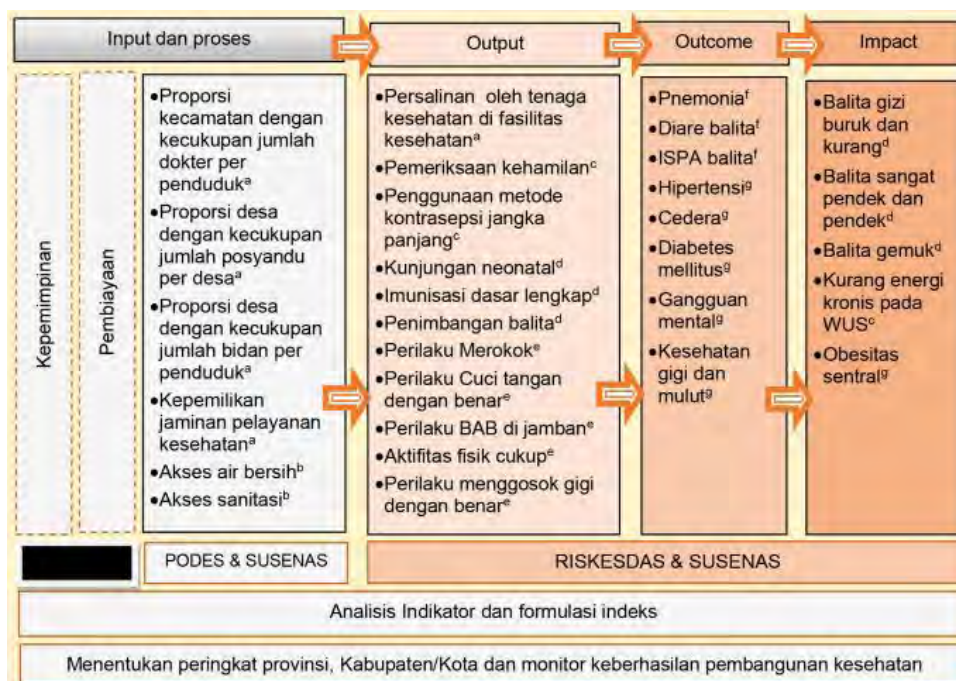


Gambar 2.3 Modifikasi Model Determinan Sosial Kesehatan
(Kementerian Kesehatan, 2014)

Berdasarkan model determinan sosial kesehatan pada Gambar 2.3, dikembangkan lebih lanjut menjadi kerangka konsep pengembangan IPKM. Indikator utama pembangunan kesehatan yang digunakan mencakup kesehatan balita, kesehatan reproduksi, pelayanan kesehatan, perilaku, penyakit tidak

menular, penyakit menular dan kesehatan lingkungan. Indikator tersebut dikaitkan dengan beberapa faktor determinan kesehatan seperti determinan sosial, ekonomi, dan demografi (Kementerian Kesehatan, 2014).

Indikator pembangunan kesehatan yang diukur dalam IPKM 2018 meliputi kesehatan balita, kesehatan ibu, penyakit menular, penyakit tidak menular, kesehatan reproduksi, dan status gizi. Selain itu, IPKM 2018 juga melibatkan faktor determinan kesehatan yang mencakup aspek perilaku berisiko dan lingkungan. Rangkaian indikator dalam IPKM 2018 sesuai dengan model pendekatan kesehatan masyarakat yang dikembangkan *World Health Organization* (WHO) seperti yang tertuang dalam kerangka konsep pada Gambar 2.4.



Keterangan: a) Subindeks pelayanan kesehatan; b) Subindeks kesehatan lingkungan; c) Subindeks kesehatan reproduksi; d) Subindeks kesehatan balita; e) Subindeks perilaku kesehatan; f) Subindeks penyakit menular; g) Subindeks penyakit tidak menular.

Gambar 2.4 Kerangka Konsep IPKM 2018 (Modifikasi dari Kerangka Teori Monitoring dan Evaluasi “*The Six Building Blocks of Health System*”) (Kementerian Kesehatan, 2019)

Dasar kerangka konsep IPKM berdasarkan Gambar 2.4 adalah monitoring dan evaluasi sistem kesehatan. WHO menggunakan pendekatan “*The Six Building Blocks of Health System*” untuk menggambarkan pilar pada penguatan sistem kesehatan. Enam pilar sistem kesehatan tersebut adalah

pelayanan kesehatan, tenaga kesehatan, sistem informasi kesehatan, akses terhadap alat kesehatan/vaksin/teknologi, pembiayaan kesehatan, dan kepemimpinan dan sumber daya kesehatan (Kementerian Kesehatan, 2019).

Nilai tambah dari kerangka monitoring dan evaluasi adalah menyatukan indikator dan sumber data secara keseluruhan. Kerangka ini terdiri dari input dan proses kesehatan (misalnya tenaga kesehatan dan infrastruktur), output (misalnya intervensi dan layanan yang tersedia), *outcome* (misalnya cakupan), dan *impact* atau dampak (misalnya morbiditas). Tiga puluh indikator pada IPKM dapat diterapkan pada kerangka monitoring dan evaluasi sistem kesehatan tersebut, kecuali komponen kepemimpinan dan pembiayaan. Kedua komponen ini tidak ada dalam sumber data yang digunakan dan merupakan keterbatasan dalam IPKM ini. Sumber data untuk indikator tenaga kesehatan dan infrastruktur bagian dari input diperoleh dari data Podes dan Susenas, indikator dalam *output*, *outcome*, dan *impact* diperoleh dari data Riskesdas dan Susenas. Secara rinci penerapan 30 indikator IPKM dapat dilihat pada Gambar 2.4 (Kementerian Kesehatan, 2019).

2.9.3 Indikator Penyusun IPKM

Indikator-indikator penyusun IPKM mencerminkan capaian program dan sebagai potret capaian pembangunan kesehatan wilayah. Penyusunan IPKM 2007 menggunakan indikator yang ada pada data Riskesdas 2007, Susenas 2007, dan Podes 2008. IPKM 2007 telah menjadi dasar pengambil kebijakan di pusat maupun di tingkat pemerintahan kabupaten/kota. Indikator penyusun IPKM 2007 terdiri dari 24 indikator. Pemilihan indikator ini berdasarkan kesepakatan pakar bidang kesehatan (Kementerian Kesehatan, 2010a).

IPKM 2007 mempunyai keterbatasan indikator karena indikator kesehatan yang dianggap penting tidak tersedia di Riskesdas 2007. Hal ini disebabkan ide penyusunan IPKM muncul setelah Riskesdas 2007 selesai dilaksanakan. Berdasarkan hal tersebut, maka Riskesdas 2013 diupayakan dapat berperan menyempurnakan model IPKM 2007 dalam hal mengumpulkan indikator kesehatan yang lebih lengkap. Tiga hal mendasar terkait indikator yang digunakan untuk merumuskan model IPKM 2007 maupun pengembangan IPKM 2013, yaitu (Kementerian Kesehatan, 2014):

1. Jenis dan jumlah indikator yang dipilih.

2. Besaran bobot antar indikator.
3. Batasan nilai maksimum dan minimum indikator yang digunakan sebagai nilai standar dalam penghitungan indeks.

Melengkapi dan menyempurnakan indikator merupakan salah satu bagian dari pengembangan model IPKM 2013. Penjelasan mengenai hal-hal yang terkait dengan pengembangan IPKM 2013, yaitu (Kementerian Kesehatan, 2014):

1. Penambahan indikator yang dianggap penting tetapi tidak dikumpulkan pada tahun 2007.
2. Pengurangan indikator yang dianggap pada saat ini kurang berperan terhadap perubahan status kesehatan.
3. Beberapa indikator dipertajam dengan menambahkan kriteria yang lebih sensitif untuk menjelaskan masalah kesehatan.

Proses pengembangan IPKM 2013 dilakukan melalui serangkaian pertemuan, baik internal Balitbangkes maupun lintas program, termasuk dengan para pakar dalam dan luar negeri. Dalam rangkaian kegiatan tersebut, menetapkan indikator, bobot, dan nilai minimum dan maksimum, yang digunakan dalam pengembangan IPKM 2013. Dasar pemilihan bersifat substansi kesehatan, pertimbangan prioritas program kesehatan, dan rencana pembangunan nasional. Berdasarkan pertimbangan tersebut maka jumlah indikator kesehatan yang digunakan dalam IPKM 2013 sebanyak 30 indikator (Kementerian Kesehatan, 2014).

Penentuan indikator dalam IPKM 2013 berdasarkan kerangka konsep determinan kesehatan pada Gambar 2.3 yang meliputi kesehatan perorangan, keluarga, masyarakat, dan sistem pelayanan kesehatan. Beberapa aspek yang menjadi pertimbangan dalam penentuan indikator adalah sebagai berikut:

1. Prioritas program kesehatan nasional yang tertuang dalam rencana pembangunan jangka menengah dan panjang.
2. Komitmen untuk pembangunan kesehatan secara global atau seiring dengan target *Millenium Development Goals* (MDGs) dan Post MDGs.
3. Besaran masalah kesehatan yang menjadi masalah kesehatan utama secara nasional.
4. Pertimbangan secara referensi dan rekomendasi pelaksana program kesehatan.

5. Pertimbangan secara statistik mencakup aspek variasi data dan jumlah sampel untuk keterwakilan kabupaten/kota.

Proses penentuan indikator ini dilakukan melalui beberapa pertemuan konsultasi dan diskusi dengan para pakar baik secara nasional maupun internasional dan para pengambil keputusan pada program kesehatan terkait.

Pada penyusunan IPKM 2018, sebagian besar indikator menggunakan data Riskesdas 2018, karena kebutuhan penyediaan data untuk menyusun IPKM menjadi salah satu pertimbangan saat penyusunan indikator dalam Riskesdas. Selain pertimbangan utama lainnya yakni *Sustainable Development Goals* (SDGs), Rencana Pembangunan Jangka Menengah Nasional (RPJMN) di bidang kesehatan, Rencana Strategis (Renstra), Standar Pelayanan Minimal (SPM), Program Indonesia Sehat-Pendekatan Keluarga (PIS-PK), dan Gerakan Masyarakat Hidup Sehat (Germas), serta pertimbangan secara referensi dan rekomendasi pelaksana program kesehatan.

IPKM 2018 menggunakan jenis dan jumlah indikator yang sama dengan IPKM 2013, hanya definisi operasional dari indikator tersebut yang menyesuaikan dengan perubahan definisi yang digunakan oleh pelaksana program kesehatan. Tujuh sub indeks dalam IPKM 2018 yang informasinya diperoleh dari data hasil Riskesdas 2018, Susenas 2018 terintegrasi Riskesdas 2018, dan Podes 2018, yaitu (Kementerian Kesehatan, 2019):

1. Sub indeks kesehatan balita, terdiri dari 6 indikator:
 - (1) Balita gizi buruk dan kurang
 - (2) Balita sangat pendek dan pendek (stunting)
 - (3) Balita gemuk
 - (4) Penimbangan balita
 - (5) Kunjungan Neonatal (KN) 1
 - (6) Imunisasi lengkap.
2. Sub indeks kesehatan reproduksi, terdiri dari 3 indikator:
 - (7) Penggunaan alat kontrasepsi
 - (8) Pemeriksaan kehamilan (K4 : 1-1-2)
 - (9) Kurang Energi Kronis (KEK) pada Wanita Usia Subur (WUS).

3. Sub indeks pelayanan kesehatan, terdiri dari 5 indikator:
 - (10) Persalinan oleh tenaga kesehatan di fasilitas kesehatan
 - (11) Proporsi kecamatan dengan kecukupan jumlah dokter per penduduk
 - (12) Proporsi desa dengan kecukupan jumlah posyandu per desa
 - (13) Proporsi desa dengan kecukupan jumlah bidan per penduduk
 - (14) Kepemilikan jaminan pelayanan kesehatan.
4. Sub indeks perilaku kesehatan, terdiri dari 5 indikator pembentuknya:
 - (15) Kebiasaan merokok
 - (16) Kebiasaan cuci tangan
 - (17) Buang Air Besar (BAB) di jamban
 - (18) Aktifitas fisik
 - (19) Menggosok Gigi.
5. Sub indeks Penyakit Tidak Menular (PTM) dan factor risikonya, mencakup 6 indikator pembentuknya:
 - (20) Hipertensi
 - (21) Cedera
 - (22) Diabetes Mellitus (DM)
 - (23) Gangguan Mental Emosional (Kesehatan Jiwa)
 - (24) Obesitas sentral
 - (25) Kesehatan gigi dan mulut
6. Sub indeks Penyakit Menular (PM), terdiri dari 3 indikator:
 - (26) Pneumonia
 - (27) Diare balita
 - (28) Infeksi Saluran Pernafasan Atas (ISPA) balita.
7. Sub indeks kesehatan lingkungan, terdiri dari 2 indikator:
 - (29) Akses sanitasi
 - (30) Akses air bersih.

2.9.4 Perhitungan IPKM

Sumber data yang digunakan untuk menyusun IPKM 2018 diperoleh dari hasil survei yang dilaksanakan Balitbangkes Kementerian Kesehatan dan Badan Pusat Statistik (BPS). Survei yang dilakukan Balitbangkes adalah Riskesdas 2018. Sedangkan BPS adalah Susenas Maret 2018 terintegrasi Riskesdas 2018 dan

Podes 2018. Setiap indikator merupakan hasil analisis agregasi di tingkat kabupaten/kota, kemudian digabungkan untuk menjadi satu informasi indeks.

Nilai IPKM 2018 dihitung berdasarkan 30 indikator yang dikelompokkan menjadi tujuh sub indeks. Nilai sub indeks bermanfaat untuk melihat kondisi kesehatan per kelompok indikator. Nilai IPKM dihitung dengan langkah-langkah sebagai berikut (Kementerian Kesehatan, 2019):

1. Melakukan analisis agregasi di tingkat kabupaten/kota untuk mendapatkan 30 indikator menggunakan data Riskesdas 2018, Susenas Maret 2018 terintegrasi Riskesdas 2018, dan Podes 2018.
2. Indikator yang digunakan dalam menghitung indeks harus mempunyai arti positif. Oleh karena itu, indikator yang mempunyai arti negatif dilakukan penyetaraan nilai sehingga menjadi indikator yang mempunyai arti positif. Contoh indikator prevalensi hipertensi dilakukan penyetaraan menggunakan rumus (100-angka prevalensi). Sehingga indikator prevalensi tersebut mempunyai arti positif yaitu prevalensi tidak hipertensi. Setelah penyetaraan positif dilakukan pada semua indikator yang mempunyai arti negatif, maka seluruh indikator mempunyai arti yang sama bahwa semakin tinggi nilai indikator, maka semakin baik.
3. Menghitung nilai indeks indikator untuk masing-masing indikator menggunakan formula:

$$NII = \frac{NI - NS_{\min}}{NS_{\max} - NS_{\min}},$$

dimana NII adalah nilai indeks indikator, NI adalah nilai indikator, NS_{min} adalah nilai standar minimum, dan NS_{maks} adalah nilai standar maksimum.

4. Indikator berjumlah 30 dikelompokkan ke dalam 7 kelompok indikator berdasarkan topik bidang kesehatan. Masing-masing indikator dihitung proporsi bobotnya dalam satu kelompok berdasarkan nilai bobot yang sudah ditentukan menggunakan formula:

$$PBI = \frac{BI}{TBKI},$$

dimana PBI adalah proporsi bobot indikator, BI adalah bobot indikator, dan TBKI adalah total bobot dalam kelompok indikator.

5. Menghitung indeks kelompok indikator atau sub indeks dengan cara menjumlahkan seluruh hasil perkalian nilai indeks indikator dengan proporsi bobot yang ada dalam satu kelompok menggunakan formula:

$$IKI_{(SI)} = \sum_{i^*=1}^6 NII_{(i^*)} PB_{(i^*)},$$

dimana $IKI_{(SI)}$ adalah nilai kelompok indikator sub indeks, NII adalah nilai indeks indikator, dan PB adalah proporsi bobot.

Nilai sub indeks mendekati angka 1 mempunyai arti membaik. Nilai dapat berada dibawah angka 0 jika capaian yang diperoleh dibawah nilai minimum.

6. Mengulangi langkah 3 sampai 5 untuk enam kelompok indikator lainnya.
7. IPKM dapat dihitung setelah diperoleh tujuh nilai sub indeks atau indeks kelompok indikator menggunakan formula:

$$IPKM = \frac{SI_{(1)} + SI_{(2)} + \dots + SI_{(7)}}{7},$$

dimana SI adalah sub indeks.

Jika suatu kabupaten/kota mempunyai nilai $IPKM$ mendekati 1, maka kondisi kesehatan masyarakat di kabupaten/kota tersebut semakin baik. Nilai $IPKM$ terletak pada interval $0 < IPKM < 1$.

2.10 Indeks Pembangunan Manusia

Menurut *United Nations Development Programs* (UNDP), Indeks Pembangunan Manusia (IPM) mengukur capaian pembangunan manusia berbasis sejumlah komponen dasar kualitas hidup. Sebagai ukuran kualitas hidup, IPM dibangun melalui pendekatan tiga dimensi dasar. Dimensi tersebut mencakup umur panjang dan sehat, pengetahuan, dan kehidupan yang layak. Ketiga dimensi tersebut memiliki pengertian sangat luas karena terkait banyak faktor. Untuk mengukur dimensi kesehatan, digunakan umur harapan hidup saat lahir. Selanjutnya untuk mengukur dimensi pengetahuan digunakan gabungan indikator harapan lama sekolah dan rata-rata lama sekolah. Adapun untuk mengukur dimensi hidup layak digunakan indikator kemampuan daya beli (*purchasing power parity*). Kemampuan daya beli masyarakat terhadap sejumlah kebutuhan

pokok yang dilihat dari rata-rata besarnya pengeluaran per kapita sebagai pendekatan pendapatan yang mewakili capaian pembangunan untuk hidup layak (Badan Pusat Statistik, 2019).

Umur Harapan Hidup saat Lahir (UHH) merupakan rata-rata perkiraan panjangnya waktu yang dapat ditempuh oleh seseorang selama hidup. Penghitungan umur harapan hidup melalui pendekatan tak langsung (*indirect estimation*). Jenis data yang digunakan adalah Anak Lahir Hidup (ALH) dan Anak Masih Hidup (AMH). Paket program *Mortpack* digunakan untuk menghitung umur harapan hidup berdasarkan *input* data ALH dan AMH. Selanjutnya, dipilih metode *Trussel* dengan model *West*, yang sesuai dengan histori kependudukan dan kondisi Indonesia dan negara-negara Asia Tenggara umumnya (Badan Pusat Statistik, 2019).

Indeks harapan hidup dihitung dengan menghitung nilai maksimum dan nilai minimum harapan hidup sesuai standar UNDP, yaitu angka tertinggi sebagai batas atas untuk penghitungan indeks dipakai 85 tahun dan terendah adalah 20 tahun (Badan Pusat Statistik, 2019).

Salah satu komponen pembentuk IPM adalah dimensi pengetahuan yang diukur melalui tingkat pendidikan. Dalam hal ini, indikator yang digunakan adalah rata-rata lama sekolah (*mean years of schooling*) dan harapan lama sekolah (*expected years of schooling*). Pada proses pembentukan IPM, rata-rata lama sekolah dan harapan lama sekolah diberi bobot yang sama, kemudian penggabungan kedua indikator ini digunakan sebagai indeks pendidikan sebagai salah satu komponen pembentuk IPM.

Rata-rata lama sekolah menggambarkan jumlah tahun yang digunakan oleh penduduk usia 25 tahun ke atas dalam menjalani pendidikan formal. Penghitungan rata-rata lama sekolah menggunakan dua batasan yang dipakai sesuai kesepakatan UNDP. Rata-rata lama sekolah memiliki batas maksimumnya 15 tahun dan batas minimum sebesar 0 tahun.

Harapan lama sekolah didefinisikan sebagai lamanya sekolah (dalam tahun) yang diharapkan akan dirasakan oleh anak pada umur tertentu di masa mendatang. Harapan lama sekolah dihitung untuk penduduk berusia 7 tahun ke atas. Indikator ini dapat digunakan untuk mengetahui kondisi pembangunan

sistem pendidikan di berbagai jenjang yang ditunjukkan dalam bentuk lamanya pendidikan (dalam tahun) yang diharapkan dapat dicapai oleh setiap anak. Seperti halnya rata-rata lama sekolah, harapan lama sekolah juga menggunakan batasan yang dipakai sesuai kesepakatan UNDP. Batas maksimum untuk harapan lama sekolah adalah 18 tahun, sedangkan batas minimumnya 0 (Badan Pusat Statistik, 2019).

Dimensi lain dari ukuran kualitas hidup manusia adalah standar hidup layak. Dalam cakupan lebih luas, standar hidup layak menggambarkan tingkat kesejahteraan yang dinikmati oleh penduduk sebagai dampak semakin membaiknya ekonomi, UNDP mengukur standar hidup layak menggunakan Produk Nasional Bruto (PNB) perkapita yang disesuaikan, sedangkan BPS dalam menghitung standar hidup layak menggunakan rata-rata pengeluaran per kapita riil yang disesuaikan dengan paritas daya beli (*purcashing power parity*) berbasis formula Rao (Badan Pusat Statistik, 2019).

$$PPP_{j*} = \prod_{i*=1}^{m*} \left(\frac{P_{i*j*}}{P_{i*k*}} \right)^{1/m*},$$

dimana PPP_{j*} adalah paritas daya beli di wilayah j , p_{i*j*} adalah harga komoditas i di kabupaten/kota j , p_{i*k*} adalah harga komoditas i di Jakarta Selatan, dan m^* adalah jumlah komoditas.

Sebelum menghitung IPM, setiap komponen IPM harus dihitung indeksnya, Formula yang digunakan dalam penghitungan indeks komponen IPM adalah sebagai berikut (Badan Pusat Statistik, 2019):

$$I_{UHH} = \frac{UHH - UHH_{\min}}{UHH_{\max} - UHH_{\min}},$$

$$I_{HLS} = \frac{HLS - HLS_{\min}}{HLS_{\max} - HLS_{\min}},$$

$$I_{\text{Pengetahuan}} = \frac{I_{HLS} - I_{RLS}}{2},$$

$$I_{\text{Pengeluaran}} = \frac{\ln(\text{pengeluaran}) - \ln(\text{pengeluaran}_{\min})}{\ln(\text{pengeluaran}_{\max}) - \ln(\text{pengeluaran}_{\min})}.$$

Untuk menghitung indeks masing-masing komponen IPM digunakan batas maksimum dan minimum seperti pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3 Nilai Maksimum dan Minimum dari Setiap Komponen IPM

| Komponen IPM | Satuan | Minimum | Maksimum |
|-------------------------------------|--------|-----------|------------|
| Umur Harapan Hidup saat lahir (UHH) | Tahun | 20 | 85 |
| Harapan Lama Sekolah (HLS) | Tahun | 0 | 18 |
| Rata-rata Lama Sekolah (RLS) | Tahun | 0 | 15 |
| Pengeluaran per Kapita | Rupiah | 1.007.436 | 26.572.352 |

Sumber: Badan Pusat Statistik (2019).

Keterangan:

* Daya beli minimum merupakan garis kemiskinan terendah kabupaten tahun 2010 (data empiris) yaitu di Tolikara-Papua.

** Daya beli maksimum merupakan nilai tertinggi kabupaten yang diproyeksikan hingga 2025 (akhir RPJPN) yaitu perkiraan pengeluaran per kapita Jakarta Selatan tahun 2025.

Selanjutnya, nilai IPM dapat dihitung menggunakan formula (Badan Pusat Statistik, 2019):

$$IPM = \sqrt[3]{I_{AHH} \times I_{pendidikan} \times I_{pengeluaran}} \times 100.$$

Capaian pembangunan manusia di suatu wilayah pada waktu tertentu dapat dikelompokkan ke dalam empat kelompok, yaitu (Badan Pusat Statistik, 2019):

1. Sangat tinggi : $IPM \geq 80$
2. Tinggi : $70 \leq IPM < 80$
3. Sedang : $60 \leq IPM < 70$
4. Rendah : $IPM < 60$

Pengelompokkan ini bertujuan untuk mengorganisasikan wilayah-wilayah menjadi kelompok-kelompok yang sama dalam hal pembangunan manusia.

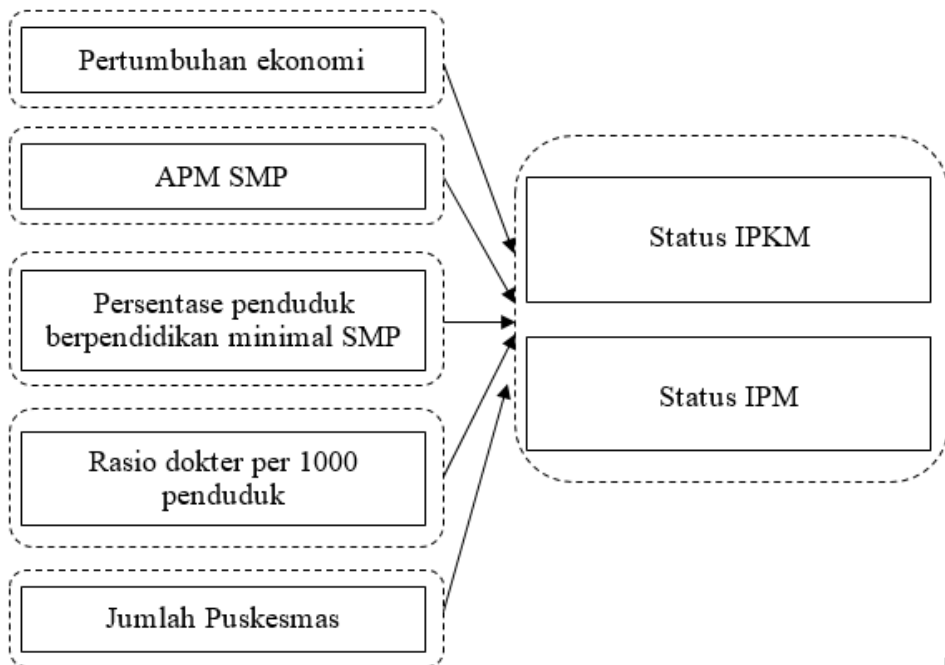
Untuk mengukur kecepatan perkembangan IPM dalam suatu kurun waktu digunakan ukuran pertumbuhan per tahun. Pertumbuhan IPM menunjukkan perbandingan antara perubahan capaian terkini dengan capaian tahun sebelumnya. Semakin tinggi nilai pertumbuhan IPM, maka semakin cepat pula peningkatan IPM. Indikator pertumbuhan IPM ini dapat digunakan sebagai ukuran kinerja pembangunan manusia suatu wilayah selama kurun waktu tertentu. Formula yang digunakan untuk menghitung pertumbuhan IPM adalah (Badan Pusat Statistik, 2019):

$$\text{Pertumbuhan IPM} = \frac{\text{IPM}_{t^*} - \text{IPM}_{t^*-1}}{\text{IPM}_{t^*-1}} \times 100\%,$$

dimana adalah IPM suatu wilayah pada tahun t^* dan IPM suatu wilayah pada tahun t^*-1 .

2.11 Kerangka Konseptual Status IPKM dan IPM

Berdasarkan kajian teori tentang faktor-faktor yang mempengaruhi IPKM dan memperhatikan keterkaitannya dengan IPM, maka kerangka konseptual yang menggambarkan variabel-variabel yang akan diukur atau diamati dalam penelitian ini disajikan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Kerangka Konseptual Status IPKM dan IPM

BAB 3

METODE PENELITIAN

Bab ini membahas tahapan penelitian yang terdiri dari tahapan kajian teori dan terapan. Tahapan kajian teori meliputi tahapan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter model MLR dan GWMLR. Tahapan pada kajian terapan meliputi pemodelan MLR dan GWMLR, sumber data, variabel penelitian dan tahapan analisis data. Kajian terapan penelitian ini adalah penerapan model MLR dan GWMLR pada pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 dan mengevaluasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM.

3.1 Tahapan Penelitian Kajian Teori

Pada sub bab ini membahas tahapan kajian teori model MLR yang meliputi tahapan penaksiran parameter, tahapan pengujian hipotesis, dan kajian teori model MLR.

3.1.1 Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model MLR

Tahapan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model MLR adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model MLR

Model MLR yang dikembangkan dalam penelitian ini dibentuk dari distribusi multinomial yang disajikan pada persamaan (2.3). Model MLR dinyatakan dalam persamaan

$$\begin{aligned}\eta_1(\mathbf{x}_i) &= \text{logit}(\pi_1(\mathbf{x}_i)) \\ &= \ln\left(\frac{\pi_1(\mathbf{x}_i)}{1-\pi_1(\mathbf{x}_i)}\right) \\ &= \beta_{01} + \beta_{11}X_{1i} + \beta_{21}X_{2i} + \dots + \beta_{k1}X_{ki} \\ &= \boldsymbol{\beta}_1^T \mathbf{x}_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_2(\mathbf{x}_i) &= \text{logit}(\pi_2(\mathbf{x}_i)) \\
&= \ln\left(\frac{\pi_2(\mathbf{x}_i)}{1-\pi_2(\mathbf{x}_i)}\right) \\
&= \beta_{02} + \beta_{12}X_{1i} + \beta_{22}X_{2i} + \cdots + \beta_{k2}X_{ki} \\
&= \boldsymbol{\beta}_2^T \mathbf{x}_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_3(\mathbf{x}_i) &= \ln(\psi_1(\mathbf{x}_i)) \\
&= \ln\left(\frac{\pi_{11}(\mathbf{x}_i)\pi_{00}(\mathbf{x}_i)}{\pi_{10}(\mathbf{x}_i)\pi_{01}(\mathbf{x}_i)}\right) \\
&= \beta_{03} + \beta_{13}X_{1i} + \beta_{23}X_{2i} + \cdots + \beta_{k3}X_{ki} \\
&= \boldsymbol{\beta}_3^T \mathbf{x}_i
\end{aligned}$$

dimana

$$\mathbf{x}_i = [1 \quad X_{1i} \quad X_{2i} \quad \cdots \quad X_{ki}]^T; \quad \boldsymbol{\beta}_1^T = [\beta_{01} \quad \beta_{11} \quad \beta_{21} \quad \cdots \quad \beta_{k1}],$$

$$\boldsymbol{\beta}_2^T = [\beta_{02} \quad \beta_{12} \quad \beta_{22} \quad \cdots \quad \beta_{k2}], \text{ dan } \boldsymbol{\beta}_3^T = [\beta_{03} \quad \beta_{13} \quad \beta_{23} \quad \cdots \quad \beta_{k3}].$$

2. Penaksiran parameter model MLR menggunakan metode MLE dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

a. Menetapkan fungsi likelihood, yaitu

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^n f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}) \\
&= \prod_{i=1}^n P(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}, Y_{00i} = y_{00i}) \\
&= \prod_{i=1}^n \pi_{11i}^{y_{11i}}(\mathbf{x}_i) \pi_{10i}^{y_{10i}}(\mathbf{x}_i) \pi_{01i}^{y_{01i}}(\mathbf{x}_i) \pi_{00i}^{y_{00i}}(\mathbf{x}_i),
\end{aligned}$$

$$\text{dimana } \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1^T \quad \boldsymbol{\beta}_2^T \quad \boldsymbol{\beta}_3^T]^T, \text{ dengan } \boldsymbol{\beta}_1^T = [\beta_{01} \quad \beta_{11} \quad \beta_{21} \quad \cdots \quad \beta_{k1}],$$

$$\boldsymbol{\beta}_2^T = [\beta_{02} \quad \beta_{12} \quad \beta_{22} \quad \cdots \quad \beta_{k2}], \boldsymbol{\beta}_3^T = [\beta_{03} \quad \beta_{13} \quad \beta_{23} \quad \cdots \quad \beta_{k3}],$$

$$\text{dan } \mathbf{x}_i = [1 \quad X_{1i} \quad X_{2i} \quad \cdots \quad X_{ki}]^T.$$

Misalkan $\pi_{gh}^{y_{gh}}(\mathbf{x}_i) = \pi_{ghi}^{y_{ghi}}$ untuk $g, h = 0, 1; i = 1, 2, \dots, n$, maka fungsi likelihood dapat ditulis menjadi

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n (\pi_{11i}^{y_{11i}} \pi_{10i}^{y_{10i}} \pi_{01i}^{y_{01i}} \pi_{00i}^{y_{00i}}).$$

b. Menetapkan logaritma natural fungsi likelihood (log-likelihood),

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \ln L(\boldsymbol{\beta})$$

$$= \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \pi_{11i} + y_{10i} \ln \pi_{10i} + y_{01i} \ln \pi_{01i} + y_{00i} \ln \pi_{00i}).$$

dimana

$$\pi_{11i} = \begin{cases} \frac{a_{1i} - \sqrt{a_{1i}^2 + b_{1i}}}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1 \\ \pi_{1i} \pi_{2i}, & \psi_i = 1 \end{cases}$$

$$a_{1i} = 1 + (\psi_i - 1)(\pi_{1i} + \pi_{2i})$$

$$b_{1i} = -4\psi_i(\psi_i - 1)\pi_{1i}\pi_{2i}$$

$$\psi_i = \frac{\pi_{11i}\pi_{00i}}{\pi_{10i}\pi_{01i}}$$

$$\pi_{10i} = \pi_{1i} - \pi_{11i}$$

$$\pi_{01i} = \pi_{2i} - \pi_{11i}$$

$$\pi_{00i} = 1 - \pi_{1i} - \pi_{2i} + \pi_{11i}.$$

c. Menentukan turunan parsial pertama dari fungsi log-likelihood terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}$ yaitu

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\partial \pi_{11i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} + \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\partial \pi_{10i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} + \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\partial \pi_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} + \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\partial \pi_{00i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right)$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\partial \pi_{11i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\partial \pi_{10i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\partial \pi_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\partial \pi_{00i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\partial \pi_{11i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} + \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\partial \pi_{10i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} + \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\partial \pi_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} + \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\partial \pi_{00i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} \right).$$

d. Menentukan penaksir ML parameter model MLR dengan metode BHHH

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}),$$

dimana

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) = \left[\left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right]^T \quad \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right]^T \quad \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} \right]^T \right]^T \text{ adalah vektor gradien.}$$

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{1}{n} [\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta})] \text{ adalah matriks Hessian.}$$

3. Pengujian hipotesis parameter model MLR

Pengujian hipotesis parameter model MLR meliputi pengujian parameter secara serentak dan parsial. Tahapan pengujian hipotesis parameter secara serentak adalah sebagai berikut:

(1) Menetapkan rumusan hipotesis, yaitu

$$H_0 : \beta_{1s} = \beta_{2s} = \dots = \beta_{ks} = 0, \quad s = 1, 2, 3$$

$$H_1 : \text{paling tidak ada satu } \beta_{rs} \neq 0, \quad r = 1, 2, \dots, k.$$

(2) Mendefinisikan himpunan parameter dibawah H_0

$$\omega_1 = \{\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}\}.$$

(3) Menetapkan fungsi likelihood dibawah H_0

$$L(\omega_1) = \prod_{i=1}^n ((\pi_{11i}^*)^{y_{11i}} (\pi_{10i}^*)^{y_{10i}} (\pi_{01i}^*)^{y_{01i}} (\pi_{00i}^*)^{y_{00i}}).$$

(4) Menentukan fungsi log-likelihood dibawah H_0

$$\ell(\omega_1) = \ln L(\omega_1)$$

$$= \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \pi_{11i}^* + y_{10i} \ln \pi_{10i}^* + y_{01i} \ln \pi_{01i}^* + y_{00i} \ln \pi_{00i}^*).$$

(5) Menentukan maksimum fungsi log-likelihood dibawah H_0

$$\ell(\hat{\omega}_1) = \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \hat{\pi}_{11i}^* + y_{10i} \ln \hat{\pi}_{10i}^* + y_{01i} \ln \hat{\pi}_{01i}^* + y_{00i} \ln \hat{\pi}_{00i}^*),$$

dimana

$$\hat{\pi}_{11i}^* = \begin{cases} \frac{a_{2i} - \sqrt{a_{2i}^2 + b_{2i}}}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1, \\ \hat{\pi}_{1i}^* \hat{\pi}_{2i}^*, & \psi_i = 1, \end{cases}$$

$$\text{dengan } a_{2i} = 1 + (\psi_i - 1)(\hat{\pi}_{1i}^* + \hat{\pi}_{2i}^*), \quad b_{2i} = -4\psi_i(\psi_i - 1)\hat{\pi}_{1i}^* \hat{\pi}_{2i}^*,$$

$$\psi_i = \frac{\hat{\pi}_{11i}^* \hat{\pi}_{00i}^*}{\hat{\pi}_{10i}^* \hat{\pi}_{01i}^*}, \hat{\pi}_{1i}^* = \frac{\exp(\hat{\beta}_{01})}{1 + \exp(\hat{\beta}_{01})}, \text{ dan } \hat{\pi}_{2i}^* = \frac{\exp(\hat{\beta}_{02})}{1 + \exp(\hat{\beta}_{02})},$$

$$\hat{\pi}_{10i}^* = \hat{\pi}_{1i}^* - \hat{\pi}_{11i}^*, \hat{\pi}_{01i}^* = \hat{\pi}_{2i}^* - \hat{\pi}_{11i}^*, \text{ dan } \hat{\pi}_{00i}^* = 1 - \hat{\pi}_{1i}^* - \hat{\pi}_{2i}^* + \hat{\pi}_{11i}^*.$$

(6) Mendefinisikan himpunan parameter dibawah populasi

$$\Omega_1 = \{\beta_{rs}, r = 0, 1, \dots, k; s = 1, 2, 3\}.$$

(7) Menetapkan fungsi likelihood dibawah populasi

$$L(\Omega_1) = \prod_{i=1}^n (\pi_{11i}^{y_{11i}} \pi_{10i}^{y_{10i}} \pi_{01i}^{y_{01i}} \pi_{00i}^{y_{00i}}).$$

(8) Mendefinisikan fungsi log-likelihood dibawah populasi

$$\ell(\Omega_1) = \ln L(\Omega_1)$$

$$= \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \pi_{11i} + y_{10i} \ln \pi_{10i} + y_{01i} \ln \pi_{01i} + y_{00i} \ln \pi_{00i}).$$

(9) Menentukan maksimum fungsi log-likelihood dibawah populasi

$$\ell(\hat{\Omega}_1) = \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \hat{\pi}_{11i} + y_{10i} \ln \hat{\pi}_{10i} + y_{01i} \ln \hat{\pi}_{01i} + y_{00i} \ln \hat{\pi}_{00i}),$$

dimana

$$\hat{\pi}_{11i} = \begin{cases} \frac{a_{3i} - \sqrt{a_{3i}^2 + b_{3i}}}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1, \\ \hat{\pi}_{1i} \hat{\pi}_{2i}, & \psi_i = 1, \end{cases}$$

$$\text{dengan } a_{3i} = 1 + (\psi_i - 1)(\hat{\pi}_{1i} + \hat{\pi}_{2i}), b_{3i} = -4\psi_i(\psi_i - 1)\hat{\pi}_{1i}\hat{\pi}_{2i},$$

$$\psi_i = \frac{\hat{\pi}_{11i} \hat{\pi}_{00i}}{\hat{\pi}_{10i} \hat{\pi}_{01i}}, \hat{\pi}_{1i} = \frac{\exp(\hat{\beta}_1^T \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\hat{\beta}_1^T \mathbf{x}_i)}, \text{ dan } \hat{\pi}_{2i} = \frac{\exp(\hat{\beta}_2^T \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\hat{\beta}_2^T \mathbf{x}_i)},$$

$$\hat{\pi}_{10i} = \hat{\pi}_{1i} - \hat{\pi}_{11i}, \hat{\pi}_{01i} = \hat{\pi}_{2i} - \hat{\pi}_{11i}, \text{ dan } \hat{\pi}_{00i} = 1 - \hat{\pi}_{1i} - \hat{\pi}_{2i} + \hat{\pi}_{11i}.$$

(10) Menentukan statistik uji dengan tahapan sebagai berikut:

(a) Menyelesaikan statistik LR, yaitu

$$\Lambda_1 = \frac{L(\hat{\omega}_1)}{L(\hat{\Omega}_1)}, \text{ untuk } 0 < \Lambda_1 < 1,$$

dimana

$$L(\hat{\omega}_1) = \max_{\beta^* \in \omega_1} L(\beta^*) \text{ dan } L(\hat{\Omega}_1) = \max_{\beta \in \Omega_1} L(\beta).$$

(b) Statistik LR pada tahap (a) ekuivalen dengan statistik

$$G_1^2 = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega}_1)}{L(\hat{\Omega}_1)} \right) = 2(L(\hat{\beta}) - L(\hat{\beta}^*)),$$

dimana $L(\hat{\beta}) = \ln L(\hat{\Omega}_1)$ dan $L(\hat{\beta}^*) = \ln L(\hat{\omega}_1)$.

(11) Menentukan distribusi statistik G_1^2 dengan tahapan sebagai berikut:

(a) Mengembangkan $L(\hat{\beta}^*)$ dalam deret Taylor disekitar $\hat{\beta}$ dan $\hat{\beta}^*$ sehingga diperoleh hubungan:

$$2(L(\hat{\beta}) - L(\hat{\beta}^*)) = (\hat{\beta} - \hat{\beta}^*)^T \mathbf{I}(\hat{\beta})(\hat{\beta} - \hat{\beta}^*),$$

$$2(L(\hat{\beta}^*) - L(\hat{\beta}^*)) = (\hat{\beta}^* - \hat{\beta}^*)^T \mathbf{I}(\hat{\beta})(\hat{\beta}^* - \hat{\beta}^*).$$

(b) Berdasarkan tahap 11(a), bahwa statistik LR pada tahap 10(b) dapat dinyatakan dalam bentuk kuadrat, yaitu

$$G_1^2 = 2(\ln L(\hat{\Omega}_1) - \ln L(\hat{\omega}_1))$$

$$= 2(L(\hat{\beta}) - L(\hat{\beta}^*))$$

$$= (\hat{\beta} - \hat{\beta}^*)^T [\mathbf{I}(\hat{\beta})](\hat{\beta} - \hat{\beta}^*).$$

(c) Menentukan distribusi statistik G_1^2

Berdasarkan definisi himpunan parameter dibawah H_0 dan

dibawah populasi, serta berdasarkan hipotesis nol bahwa $\beta_{11} = \beta_{01}^*$,

dimana $\beta_{11} = [\beta_{1s} \quad \beta_{2s} \quad \cdots \quad \beta_{ks}; s = 1, 2, 3]^T$

dan $\beta_{01(3k \times 1)}^* = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$, maka dari tahapan (b) diperoleh

$$G_1^2 = 2(L(\hat{\beta}) - L(\hat{\beta}^*))$$

$$= (\hat{\beta}_{11} - \beta_{01}^*)^T [\mathbf{I}^{11}(\hat{\beta})]^{-1} (\hat{\beta}_{11} - \beta_{01}^*) \sim \chi_{3k}^2,$$

dimana

$[\mathbf{I}^{11}(\hat{\beta})]$ adalah matriks partisi dari matriks $[\mathbf{I}(\hat{\beta})]^{-1}$. χ_{3k}^2 adalah

distribusi *chi-square* dengan derajat bebas $3k$. Derajat bebas ini

adalah dimensi dari vektor $(\hat{\beta}_{11} - \beta_{01}^*)$ atau banyaknya parameter

model dibawah populasi (Ω_1) dikurangi banyaknya parameter dibawah H_0 (ω_1).

(12) Menentukan daerah penolakan H_0 berdasarkan definisi dari MLRT:

(a) Menentukan daerah penolakan uji LR

Uji LR adalah suatu uji yang menolak H_0 , jika

$$\Lambda_1 = \frac{L(\hat{\omega}_1)}{L(\hat{\Omega}_1)} < c_\alpha, 0 < c_\alpha \leq 1.$$

(b) Menentukan nilai konstanta c_α yang bergantung pada tingkat signifikansi α , dan memenuhi $P_{\beta \in \omega_1}(\Lambda_1 < c_\alpha) = \alpha$.

(c) Berdasarkan nilai c_α pada tahap (b) dan definisi dari tingkat signifikansi α diperoleh daerah penolakan H_0 untuk uji serentak, yaitu tolak H_0 , jika nilai $G_1^2 > \chi_{(\alpha, v_1)}^2$.

Tahapan pengujian parameter model MLR secara parsial adalah:

1) Menetapkan hipotesis:

$$H_0 : \beta_{rs} = 0,$$

$$H_1 : \beta_{rs} \neq 0, \text{ untuk } r = 1, 2, \dots, k \text{ dan } s = 1, 2, 3.$$

2) Menentukan statistik uji:

$$Z_1 = \frac{\hat{\beta}_{rs}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_{rs})}} \overset{a}{\sim} N(0,1),$$

dimana $\text{Var}(\hat{\beta}_{rs})$ diperoleh dari elemen diagonal ke $3(k+1)$ dari matriks $[\mathbf{I}(\hat{\beta})]^{-1}$.

3) Menentukan daerah penolakan H_0

$$\text{Tolak } H_0 \text{ jika nilai } |Z_1| > Z_{\alpha/2}.$$

3.1.2 Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model GWMLR

Tahapan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model GWMLR adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model GWMLR

Model GWMLR pada lokasi \mathbf{u}_i adalah model MLR dengan semua parameter bergantung pada lokasi geografis. Model GWMLR pada lokasi \mathbf{u}_i adalah

$$\begin{aligned}\zeta_1(\mathbf{x}_i) &= \text{logit}(p_1(\mathbf{x}_i)) \\ &= \ln\left(\frac{p_1(\mathbf{x}_i)}{1-p_1(\mathbf{x}_i)}\right) \\ &= \beta_{01}(\mathbf{u}_i) + \beta_{11}(\mathbf{u}_i)X_{1i} + \beta_{21}(\mathbf{u}_i)X_{2i} + \cdots + \beta_{k1}(\mathbf{u}_i)X_{ki} \\ &= \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_2(\mathbf{x}_i) &= \text{logit}(p_2(\mathbf{x}_i)) \\ &= \ln\left(\frac{p_2(\mathbf{x}_i)}{1-p_2(\mathbf{x}_i)}\right) \\ &= \beta_{02}(\mathbf{u}_i) + \beta_{12}(\mathbf{u}_i)X_{1i} + \beta_{22}(\mathbf{u}_i)X_{2i} + \cdots + \beta_{k2}(\mathbf{u}_i)X_{ki} \\ &= \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_3(\mathbf{x}_i) &= \ln(\psi_2(\mathbf{x}_i)) \\ &= \ln\left(\frac{p_{11}(\mathbf{x}_i)p_{00}(\mathbf{x}_i)}{p_{10}(\mathbf{x}_i)p_{01}(\mathbf{x}_i)}\right) \\ &= \beta_{03}(\mathbf{u}_i) + \beta_{13}(\mathbf{u}_i)X_{1i} + \beta_{23}(\mathbf{u}_i)X_{2i} + \cdots + \beta_{k3}(\mathbf{u}_i)X_{ki} \\ &= \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i\end{aligned}$$

dimana

$$\mathbf{x}_i = [1 \quad X_{1i} \quad X_{2i} \quad \cdots \quad X_{ki}]^T \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) = [\beta_{01}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{11}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{21}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \beta_{k1}(\mathbf{u}_i)],$$

$$\boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) = [\beta_{02}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{12}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{22}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \beta_{k2}(\mathbf{u}_i)],$$

$$\boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i) = [\beta_{03}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{13}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{23}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \beta_{k3}(\mathbf{u}_i)].$$

2. Penaksiran parameter model GWMLR menggunakan metode MLE dengan tahapan-tahapan:

a. Menetapkan fungsi likelihood model GWMLR pada lokasi ke- i , yaitu:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), i = 1, 2, \dots, n) &= \prod_{i=1}^n f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) \\
&= \prod_{i=1}^n P(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}, Y_{00i} = y_{00i}) \\
&= \prod_{i=1}^n p_{11i}^{y_{11i}}(\mathbf{x}_i) p_{10i}^{y_{10i}}(\mathbf{x}_i) p_{01i}^{y_{01i}}(\mathbf{x}_i) p_{00i}^{y_{00i}}(\mathbf{x}_i).
\end{aligned}$$

Misalkan $p_{gh}^{y_{gh}}(\mathbf{x}_i) = p_{ghi}^{y_{ghi}}$ dimana $g, h = 0, 1$, maka fungsi likelihood dapat ditulis menjadi

$$L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), i = 1, 2, \dots, n) = \prod_{i=1}^n p_{11i}^{y_{11i}} p_{10i}^{y_{10i}} p_{01i}^{y_{01i}} p_{00i}^{y_{00i}}.$$

b. Menentukan fungsi log-likelihood

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), i = 1, 2, \dots, n) &= \ln L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln p_{11i} + y_{10i} \ln p_{10i} + y_{01i} \ln p_{01i} + y_{00i} \ln p_{00i}).
\end{aligned}$$

c. Menentukan pembobot spasial

Pembobot spasial yang digunakan untuk penaksiran parameter model GWMLR dalam penelitian ini adalah *fixed kernel bi-square*, yaitu:

$$w_{ij} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{d_{ij}}{b} \right)^2 \right]^2, & \text{untuk } d_{ij} < b \\ 0, & \text{untuk } d_{ij} \geq b, \end{cases}$$

dimana b adalah parameter non negatif yang disebut dengan *bandwidth* dan d_{ij} adalah jarak Euclidean antara lokasi pengamatan ke- i dengan lokasi pengamatan ke- j , untuk $i, j = 1, 2, \dots, n$ yang dinyatakan dengan persamaan:

$$d_{ij} = \sqrt{(u_{1i} - u_{1j})^2 + (u_{2i} - u_{2j})^2}.$$

d. Menentukan fungsi log-likelihood terboboti

$$\begin{aligned}
L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) &= \ell(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) w_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n (y_{11j} \ln p_{11j} + y_{10j} \ln p_{10j} + y_{01j} \ln p_{01j} + y_{00j} \ln p_{00j}) w_{ij},
\end{aligned}$$

dimana

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = [\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)]^T,$$

$$p_{11}(\mathbf{x}_j) = P(Y_{1j} = 1, Y_{2j} = 1 | \mathbf{x}_j) = \begin{cases} \frac{a_{4j} - \sqrt{a_{4j}^2 + b_{4j}}}{2(\psi_2(\mathbf{x}_j) - 1)}, & \psi_2(\mathbf{x}_j) \neq 1, \\ p_1(\mathbf{x}_j)p_2(\mathbf{x}_j), & \psi_2(\mathbf{x}_j) = 1, \end{cases}$$

dimana

$$a_{4j} = 1 + (\psi_2(\mathbf{x}_j) - 1)(p_1(\mathbf{x}_j) + p_2(\mathbf{x}_j))$$

$$b_{4j} = -4\psi_2(\mathbf{x}_j)(\psi_2(\mathbf{x}_j) - 1)p_1(\mathbf{x}_j)p_2(\mathbf{x}_j)$$

$$p_1(\mathbf{x}_j) = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j)}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j)}$$

$$p_2(\mathbf{x}_j) = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j)}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j)}.$$

$$p_{10}(\mathbf{x}_j) = P(Y_{1j} = 1, Y_{2j} = 0 | \mathbf{x}_j) = p_1(\mathbf{x}_j) - p_{11}(\mathbf{x}_j)$$

$$p_{01}(\mathbf{x}_j) = P(Y_{1j} = 0, Y_{2j} = 1 | \mathbf{x}_j) = p_2(\mathbf{x}_j) - p_{11}(\mathbf{x}_j)$$

$$p_{00}(\mathbf{x}_j) = P(Y_{1j} = 0, Y_{2j} = 0 | \mathbf{x}_j) = 1 - p_1(\mathbf{x}_j) - p_2(\mathbf{x}_j) + p_{11}(\mathbf{x}_j).$$

e. Menentukan turunan parsial pertama dari fungsi log-likelihood

$$\frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{\partial p_{11j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{\partial p_{10j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{\partial p_{01j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{\partial p_{00j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{\partial p_{11j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{\partial p_{10j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{\partial p_{01j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{\partial p_{00j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{\partial p_{11j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{\partial p_{10j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{\partial p_{01j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{\partial p_{00j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij}$$

dimana $L^* = L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$.

f. Menentukan penaksir ML parameter model GWMLR dengan metode BHHH

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i)) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i))$$

dimana

$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i)$ adalah penaksir parameter model GWMLR untuk lokasi ke- i pada iterasi ke- l .

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i) = \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_3^T(\mathbf{u}_i) \right]^T$$

$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}^{(l)}(\mathbf{u}_i))$ adalah vektor gradien untuk lokasi ke- i pada iterasi ke- l

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}^{(l)}(\mathbf{u}_i)) = \left[\left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \quad \left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \quad \left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \right]^T_{\boldsymbol{\beta}^{(l)}(\mathbf{u}_i) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)}$$

$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^{(l)}(\mathbf{u}_i))$ adalah matriks Hessian untuk lokasi ke- i pada iterasi ke- l .

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^{(l)}(\mathbf{u}_i)) = -\frac{1}{n} \left[\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}^{(l)}(\mathbf{u}_i)) \mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta}^{(l)}(\mathbf{u}_i)) \right]_{\boldsymbol{\beta}^{(l)}(\mathbf{u}_i) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)}$$

3. Tahapan pengujian hipotesis parameter model GWMLR adalah:

a. Tahapan uji kesamaan model MLR dan GWMLR adalah sebagai berikut:

1) Menentukan hipotesis:

$$H_0 : \beta_{rs}(\mathbf{u}_i) = \beta_{rs}, \quad r = 1, 2, \dots, k; \quad s = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$H_1 : \text{Paling tidak ada satu } \beta_{rs}(\mathbf{u}_i) \neq \beta_{rs}.$$

2) Menentukan statistik uji:

$$Z_V = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1),$$

dimana

$$M_i = \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)) - \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

$$\ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{i=1}^n (y_{1i} \ln \hat{p}_{1i} + y_{10i} \ln \hat{p}_{10i} + y_{01i} \ln \hat{p}_{01i} + y_{00i} \ln \hat{p}_{00i}),$$

$$\ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{i=1}^n (y_{1i} \ln \hat{\pi}_{1i} + y_{10i} \ln \hat{\pi}_{10i} + y_{01i} \ln \hat{\pi}_{01i} + y_{00i} \ln \hat{\pi}_{00i}),$$

$$\bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i,$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)$ adalah berturut-turut penaksir ML parameter model MLR dan GWMLR yang diperoleh dengan metode BHHH.

3) Menentukan daerah penolakan H_0

$$\text{Tolak } H_0 \text{ jika nilai } |Z_V| > Z_{\alpha/2}.$$

b. Tahapan uji serentak adalah sebagai berikut:

1) Menetapkan rumusan hipotesis, yaitu

$$H_0 : \beta_{1s}(\mathbf{u}_i) = \beta_{2s}(\mathbf{u}_i) = \dots = \beta_{ks}(\mathbf{u}_i) = 0, \quad s = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$H_1 : \text{Paling tidak ada satu } \beta_{rs}(\mathbf{u}_i) \neq 0, \quad r = 1, 2, \dots, k.$$

2) Mendefinisikan himpunan parameter dibawah H_0

$$\omega_2 = \{ \beta_{01}(\mathbf{u}_i), \beta_{02}(\mathbf{u}_i), \beta_{03}(\mathbf{u}_i); \quad i = 1, 2, \dots, n \}.$$

3) Menetapkan fungsi likelihood dibawah H_0

$$L(\omega_2) = \prod_{i=1}^n ((p_{11i}^*)^{y_{11i}} (p_{10i}^*)^{y_{10i}} (p_{01i}^*)^{y_{01i}} (p_{00i}^*)^{y_{00i}}).$$

4) Menentukan fungsi log-likelihood dibawah H_0

$$\ell(\omega_2) = \ln L(\omega_2)$$

$$= \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln p_{11i}^* + y_{10i} \ln p_{10i}^* + y_{01i} \ln p_{01i}^* + y_{00i} \ln p_{00i}^*).$$

5) Menentukan maksimum fungsi log-likelihood dibawah H_0

$$\ell(\hat{\omega}_2) = \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \hat{p}_{11i}^* + y_{10i} \ln \hat{p}_{10i}^* + y_{01i} \ln \hat{p}_{01i}^* + y_{00i} \ln \hat{p}_{00i}^*)$$

dimana

$$\hat{p}_{11i}^* = \begin{cases} \frac{a_{5i} - \sqrt{a_{5i}^2 + b_{5i}}}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1, \\ \hat{p}_{1i}^* \hat{p}_{2i}^*, & \psi_i = 1, \end{cases}$$

$$a_{5i} = 1 + (\psi_i - 1)(\hat{p}_{1i}^* + \hat{p}_{2i}^*), \quad b_{5i} = -4\psi_i(\psi_i - 1) \hat{p}_{1i}^* \hat{p}_{2i}^*,$$

$$\psi_i = \frac{\hat{p}_{11i}^* \hat{p}_{00i}^*}{\hat{p}_{10i}^* \hat{p}_{01i}^*}, \quad \hat{p}_{1i}^* = \frac{\exp(\hat{\beta}_{01}(\mathbf{u}_i))}{1 + \exp(\hat{\beta}_{01}(\mathbf{u}_i))}, \quad \text{dan} \quad \hat{p}_{2i}^* = \frac{\exp(\hat{\beta}_{02}(\mathbf{u}_i))}{1 + \exp(\hat{\beta}_{02}(\mathbf{u}_i))},$$

$$\hat{p}_{10i}^* = \hat{p}_{1i}^* - \hat{p}_{11i}^*,$$

$$\hat{p}_{01i}^* = \hat{p}_{2i}^* - \hat{p}_{11i}^*,$$

$$\hat{p}_{00i}^* = 1 - \hat{p}_{1i}^* - \hat{p}_{2i}^* + \hat{p}_{11i}^*.$$

6) Mendefinisikan himpunan parameter dibawah populasi

$$\Omega_2 = \{ \beta_{rs}(\mathbf{u}_i), \quad r = 0, 1, \dots, k; \quad s = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, \dots, n \}.$$

7) Menetapkan fungsi likelihood dibawah populasi

$$L(\Omega_2) = \prod_{i=1}^n (p_{11i}^{y_{11i}} p_{10i}^{y_{10i}} p_{01i}^{y_{01i}} p_{00i}^{y_{00i}}).$$

8) Mendefinisikan fungsi log-likelihood dibawah populasi

$$\begin{aligned} \ell(\Omega_2) &= \ln L(\Omega_2) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln p_{11i} + y_{10i} \ln p_{10i} + y_{01i} \ln p_{01i} + y_{00i} \ln p_{00i}). \end{aligned}$$

9) Menentukan maksimum fungsi log-likelihood dibawah populasi

$$\ell(\hat{\Omega}_2) = \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \hat{p}_{11i} + y_{10i} \ln \hat{p}_{10i} + y_{01i} \ln \hat{p}_{01i} + y_{00i} \ln \hat{p}_{00i}),$$

dimana

$$\hat{p}_{11i} = \begin{cases} \frac{a_{6i} - \sqrt{a_{6i}^2 + b_{6i}}}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1, \\ \hat{p}_{1i} \hat{p}_{2i}, & \psi_i = 1, \end{cases}$$

dengan $a_{6i} = 1 + (\psi_i - 1)(\hat{p}_{1i} + \hat{p}_{2i})$, $b_{6i} = -4\psi_i(\psi_i - 1)\hat{p}_{1i}\hat{p}_{2i}$,

$$\psi_i = \frac{\hat{p}_{11i}\hat{p}_{00i}}{\hat{p}_{10i}\hat{p}_{01i}}, \quad \hat{p}_{1i} = \frac{\exp(\hat{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\hat{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}, \quad \text{dan} \quad \hat{p}_{2i} = \frac{\exp(\hat{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\hat{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}.$$

$$\hat{p}_{10i} = \hat{p}_{1i} - \hat{p}_{11i},$$

$$\hat{p}_{01i} = \hat{p}_{2i} - \hat{p}_{11i},$$

$$\hat{p}_{00i} = 1 - \hat{p}_{1i} - \hat{p}_{2i} + \hat{p}_{11i}.$$

(10) Menentukan statistik uji dengan tahapan sebagai berikut:

(a) Menyelesaikan statistik LR, yaitu

$$\Lambda_2 = \frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\Omega}_2)}, \text{ untuk } 0 < \Lambda_2 < 1,$$

$$\text{dimana } L(\hat{\omega}_2) = \max_{\beta_0^* \in \omega_2} L(\beta_0^*) \text{ dan } L(\hat{\Omega}_2) = \max_{\beta_1^* \in \Omega_2} L(\beta_1^*).$$

(b) Statistik LR pada tahap (a) ekuivalen dengan statistik

$$G_2^2 = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\Omega}_2)} \right) = 2(L(\hat{\beta}_1^*) - L(\hat{\beta}_0^*)),$$

$$\text{dimana } L(\hat{\beta}_1^*) = \ln L(\hat{\Omega}_2) \text{ dan } L(\hat{\beta}_0^*) = \ln L(\hat{\omega}_2).$$

(11) Menentukan distribusi statistik G_2^2 dengan tahapan sebagai berikut:

- (a) Mengembangkan $L(\boldsymbol{\beta}_0^*)$ dalam deret Taylor di sekitar $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*$, dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*$ dan diperoleh hubungan:

$$2(L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) - L(\boldsymbol{\beta}_0^*)) = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* - \boldsymbol{\beta}_0^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* - \boldsymbol{\beta}_0^*),$$

$$2(L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*) - L(\boldsymbol{\beta}_0^*)) = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^* - \boldsymbol{\beta}_0^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^* - \boldsymbol{\beta}_0^*).$$

- (b) Berdasarkan tahap 10(a), bahwa statistik LR pada tahap 10(b) dapat dinyatakan dalam bentuk kuadrat

$$\begin{aligned} G_2^2 &= 2(\ln L(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_2) - \ln L(\hat{\omega}_2)) \\ &= 2(L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) - L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)](\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*). \end{aligned}$$

- (c) Menentukan distribusi statistik uji G_2^2

Berdasarkan definisi himpunan parameter dibawah H_0 dan dibawah populasi, serta berdasarkan hipotesis nol bahwa $\boldsymbol{\beta}_{11}^* = \boldsymbol{\beta}_{011}^*$, dimana

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* = [\hat{\beta}_{1s}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{2s}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{ks}(\mathbf{u}_i); s = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, n]^T,$$

dan $\boldsymbol{\beta}_{011(3kn \times 1)}^* = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$, maka dari tahapan (b) diperoleh:

$$\begin{aligned} G_2^2 &= 2(L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) - L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*)^T [\mathbf{I}^{11}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*) \overset{a}{\sim} \chi_{v_2}^2, \end{aligned}$$

dimana

$[\mathbf{I}^{11}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)]$ adalah matriks partisi dari matriks $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)]^{-1}$ dan $\chi_{v_2}^2$ adalah distribusi *chi-square* dengan derajat bebas v_2 . Derajat bebas ini diperoleh dari banyaknya parameter efektif.

(12) Menentukan daerah penolakan H_0 berdasarkan definisi dari MLRT:

- (a) Menentukan daerah penolakan uji LR

Uji LR adalah suatu uji yang menolak H_0 , jika

$$\Lambda_2 = \frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\Omega}_2)} < c_\alpha, 0 < c_\alpha \leq 1.$$

- (b) Menentukan nilai konstanta c_α yang bergantung pada tingkat signifikansi α , dan memenuhi $P_{\beta_1^* \in \omega_2}(\Lambda_2 < c_\alpha) = \alpha$.
- (c) Berdasarkan nilai c_α pada tahap (b) dan definisi dari tingkat signifikansi α diperoleh daerah penolakan H_0 untuk uji serentak, yaitu tolak H_0 , jika nilai $G_2^2 > \chi_{(\alpha, v_2)}^2$.

Tahapan pengujian parameter model GWMLR secara parsial adalah:

- (1) Menetapkan hipotesis:

$$H_0 : \beta_{rs}(\mathbf{u}_j) = 0,$$

$$H_1 : \beta_{rs}(\mathbf{u}_j) \neq 0, r = 1, 2, \dots, k; s = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, n.$$

- (2) Menentukan statistik uji:

$$Z_2 = \frac{\hat{\beta}_{rs}(\mathbf{u}_j)}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_{rs}(\mathbf{u}_j))}} \overset{a}{\sim} N(0, 1),$$

dimana $\text{Var}(\hat{\beta}_{rs}(\mathbf{u}_j))$ diperoleh dari elemen diagonal ke $[3(k+1)]$ dari matriks $[\mathbf{I}(\hat{\beta}_1^*(\mathbf{u}_j))]^{-1}$.

- (3) Menentukan daerah penolakan H_0

$$\text{Tolak } H_0 \text{ jika nilai } |Z_2| > Z_{\alpha/2}.$$

3.2 Tahapan Penelitian Kajian Terapan

Tahapan ini membahas penerapan model MLR dan GWMLR pada pemodelan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018. Berikut ini disajikan tahapan-tahapan pada kajian terapan model MLR dan GWMLR.

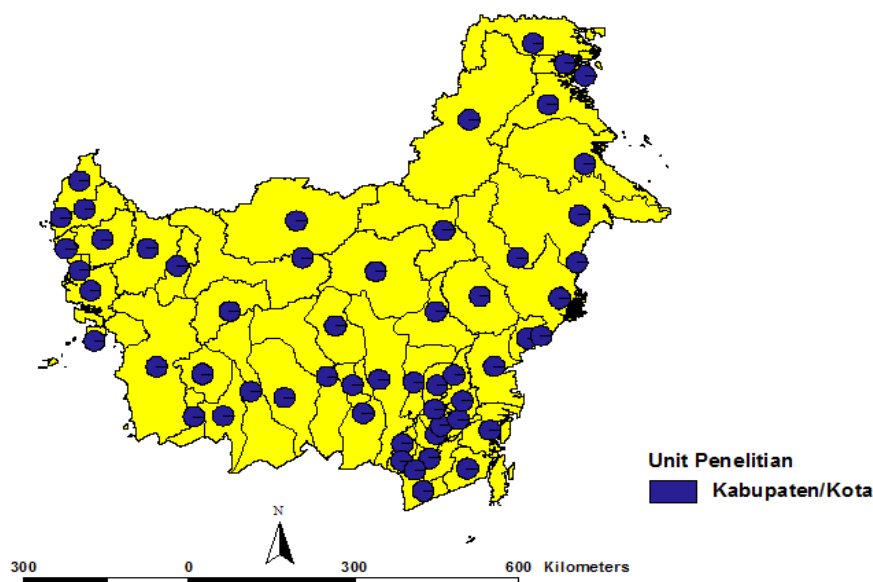
3.2.1 Sumber Data

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan (Balitbangkes) Kementerian Kesehatan dan Badan Pusat Statistik (BPS) 5 Provinsi di Pulau Kalimantan, yaitu Kalimantan Barat, Kalimantan Tengah, Kalimantan Selatan,

Kalimantan Timur, dan Kalimantan Utara. Data yang diambil dari Balitbangkes Kementerian Kesehatan berupa hasil publikasi IPKM kabupaten/kota tahun 2018. Data yang diambil dari BPS setiap provinsi merupakan data hasil publikasi maupun hasil survei. Data hasil publikasi meliputi Data dan Informasi Kemiskinan tahun 2018, Provinsi Dalam Angka, dan Laporan Pembangunan Manusia Indonesia tahun 2018, sedangkan data hasil survei meliputi hasil Survei Sosial Ekonomi Nasional (Susenas) tahun 2018. Unit penelitian adalah Kabupaten/Kota dari 5 Provinsi di Pulau Kalimantan tahun 2018, yang terdiri atas 47 kabupaten dan 9 kota. Sehingga jumlah keseluruhan dari unit penelitian adalah sebanyak 56 kabupaten/kota seperti yang disajikan pada Tabel 3.1 dan Gambar 3.1.

Tabel 3.1 Jumlah Kabupaten/Kota dari 5 Provinsi di Pulau Kalimantan

| Provinsi | Kabupaten | Kota |
|------------------------------------|-----------|------|
| Kalimantan Barat | 12 | 2 |
| Kalimantan Tengah | 13 | 1 |
| Kalimantan Selatan | 11 | 2 |
| Kalimantan Timur | 7 | 3 |
| Kalimantan Utara | 4 | 1 |
| Jumlah Keseluruhan Unit Penelitian | 56 | |



Gambar 3.1 Peta Unit Penelitian

Gambar 3.1 menunjukkan titik-titik sampel (lokasi) kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 yang dijadikan sebagai unit penelitian.

3.2.2 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini terdiri atas variabel respon dan prediktor. Variabel respon yang digunakan sebanyak dua variabel respon kategorik dan terdapat dependensi antar respon, yaitu status IPKM (Y_1) dan status IPM (Y_2) kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018. Variabel prediktor (X_r) yang digunakan merupakan faktor-faktor yang diduga berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM di setiap kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018. Variabel prediktor yang digunakan dalam penelitian ini didasarkan pada penelitian-penelitian sebelumnya mengenai beberapa faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM. Variabel-variabel yang digunakan dalam penelitian ini disajikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Variabel Penelitian

| Variabel | Nama Variabel | Skala Pengukuran |
|----------|--|------------------|
| Y_1 | Status IPKM, dengan kategori: 0 = IPKM < rata-rata (IPKM DBK), 1 = IPKM \geq rata-rata (IPKM B-DBK), dimana DBK = Daerah Bermasalah Kesehatan B-DBK = Bukan Daerah Bermasalah Kesehatan (Kementerian Kesehatan, 2010b; 2011). | Nominal |
| Y_2 | Status IPM, dengan kategori: 0 = $60 \leq$ IPM < 70 (IPM sedang) 1 = $70 \leq$ IPM < 80 (IPM tinggi) (Badan Pusat Statistik, 2019). | Ordinal |
| X_1 | Pertumbuhan ekonomi | Rasio |
| X_2 | APM SMP | Rasio |
| X_3 | Persentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP | Rasio |
| X_4 | Rasio dokter per 1000 penduduk | Rasio |
| X_5 | Jumlah puskesmas | Rasio |

Definisi operasional dari variabel prediktor yang disajikan pada Tabel 3.2 adalah sebagai berikut:

1. Pertumbuhan ekonomi (X_1) adalah salah satu indikator yang digunakan untuk mengukur keberhasilan pembangunan. Pertumbuhan ekonomi kabupaten/kota

dapat diketahui dari pertumbuhan Pendapatan Domestik Regional Bruto (PDRB) menurut harga konstan dan PDRB per kapita. Semakin tinggi pertumbuhan ekonomi di suatu kabupaten/kota, maka tingkat kesejahteraan masyarakat di kabupaten/kota tersebut semakin baik.

2. Angka Partisipasi Murni (APM) SMP (X_2) adalah salah satu tolak ukur yang digunakan MDGs dalam mengukur pencapaian kesetaraan gender dibidang pendidikan APM mengukur proporsi anak yang bersekolah tepat waktu.
3. Presentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP (X_3) adalah jumlah penduduk yang memiliki ijazah tertinggi setara SMP ke atas, dibagi dengan jumlah seluruh penduduk yang ada di kabupaten/kota tersebut kemudian dikalikan 100%.
4. Rasio dokter per 1000 penduduk (X_4) adalah banyaknya dokter sebagai tenaga kesehatan di setiap kabupaten/kota per 1000 penduduk.
5. Jumlah puskesmas (X_5) adalah banyaknya puskesmas sebagai fasilitas kesehatan di setiap kabupaten/kota.

Selain variabel respon dan prediktor, diperlukan dua variabel geografis mengenai lokasi kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018, yaitu koordinat lintang (u_1) dan bujur (u_2). Kedua variabel ini digunakan untuk menentukan pembobot spasial pada model GWMLR. Berdasarkan variabel penelitian yang disajikan pada Tabel 3.2 dan definisinya, diperoleh struktur data penelitian yang disajikan pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Struktur Data Penelitian

| Lokasi ke- i | u_1 | u_2 | Y_1 | Y_2 | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 |
|----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | u_{11} | u_{21} | y_{11} | y_{21} | x_{11} | x_{21} | x_{31} | x_{41} | x_{51} |
| 2 | u_{12} | u_{22} | y_{12} | y_{22} | x_{12} | x_{22} | x_{32} | x_{42} | x_{52} |
| 3 | u_{13} | u_{23} | y_{13} | y_{23} | x_{13} | x_{23} | x_{33} | x_{43} | x_{53} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| 56 | $u_{1,56}$ | $u_{2,56}$ | $y_{1,56}$ | $y_{2,56}$ | $x_{1,56}$ | $x_{2,56}$ | $x_{3,56}$ | $x_{4,56}$ | $x_{5,56}$ |

3.3 Tahapan Analisis Data

Tahapan analisis data untuk pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 dengan model MLR dan GWMLR adalah sebagai berikut:

1. Melakukan analisis statistika deskriptif terhadap respon dan prediktor.
Pada tahapan ini, analisis statistika deskriptif untuk respon menggunakan tabel kontingensi (2×2) dan diagram lingkaran. Sedangkan untuk prediktor dihitung nilai minimum, maksimum, rata-rata, dan standar deviasinya.
2. Melakukan pengujian dependensi antar respon.
Pengujian dependensi antar respon bertujuan untuk mengetahui kelayakan respon untuk dapat digunakan pada model MLR maupun GWMLR. Pengujian ini menggunakan nilai odds rasio dan MLRT.
3. Melakukan pengujian multikolinieritas pada prediktor.
Pengujian multikolinieritas menggunakan nilai VIF.
4. Melakukan pemodelan untuk model MLR dengan tahapan sebagai berikut:
 - a. Menghitung penaksiran parameter dengan metode MLE dan BHHH.
 - b. Melakukan pengujian serentak terhadap parameter dengan metode MLRT.
 - c. Melakukan pengujian parsial terhadap masing-masing parameter dengan uji Wald.
 - d. Melakukan interpretasi terhadap hasil analisis.
5. Melakukan pemodelan untuk model GWMLR dengan tahapan sebagai berikut:
 - a. Menghitung penaksiran parameter model GWMLR dengan pembobot *fixed kernel bi-square*. Parameter penghalus (*bandwidth*) optimum diperoleh dengan metode CV.
 - b. Melakukan pengujian kesamaan model MLR dan GWMLR dengan uji Voung.
 - c. Melakukan pengujian serentak terhadap parameter model GWMLR dengan metode MLRT.
 - d. Melakukan pengujian parsial terhadap masing-masing parameter model GWMLR untuk setiap lokasi dengan uji Wald.
 - e. Melakukan interpretasi terhadap hasil analisis.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 4

PENAKSIRAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS

MODEL MLR

Pada bab ini dibahas mengenai kajian teori untuk model *Multivariate Logistic Regression* (MLR). Kajian teori yang dibahas meliputi penaksiran parameter dan pengujian hipotesis. Pembahasan diawali dengan menjelaskan tentang model MLR, dilanjutkan dengan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis. Pengujian hipotesis yang dibahas meliputi pengujian hipotesis parameter secara serentak dan pengujian hipotesis secara parsial.

4.1 Model MLR

Model MLR merupakan model regresi logistik yang dapat menjelaskan hubungan antara dua atau lebih respon kategorik dan satu atau lebih prediktor. Dalam penelitian ini, dibahas model MLR untuk dua respon, dimana masing-masing respon mempunyai dua kategori dan terdapat dependensi antar respon.

Misalkan respon pertama dinotasikan dengan Y_1 dan respon kedua dengan Y_2 , maka model MLR dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\eta_1(\mathbf{x}_i) &= \text{logit}(\pi_1(\mathbf{x}_i)) \\ &= \ln\left(\frac{\pi_1(\mathbf{x}_i)}{1-\pi_1(\mathbf{x}_i)}\right) \\ &= \beta_{01} + \beta_{11}X_{1i} + \beta_{21}X_{2i} + \cdots + \beta_{k1}X_{ki} \\ &= \boldsymbol{\beta}_1^T \mathbf{x}_i\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\eta_2(\mathbf{x}_i) &= \text{logit}(\pi_2(\mathbf{x}_i)) \\ &= \ln\left(\frac{\pi_2(\mathbf{x}_i)}{1-\pi_2(\mathbf{x}_i)}\right) \\ &= \beta_{02} + \beta_{12}X_{1i} + \beta_{22}X_{2i} + \cdots + \beta_{k2}X_{ki} \\ &= \boldsymbol{\beta}_2^T \mathbf{x}_i\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
\eta_3(\mathbf{x}_i) &= \ln(\psi_1(\mathbf{x}_i)) \\
&= \ln\left(\frac{\pi_{11}(\mathbf{x}_i)\pi_{00}(\mathbf{x}_i)}{\pi_{10}(\mathbf{x}_i)\pi_{01}(\mathbf{x}_i)}\right) \\
&= \beta_{03} + \beta_{13}X_{1i} + \beta_{23}X_{2i} + \cdots + \beta_{k3}X_{ki} \\
&= \boldsymbol{\beta}_3^T \mathbf{x}_i
\end{aligned} \tag{4.3}$$

dimana

$\mathbf{x}_i = [1 \ X_{1i} \ X_{2i} \ \cdots \ X_{ki}]^T$ adalah vektor prediktor,

$\boldsymbol{\beta}_1^T = [\beta_{01} \ \beta_{11} \ \beta_{21} \ \cdots \ \beta_{k1}]$, $\boldsymbol{\beta}_2^T = [\beta_{02} \ \beta_{12} \ \beta_{22} \ \cdots \ \beta_{k2}]$,

dan $\boldsymbol{\beta}_3^T = [\beta_{03} \ \beta_{13} \ \beta_{23} \ \cdots \ \beta_{k3}]$ adalah berturut-turut vektor parameter.

$\pi_1(\mathbf{x}_i)$ dan $\pi_2(\mathbf{x}_i)$ adalah masing-masing probabilitas marginal dari respon Y_1 dan Y_2 yang bergantung terhadap prediktor pada pengamatan ke- i , dimana Y_1 dan Y_2 mempunyai kategori bernilai 1. Probabilitas marginal $\pi_1(\mathbf{x}_i)$ dan $\pi_2(\mathbf{x}_i)$ diformulasikan sebagai berikut:

$$\pi_1(\mathbf{x}_i) = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}_1^T \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}_1^T \mathbf{x}_i)}, \tag{4.4}$$

$$\pi_2(\mathbf{x}_i) = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}_2^T \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}_2^T \mathbf{x}_i)}. \tag{4.5}$$

$\psi_1(\mathbf{x}_i)$ adalah ukuran asosiasi yang disebut dengan *odds ratio*, yang menyatakan adanya dependensi antara Y_1 dan Y_2 .

Menurut Dale (1986) dan Palmgren (1989) probabilitas $\pi_{11}(\mathbf{x}_i)$ pada persamaan (4.3) didefinisikan sebagai berikut:

$$\pi_{11}(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} \frac{a_{1i} - \sqrt{a_{1i}^2 + b_{1i}}}{2(\psi_1(\mathbf{x}_i) - 1)}, & \psi_1(\mathbf{x}_i) \neq 1 \\ \pi_1(\mathbf{x}_i)\pi_2(\mathbf{x}_i), & \psi_1(\mathbf{x}_i) = 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

dimana

$$a_{1i} = 1 + (\psi_1(\mathbf{x}_i) - 1)(\pi_1(\mathbf{x}_i) + \pi_2(\mathbf{x}_i)),$$

$$b_{1i} = -4\psi_1(\mathbf{x}_i)(\psi_1(\mathbf{x}_i) - 1)\pi_1(\mathbf{x}_i)\pi_2(\mathbf{x}_i).$$

Berdasarkan Tabel 2.2 dan persamaan (4.6), probabilitas bersama dari $\pi_{10}(\mathbf{x}_i)$, $\pi_{01}(\mathbf{x}_i)$, dan $\pi_{00}(\mathbf{x}_i)$ diformulasikan sebagai berikut:

$$\pi_{10}(\mathbf{x}_i) = \pi_1(\mathbf{x}_i) - \pi_{11}(\mathbf{x}_i), \quad (4.7)$$

$$\pi_{01}(\mathbf{x}_i) = \pi_2(\mathbf{x}_i) - \pi_{11}(\mathbf{x}_i), \quad (4.8)$$

$$\pi_{00}(\mathbf{x}_i) = 1 - \pi_{11}(\mathbf{x}_i) - \pi_{10}(\mathbf{x}_i) + \pi_{01}(\mathbf{x}_i) = 1 - \pi_1(\mathbf{x}_i) - \pi_2(\mathbf{x}_i) + \pi_{11}(\mathbf{x}_i). \quad (4.9)$$

$\pi_{gh}(\mathbf{x}_i)$ adalah probabilitas bersama dari Y_1 dan Y_2 yang bergantung terhadap prediktor pada pengamatan ke- i , dimana Y_1 mempunyai kategori bernilai g dan Y_2 mempunyai kategori bernilai h , yaitu

$$\pi_{gh}(\mathbf{x}_i) = P(Y_{1i} = g, Y_{2i} = h | \mathbf{x}_i), \text{ untuk } g, h = 0, 1 \text{ dan } i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.10)$$

4.2 Penaksiran Parameter Model MLR

Model MLR pada persamaan (4.1) sampai (4.3) mempunyai $3(k+1)$ parameter, yaitu $(k+1)$ parameter regresi yang menunjukkan adanya dependensi antar respon dan $2(k+1)$ parameter regresi yang menunjukkan adanya hubungan antara respon dan prediktor. Parameter model MLR dinotasikan dengan vektor $\boldsymbol{\beta}$, yaitu

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1^T \quad \boldsymbol{\beta}_2^T \quad \boldsymbol{\beta}_3^T]^T, \quad (4.11)$$

$$\text{dimana } \boldsymbol{\beta}_1^T = [\beta_{01} \quad \beta_{11} \quad \beta_{21} \quad \cdots \quad \beta_{k1}], \boldsymbol{\beta}_2^T = [\beta_{02} \quad \beta_{12} \quad \beta_{22} \quad \cdots \quad \beta_{k2}],$$

$$\text{dan } \boldsymbol{\beta}_3^T = [\beta_{03} \quad \beta_{13} \quad \beta_{23} \quad \cdots \quad \beta_{k3}].$$

Untuk mendapatkan penaksir parameter model MLR pada persamaan (4.11) digunakan metode MLE. Berdasarkan metode MLE, penaksir $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah nilai vektor $\boldsymbol{\beta}$ yang memaksimumkan fungsi likelihood dan juga memaksimumkan fungsi log-likelihood. Penaksir ML dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan likelihood, yaitu sistem persamaan dari semua turunan parsial pertama dari fungsi log-likelihood setelah disamakan dengan nol.

Berdasarkan model MLR pada persamaan (4.1) sampai dengan (4.3), persamaan likelihood terdiri dari persamaan-persamaan yang saling berkaitan

yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit, sehingga bentuk eksplisit penaksir ML parameter model MLR tidak dapat diperoleh secara analitik. Penaksir ML ($\hat{\boldsymbol{\beta}}$) dihampiri oleh akar-akar persamaan likelihood yang diperoleh melalui proses iterasi numerik menggunakan metode BHHH. Penentuan penaksir ML parameter model MLR menggunakan metode BHHH membutuhkan vektor gradien dan matriks Hessian. Berikut ini diberikan Lemma tentang vektor gradien dan matriks Hessian model MLR.

Lemma 4.1

Diketahui $\mathbf{y}_i = [Y_{1i} \ Y_{2i}]^T = [Y_{11i} \ Y_{10i} \ Y_{01i} \ Y_{00i}]^T$, $i = 1, 2, \dots, n$ adalah sampel vektor random yang saling independen dan identik berdistribusi multinomial yang dinotasikan dengan $\mathbf{y}_i \sim M(1, \pi_{11}(\mathbf{x}_i), \pi_{10}(\mathbf{x}_i), \pi_{01}(\mathbf{x}_i), \pi_{00}(\mathbf{x}_i))$, dimana $\pi_{11}(\mathbf{x}_i)$, $\pi_{10}(\mathbf{x}_i)$, $\pi_{01}(\mathbf{x}_i)$, dan $\pi_{00}(\mathbf{x}_i)$ adalah probabilitas dari masing-masing variabel random Y_{11i} , Y_{10i} , Y_{01i} , dan Y_{00i} yang memuat parameter $\boldsymbol{\beta}$. Jika fungsi likelihood model MLR diberikan oleh $L(\boldsymbol{\beta})$, dimana $\boldsymbol{\beta}$ diberikan oleh persamaan (4.11), maka vektor gradien model MLR adalah

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right]^T & \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right]^T & \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} \right]^T \end{bmatrix}^T, \quad (4.12)$$

dimana

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_{1i}} \left(\frac{y_{11i} \pi_{01i} - y_{01i} \pi_{11i}}{\pi_{2i}} + \frac{y_{10i} \pi_{00i} - y_{00i} \pi_{10i}}{1 - \pi_{2i}} \right) \mathbf{x}_i,$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_{1i}} \left(\frac{y_{11i} \pi_{10i} - y_{10i} \pi_{11i}}{\pi_{1i}} + \frac{y_{01i} \pi_{00i} - y_{00i} \pi_{01i}}{1 - \pi_{1i}} \right) \mathbf{x}_i,$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} = \sum_{i=1}^n \Delta_i \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} - \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} - \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} + \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \right) \mathbf{x}_i,$$

dengan $\Delta_{1i} = \frac{\pi_{11i} \pi_{10i} \pi_{01i} \pi_{00i}}{\pi_{1i} (1 - \pi_{1i}) \pi_{2i} (1 - \pi_{2i}) \Delta_i}$ dan $\Delta_i = \left(\frac{1}{\pi_{11i}} + \frac{1}{\pi_{10i}} + \frac{1}{\pi_{01i}} + \frac{1}{\pi_{00i}} \right)^{-1}$.

Bukti:

Diketahui (Y_{1i}, Y_{2i}) adalah sampel vektor random yang saling independen dan identik berdistribusi multinomial dengan fungsi distribusi probabilitas bersama didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}) &= P(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}, Y_{00i} = y_{00i}) \\ &= \pi_{11i}^{y_{11i}}(\mathbf{x}_i) \pi_{10i}^{y_{10i}}(\mathbf{x}_i) \pi_{01i}^{y_{01i}}(\mathbf{x}_i) \pi_{00i}^{y_{00i}}(\mathbf{x}_i). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Selanjutnya membentuk fungsi likelihood berdasarkan persamaan (4.13) yaitu

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^n f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}) \\ &= \prod_{i=1}^n P(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}, Y_{00i} = y_{00i}) \\ &= \prod_{i=1}^n \pi_{11i}^{y_{11i}}(\mathbf{x}_i) \pi_{10i}^{y_{10i}}(\mathbf{x}_i) \pi_{01i}^{y_{01i}}(\mathbf{x}_i) \pi_{00i}^{y_{00i}}(\mathbf{x}_i). \end{aligned} \quad (4.14)$$

dimana vektor $\boldsymbol{\beta}$ seperti pada persamaan (4.11).

Misalkan $\pi_{gh}^{y_{gh}}(\mathbf{x}_i) = \pi_{ghi}^{y_{ghi}}$ untuk $g, h = 0, 1$, maka persamaan (4.14) dapat ditulis menjadi

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n (\pi_{11i}^{y_{11i}} \pi_{10i}^{y_{10i}} \pi_{01i}^{y_{01i}} \pi_{00i}^{y_{00i}}). \quad (4.15)$$

Selanjutnya dilakukan transformasi logaritma natural terhadap kedua ruas persamaan (4.15), sehingga diperoleh fungsi log-likelihood model MLR, yaitu

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\beta}) &= \ln L(\boldsymbol{\beta}) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \pi_{11i} + y_{10i} \ln \pi_{10i} + y_{01i} \ln \pi_{01i} + y_{00i} \ln \pi_{00i}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Fungsi log-likelihood pada persamaan (4.16) adalah fungsi dari vektor $\boldsymbol{\beta}$ yang berdimensi $3(k+1)$. Berdasarkan definisi dalam Greene (2008), vektor gradien dari fungsi log-likelihood pada persamaan (4.16) adalah

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) = \left[\left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right]^T \quad \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right]^T \quad \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} \right]^T \right]^T, \quad (4.17)$$

dimana vektor $\boldsymbol{\beta}$ seperti pada persamaan (4.11).

Berdasarkan model MLR pada persamaan (4.1) sampai dengan (4.3), misalkan $\eta_1 = \eta_1(\mathbf{x})$, $\eta_2 = \eta_2(\mathbf{x})$, dan $\eta_3 = \eta_3(\mathbf{x})$ sehingga terbentuk $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3]^T$ dan $\boldsymbol{\pi} = [\pi_{11} \ \pi_{10} \ \pi_{01} \ \pi_{00}]^T$. Selanjutnya menentukan turunan vektor $\boldsymbol{\eta}$ terhadap $\boldsymbol{\pi}$, yaitu $\partial\boldsymbol{\eta}/\partial\boldsymbol{\pi}$. Karena vektor $\boldsymbol{\pi}$ mempunyai empat elemen, sedangkan vektor $\boldsymbol{\eta}$ hanya mempunyai tiga elemen, maka untuk mendapatkan $\partial\boldsymbol{\eta}/\partial\boldsymbol{\pi}$ yang simetris misalkan $\eta_0 = \ln \pi_{++}$, dengan $\pi_{++} = \pi_{11} + \pi_{10} + \pi_{01} + \pi_{00}$. Sehingga diperoleh $\boldsymbol{\eta} = [\eta_0 \ \eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3]^T$. Misalkan \mathbf{D}_1 adalah matriks yang elemen-elemennya adalah turunan vektor $\boldsymbol{\eta}$ terhadap $\boldsymbol{\pi}$, yaitu

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_0}{\partial \pi_{11}} & \frac{\partial \eta_0}{\partial \pi_{10}} & \frac{\partial \eta_0}{\partial \pi_{01}} & \frac{\partial \eta_0}{\partial \pi_{00}} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial \pi_{11}} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \pi_{10}} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \pi_{01}} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \pi_{00}} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \pi_{11}} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \pi_{10}} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \pi_{01}} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \pi_{00}} \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial \pi_{11}} & \frac{\partial \eta_3}{\partial \pi_{10}} & \frac{\partial \eta_3}{\partial \pi_{01}} & \frac{\partial \eta_3}{\partial \pi_{00}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\pi_1} & \frac{1}{\pi_1} & -\frac{1}{1-\pi_1} & -\frac{1}{1-\pi_1} \\ \frac{1}{\pi_2} & -\frac{1}{1-\pi_2} & \frac{1}{\pi_2} & -\frac{1}{1-\pi_2} \\ \frac{1}{\pi_{11}} & -\frac{1}{\pi_{10}} & -\frac{1}{\pi_{01}} & \frac{1}{\pi_{00}} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Berdasarkan persamaan (4.18) diperoleh invers dari matriks \mathbf{D}_1 seperti persamaan (4.19).

$$\mathbf{D}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \frac{\pi_{11}\pi_{01}}{\pi_1\Delta_1} & \frac{\pi_{11}\pi_{10}}{\pi_1\Delta_1} & \Delta \\ \pi_{10} & \frac{\pi_{10}\pi_{00}}{(1-\pi_2)\Delta_1} & -\frac{\pi_{11}\pi_{10}}{\pi_1\Delta_1} & -\Delta \\ \pi_{01} & -\frac{\pi_{11}\pi_{01}}{\pi_2\Delta_1} & \frac{\pi_{01}\pi_{00}}{(1-\pi_1)\Delta_1} & -\Delta \\ \pi_{00} & -\frac{\pi_{10}\pi_{00}}{(1-\pi_2)\Delta_1} & -\frac{\pi_{01}\pi_{00}}{(1-\pi_1)\Delta_1} & \Delta \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

dimana

$$\Delta_1 = \frac{\pi_{11}\pi_{10}\pi_{01}\pi_{00}}{\pi_1(1-\pi_1)\pi_2(1-\pi_2)\Delta} \quad \text{dan} \quad \Delta = \left(\frac{1}{\pi_{11}} + \frac{1}{\pi_{10}} + \frac{1}{\pi_{01}} + \frac{1}{\pi_{00}} \right)^{-1}.$$

Vektor gradien dari fungsi log-likelihood pada persamaan (4.16) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}. \quad (4.20)$$

Berdasarkan persamaan (4.17) sampai dengan (4.19), diperoleh elemen-elemen vektor gradien pada persamaan (4.20) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\partial \pi_{11i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} + \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\partial \pi_{10i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} + \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\partial \pi_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} + \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\partial \pi_{00i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\partial \pi_{11i}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\boldsymbol{\beta}_1^T} + \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\partial \pi_{10i}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\boldsymbol{\beta}_1^T} + \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\partial \pi_{01i}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\boldsymbol{\beta}_1^T} + \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\partial \pi_{00i}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\pi_{11i} \pi_{01i}}{\pi_{2i} \Delta_{1i}} \mathbf{x}_i + \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\pi_{10i} \pi_{00i}}{(1 - \pi_{2i}) \Delta_{1i}} \mathbf{x}_i - \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\pi_{11i} \pi_{01i}}{\pi_{2i} \Delta_{1i}} \mathbf{x}_i + \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\pi_{10i} \pi_{00i}}{(1 - \pi_{2i}) \Delta_{1i}} \mathbf{x}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_{1i}} \left(y_{11i} \frac{\pi_{01i}}{\pi_{2i}} + y_{10i} \frac{\pi_{00i}}{1 - \pi_{2i}} - y_{01i} \frac{\pi_{11i}}{\pi_{2i}} - y_{00i} \frac{\pi_{10i}}{1 - \pi_{2i}} \right) \mathbf{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_{1i}} \left(\frac{y_{11i} \pi_{01i} - y_{01i} \pi_{11i}}{\pi_{2i}} + \frac{y_{10i} \pi_{00i} - y_{00i} \pi_{10i}}{1 - \pi_{2i}} \right) \mathbf{x}_i, \end{aligned} \quad (4.21)$$

dimana Δ_{1i} , untuk $i = 1, 2, \dots, n$ seperti pada persamaan (4.19).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\partial \pi_{11i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\partial \pi_{10i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\partial \pi_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\partial \pi_{00i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\partial \pi_{11i}}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\partial \pi_{10i}}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\partial \pi_{01i}}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\partial \pi_{00i}}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\boldsymbol{\beta}_2^T} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\pi_{11i} \pi_{10i}}{\pi_{1i} \Delta_{1i}} \mathbf{x}_i - \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\pi_{11i} \pi_{10i}}{\pi_{1i} \Delta_{1i}} \mathbf{x}_i + \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\pi_{01i} \pi_{00i}}{(1 - \pi_{1i}) \Delta_{1i}} \mathbf{x}_i + \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\pi_{01i} \pi_{00i}}{(1 - \pi_{1i}) \Delta_{1i}} \mathbf{x}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_{1i}} \left(y_{11i} \frac{\pi_{10i}}{\pi_{1i}} - y_{10i} \frac{\pi_{11i}}{\pi_{1i}} + y_{01i} \frac{\pi_{00i}}{1 - \pi_{1i}} - y_{00i} \frac{\pi_{01i}}{1 - \pi_{1i}} \right) \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_{1i}} \left(\frac{y_{11i}\pi_{10i} - y_{10i}\pi_{11i}}{\pi_{1i}} + \frac{y_{01i}\pi_{00i} - y_{00i}\pi_{01i}}{1 - \pi_{1i}} \right) \mathbf{x}_i, \quad (4.22)$$

dimana Δ_{1i} , untuk $i = 1, 2, \dots, n$ seperti pada persamaan (4.19).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\partial \pi_{11i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} + \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\partial \pi_{10i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} + \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\partial \pi_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} + \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\partial \pi_{00i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \frac{\partial \pi_{11i}}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} + \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \frac{\partial \pi_{10i}}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} + \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \frac{\partial \pi_{01i}}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} + \frac{y_{00i}}{\pi_{00i}} \frac{\partial \pi_{00i}}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} \Delta_i \mathbf{x}_i - \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} \Delta_i \mathbf{x}_i - \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} \Delta_i \mathbf{x}_i + \frac{y_{10i}}{\pi_{00i}} \Delta_i \mathbf{x}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta_i \left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}} - \frac{y_{10i}}{\pi_{10i}} - \frac{y_{01i}}{\pi_{01i}} + \frac{y_{10i}}{\pi_{00i}} \right) \mathbf{x}_i, \quad (4.23) \end{aligned}$$

dimana Δ_i , untuk $i = 1, 2, \dots, n$ seperti pada persamaan (4.19). ■

Lemma 4.2

Jika fungsi log-likelihood model MLR adalah $L(\boldsymbol{\beta})$ dan vektor $\boldsymbol{\beta}$ adalah parameter model MLR, maka matriks Hessian dari $L(\boldsymbol{\beta})$ adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{1}{n} [\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta})],$$

dimana $\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})$ adalah vektor gradien dan n adalah ukuran sampel.

Bukti:

Diketahui fungsi log-likelihood model MLR adalah diberikan oleh persamaan (4.16), yaitu $L(\boldsymbol{\beta})$ dan vektor $\boldsymbol{\beta}$ diberikan oleh persamaan (4.11). Berdasarkan Lemma 4.1, vektor gradien fungsi log-likelihood $L(\boldsymbol{\beta})$ adalah $\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})$. Menurut Greene (2008), matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$ adalah matriks turunan parsial kedua dari $L(\boldsymbol{\beta})$ terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor parameter $\boldsymbol{\beta}$. Dalam penelitian ini, untuk mendapatkan matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ digunakan pendekatan dengan metode Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH) (Greene, 2008; Henningsen dan Toomet, 2011). Menurut Greene (2008), terdapat hubungan antara vektor gradien dan matriks Hessian, yaitu:

$$E(\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})) = \mathbf{0}, \quad (4.24)$$

$$\text{Var}(\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})) = E(\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta})). \quad (4.25)$$

Selanjutnya, matriks Hessian mempunyai hubungan dengan matriks informasi, $\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$. (4.26)

Matriks informasi pada persamaan (4.26) disebut juga dengan matriks informasi Fisher (Pawitan, 2001).

Sementara itu, Hogg, McKean, dan Craig (2013) menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara vektor gradien dan matriks informasi, yaitu

$$\text{Var}(\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})) = n\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta}). \quad (4.27)$$

Berdasarkan persamaan (4.25) sampai dengan (4.27), diperoleh matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$ seperti pada persamaan (4.28).

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{1}{n}[\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta})]. \quad \blacksquare \quad (4.28)$$

Setelah diperoleh vektor gradien dan matriks Hessian melalui Lemma 4.1 dan Lemma 4.2, maka dapat dilakukan proses iterasi numerik menggunakan metode BHHH untuk mendapatkan penaksir ML parameter model MLR. Proses iterasi menggunakan persamaan (4.29).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)})\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}), \text{ untuk } l = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.29)$$

dimana $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l+1)}$ adalah MLE parameter model MLR pada iterasi ke- l dan $l+1$, $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)})$ adalah vektor gradien untuk MLE parameter model MLR pada iterasi ke- l , dan $\mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)})$ adalah invers dari matriks Hessian untuk MLE parameter model MLR pada iterasi ke- l . Proses iterasi akan berhenti jika terpenuhi kondisi konvergen, yaitu $\|\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l+1)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}\| \leq \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan positif yang sangat kecil.

4.3 Pengujian Hipotesis Model MLR

Pengujian hipotesis pada model MLR terdiri atas uji serentak dan uji parsial. Uji serentak digunakan untuk menguji signifikansi parameter model MLR secara serentak. Dari hasil uji ini dapat diketahui bahwa paling tidak terdapat satu prediktor yang signifikan berpengaruh terhadap respon. Uji parsial digunakan

untuk menguji adanya pengaruh yang signifikan dari masing-masing prediktor terhadap respon.

4.3.1 Uji Serentak

Pengujian parameter model MLR secara serentak menggunakan metode MLRT. Hipotesis yang digunakan untuk uji serentak adalah:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_{1s} = \beta_{2s} = \dots = \beta_{ks} = 0, \quad s = 1, 2, 3 \\ H_1 : \text{paling tidak ada satu } \beta_{rs} \neq 0, \quad r = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Berikut ini diberikan suatu teorema yang digunakan untuk penentuan statistik uji, distribusi statistik uji, dan daerah penolakan H_0 pada uji serentak model MLR.

Teorema 4.1

Jika β adalah parameter model MLR dan $\hat{\beta}$ adalah penaksir ML parameter β , maka:

- Statistik uji untuk uji serentak adalah $G_1^2 = 2(L(\hat{\beta}) - L(\hat{\beta}^*))$, dimana $\hat{\beta}^*$ adalah penaksir ML parameter model dibawah H_0 dan $\hat{\beta}$ adalah penaksir ML parameter model dibawah populasi.
- Distribusi dari statistik uji G_1^2 adalah *chi-square* dengan derajat bebas v_1 , yaitu $G_1^2 = 2(L(\hat{\beta}) - L(\hat{\beta}^*)) \overset{a}{\sim} \chi_{v_1}^2$.
- Daerah penolakan H_0 pada tingkat signifikansi α adalah $G_1^2 > \chi_{(\alpha, v_1)}^2$.

Bukti (a):

Metode yang digunakan untuk menentukan statistik uji pada pengujian hipotesis parameter model MLR secara serentak yang diberikan pada persamaan (4.30) adalah metode MLRT. Penentuan statistik uji dengan metode MLRT diawali dengan menentukan himpunan parameter model dibawah H_0 , yaitu

$$\omega_1 = \{\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}\}.$$

Selanjutnya, membentuk fungsi likelihood dibawah H_0

$$L(\omega_1) = \prod_{i=1}^n ((\pi_{11i}^*)^{y_{11i}} (\pi_{10i}^*)^{y_{10i}} (\pi_{01i}^*)^{y_{01i}} (\pi_{00i}^*)^{y_{00i}}). \quad (4.31)$$

Misalkan $\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = [\hat{\beta}_{01} \quad \hat{\beta}_{02} \quad \hat{\beta}_{03}]^T$ adalah penaksir ML untuk parameter pada H_0 . Berdasarkan Lemma 4.1 dan 4.2, diperoleh penaksir ML untuk $\boldsymbol{\beta}^*$ dan didapatkan fungsi maksimum likelihood dibawah H_0 , yaitu:

$$\begin{aligned} L(\hat{\omega}_1) &= \max_{\omega_1} L(\omega_1) \\ &= \prod_{i=1}^n ((\hat{\pi}_{11i}^*)^{y_{11i}} (\hat{\pi}_{10i}^*)^{y_{10i}} (\hat{\pi}_{01i}^*)^{y_{01i}} (\hat{\pi}_{00i}^*)^{y_{00i}}), \end{aligned} \quad (4.32)$$

dimana

$$\hat{\pi}_{11i}^* = \begin{cases} \frac{a_{2i} - \sqrt{a_{2i}^2 + b_{2i}}}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1, \\ \hat{\pi}_{1i}^* \hat{\pi}_{2i}^*, & \psi_i = 1, \end{cases}$$

$$\text{dengan } a_{2i} = 1 + (\psi_i - 1)(\hat{\pi}_{1i}^* + \hat{\pi}_{2i}^*), \quad b_{2i} = -4\psi_i(\psi_i - 1)\hat{\pi}_{1i}^* \hat{\pi}_{2i}^*,$$

$$\psi_i = \frac{\hat{\pi}_{11i}^* \hat{\pi}_{00i}^*}{\hat{\pi}_{10i}^* \hat{\pi}_{01i}^*}, \quad \hat{\pi}_{1i}^* = \frac{\exp(\hat{\beta}_{01})}{1 + \exp(\hat{\beta}_{01})}, \quad \text{dan } \hat{\pi}_{2i}^* = \frac{\exp(\hat{\beta}_{02})}{1 + \exp(\hat{\beta}_{02})}.$$

$$\hat{\pi}_{10i}^* = \hat{\pi}_{1i}^* - \hat{\pi}_{11i}^*,$$

$$\hat{\pi}_{01i}^* = \hat{\pi}_{2i}^* - \hat{\pi}_{11i}^*,$$

$$\hat{\pi}_{00i}^* = 1 - \hat{\pi}_{1i}^* - \hat{\pi}_{2i}^* + \hat{\pi}_{11i}^*.$$

Setelah mendapatkan fungsi maksimum likelihood dibawah H_0 dilanjutkan dengan menentukan himpunan parameter model dibawah populasi, yaitu

$$\Omega_1 = \{\beta_{rs}, r = 0, 1, \dots, k; s = 1, 2, 3\}.$$

Selanjutnya, membentuk fungsi likelihood dibawah populasi

$$L(\Omega_1) = \prod_{i=1}^n (\pi_{11i}^{y_{11i}} \pi_{10i}^{y_{10i}} \pi_{01i}^{y_{01i}} \pi_{00i}^{y_{00i}}). \quad (4.33)$$

Misalkan $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_3^T]^T$ adalah penaksir ML untuk parameter pada populasi. Berdasarkan Lemma 4.1 dan 4.2, diperoleh penaksir ML untuk $\boldsymbol{\beta}$, sehingga dapat diperoleh fungsi maksimum likelihood dibawah populasi, yaitu:

$$L(\hat{\Omega}_1) = \max_{\Omega_1} L(\Omega_1) = \prod_{i=1}^n (\hat{\pi}_{11i}^{y_{11i}} \hat{\pi}_{10i}^{y_{10i}} \hat{\pi}_{01i}^{y_{01i}} \hat{\pi}_{00i}^{y_{00i}}), \quad (4.34)$$

dimana

$$\hat{\pi}_{11i} = \begin{cases} \frac{a_{3i} - \sqrt{a_{3i}^2 + b_{3i}}}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1, \\ \hat{\pi}_{1i} \hat{\pi}_{2i}, & \psi_i = 1, \end{cases}$$

$$\text{dengan } a_{3i} = 1 + (\psi_i - 1)(\hat{\pi}_{1i} + \hat{\pi}_{2i}), \quad b_{3i} = -4\psi_i(\psi_i - 1)\hat{\pi}_{1i}\hat{\pi}_{2i},$$

$$\psi_i = \frac{\hat{\pi}_{11i}\hat{\pi}_{00i}}{\hat{\pi}_{10i}\hat{\pi}_{01i}}, \quad \hat{\pi}_{1i} = \frac{\exp(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \mathbf{x}_i)}, \quad \text{dan} \quad \hat{\pi}_{2i} = \frac{\exp(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \mathbf{x}_i)}.$$

$$\hat{\pi}_{10i} = \hat{\pi}_{1i} - \hat{\pi}_{11i},$$

$$\hat{\pi}_{01i} = \hat{\pi}_{2i} - \hat{\pi}_{11i},$$

$$\hat{\pi}_{00i} = 1 - \hat{\pi}_{1i} - \hat{\pi}_{2i} + \hat{\pi}_{11i}.$$

Menurut Hogg dkk. (2013), statistik uji *likelihood ratio* (LR) pengujian hipotesis nol pada persamaan (4.30) adalah

$$\Lambda_1 = \frac{L(\hat{\omega}_1)}{L(\hat{\Omega}_1)}. \quad (4.35)$$

Berdasarkan persamaan (4.32) dan (4.34), statistik LR pada persamaan (4.35) dapat dinyatakan menjadi

$$\Lambda_1 = \frac{L(\hat{\omega}_1)}{L(\hat{\Omega}_1)} = \frac{\prod_{i=1}^n ((\hat{\pi}_{11i}^*)^{y_{11i}} (\hat{\pi}_{10i}^*)^{y_{10i}} (\hat{\pi}_{01i}^*)^{y_{01i}} (\hat{\pi}_{00i}^*)^{y_{00i}})}{\prod_{i=1}^n (\hat{\pi}_{11i}^{y_{11i}} \hat{\pi}_{10i}^{y_{10i}} \hat{\pi}_{01i}^{y_{01i}} \hat{\pi}_{00i}^{y_{00i}})}. \quad (4.36)$$

Statistik uji LR pada persamaan (4.36) tidak dapat disederhanakan atau tidak dapat dihitung secara eksplisit. Oleh karena itu, untuk memudahkan perhitungan terhadap nilai statistik ujinya dilakukan transformasi ke dalam bentuk yang ekuivalen menjadi

$$\Lambda_1^{-2} = \left(\frac{L(\hat{\omega}_1)}{L(\hat{\Omega}_1)} \right)^{-2} = \left(\frac{L(\hat{\Omega}_1)}{L(\hat{\omega}_1)} \right)^2. \quad (4.37)$$

Selanjutnya, melakukan transformasi *natural logarithm* (ln) terhadap statistik uji pada persamaan (4.37), sehingga diperoleh statistik uji yang berbentuk

$$G_1^2 = -2 \ln \Lambda_1 = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega}_1)}{L(\hat{\Omega}_1)} \right) = 2 \ln \left(\frac{L(\hat{\Omega}_1)}{L(\hat{\omega}_1)} \right) = 2(L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*)), \quad (4.38)$$

dimana $L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \ln L(\hat{\Omega}_1)$ dan $L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) = \ln L(\hat{\omega}_1)$. ■

Bukti (b):

Misalkan penaksir ML pada populasi dari pengujian hipotesis dipartisi sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}]^T,$$

dimana $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} = [\hat{\beta}_{1s} \quad \hat{\beta}_{2s} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{ks}; s = 1, 2, 3]^T$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{12} = [\beta_{01} \quad \beta_{02} \quad \beta_{03}]^T$.

Jika penaksir ML dan parameter yang diketahui pada H_0 dipartisi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\beta}^* = [\boldsymbol{\beta}_{01}^* \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{02}^*]^T,$$

dimana $\boldsymbol{\beta}_{01(3k \times 1)}^* = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{02}^* = [\hat{\beta}_{001} \quad \hat{\beta}_{002} \quad \hat{\beta}_{003}]^T$.

Hipotesis pada persamaan (4.30) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} H_0 : \boldsymbol{\beta}_{11} &= \boldsymbol{\beta}_{01}^* \\ H_1 : \boldsymbol{\beta}_{11} &\neq \boldsymbol{\beta}_{01}^*. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Statistik uji G_1^2 yang diberikan pada persamaan (4.38) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} G_1^2 &= 2[L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*)] \\ &= 2[L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - L(\boldsymbol{\beta}^*)] - 2[L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) - L(\boldsymbol{\beta}^*)]. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Selanjutnya, fungsi $L(\boldsymbol{\beta}^*)$ dapat dihipotesis dengan ekspansi deret Taylor derajat dua disekitar $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{\beta}^*) \approx L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

$$\text{dimana } \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \left. \frac{\partial L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}} \quad \text{dan} \quad \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = - \left. \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}}.$$

Karena $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}$, sehingga diperoleh:

$$2(L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - L(\boldsymbol{\beta}^*)) \approx (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*). \tag{4.41}$$

Selanjutnya, jika fungsi $L(\boldsymbol{\beta}^*)$ dihipotesis dengan ekspansi deret Taylor derajat dua disekitar $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$, maka diperoleh:

$$L(\boldsymbol{\beta}^*) \approx L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) + \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*)(\boldsymbol{\beta}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*)(\boldsymbol{\beta}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*),$$

atau dapat ditulis:

$$2(L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) - L(\boldsymbol{\beta}^*)) \approx (\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}})(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta}^*). \quad (4.42)$$

Berdasarkan persamaan (4.41) dan (4.42), statistik uji pada persamaan (4.40) dapat ditulis sebagai berikut:

$$G_1^2 \approx (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*) - (\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}})(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta}^*). \quad (4.43)$$

Misalkan,

$$\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}})_{(3k+3) \times (3k+3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11(3k \times 3k)} & \mathbf{I}_{12(1 \times (3k+3))} \\ \mathbf{I}_{21((3k+3) \times 1)} & \mathbf{I}_{22(3 \times 3)} \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}})]_{(3k+3) \times (3k+3)}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11(3k \times 3k)} & \mathbf{I}_{12(1 \times (3k+3))} \\ \mathbf{I}_{21((3k+3) \times 1)} & \mathbf{I}_{22(3 \times 3)} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan sifat distribusi bersyarat, jika diberikan $\boldsymbol{\beta}_{11} = \boldsymbol{\beta}_{01}^*$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}$, dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}$, maka diperoleh:

$$\boldsymbol{\beta}_{02}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12} - \mathbf{I}^{21} [\mathbf{I}^{11}]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^*), \quad (4.44)$$

atau dengan memperhatikan formula dari invers suatu partisi matriks, persamaan (4.44) dapat ditulis:

$$\boldsymbol{\beta}_{02}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12} + \mathbf{I}_{22}^{-1} \mathbf{I}_{21} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^*). \quad (4.45)$$

Pada pengujian hipotesis dibawah H_0 , karena $(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta}^*) = (\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_{02}^* - \boldsymbol{\beta}_{12})$, dan memperhatikan persamaan (4.45), yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{02}^* - \boldsymbol{\beta}_{12} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12} - \boldsymbol{\beta}_{12} + \mathbf{I}_{22}^{-1} \mathbf{I}_{21} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^*), \text{ maka}$$

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}})(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta}^*) = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{02}^* - \boldsymbol{\beta}_{12})^T \mathbf{I}_{22} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{02}^* - \boldsymbol{\beta}_{12})$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^* \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12} - \boldsymbol{\beta}_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{12} & \mathbf{I}_{22}^{-1} \mathbf{I}_{21} & \mathbf{I}_{12} \\ & \mathbf{I}_{21} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^* \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12} - \boldsymbol{\beta}_{12} \end{bmatrix}.$$

Statistik uji pada persamaan (4.43) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$G_1^2 \approx (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^*)^T (\mathbf{I}_{11} - \mathbf{I}_{12} \mathbf{I}_{22}^{-1} \mathbf{I}_{21}) (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^*)$$

$$= (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^*)^T [\mathbf{I}^{11}]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^*). \quad (4.46)$$

Memperhatikan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.54), maka distribusi dari partisi parameter adalah:

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{11} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12} - \boldsymbol{\beta}_{12} \end{bmatrix} \stackrel{a}{\sim} N\left(\mathbf{0}, [\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta})]^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{11} & \mathbf{I}^{12} \\ \mathbf{I}^{21} & \mathbf{I}^{22} \end{bmatrix}\right).$$

Sehingga diperoleh:

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{11}) \stackrel{a}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}^{11}),$$

$$[\mathbf{I}^{11}]^{-1/2} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{11}) \stackrel{a}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{v_1}),$$

$$G_1^2 = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^*)^T [\mathbf{I}^{11}]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^*) \stackrel{a}{\sim} \chi_{v_1}^2. \quad (4.47)$$

Statistik uji G_1^2 pada persamaan (4.47) secara asimtotik berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas v_1 . Derajat bebas v_1 adalah dimensi dari vektor $(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11} - \boldsymbol{\beta}_{01}^*)$ atau banyaknya parameter model dibawah populasi dikurangi banyaknya parameter model dibawah H_0 , yaitu $v_1 = 3(k+1) - 3 = 3k$. ■

Bukti (c):

Penentuan daerah penolakan atau daerah kritis pengujian hipotesis nol yang diberikan oleh persamaan (4.30) didasarkan pada metode MLRT, yaitu tolak H_0 jika $\Lambda_1 < c_1$, $0 < c_1 \leq 1$, dimana $\Lambda_1 = L(\hat{\omega}_1) / L(\hat{\Omega}_1)$ (Hogg dkk., 2013). Misalkan diberikan tingkat signifikansi α untuk $0 < \alpha < 1$, sehingga dapat ditentukan suatu konstanta $0 < c_\alpha \leq 1$ yang nilainya bergantung pada nilai tingkat signifikansi α dan memenuhi $P_{\boldsymbol{\beta} \in \omega_1}(\Lambda_1 < c_\alpha) = \alpha$. Berdasarkan definisi dari tingkat signifikansi α , diperoleh:

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\boldsymbol{\beta} \in \omega_1}(\Lambda_1 < c_\alpha) \\ &= P(-2 \ln \Lambda_1 > -2 \ln c_\alpha) \\ &= P(2[L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*)] > c_1) \\ &= P(G_1^2 > c_1), \end{aligned} \quad (4.48)$$

dimana G_1^2 berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebasnya v_1 , yaitu $G_1^2 \sim \chi_{v_1}^2$.

Berdasarkan persamaan (4.48), nilai c_1 adalah $\chi_{(\alpha, v_1)}^2$, yaitu penyelesaian dari

$\int_{c_1}^{\infty} f(w) dw = \alpha$, dimana $f(w) = \frac{w^{(v_1/2)-1} \exp(-w/2)}{\Gamma(v_1/2) 2^{v_1/2}}$ adalah fungsi distribusi

probabilitas dari distribusi *chi-square* dengan derajat bebas v_1 . Sehingga daerah penolakan pada tingkat signifikansi α untuk pengujian hipotesis pada persamaan (4.30) adalah $G_1^2 > \chi_{(\alpha, v_1)}^2$. ■

4.3.2 Uji Parsial

Uji parsial model MLR digunakan untuk menguji adanya pengaruh dari masing-masing parameter β_{rs} terhadap model, untuk $r = 1, 2, \dots, k$ dan $s = 1, 2, 3$.

Misalkan nilai $s = t$, sehingga hipotesis untuk uji parsial adalah:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_{rt} &= 0, \\ H_1 : \beta_{rt} &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Misalkan $\hat{\beta}_{04}^* = [\hat{\beta}_{00s} \ \hat{\beta}_{01s} \ \hat{\beta}_{02s} \ \dots \ \hat{\beta}_{0(r-1)t} \ \hat{\beta}_{0(r+1)t} \ \dots \ \hat{\beta}_{0ks}]^T ; s = 1, 2, 3]^T$

adalah penaksir ML dari parameter pada H_0 dan $\hat{\beta} = [\hat{\beta}_1^T \ \hat{\beta}_2^T \ \hat{\beta}_3^T]^T$ adalah penaksir ML dari parameter pada populasi.

Analog dengan pembuktian pada Teorema 4.1 (b), dengan membuat partisi penaksir ML dibawah populasi menjadi $\hat{\beta} = [\hat{\beta}_{13} \ \hat{\beta}_{14}]^T$,

dimana $\hat{\beta}_{13} = [\hat{\beta}_{rt}]$ dan $\hat{\beta}_{14} = [\hat{\beta}_{0s} \ \hat{\beta}_{1s} \ \hat{\beta}_{2s} \ \dots \ \hat{\beta}_{(r-1)t} \ \hat{\beta}_{(r+1)t} \ \dots \ \hat{\beta}_{ks}]^T$.

Sedangkan penaksir ML dan parameter yang diketahui pada H_0 dibuat partisi menjadi $\hat{\beta}^* = [\beta_{03}^* \ \hat{\beta}_{04}^*]^T$,

dimana $\beta_{03}^* = [0]$ dan $\hat{\beta}_{04}^* = [\hat{\beta}_{00s} \ \hat{\beta}_{01s} \ \hat{\beta}_{02s} \ \dots \ \hat{\beta}_{0(r-1)t} \ \hat{\beta}_{0(r+1)t} \ \dots \ \hat{\beta}_{0ks}]^T$.

Statistik uji LR untuk menguji hipotesis pada persamaan (4.49) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} G_{12}^2 &\approx (\hat{\beta}_{13} - \beta_{03}^*)^T (\mathbf{I}_{11} - \mathbf{I}_{12} \mathbf{I}_{22}^{-1} \mathbf{I}_{21}) (\hat{\beta}_{13} - \beta_{03}^*) \\ &= (\hat{\beta}_{13} - \beta_{03}^*)^T [\mathbf{I}^{11}]^{-1} (\hat{\beta}_{13} - \beta_{03}^*), \end{aligned} \quad (4.50)$$

dimana:

$$\mathbf{I}(\hat{\beta})_{(3k+3) \times (3k+3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11(1 \times 1)} & \mathbf{I}_{12(1 \times (3k+2))} \\ \mathbf{I}_{21((3k+2) \times 1)} & \mathbf{I}_{22(3k+6) \times (3k+6)} \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}})]^{-1}_{(3k+3) \times (3k+3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11(1 \times 1)} & \mathbf{I}_{12(1 \times (3k+2))} \\ \mathbf{I}_{21((3k+2) \times 1)} & \mathbf{I}_{22(3k+6) \times (3k+6)} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.54), dan memperhatikan persamaan (4.50) dengan vektor $\boldsymbol{\beta}_{13}$ hanya mempunyai satu elemen, yaitu β_{rt} , maka statistik uji untuk hipotesis pada persamaan (4.49) adalah:

$$G_{12}^2 = \frac{\hat{\beta}_{rt}^2}{\text{Var}(\hat{\beta}_{rt})} \sim \chi_1^2. \quad (4.51)$$

Bentuk lain dari statistik uji pada persamaan (4.51) dapat diperoleh dengan menggunakan akar kuadrat dari persamaan (4.51), yaitu:

$$Z_1 = \frac{\hat{\beta}_{rt}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_{rt})}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1), \quad (4.52)$$

dimana $\text{Var}(\hat{\beta}_{rt})$ diperoleh dari elemen diagonal ke $3(k+1)$ dari matriks $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}})]^{-1}$.

Setelah didapatkan statistik uji, dapat diperoleh daerah penolakan H_0 pada tingkat signifikansi α untuk hipotesis uji parsial pada persamaan (4.49). Analog dengan pembuktian pada Teorema 4.1 (c), yaitu:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(G_{12}^2 > c_2) \\ &= P(Z_1 < -\sqrt{c_2} \vee Z_1 > \sqrt{c_2}) \\ &= P(Z_1 < -Z_{\alpha/2} \vee Z_1 > Z_{\alpha/2}) \\ &= P(|Z_1| > Z_{\alpha/2}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Berdasarkan persamaan (4.53), daerah penolakan pada tingkat signifikansi α untuk pengujian hipotesis pada persamaan (4.49) adalah $|Z_1| > Z_{\alpha/2}$. ■

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 5

PENAKSIRAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS

MODEL GWMLR

Bab ini membahas kajian teori untuk model *Geographically Weighted Multivariate Logistic Regression* (GWMLR). Pembahasan ini diawali dengan menjelaskan tentang model GWMLR. Pembahasan selanjutnya adalah penaksiran parameter dan pengujian hipotesis. Pengujian hipotesis untuk model GWMLR meliputi pengujian kesamaan model MLR dan GWMLR, pengujian parameter secara serentak, dan pengujian parameter secara parsial.

5.1 Model GWMLR

Model GWMLR merupakan model MLR yang dapat menjelaskan hubungan antara dua atau lebih respon dan satu atau lebih prediktor yang bergantung pada lokasi geografis. Model GWMLR yang dibahas dalam penelitian ini adalah model GWMLR yang mempunyai dua respon, dimana masing-masing respon mempunyai dua kategori dan terdapat dependensi antar respon.

Misalkan respon pertama dan kedua berturut-turut dinotasikan dengan Y_1 dan Y_2 , maka model GWMLR dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \zeta_1(\mathbf{x}_i) &= \text{logit}(p_1(\mathbf{x}_i)) \\
 &= \ln\left(\frac{p_1(\mathbf{x}_i)}{1-p_1(\mathbf{x}_i)}\right) \\
 &= \beta_{01}(\mathbf{u}_i) + \beta_{11}(\mathbf{u}_i)X_{1i} + \beta_{21}(\mathbf{u}_i)X_{2i} + \cdots + \beta_{k1}(\mathbf{u}_i)X_{ki} \\
 &= \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta_2(\mathbf{x}_i) &= \text{logit}(p_2(\mathbf{x}_i)) \\
 &= \ln\left(\frac{p_2(\mathbf{x}_i)}{1-p_2(\mathbf{x}_i)}\right) \\
 &= \beta_{02}(\mathbf{u}_i) + \beta_{12}(\mathbf{u}_i)X_{1i} + \beta_{22}(\mathbf{u}_i)X_{2i} + \cdots + \beta_{k2}(\mathbf{u}_i)X_{ki} \\
 &= \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_3(\mathbf{x}_i) &= \ln(\psi_2(\mathbf{x}_i)) \\
&= \ln\left(\frac{p_{11}(\mathbf{x}_i)p_{00}(\mathbf{x}_i)}{p_{10}(\mathbf{x}_i)p_{01}(\mathbf{x}_i)}\right) \\
&= \beta_{03}(\mathbf{u}_i) + \beta_{13}(\mathbf{u}_i)X_{1i} + \beta_{23}(\mathbf{u}_i)X_{2i} + \dots + \beta_{k3}(\mathbf{u}_i)X_{ki} \\
&= \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i
\end{aligned} \tag{5.3}$$

dimana

$\mathbf{x}_i = [1 \quad X_{1i} \quad X_{2i} \quad \dots \quad X_{ki}]^T$ adalah vektor prediktor.

$$\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) = [\beta_{01}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{11}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{21}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \beta_{k1}(\mathbf{u}_i)],$$

$$\boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) = [\beta_{02}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{12}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{22}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \beta_{k2}(\mathbf{u}_i)],$$

dan $\boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i) = [\beta_{03}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{13}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{23}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \beta_{k3}(\mathbf{u}_i)],$

adalah berturut-turut vektor parameter.

$\mathbf{u}_i = [u_{1i} \quad u_{2i}]^T$ adalah vektor variabel geografis untuk pengamatan pada lokasi ke- i , dimana u_{1i} dan u_{2i} adalah berturut-turut menyatakan letak lintang dan bujur lokasi ke- i . $p_1(\mathbf{x}_i)$ adalah probabilitas marjinal untuk variabel Y_1 yang mempunyai kategori bernilai 1 pada lokasi ke- i dan bergantung pada prediktor di lokasi ke- i . $p_2(\mathbf{x}_i)$ adalah probabilitas marjinal untuk variabel Y_2 yang mempunyai kategori bernilai 1 pada lokasi ke- i dan bergantung pada prediktor di lokasi ke- i . Probabilitas marjinal $p_1(\mathbf{x}_i)$ dan $p_2(\mathbf{x}_i)$ diformulasikan sebagai berikut:

$$p_1(\mathbf{x}_i) = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)} \tag{5.4}$$

$$p_2(\mathbf{x}_i) = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}. \tag{5.5}$$

$\psi_2(\mathbf{x}_i)$ adalah odds rasio yang menunjukkan adanya dependensi antara Y_1 dan Y_2 . Probabilitas $p_{gh}(\mathbf{x}_i)$ pada persamaan (5.3) adalah probabilitas bersama dari variabel Y_1 dan Y_2 pada lokasi ke- i dan bergantung pada prediktor di lokasi ke- i , dimana Y_1 mempunyai kategori bernilai g dan Y_2 mempunyai kategori

bernilai h , untuk $g, h = 0, 1$ dan $i = 1, 2, \dots, n$. Probabilitas bersama $p_{11}(\mathbf{x}_i)$ didefinisikan dengan formula:

$$p_{11}(\mathbf{x}_i) = P(Y_{1i} = 1, Y_{2i} = 1 | \mathbf{x}_i) = \begin{cases} \frac{a_{4i} - \sqrt{a_{4i}^2 + b_{4i}}}{2(\psi_2(\mathbf{x}_i) - 1)}, & \psi_2(\mathbf{x}_i) \neq 1, \\ p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i), & \psi_2(\mathbf{x}_i) = 1, \end{cases} \quad (5.6)$$

dimana

$$a_{4i} = 1 + (\psi_2(\mathbf{x}_i) - 1)(p_1(\mathbf{x}_i) + p_2(\mathbf{x}_i)),$$

$$b_{4i} = -4\psi_2(\mathbf{x}_i)(\psi_2(\mathbf{x}_i) - 1)p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i).$$

Berdasarkan Tabel 2.2 dan persamaan (5.6), probabilitas bersama $p_{10}(\mathbf{x}_i)$, $p_{01}(\mathbf{x}_i)$, dan $p_{00}(\mathbf{x}_i)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$p_{10}(\mathbf{x}_i) = P(Y_{1i} = 1, Y_{2i} = 0 | \mathbf{x}_i) = p_1(\mathbf{x}_i) - p_{11}(\mathbf{x}_i) \quad (5.7)$$

$$p_{01}(\mathbf{x}_i) = P(Y_{1i} = 0, Y_{2i} = 1 | \mathbf{x}_i) = p_2(\mathbf{x}_i) - p_{11}(\mathbf{x}_i) \quad (5.8)$$

$$p_{00}(\mathbf{x}_i) = P(Y_{1i} = 0, Y_{2i} = 0 | \mathbf{x}_i) = 1 - p_1(\mathbf{x}_i) - p_2(\mathbf{x}_i) + p_{11}(\mathbf{x}_i). \quad (5.9)$$

5.2 Penaksiran Parameter Model GWMLR

Parameter model GWMLR pada persamaan (5.1) sampai dengan (5.3) terdiri atas $(k+1)n$ parameter regresi untuk model marjinal Y_1 , $(k+1)n$ parameter regresi untuk model marjinal Y_2 , dan $(k+1)n$ parameter regresi untuk model bersama (simultan) Y_1 dan Y_2 . Sehingga jumlah keseluruhan parameter model GWMLR adalah sebanyak $3(k+1)n$, dimana n adalah banyaknya lokasi dan k adalah banyaknya prediktor. Parameter model GWMLR dalam penelitian ini dinotasikan dengan vektor $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$, yaitu

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = [\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)]^T, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.10)$$

dimana $\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)$, $\boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)$, dan $\boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)$ diberikan pada persamaan (5.1) sampai dengan (5.3).

Seperti pada model MLR, metode yang digunakan untuk mendapatkan penaksir parameter model GWMLR $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)$ pada persamaan (5.10) adalah metode

MLE. Oleh karena itu, penaksir parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)$ disebut dengan penaksir ML parameter model GWMLR. Penaksir ML untuk vektor $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ adalah nilai vektor $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ yang memaksimumkan fungsi likelihood dan juga memaksimumkan fungsi log-likelihood. Penaksir ML dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan likelihood, yaitu sistem persamaan dari semua turunan parsial pertama dari fungsi log-likelihood setelah disamakan dengan nol.

Persamaan likelihood untuk model GWMLR yang diberikan pada persamaan (5.1) sampai dengan (5.3) terdiri dari persamaan-persamaan yang saling berkaitan dan berbentuk tidak eksplisit, sehingga penaksir ML parameter model GWMLR tidak dapat diperoleh secara analitik. Penaksir ML untuk $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ dihampiri oleh akar-akar persamaan likelihood yang diperoleh melalui proses iteratif menggunakan metode BHHH. Metode ini membutuhkan vektor gradien dan matriks Hessian yang diberikan pada Lemma 5.1 dan 5.2.

Lemma 5.1

Diketahui $\mathbf{y}_i = [Y_{1i} \ Y_{2i}]^T$, $i = 1, 2, \dots, n$ adalah sampel vektor random diskrit biner yang saling independen dan identik berdistribusi multinomial, yaitu $\mathbf{y}_i \sim M(1, p_{11}(\mathbf{x}_i), p_{10}(\mathbf{x}_i), p_{01}(\mathbf{x}_i), p_{00}(\mathbf{x}_i))$, dimana $p_{11}(\mathbf{x}_i), p_{10}(\mathbf{x}_i), p_{01}(\mathbf{x}_i), p_{00}(\mathbf{x}_i)$ adalah probabilitas dari masing-masing variabel random $Y_{11i}, Y_{10i}, Y_{01i}, Y_{00i}$ yang merupakan elemen-elemen dari \mathbf{y}_i dan memuat parameter model GWMLR. Jika diberikan fungsi likelihood model GWMLR yang dinotasikan dengan $L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$, dimana $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ seperti pada persamaan (5.10), maka vektor gradien model GWMLR adalah:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \left[\left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \quad \left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \quad \left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \right]^T, \quad (5.11)$$

dimana

$$\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta_{2j}} \left(\frac{y_{11j} p_{01j} - y_{01j} p_{11j}}{p_{2j}} + \frac{y_{10j} p_{00j} - y_{00j} p_{10j}}{1 - p_{2j}} \right) \mathbf{x}_j w_{ij},$$

$$\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta_{2j}} \left(\frac{y_{11j} p_{10j} - y_{10j} p_{11j}}{p_{1j}} + \frac{y_{01j} p_{00j} - y_{00j} p_{01j}}{1 - p_{1j}} \right) \mathbf{x}_j w_{ij},$$

$$\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n \Delta_j^* \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} - \frac{y_{10j}}{p_{10j}} - \frac{y_{01j}}{p_{01j}} + \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \right) \mathbf{x}_j w_{ij},$$

dengan

$$\Delta_{2j} = \frac{p_{11j} p_{10j} p_{01j} p_{00j}}{p_{1j} (1 - p_{1j}) p_{2j} (1 - p_{2j}) \left(\frac{1}{p_{11j}} + \frac{1}{p_{10j}} + \frac{1}{p_{01j}} + \frac{1}{p_{00j}} \right)^{-1}},$$

$$\Delta_j^* = \left(\frac{1}{p_{11j}} + \frac{1}{p_{10j}} + \frac{1}{p_{01j}} + \frac{1}{p_{00j}} \right)^{-1}.$$

Bukti:

Diketahui (Y_{1i}, Y_{2i}) adalah sampel vektor random yang saling independen dan identik berdistribusi multinomial dengan fungsi distribusi probabilitas bersama didefinisikan oleh:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) &= P(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}, Y_{00i} = y_{00i}). \\ &= p_{11i}^{y_{11i}}(\mathbf{x}_i) p_{10i}^{y_{10i}}(\mathbf{x}_i) p_{01i}^{y_{01i}}(\mathbf{x}_i) p_{00i}^{y_{00i}}(\mathbf{x}_i). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Selanjutnya membentuk fungsi likelihood berdasarkan persamaan (5.12), yaitu:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), i = 1, 2, \dots, n) &= \prod_{i=1}^n f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) \\ &= \prod_{i=1}^n P(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}, Y_{00i} = y_{00i}) \\ &= \prod_{i=1}^n p_{11i}^{y_{11i}}(\mathbf{x}_i) p_{10i}^{y_{10i}}(\mathbf{x}_i) p_{01i}^{y_{01i}}(\mathbf{x}_i) p_{00i}^{y_{00i}}(\mathbf{x}_i). \end{aligned} \quad (5.13)$$

dimana vektor $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ seperti pada persamaan (5.10).

Misalkan $p_{gh}^{y_{gh}}(\mathbf{x}_i) = p_{ghi}^{y_{gh}}$ untuk $g, h = 0, 1$, maka persamaan (5.13) dapat ditulis menjadi

$$L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), i = 1, 2, \dots, n) = \prod_{i=1}^n \left(p_{11i}^{y_{11i}} p_{10i}^{y_{10i}} p_{01i}^{y_{01i}} p_{00i}^{y_{00i}} \right). \quad (5.14)$$

Selanjutnya melakukan transformasi *natural logarithm* terhadap kedua ruas pada persamaan (5.14), sehingga diperoleh fungsi log-likelihood yang berbentuk

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), i = 1, 2, \dots, n) &= \ln L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln p_{11i} + y_{10i} \ln p_{10i} + y_{01i} \ln p_{01i} + y_{00i} \ln p_{00i}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Pada model GWMLR, faktor letak geografis memiliki nilai yang berbeda untuk setiap lokasi yang menunjukkan sifat lokal dari model GWMLR. Oleh karena itu untuk menentukan penaksir parameter model pada lokasi ke- i diperlukan informasi dari lokasi yang lain (misalnya lokasi ke- j) dengan pembobot $w_{ij} = w_j(\mathbf{u}_i)$, dimana dalam penelitian ini digunakan pembobot *fixed kernel bi-square* pada persamaan (2.45). Untuk memperoleh model GWMLR yang dapat memberikan informasi lokasi dengan baik diperlukan pembobot dengan nilai *bandwidth* yang optimum. Metode yang digunakan untuk mendapatkan *bandwidth* optimum pada penelitian ini adalah metode *cross-validation* (CV) seperti pada persamaan (2.46). *Bandwidth* optimum diperoleh dari *bandwidth* yang mempunyai nilai CV terkecil. Berdasarkan nilai pembobot optimum yang diperoleh, maka fungsi log-likelihood lokasi ke- i dari persamaan (5.15) dapat dituliskan sebagai fungsi log-likelihood terboboti seperti persamaan (5.16).

$$\begin{aligned} L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) &= \ell(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))w_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n (y_{11j} \ln p_{11j} + y_{10j} \ln p_{10j} + y_{01j} \ln p_{01j} + y_{00j} \ln p_{00j}) w_{ij}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Fungsi log-likelihood pada persamaan (5.16) memuat parameter $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ yang berdimensi $3(k+1)n$. Sehingga vektor gradien dari fungsi log-likelihood pada persamaan (5.16) adalah

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \left[\begin{array}{c} \left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \\ \left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \\ \left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \end{array} \right]^T, \quad (5.17)$$

dimana vektor $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ seperti pada persamaan (5.10).

Berdasarkan model GWMLR pada persamaan (5.1) sampai dengan (5.3), misalkan $\zeta_1 = \zeta_1(\mathbf{x}_i)$, $\zeta_2 = \zeta_2(\mathbf{x}_i)$, dan $\zeta_3 = \zeta_3(\mathbf{x}_i)$. Selanjutnya dihitung turunan

dari $\partial\zeta/\partial\mathbf{p}$, $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3]^T$ dan $\mathbf{p} = [p_{11} \ p_{10} \ p_{01} \ p_{00}]^T$. Karena vektor \mathbf{p} mempunyai empat elemen sedangkan vektor ζ hanya mempunyai tiga elemen, maka untuk mendapatkan $\partial\zeta/\partial\mathbf{p}$ yang simetris dimisalkan $\zeta_0 = \ln p_{++}$, dengan $p_{++} = p_{11} + p_{10} + p_{01} + p_{00}$. Sehingga $\zeta = [\zeta_0 \ \zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3]^T$ dan diperoleh matriks yang dinyatakan dengan $\mathbf{D}_2 = \partial\zeta/\partial\mathbf{p}$ seperti persamaan (5.18).

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial\zeta_0}{\partial p_{11}} & \frac{\partial\zeta_0}{\partial p_{10}} & \frac{\partial\zeta_0}{\partial p_{01}} & \frac{\partial\zeta_0}{\partial p_{00}} \\ \frac{\partial\zeta_1}{\partial p_{11}} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial p_{10}} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial p_{01}} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial p_{00}} \\ \frac{\partial\zeta_2}{\partial p_{11}} & \frac{\partial\zeta_2}{\partial p_{10}} & \frac{\partial\zeta_2}{\partial p_{01}} & \frac{\partial\zeta_2}{\partial p_{00}} \\ \frac{\partial\zeta_3}{\partial p_{11}} & \frac{\partial\zeta_3}{\partial p_{10}} & \frac{\partial\zeta_3}{\partial p_{01}} & \frac{\partial\zeta_3}{\partial p_{00}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{p_1} & \frac{1}{p_1} & -\frac{1}{(1-p_1)} & -\frac{1}{(1-p_1)} \\ \frac{1}{p_2} & -\frac{1}{(1-p_2)} & \frac{1}{p_2} & -\frac{1}{(1-p_2)} \\ \frac{1}{p_{11}} & -\frac{1}{p_{10}} & -\frac{1}{p_{01}} & \frac{1}{p_{00}} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Selanjutnya menentukan invers dari matriks \mathbf{D}_2 seperti persamaan (5.19).

$$\mathbf{D}_2^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11} & \frac{p_{11}p_{01}}{p_2\Delta_2} & \frac{p_{11}p_{10}}{p_1\Delta_2} & \Delta^* \\ p_{10} & \frac{p_{10}p_{00}}{(1-p_2)\Delta_2} & -\frac{p_{11}p_{10}}{p_1\Delta_2} & -\Delta^* \\ p_{01} & -\frac{p_{11}p_{01}}{p_2\Delta_2} & \frac{p_{01}p_{00}}{(1-p_1)\Delta_2} & -\Delta^* \\ p_{00} & -\frac{p_{10}p_{00}}{(1-p_2)\Delta_2} & -\frac{p_{01}p_{00}}{(1-p_1)\Delta_2} & \Delta^* \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

dimana

$$\Delta_2 = \frac{p_{11}p_{10}p_{01}p_{00}}{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2) \left(\frac{1}{p_{11}} + \frac{1}{p_{10}} + \frac{1}{p_{01}} + \frac{1}{p_{00}} \right)^{-1}},$$

$$\Delta^* = \left(\frac{1}{p_{11}} + \frac{1}{p_{10}} + \frac{1}{p_{01}} + \frac{1}{p_{00}} \right)^{-1}.$$

Vektor gradien dari fungsi log-likelihood pada persamaan (5.17) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)}. \quad (5.20)$$

Berdasarkan persamaan (5.17) sampai dengan (5.19), diperoleh elemen-elemen vektor gradien model GWMLR pada persamaan (5.20) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{\partial p_{11j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{\partial p_{10j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{\partial p_{01j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{\partial p_{00j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{\partial p_{11j}}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{\partial p_{10j}}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{\partial p_{01j}}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{\partial p_{00j}}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{p_{11j} p_{01j}}{p_{2j} \Delta_{2j}} \mathbf{x}_j + \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{p_{10j} p_{00j}}{(1-p_{2j}) \Delta_{2j}} \mathbf{x}_j - \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{p_{11j} p_{01j}}{p_{2j} \Delta_{2j}} \mathbf{x}_j + \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{p_{10j} p_{00j}}{(1-p_{2j}) \Delta_{2j}} \mathbf{x}_j \right) w_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta_{2j}} \left(y_{11j} \frac{p_{01j}}{p_{2j}} + y_{10j} \frac{p_{00j}}{1-p_{2j}} - y_{01j} \frac{p_{11j}}{p_{2j}} - y_{00j} \frac{p_{10j}}{1-p_{2j}} \right) \mathbf{x}_j w_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta_{2j}} \left(\frac{y_{11j} p_{01j} - y_{01j} p_{11j}}{p_{2j}} + \frac{y_{10j} p_{00j} - y_{00j} p_{10j}}{1-p_{2j}} \right) \mathbf{x}_j w_{ij} \quad (5.21) \end{aligned}$$

dimana $\Delta_{2j}, j = 1, 2, \dots, n$ seperti pada persamaan (5.19).

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{\partial p_{11j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{\partial p_{10j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{\partial p_{01j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{\partial p_{00j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{\partial p_{11j}}{\partial \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{\partial p_{10j}}{\partial \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{\partial p_{01j}}{\partial \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{\partial p_{00j}}{\partial \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{p_{11j} p_{10j}}{p_{1j} \Delta_{2j}} \mathbf{x}_j - \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{p_{11j} p_{10j}}{p_{1j} \Delta_{2j}} \mathbf{x}_j + \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{p_{01j} p_{00j}}{(1-p_{1j}) \Delta_{2j}} \mathbf{x}_j + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{p_{01j} p_{00j}}{(1-p_{1j}) \Delta_{2j}} \mathbf{x}_j \right) w_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta_{2j}} \left(y_{11j} \frac{p_{10j}}{p_{1j}} - y_{10j} \frac{p_{11j}}{p_{1j}} + y_{01j} \frac{p_{00j}}{1-p_{1j}} - y_{00j} \frac{p_{01j}}{1-p_{1j}} \right) \mathbf{x}_j w_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta_{2j}} \left(\frac{y_{11j} p_{10j} - y_{10j} p_{11j}}{p_{1j}} + \frac{y_{01j} p_{00j} - y_{00j} p_{01j}}{1-p_{1j}} \right) \mathbf{x}_j w_{ij} \tag{5.22}
\end{aligned}$$

dimana Δ_{2j} , $j = 1, 2, \dots, n$ seperti pada persamaan (5.19).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{\partial p_{11j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{\partial p_{10j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{\partial p_{01j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{\partial p_{00j}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \frac{\partial p_{11j}}{\partial \zeta_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \frac{\partial p_{10j}}{\partial \zeta_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} + \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \frac{\partial p_{01j}}{\partial \zeta_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \frac{\partial p_{00j}}{\partial \zeta_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} \Delta_j^* \mathbf{x}_j - \frac{y_{10j}}{p_{10j}} \Delta_j^* \mathbf{x}_j - \frac{y_{01j}}{p_{01j}} \Delta_j^* \mathbf{x}_j + \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \Delta_j^* \mathbf{x}_j \right) w_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n \Delta_j^* \left(\frac{y_{11j}}{p_{11j}} - \frac{y_{10j}}{p_{10j}} - \frac{y_{01j}}{p_{01j}} + \frac{y_{00j}}{p_{00j}} \right) \mathbf{x}_j w_{ij} \tag{5.23}
\end{aligned}$$

dimana Δ_j^* , $j = 1, 2, \dots, n$ seperti pada persamaan (5.19). ■

Lemma 5.2

Jika fungsi log-likelihood model GWMLR adalah $L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$ dan vektor $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ adalah parameter model GWMLR, maka matriks Hessian dari $L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$ adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = -\frac{1}{n} [\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) \mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))],$$

dimana $\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$ adalah vektor gradien untuk model GWMLR pada lokasi ke- i dan n adalah ukuran sampel, yaitu banyaknya lokasi.

Bukti:

Diketahui fungsi log-likelihood model GWMLR yang diberikan oleh persamaan (5.16), yaitu $L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$ dan vektor $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ diberikan oleh persamaan (5.10). Berdasarkan Lemma 5.1, vektor gradien fungsi log-likelihood $L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$ adalah $\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$. Menurut definisi dalam Greene (2008) matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$ adalah matriks turunan parsial kedua dari $L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$ terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor parameter $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$. Turunan parsial kedua fungsi log-likelihood terhadap semua kombinasi parameter $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ dalam penelitian ini menghasilkan fungsi yang sangat kompleks. Oleh karena itu, untuk mendapatkan matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$ digunakan pendekatan dengan metode BHHH. Berdasarkan Lemma 4.2, vektor gradien dan matriks Hessian mempunyai hubungan yang dinyatakan sebagai berikut:

$$E(\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))) = \mathbf{0}, \quad (5.24)$$

$$Var(\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))) = E(\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))). \quad (5.25)$$

Selanjutnya, matriks Hessian mempunyai hubungan dengan matriks informasi, yaitu:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = -\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)), \quad (5.26)$$

$$Var(\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))) = n \mathbf{I}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)). \quad (5.27)$$

Berdasarkan persamaan (5.24) sampai dengan (5.27), diperoleh matriks Hessian untuk model GWMLR yang berbentuk

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = -\frac{1}{n}[\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))]. \quad \blacksquare \quad (5.28)$$

Setelah diperoleh vektor gradien dan matriks Hessian melalui Lemma 5.1 dan Lemma 5.2, dilakukan proses iterasi numerik menggunakan metode BHHH untuk mendapatkan penaksir ML parameter model GWMLR. Proses iterasi dengan metode BHHH menggunakan formula sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i))\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i)), \text{ untuk } l = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.29)$$

dimana $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i)$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l+1)}(\mathbf{u}_i)$ adalah penaksir ML parameter model GWMLR pada lokasi ke- i untuk iterasi ke- l dan $l+1$, $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i))$ adalah vektor gradien dari penaksir ML parameter model GWMLR pada lokasi ke- i untuk iterasi ke- l , dan $\mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i))$ adalah invers matriks Hessian dari penaksir ML parameter model GWMLR pada lokasi ke- i untuk iterasi ke- l . Proses iterasi akan berhenti jika terpenuhi kondisi konvergen, yaitu $\|\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l+1)}(\mathbf{u}_i) - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(l)}(\mathbf{u}_i)\| \leq \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan positif yang sangat kecil.

5.3 Pengujian Hipotesis Model GWMLR

Pengujian hipotesis untuk model GWMLR meliputi uji kesamaan model MLR dan GWMLR, uji serentak dan uji parsial. Uji kesamaan model MLR dan GWMLR digunakan untuk mengetahui adanya perbedaan yang signifikan antara model MLR dan GWMLR atau untuk mengetahui adanya pengaruh faktor geografis terhadap model. Uji serentak digunakan untuk mengetahui paling tidak, ada satu prediktor yang berpengaruh signifikan terhadap respon. Sedangkan uji parsial digunakan untuk mengetahui adanya pengaruh yang signifikan dari masing-masing prediktor terhadap respon.

5.3.1 Uji Kesamaan Model MLR dan GWMLR

Pengujian kesamaan model MLR dan GWMLR menggunakan hipotesis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_{rs}(\mathbf{u}_i) &= \beta_{rs}, \quad r = 1, 2, \dots, k; s = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, n \\ H_1 : &\text{Paling tidak ada satu } \beta_{rs}(\mathbf{u}_i) \neq \beta_{rs}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Hipotesis pada persamaan (5.30) merupakan model *non-nested*. Oleh karena itu, dalam penelitian ini digunakan statistik uji yang diusulkan oleh Voung (1989) yang berbentuk

$$Z_V = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}}, \quad (5.31)$$

dimana

$$M_i = \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)) - \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

$$\ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \hat{p}_{11i} + y_{10i} \ln \hat{p}_{10i} + y_{01i} \ln \hat{p}_{01i} + y_{00i} \ln \hat{p}_{00i}),$$

$$\ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \hat{\pi}_{11i} + y_{10i} \ln \hat{\pi}_{10i} + y_{01i} \ln \hat{\pi}_{01i} + y_{00i} \ln \hat{\pi}_{00i}),$$

$$\bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i,$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_3^T]^T$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i) = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_3^T(\mathbf{u}_i)]^T$ adalah berturut-turut penaksir ML parameter model MLR dan GWMLR yang diperoleh dengan metode BHHH pada persamaan (4.29) dan (5.29).

Berdasarkan teorema limit pusat, statistik uji pada persamaan (5.31) secara asimtotik berdistribusi normal standar. Sehingga daerah penolakan H_0 dengan tingkat signifikansi α untuk hipotesis pada persamaan (5.31) adalah tolak H_0 jika nilai $|Z_V| > Z_{\alpha/2}$.

5.3.2 Uji Serentak

Pengujian hipotesis parameter model GWMLR secara serentak menggunakan hipotesis yang diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_{1s}(\mathbf{u}_i) = \beta_{2s}(\mathbf{u}_i) = \dots = \beta_{ks}(\mathbf{u}_i) = 0, \quad s = 1, 2; i = 1, 2, \dots, n \\ H_1 : \text{paling tidak ada satu } \beta_{rs}(\mathbf{u}_i) \neq 0, \quad r = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Berikut ini diberikan suatu teorema yang digunakan untuk penentuan statistik uji, distribusi statistik uji, dan daerah penolakan H_0 pada uji serentak model GWMLR.

Teorema 5.1

Jika $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ adalah parameter model GWMLR dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)$ adalah penaksir ML untuk parameter $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$, maka:

- (a) Statistik uji untuk uji serentak adalah $G_2^2 = 2[L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) - L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)]$, dimana $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*$ adalah penaksir ML parameter model dibawah H_0 dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*$ adalah penaksir ML parameter model dibawah populasi.

(b) Statistik uji G_2^2 adalah berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas ν_2 , yaitu

$$G_2^2 = 2[L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) - L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)] \stackrel{a}{\sim} \chi_{\nu_2}^2.$$

(c) Daerah penolakan H_0 pada tingkat signifikansi α adalah $G_2^2 > \chi_{(\alpha, \nu_2)}^2$.

Bukti (a):

Diketahui hipotesis untuk uji serentak model GWMLR seperti pada persamaan (5.32). Berdasarkan metode MLRT, penentuan statistik uji diawali dengan menentukan himpunan parameter model dibawah H_0 , yaitu

$$\omega_2 = \{\beta_{01}(\mathbf{u}_i), \beta_{02}(\mathbf{u}_i), \beta_{03}(\mathbf{u}_i); i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Selanjutnya, membentuk fungsi likelihood dibawah H_0 ,

$$L(\omega_2) = \prod_{i=1}^n ((p_{11i}^*)^{y_{11i}} (p_{10i}^*)^{y_{10i}} (p_{01i}^*)^{y_{01i}} (p_{00i}^*)^{y_{00i}}). \quad (5.33)$$

Misalkan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*(\mathbf{u}_i) = [\hat{\beta}_{001}^*(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{002}^*(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{003}^*(\mathbf{u}_i)]^T$ adalah penaksir ML untuk parameter pada H_0 . Berdasarkan Lemma 5.1 dan 5.2, diperoleh penaksir ML untuk $\boldsymbol{\beta}_0^*(\mathbf{u}_i)$ dan diperoleh fungsi maksimum likelihood dibawah H_0 , yaitu:

$$\begin{aligned} L(\hat{\omega}_2) &= \max_{\omega_2} L(\omega_2) \\ &= \prod_{i=1}^n ((\hat{p}_{11i}^*)^{y_{11i}} (\hat{p}_{10i}^*)^{y_{10i}} (\hat{p}_{01i}^*)^{y_{01i}} (\hat{p}_{00i}^*)^{y_{00i}}), \end{aligned} \quad (5.34)$$

dimana

$$\hat{p}_{11i}^* = \begin{cases} \frac{a_{5i} - \sqrt{a_{5i}^2 + b_{5i}}}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1, \\ \hat{p}_{1i}^* \hat{p}_{2i}^*, & \psi_i = 1, \end{cases}$$

$$\text{dengan } a_{5i} = 1 + (\psi_i - 1)(\hat{p}_{1i}^* + \hat{p}_{2i}^*), \quad b_{5i} = -4\psi_i(\psi_i - 1)\hat{p}_{1i}^* \hat{p}_{2i}^*,$$

$$\psi_i = \frac{\hat{p}_{11i}^* \hat{p}_{00i}^*}{\hat{p}_{10i}^* \hat{p}_{01i}^*}, \quad \hat{p}_{1i}^* = \frac{\exp(\hat{\beta}_{01}^*(\mathbf{u}_i))}{1 + \exp(\hat{\beta}_{01}^*(\mathbf{u}_i))}, \quad \text{dan} \quad \hat{p}_{2i}^* = \frac{\exp(\hat{\beta}_{02}^*(\mathbf{u}_i))}{1 + \exp(\hat{\beta}_{02}^*(\mathbf{u}_i))}.$$

$$\hat{p}_{10i}^* = \hat{p}_{1i}^* - \hat{p}_{11i}^*,$$

$$\hat{p}_{01i}^* = \hat{p}_{2i}^* - \hat{p}_{11i}^*,$$

$$\hat{p}_{00i}^* = 1 - \hat{p}_{1i}^* - \hat{p}_{2i}^* + \hat{p}_{11i}^*.$$

Setelah mendapatkan fungsi maksimum likelihood dibawah H_0 dilanjutkan dengan menentukan himpunan parameter model dibawah populasi, yaitu

$$\Omega_2 = \{\beta_{rs}(\mathbf{u}_i), r = 0, 1, \dots, k; s = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Selanjutnya, membentuk fungsi likelihood dibawah populasi,

$$L(\Omega_2) = \prod_{i=1}^n (p_{11i}^{y_{11i}} p_{10i}^{y_{10i}} p_{01i}^{y_{01i}} p_{00i}^{y_{00i}}). \quad (5.35)$$

Misalkan $\hat{\beta}_1^*(\mathbf{u}_i) = [\hat{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)]^T$ adalah penaksir ML parameter pada populasi. Berdasarkan Lemma 5.1 dan 5.2, diperoleh penaksir ML untuk $\beta_1^*(\mathbf{u}_i)$, sehingga dapat diperoleh fungsi maksimum likelihood dibawah populasi,

$$\begin{aligned} L(\hat{\Omega}_2) &= \max_{\Omega_2} L(\Omega_2) \\ &= \prod_{i=1}^n (\hat{p}_{11i}^{y_{11i}} \hat{p}_{10i}^{y_{10i}} \hat{p}_{01i}^{y_{01i}} \hat{p}_{00i}^{y_{00i}}), \end{aligned} \quad (5.36)$$

dimana

$$\hat{p}_{11i} = \begin{cases} \frac{a_{6i} - \sqrt{a_{6i}^2 + b_{6i}}}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1, \\ \hat{p}_{1i} \hat{p}_{2i}, & \psi_i = 1, \end{cases}$$

$$\text{dengan } a_{6i} = 1 + (\psi_i - 1)(\hat{p}_{1i} + \hat{p}_{2i}), \quad b_{6i} = -4\psi_i(\psi_i - 1)\hat{p}_{1i}\hat{p}_{2i},$$

$$\psi_i = \frac{\hat{p}_{11i}\hat{p}_{00i}}{\hat{p}_{10i}\hat{p}_{01i}}, \quad \hat{p}_{1i} = \frac{\exp(\hat{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\hat{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}, \quad \text{dan} \quad \hat{p}_{2i} = \frac{\exp(\hat{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\hat{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)}.$$

$$\hat{p}_{10i} = \hat{p}_{1i} - \hat{p}_{11i},$$

$$\hat{p}_{01i} = \hat{p}_{2i} - \hat{p}_{11i},$$

$$\hat{p}_{00i} = 1 - \hat{p}_{1i} - \hat{p}_{2i} + \hat{p}_{11i}.$$

Berdasarkan definisi dalam Hogg dkk. (2013), statistik uji LR untuk pengujian hipotesis nol pada persamaan (5.32) adalah

$$\Lambda_2 = \frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\Omega}_2)}. \quad (5.37)$$

Berdasarkan persamaan (5.34) dan (5.36), statistik LR pada persamaan (5.37) dapat ditulis menjadi

$$\Lambda_2 = \frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\Omega}_2)} = \frac{\prod_{i=1}^n ((\hat{p}_{11i}^*)^{y_{11i}} (\hat{p}_{10i}^*)^{y_{10i}} (\hat{p}_{01i}^*)^{y_{01i}} (\hat{p}_{00i}^*)^{y_{00i}})}{\prod_{i=1}^n (\hat{p}_{11i}^{y_{11i}} \hat{p}_{10i}^{y_{10i}} \hat{p}_{01i}^{y_{01i}} \hat{p}_{00i}^{y_{00i}})} . \quad (5.38)$$

Statistik LR pada persamaan (5.38) tidak dapat disederhanakan atau tidak dapat dihitung secara eksplisit. Untuk memudahkan perhitungan, statistik LR ditransformasi ke dalam bentuk yang ekuivalen menjadi

$$\Lambda_2^{-2} = \left(\frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\Omega}_2)} \right)^{-2} = \left(\frac{L(\hat{\Omega}_2)}{L(\hat{\omega}_2)} \right)^2 . \quad (5.39)$$

Selanjutnya, dilakukan transformasi logaritma (ln) terhadap persamaan (5.39) dan didapat statistik uji LR yang berbentuk

$$G_2^2 = -2 \ln \Lambda_2 = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\Omega}_2)} \right) = 2 \ln \left(\frac{L(\hat{\Omega}_2)}{L(\hat{\omega}_2)} \right) = 2(L(\hat{\beta}_1^*) - L(\hat{\beta}_0^*)) , \quad (5.40)$$

dimana $L(\hat{\beta}_1^*) = \ln L(\hat{\Omega}_2)$ dan $L(\hat{\beta}_0^*) = \ln L(\hat{\omega}_2)$. ■

Bukti (b):

Misalkan penaksir ML pada populasi dari pengujian hipotesis dipartisi sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_1^* = [\hat{\beta}_{11}^* \quad \hat{\beta}_{12}^*]^T ,$$

dimana

$$\hat{\beta}_{11}^* = [\hat{\beta}_{1s}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{2s}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{ks}(\mathbf{u}_i); s = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, n]^T ,$$

$$\hat{\beta}_{12}^* = [\beta_{01}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{02}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{03}(\mathbf{u}_i), i = 1, 2, \dots, n]^T .$$

Selanjutnya, penaksir ML dan parameter yang diketahui pada H_0 dipartisi sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_0^* = [\hat{\beta}_{011}^* \quad \hat{\beta}_{012}^*]^T ,$$

dimana

$$\hat{\beta}_{011}^* = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T ,$$

$$\hat{\beta}_{012}^* = [\hat{\beta}_{001}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{002}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{003}(\mathbf{u}_i), i = 1, 2, \dots, n]^T .$$

Hipotesis pada persamaan (5.32) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
H_0 : \boldsymbol{\beta}_{11}^* &= \boldsymbol{\beta}_{011}^* \\
H_1 : \boldsymbol{\beta}_{11}^* &\neq \boldsymbol{\beta}_{011}^*.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Statistik uji G_2^2 yang diberikan pada persamaan (5.40) dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned}
G_2^2 &= 2[\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)] \\
&= 2[\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) - \ln L(\boldsymbol{\beta}_0^*)] - 2[\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*) - \ln L(\boldsymbol{\beta}_0^*)].
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Selanjutnya, fungsi $L(\boldsymbol{\beta}_0^*)$ dapat dihampiri dengan ekspansi deret Taylor derajat dua disekitar $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*$ sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{\beta}_0^*) \approx L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) + \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)(\boldsymbol{\beta}_0^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_0^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)(\boldsymbol{\beta}_0^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)$$

dimana $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) = \left. \frac{\partial L(\boldsymbol{\beta}_1^*)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^*} \right|_{\boldsymbol{\beta}_1^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*}$ dan $\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) = - \left. \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\beta}_1^*)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^* \partial \boldsymbol{\beta}_1^{*T}} \right|_{\boldsymbol{\beta}_1^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*}$.

Karena $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) = \mathbf{0}$, sehingga diperoleh:

$$2(L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) - L(\boldsymbol{\beta}_0^*)) \approx (\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* - \boldsymbol{\beta}_0^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* - \boldsymbol{\beta}_0^*). \tag{5.43}$$

Selanjutnya, jika fungsi $L(\boldsymbol{\beta}_0^*)$ dihampiri oleh ekspansi deret Taylor derajat dua disekitar $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*$ diperoleh:

$$L(\boldsymbol{\beta}_0^*) \approx L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*) + \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)(\boldsymbol{\beta}_0^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_0^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)(\boldsymbol{\beta}_0^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)$$

atau dapat ditulis:

$$2(L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*) - L(\boldsymbol{\beta}_0^*)) \approx (\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^* - \boldsymbol{\beta}_0^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^* - \boldsymbol{\beta}_0^*). \tag{5.44}$$

Berdasarkan persamaan (5.43) dan (5.44), statistik uji pada persamaan (5.42) dapat ditulis menjadi

$$G_2^2 \approx (\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* - \boldsymbol{\beta}_0^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* - \boldsymbol{\beta}_0^*) - (\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^* - \boldsymbol{\beta}_0^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^* - \boldsymbol{\beta}_0^*). \tag{5.45}$$

Misalkan,

$$\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)_{(3k+3)n \times (3k+3)n} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11(3kn \times 3kn)} & \mathbf{I}_{12(n \times (3k+3)n)} \\ \mathbf{I}_{21((3k+3)n \times n)} & \mathbf{I}_{22(3n \times 3n)} \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)]_{(3k+3)n \times (3k+3)n}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11(3kn \times 3kn)} & \mathbf{I}_{12(n \times (3k+3)n)} \\ \mathbf{I}_{21((3k+3)n \times n)} & \mathbf{I}_{22(3n \times 3n)} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan sifat distribusi bersyarat, jika diberikan $\boldsymbol{\beta}_{11}^* = \boldsymbol{\beta}_{011}^*$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^*$, dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^*$, maka diperoleh

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{012}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^* - \mathbf{I}^{21}[\mathbf{I}^{11}]^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*), \quad (5.46)$$

atau berdasarkan formula dari invers suatu partisi matriks, persamaan (5.46) dapat ditulis menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{012}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^* + \mathbf{I}_{22}^{-1} \mathbf{I}_{21}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*). \quad (5.47)$$

Pada pengujian hipotesis dibawah H_0 , karena $(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^* - \boldsymbol{\beta}_0^*) = (\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_{012}^* - \boldsymbol{\beta}_{12}^*)$, dan memperhatikan persamaan (5.47), yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{012}^* - \boldsymbol{\beta}_{12}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^* - \boldsymbol{\beta}_{12}^* + \mathbf{I}_{22}^{-1} \mathbf{I}_{21}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*),$$

maka

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^* - \boldsymbol{\beta}_0^*)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^* - \boldsymbol{\beta}_0^*) &= (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{012}^* - \boldsymbol{\beta}_{12}^*)^T \mathbf{I}_{22}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{012}^* - \boldsymbol{\beta}_{12}^*) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^* \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^* - \boldsymbol{\beta}_{12}^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{12} & \mathbf{I}_{22}^{-1} \mathbf{I}_{21} & \mathbf{I}_{12} \\ & \mathbf{I}_{21} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^* \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^* - \boldsymbol{\beta}_{12}^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, statistik uji pada persamaan (5.45) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} G_2^2 &\approx (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*)^T (\mathbf{I}_{11} - \mathbf{I}_{12} \mathbf{I}_{22}^{-1} \mathbf{I}_{21})(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*)^T [\mathbf{I}^{11}]^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Memperhatikan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.54), maka distribusi dari partisi parameter adalah

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{11}^* \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^* - \boldsymbol{\beta}_{12}^* \end{bmatrix} \stackrel{a}{\sim} N\left(\mathbf{0}, [\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta}_1^*)]^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{11} & \mathbf{I}^{12} \\ \mathbf{I}^{21} & \mathbf{I}^{22} \end{bmatrix}\right).$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{11}^*) &\stackrel{a}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}^{11}), \\ [\mathbf{I}^{11}]^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{11}^*) &\stackrel{a}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{v_2}), \\ G_2^2 &= (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*)^T [\mathbf{I}^{11}]^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{11}^* - \boldsymbol{\beta}_{011}^*) \stackrel{a}{\sim} \chi_{v_2}^2. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Statistik uji G_2^2 pada persamaan (5.49) secara asimtotik berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas v_2 . Nilai v_2 dapat diperoleh dari banyaknya parameter

efektif, yaitu $v_2 = \text{trace}(\mathbf{H}^*)$ dengan $\mathbf{H}^* = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i))$ dan \mathbf{X} adalah matriks prediktor dan $\mathbf{W}(\mathbf{u}_i)$ adalah matriks pembobot spasial. ■

Bukti (c):

Penentuan daerah penolakan H_0 yang diberikan oleh persamaan (5.32) didasarkan pada metode MLRT, yaitu tolak H_0 jika $\Lambda_2 < c_3$, untuk $0 < c_3 \leq 1$ dengan $\Lambda_2 = L(\hat{\omega}_2) / L(\hat{\Omega}_2)$. Misalkan diberikan tingkat signifikansi α untuk $0 < \alpha < 1$, sehingga dapat ditentukan suatu konstanta $0 < c_\alpha \leq 1$ yang nilainya bergantung pada nilai tingkat signifikansi α dan memenuhi $P_{\beta_1^* \in \omega_2}(\Lambda_2 < c_\alpha) = \alpha$. Analog dengan pembuktian pada Teorema 4.1 (c) dan berdasarkan definisi dari tingkat signifikansi α , diperoleh:

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\beta_1^* \in \omega_2}(\Lambda_2 < c_\alpha) \\ &= P(-2 \ln \Lambda_2 > -2 \ln c_\alpha) \\ &= P(G_2^2 > c_3), \end{aligned} \tag{5.50}$$

dimana G_2^2 berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas v_2 , yaitu $G_2^2 \sim \chi_{v_2}^2$.

Berdasarkan persamaan (5.50), Daerah penolakan pada tingkat signifikansi α adalah $G_2^2 > \chi_{(\alpha, v_2)}^2$. ■

5.3.3 Uji Parsial

Uji parsial model GWMLR digunakan untuk mengetahui adanya pengaruh yang signifikan dari masing-masing parameter $\beta_{rs}(\mathbf{u}_i)$ terhadap model, untuk $r=1,2,\dots,k$; $s=1,2,3$; dan $i=1,2,\dots,n$. Misalkan nilai $s=t$ dan $i=j$ sehingga hipotesis untuk uji parsial adalah:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_{rt}(\mathbf{u}_j) = 0, \\ H_1 &: \beta_{rt}(\mathbf{u}_j) \neq 0. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Statistik uji untuk pengujian hipotesis pada persamaan (5.51) dapat diperoleh dengan prosedur sebagai berikut:

Misalkan

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{014}^*(\mathbf{u}_i) = [\hat{\beta}_{00s}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{01s}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{0(r-1)t}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{0(r+1)t}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{0ks}(\mathbf{u}_i)]^T$$

dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_3^T(\mathbf{u}_i)]^T$ adalah berturut-turut penaksir ML dari parameter pada H_0 dan populasi.

Analog dengan pembuktian pada Teorema 5.1, dengan merubah partisi penaksir ML dibawah populasi menjadi $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_{13}^* \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{14}^*]^T$,

dimana

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{13}^* = [\hat{\beta}_{rt}(\mathbf{u}_j)],$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{14}^* = [\hat{\beta}_{0s}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{1s}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{(r-1)t}(\mathbf{u}_j) \quad \hat{\beta}_{(r+1)t}(\mathbf{u}_j) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{ks}(\mathbf{u}_i)]^T.$$

Jika penaksir ML dan parameter yang diketahui pada H_0 dibuat partisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^* = [\boldsymbol{\beta}_{013}^* \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{014}^*]^T,$$

dimana

$$\boldsymbol{\beta}_{013}^* = [0],$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{014}^* = [\hat{\beta}_{00s}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{01s}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{0(r-1)t}(\mathbf{u}_j) \quad \hat{\beta}_{0(r+1)t}(\mathbf{u}_j) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{0ks}(\mathbf{u}_i)]^T,$$

maka statistik uji LR untuk menguji hipotesis pada persamaan (5.51) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} G_4^2 &\approx (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{13}^* - \boldsymbol{\beta}_{013}^*)^T (\mathbf{I}_{11} - \mathbf{I}_{12} \mathbf{I}_{22}^{-1} \mathbf{I}_{21}) (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{13}^* - \boldsymbol{\beta}_{013}^*) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{13}^* - \boldsymbol{\beta}_{013}^*)^T [\mathbf{I}^{11}]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{13}^* - \boldsymbol{\beta}_{013}^*), \end{aligned} \quad (5.52)$$

dimana

$$\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)_{(3k+3)n \times (3k+3)n} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11(1 \times 1)} & \mathbf{I}_{12(1 \times ((3k+2)n-1))} \\ \mathbf{I}_{21(((3k+2)n-1) \times 1)} & \mathbf{I}_{22((3k+6)n-1) \times ((3k+6)n-1)} \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)]^{-1}_{(3k+3)n \times (3k+3)n} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11(1 \times 1)} & \mathbf{I}_{12(1 \times ((3k+2)n-1))} \\ \mathbf{I}_{21(((3k+2)n-1) \times 1)} & \mathbf{I}_{22((3k+6)n-1) \times ((3k+6)n-1)} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.54), dan memperhatikan persamaan (5.52) dengan vektor $\boldsymbol{\beta}_{13}^*$ hanya mempunyai satu elemen yaitu $\beta_{rt}(\mathbf{u}_j)$, maka statistik uji untuk hipotesis pada persamaan (5.51) adalah:

$$G_{22}^2 = \frac{\hat{\beta}_{rt}^2(\mathbf{u}_j)}{\text{Var}(\hat{\beta}_{rt}(\mathbf{u}_j))} \sim \chi_1^2 \quad (5.53)$$

atau dapat juga menggunakan akar kuadrat dari persamaan (5.53), sehingga diperoleh statistik uji:

$$Z_2 = \frac{\hat{\beta}_{rt}(\mathbf{u}_j)}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_{rt}(\mathbf{u}_j))}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1), \quad (5.54)$$

dimana $\text{Var}(\hat{\beta}_{rt})$ diperoleh dari elemen diagonal ke $[3(k+1)]$ dari matriks $[\mathbf{I}(\hat{\beta}_1^*(\mathbf{u}_j))]^{-1}$.

Analog dengan pembuktian pada Teorema 5.1 (c), penentuan daerah penolakan H_0 pada tingkat signifikansi α untuk hipotesis uji parsial pada persamaan (5.51) adalah:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(G_{22}^2 > c_4) \\ &= P(Z_2 < -\sqrt{c_4} \vee Z_2 > \sqrt{c_4}) \\ &= P(Z_2 < -Z_{\alpha/2} \vee Z_2 > Z_{\alpha/2}) \\ &= P(|Z_2| > Z_{\alpha/2}). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Berdasarkan persamaan (5.55), daerah penolakan pada tingkat signifikansi α adalah $|Z_2| > Z_{\alpha/2}$. ■

BAB 6

**PENERAPAN MODEL MLR DAN GWMLR
PADA PEMODELAN STATUS IPKM DAN IPM
KABUPATEN/KOTA DI PULAU KALIMANTAN**

Pada bab ini dibahas penerapan model MLR dan GWMLR pada status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018. Pembahasan pada penerapan model MLR dan GWMLR meliputi deskripsi data penelitian, pengujian prasyarat analisis data model MLR dan GWMLR, uji dependensi antar respon, dan uji multikolinieritas. Pembahasan selanjutnya adalah pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 dengan model MLR dan GWMLR.

6.1 Deskripsi Data Penelitian

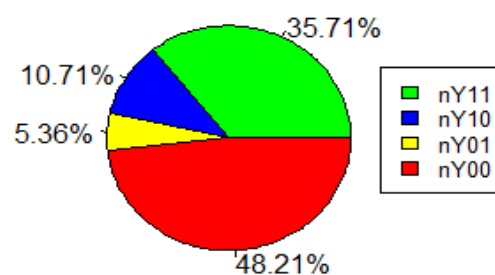
Variabel dalam penelitian ini sebagaimana diuraikan dalam Bab 3 terdiri atas dua respon, yaitu status IPKM (Y_1) dan status IPM (Y_2) dan lima prediktor yaitu pertumbuhan ekonomi (X_1), APM SMP (X_2), persentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP (X_3), rasio dokter per 1000 penduduk (X_4), dan jumlah puskesmas (X_5) yang diduga berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM. Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 2, diperoleh hasil deskripsi status IPKM dan IPM seperti pada Tabel 6.1

Tabel 6.1 Deskripsi Status IPKM dan IPM Kabupaten/Kota

| Y_1 | Y_2 | | Total |
|-----------|-----------|-----------|-------|
| | $Y_2 = 1$ | $Y_2 = 0$ | |
| $Y_1 = 1$ | 20 | 6 | 26 |
| $Y_1 = 0$ | 3 | 27 | 30 |
| Total | 23 | 33 | 56 |

Tabel 6.1 merupakan tabel kontingensi berukuran (2×2) untuk status IPKM dan IPM. Berdasarkan Tabel 6.1, terlihat bahwa dari 56 kabupaten/kota yang ada di Pulau Kalimantan tahun 2018, terdapat 20 kabupaten/kota yang mempunyai status IPKM dan IPM adalah IPKM B-DBK dan IPM tinggi (Y_{11}). Selanjutnya,

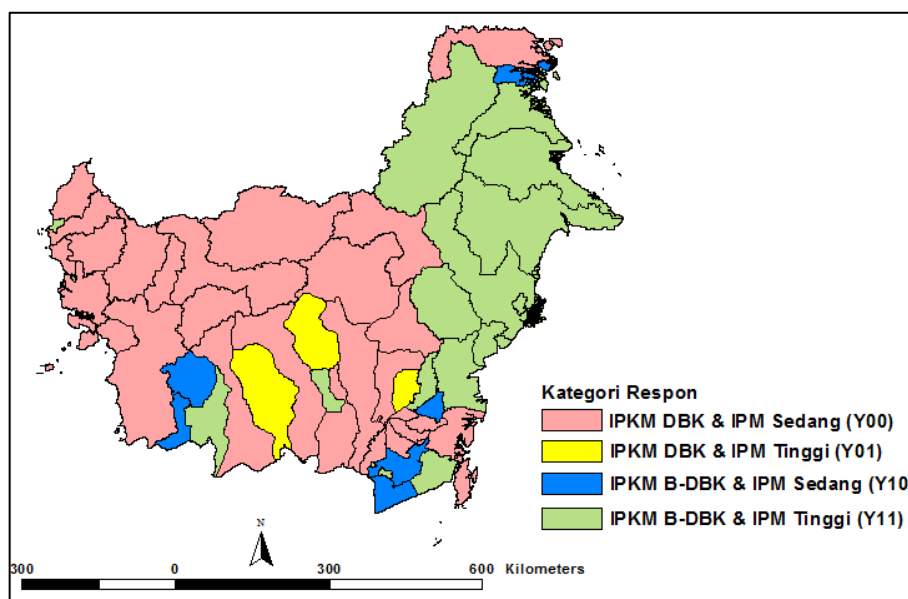
terdapat 6 kabupaten/kota yang mempunyai status IPKM dan IPM adalah IPKM B-DBK dan IPM sedang (Y_{10}). Kabupaten/kota yang memiliki status IPKM dan IPM adalah IPKM DBK dan IPM tinggi (Y_{01}) sebanyak 3 kabupaten/kota. Sedangkan kabupaten/kota yang memiliki status IPKM dan IPM adalah IPKM DBK dan IPM sedang (Y_{00}) sebanyak 27 kabupaten/kota. Berdasarkan Tabel 6.1, deskripsi status IPKM dan IPM dapat disajikan seperti pada Gambar 6.1.



Gambar 6.1 Deskripsi Status IPKM dan IPM berdasarkan Persentase Kategori

Pada Gambar 6.1 terlihat bahwa banyaknya kabupaten/kota yang memiliki status IPKM dan IPM adalah IPKM B-DBK dan IPM tinggi (nY_{11}) sebesar 35,71%. Banyaknya kabupaten/kota yang memiliki status IPKM dan IPM adalah IPKM B-DBK dan IPM sedang (nY_{10}) sebesar 10,71%. Banyaknya kabupaten/kota dengan status IPKM dan IPM adalah IPKM DBK dan IPM tinggi (nY_{01}) sebesar 5,36% dan banyaknya kabupaten/kota yang memiliki status IPKM dan IPM adalah IPKM DBK dan IPM sedang (nY_{00}) adalah sebesar 48,21%.

Berdasarkan Tabel 6.1 dan Gambar 6.1, terlihat bahwa kabupaten/kota di Pulau Kalimantan pada tahun 2018 terbanyak mempunyai status IPKM dan IPM adalah IPKM DBK dan IPM sedang. Selanjutnya, disajikan peta tematik persebaran status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018. Berdasarkan hasil yang diperoleh dengan ArcView GIS, persebaran status IPKM dan IPM disajikan pada Gambar 6.2.



Gambar 6.2 Pemetaan Status IPKM dan IPM berdasarkan Kategori

Pada Gambar 6.2 tampak bahwa status IPKM dan IPM untuk kategori IPM B-DBK dan IPM tinggi terbanyak menyebar pada kabupaten/kota di Provinsi Kalimantan Timur dan Kalimantan Utara, sedangkan status IPKM dan IPM untuk kategori IPKM DBK dan IPM sedang terbanyak menyebar pada kabupaten/kota di Provinsi Kalimantan Barat. Selanjutnya, status IPKM dan IPM untuk kategori IPKM B-DBK dan IPM sedang dan IPKM DBK dan IPM tinggi terbanyak menyebar pada kabupaten/kota di Provinsi Kalimantan Tengah dan Kalimantan Selatan.

Setelah menyajikan deskripsi dari respon, dilanjutkan dengan menyajikan deskripsi dari prediktor. Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 2, diperoleh deskripsi dari pertumbuhan ekonomi, APM SMP, persentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP, rasio dokter per 1000 penduduk, dan jumlah puskesmas disajikan pada Tabel 6.2.

Tabel 6.2 Deskripsi Prediktor

| Variabel | Minimum | Maksimum | Rata-rata | Standar Deviasi |
|----------------|---------|----------|-----------|-----------------|
| X ₁ | -4,10 | 7,99 | 5,08 | 1,83 |
| X ₂ | 68,37 | 98,82 | 81,19 | 8,14 |
| X ₃ | 35,58 | 81,37 | 54,25 | 11,05 |
| X ₄ | 1,00 | 46,40 | 10,23 | 9,47 |
| X ₅ | 5,00 | 33,00 | 17,57 | 6,93 |

Berdasarkan Tabel 6.2, tampak bahwa rata-rata pertumbuhan ekonomi kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 sebesar 5,08% dengan pertumbuhan ekonomi tertinggi di Kabupaten Sintang, Kalimantan Barat sebesar 7,99% sedangkan pertumbuhan ekonomi terendah di Kota Bontang, Kalimantan Timur sebesar -4,10%. APM SMP di Pulau Kalimantan tahun 2018 rata-rata sebesar 81,19 dengan APM SMP tertinggi sebesar 98,82 di Kota Singkawang, Kalimantan Barat dan APM SMP terendah sebesar 68,37 di Kabupaten Banjar, Kalimantan Selatan. Untuk rata-rata persentase penduduk minimal tamat pendidikan tingkat SMP di Pulau Kalimantan tahun 2018 sebesar 54,25%, persentase terendah di Kabupaten Sambas, Kalimantan Barat sebesar 35,58% dan persentase tertinggi di Kota Palangkaraya, Kalimantan Tengah sebesar 81,37%. Rata-rata rasio dokter per 1000 penduduk di Pulau Kalimantan tahun 2018 adalah 10,23 dengan rasio tertinggi sebesar 46,40 di Kota Pontianak, Kalimantan Barat dan rasio terendah sebesar 1 di Kabupaten Tana Tidung, Kalimantan Utara. Rata-rata jumlah puskesmas pada kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 adalah sebanyak 18 puskesmas. Wilayah dengan jumlah puskesmas paling sedikit adalah Kabupaten Tana Tidung, Kalimantan Utara, Kabupaten Mahakam Ulu, Kalimantan Timur, dan Kabupaten Sukamara, Kalimantan Tengah, yaitu sebanyak 5 puskesmas sedangkan wilayah dengan jumlah puskesmas terbanyak adalah Kabupaten Kotabaru, Kalimantan Selatan.

Pembahasan selanjutnya adalah pengujian prasyarat analisis data model MLR dan GWMLR. Pembahasan ini meliputi pengujian dependensi antar respon dan pengujian multikolinieritas terhadap prediktor. Pengujian dependensi antar respon bertujuan untuk mengetahui adanya dependensi antar respon, sehingga data layak untuk dianalisis secara multivariat. Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 3, diperoleh nilai odds rasio dari respon seperti yang disajikan pada Tabel 6.3.

Tabel 6.3 Nilai Odds Rasio Status IPKM dan IPM

| Y ₁ | Y ₂ | | ψ | Interval Konfidensi 90% untuk ψ |
|--------------------|--------------------|--------------------|----|------------------------------------|
| | Y ₂ = 1 | Y ₂ = 0 | | |
| Y ₁ = 1 | 20 | 6 | 30 | 8,5074 ≤ ψ ≤ 105,7901 |
| Y ₁ = 0 | 3 | 27 | | |

Menurut El-Sayed dkk. (2013), untuk mengetahui adanya korelasi antar dua variabel kategorik dapat menggunakan nilai odds rasio (ψ), dimana nilainya lebih dari atau sama dengan nol ($\psi \geq 0$). Kriteria yang digunakan adalah jika respon mempunyai nilai odds rasio lebih dari 1, maka terdapat dependensi positif antar respon. Sebaliknya, terdapat dependensi negatif jika nilai odds rasio kurang dari 1. Jika nilai odds rasio sama dengan 1, maka tidak terdapat dependensi antar respon. Berdasarkan Tabel 6.3, terlihat bahwa nilai odds rasio untuk status IPKM dan IPM adalah sebesar 30, dengan interval konfidensi 90% sebesar $8,5074 \leq \psi \leq 105,7901$. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat dependensi antara status IPKM dan IPM yaitu dependensi positif.

Selain menggunakan nilai odds rasio, pengujian untuk mengetahui adanya dependensi antara status IPKM dan IPM dilakukan dengan statistik uji LR yang diberikan pada persamaan (2.58). Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 3, diperoleh nilai statistik G^2 sebesar 28,242 dengan p -value sebesar $1,071 \times 10^{-7}$ ($p < 0,001$). Karena nilai statistik G^2 lebih dari $\chi^2_{(\alpha,1)}$ dan p -value kurang dari α , untuk α sebesar 0,1, maka tolak H_0 . Sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat dependensi antara status IPKM dan IPM.

Setelah dilakukan pengujian dependensi antar respon menggunakan nilai odds rasio dan uji likelihood rasio, hasil yang diperoleh menunjukkan terdapat dependensi antar respon. Oleh karena itu, status IPKM dan IPM yang digunakan sebagai respon dalam penelitian ini, layak digunakan untuk model MLR dan GWMLR pada pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018.

Pengujian prasyarat analisis data model MLR dan GWMLR selanjutnya adalah pengujian kolinieritas antar prediktor (multikolinieritas). Untuk mengetahui adanya multikolinieritas digunakan kriteria nilai VIF. Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 3, diperoleh nilai VIF untuk masing-masing prediktor seperti yang disajikan pada Tabel 6.4.

Tabel 6.4 Nilai VIF Prediktor

| Prediktor | Nilai VIF |
|----------------|-----------|
| X ₁ | 1,0404 |
| X ₂ | 1,4948 |
| X ₃ | 2,3002 |
| X ₄ | 2,5617 |
| X ₅ | 1,5165 |

Berdasarkan Tabel 6.4, terlihat bahwa semua prediktor mempunyai nilai VIF kurang dari 10, sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi multikolinieritas pada prediktor. Oleh karena itu, semua prediktor pada Tabel 6.4 dapat digunakan untuk model MLR dan GWMLR.

6.2 Pemodelan Status IPKM dan IPM dengan MLR

Model MLR merupakan model non spasial (model global), sehingga setiap lokasi diasumsikan homogen. Pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 dengan model MLR, diawali dengan pemilihan prediktor yang berpengaruh signifikan secara individu terhadap respon, yaitu dengan cara meregresikan masing-masing prediktor terhadap respon. Hal ini bertujuan untuk mengetahui prediktor mana saja yang secara univariabel berpengaruh signifikan terhadap respon. Hipotesis yang digunakan adalah:

$$H_0 : \beta_{rs} = 0 ,$$

$$H_1 : \beta_{rs} \neq 0 , \text{ untuk } r = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ dan } s = 1, 2, 3 .$$

Statistik uji yang digunakan adalah statistik Wald, sebagaimana pada persamaan (4.51) dengan daerah penolakan adalah tolak H_0 jika nilai $|Z|$ lebih dari $Z_{\alpha/2}$. Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 4, diperoleh hasil analisis MLR secara univariabel pada Tabel 6.5.

Tabel 6.5 Hasil MLR Univariabel

| Variabel | Parameter | Taksiran | Standard Error | Z |
|----------------|--------------|----------|--------------------------|------------------------|
| X ₁ | β_{01} | -6,8644 | $1,8712 \times 10^{-8}$ | $-3,6683 \times 10^8*$ |
| | β_{11} | -1,7490 | $7,5198 \times 10^{-10}$ | $-2,3258 \times 10^9*$ |

Tabel 6.5 (Lanjutan)

| Variabel | Parameter | Taksiran | <i>Standard Error</i> | <i>Z</i> |
|----------------|--------------|----------|--------------------------|----------------------------|
| | β_{02} | -19,8199 | $4,4172 \times 10^{-13}$ | $-4,4870 \times 10^{13}$ * |
| | β_{12} | -1,7411 | $1,8927 \times 10^{-14}$ | $-9,1993 \times 10^{13}$ * |
| | β_{03} | 2,7661 | $3,6138 \times 10^{-16}$ | $7,6545 \times 10^{15}$ * |
| | β_{13} | -0,1440 | $1,3533 \times 10^{-17}$ | $-1,0642 \times 10^{16}$ * |
| X ₂ | β_{01} | 3,1141 | $7,3887 \times 10^{-5}$ | $4,2147 \times 10^4$ * |
| | β_{11} | 2,3740 | $6,3601 \times 10^{-5}$ | $3,7327 \times 10^4$ * |
| | β_{02} | -7,4639 | $9,4433 \times 10^{-5}$ | $-7,9039 \times 10^4$ * |
| | β_{12} | -5,5919 | $7,2462 \times 10^{-5}$ | $-7,7170 \times 10^4$ * |
| | β_{03} | 0,6818 | $2,7384 \times 10^{-8}$ | $2,4897 \times 10^7$ * |
| | β_{13} | 1,1489 | $2,2199 \times 10^{-8}$ | $5,1754 \times 10^7$ * |
| X ₃ | β_{01} | -10,6034 | $2,4760 \times 10^{-6}$ | $-4,2825 \times 10^6$ * |
| | β_{11} | 3,2491 | $1,5012 \times 10^{-6}$ | $2,1644 \times 10^6$ * |
| | β_{02} | -15,5834 | $2,1622 \times 10^{-8}$ | $-7,2070 \times 10^8$ * |
| | β_{12} | 4,0808 | $1,6213 \times 10^{-8}$ | $2,5169 \times 10^8$ * |
| | β_{03} | -0,2296 | $4,6309 \times 10^{-12}$ | $-4,9587 \times 10^{10}$ * |
| | β_{13} | 0,8738 | $3,4547 \times 10^{-12}$ | $2,5293 \times 10^{11}$ * |
| X ₄ | β_{01} | 14,9467 | $1,6463 \times 10^{-12}$ | $9,0791 \times 10^{12}$ * |
| | β_{11} | 10,7011 | $9,7033 \times 10^{-14}$ | $1,1028 \times 10^{14}$ * |
| | β_{02} | -2,5334 | $1,1278 \times 10^{-6}$ | $-2,2463 \times 10^6$ * |
| | β_{12} | 9,5984 | $6,1416 \times 10^{-8}$ | $1,5628 \times 10^8$ * |
| | β_{03} | -4,0952 | $4,3720 \times 10^{-12}$ | $-9,3670 \times 10^{11}$ * |
| | β_{13} | 2,5064 | $2,9307 \times 10^{-13}$ | $8,5523 \times 10^{12}$ * |
| X ₅ | β_{01} | -22,1112 | $3,2782 \times 10^{-13}$ | $-6,7449 \times 10^{13}$ * |
| | β_{11} | -3,7698 | $5,6686 \times 10^{-14}$ | $-6,6502 \times 10^{13}$ * |
| | β_{02} | -1,8264 | $1,9026 \times 10^{-7}$ | $-9,5998 \times 10^6$ * |
| | β_{12} | 2,1596 | $3,9256 \times 10^{-8}$ | $5,5014 \times 10^7$ * |
| | β_{03} | 4,8312 | $3,5295 \times 10^{-14}$ | $1,3688 \times 10^{14}$ * |
| | β_{13} | 2,1784 | $6,9835 \times 10^{-15}$ | $3,1193 \times 10^{14}$ * |

* Signifikan pada $\alpha = 0,1$.

Tingkat signifikansi α yang digunakan dalam penelitian ini sebesar 0,1, sehingga nilai statistik uji $|Z|$ dibandingkan dengan nilai $Z_{0,05} = 1,6449$ dan tolak

H_0 jika nilai $|Z|$ lebih dari $Z_{0,05}$. Berdasarkan Tabel 6.5, terlihat bahwa secara univariabel semua prediktor berpengaruh signifikan terhadap respon.

Pembahasan selanjutnya adalah membentuk model MLR multivariabel. Model ini melibatkan semua prediktor yang diperoleh dari Tabel 6.5. Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 4, diperoleh hasil MLR multivariabel seperti yang disajikan pada Tabel 6.6.

Tabel 6.6 Hasil MLR Multivariabel

| Parameter | Taksiran | Standard Error | Z |
|--------------|----------|--------------------------|---------------------------|
| β_{01} | -4,6675 | $1,8061 \times 10^{-7}$ | $-2,5842 \times 10^7*$ |
| β_{11} | -1,3393 | $9,9153 \times 10^{-9}$ | $-1,3508 \times 10^8*$ |
| β_{21} | -4,3570 | $1,6130 \times 10^{-7}$ | $-2,7013 \times 10^7*$ |
| β_{31} | 3,5622 | $8,8077 \times 10^{-8}$ | $4,0444 \times 10^7*$ |
| β_{41} | 5,0261 | $1,3964 \times 10^{-8}$ | $3,59948 \times 10^8*$ |
| β_{51} | -0,9057 | $3,5051 \times 10^{-8}$ | $-2,5839 \times 10^7*$ |
| β_{02} | 5,1349 | $1,0609 \times 10^{-10}$ | $4,8402 \times 10^{10}*$ |
| β_{12} | -0,3340 | $5,8566 \times 10^{-12}$ | $-5,7033 \times 10^{10}*$ |
| β_{22} | 5,6320 | $9,1334 \times 10^{-11}$ | $6,1663 \times 10^{10}*$ |
| β_{32} | 12,7454 | $4,7977 \times 10^{-11}$ | $2,6566 \times 10^{11}*$ |
| β_{42} | 6,2098 | $6,6558 \times 10^{-12}$ | $9,3300 \times 10^{11}*$ |
| β_{52} | 2,2650 | $1,8405 \times 10^{-11}$ | $1,2306 \times 10^{11}*$ |
| β_{03} | -2,0060 | $9,3492 \times 10^{-14}$ | $-2,1457 \times 10^{13}*$ |
| β_{13} | -0,3605 | $5,3855 \times 10^{-15}$ | $-6,6933 \times 10^{13}*$ |
| β_{23} | -0,2023 | $8,0640 \times 10^{-14}$ | $-2,5081 \times 10^{12}*$ |
| β_{33} | -0,1417 | $4,3592 \times 10^{-14}$ | $-3,2505 \times 10^{12}*$ |
| β_{43} | 1,4543 | $6,7156 \times 10^{-15}$ | $2,1656 \times 10^{14}*$ |
| β_{53} | 0,4409 | $1,8384 \times 10^{-14}$ | $2,3985 \times 10^{13}*$ |

* Signifikan pada $\alpha = 0,1$.

Pada model MLR multivariabel dilakukan pengujian parameter secara serentak dan secara parsial. Hipotesis yang digunakan untuk uji serentak adalah:

$$H_0 : \beta_{1s} = \beta_{2s} = \beta_{3s} = 0, s = 1, 2, 3,$$

$$H_1 : \text{Paling sedikit ada satu } \beta_{rs} \neq 0, \text{ untuk } r = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 4, diperoleh nilai statistik uji G^2 sebesar 306,4403. Dari tabel distribusi *chi-square* diperoleh nilai

$\chi^2_{(0,1;15)}$ sebesar 22,3071. Karena nilai G^2 lebih dari nilai $\chi^2_{(0,1;15)}$, maka tolak H_0 . Sehingga dapat disimpulkan bahwa paling tidak, ada satu prediktor yang berpengaruh signifikan terhadap status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018.

Selanjutnya dilakukan pengujian parameter secara parsial untuk mengetahui prediktor yang signifikan terhadap model dengan hipotesis yang diuji adalah:

$$H_0 : \beta_{rs} = 0 ,$$

$$H_1 : \beta_{rs} \neq 0 , \text{ untuk } r = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ dan } s = 1, 2, 3 .$$

Berdasarkan Tabel 6.6, terlihat bahwa nilai statistik uji $|Z|$ untuk semua taksiran parameter lebih dari $Z_{0,05}$ sehingga tolak H_0 dan dapat disimpulkan bahwa semua prediktor signifikan terhadap model MLR pada tingkat signifikansi α sebesar 0,1.

Setelah dilakukan analisis terhadap model MLR multivariabel, maka didapatkan model MLR untuk pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 sebagai berikut:

$$\hat{\eta}_1(\mathbf{x}) = -4,6675 - 1,3393 X_1 - 4,3570 X_2 + 3,5622 X_3 + 5,0261 X_4 - 0,9057 X_5 , \quad (6.1)$$

$$\hat{\eta}_2(\mathbf{x}) = 5,1349 - 0,3340 X_1 + 5,6320 X_2 + 12,7454 X_3 + 6,2098 X_4 + 2,2650 X_5 , \quad (6.2)$$

$$\hat{\eta}_3(\mathbf{x}) = -2,0060 - 0,3605 X_1 - 4,3570 X_2 - 0,1417 X_3 + 1,4543 X_4 + 0,4409 X_5 . \quad (6.3)$$

Tahap akhir pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 dengan MLR dalam penelitian ini adalah interpretasi model. Interpretasi dilakukan hanya untuk model MLR pada persamaan (6.3), karena model ini merupakan model simultan (*joint model*) yang melibatkan respon multivariat. Misalkan dilakukan interpretasi untuk prediktor rasio dokter per 1000 penduduk. Interpretasinya adalah setiap penambahan 1 orang dokter per 1000 penduduk, maka kabupaten/kota memiliki kecenderungan sebesar 4,2815 kali mempunyai status IPKM dan IPM adalah IPKM B-DBK dan IPM tinggi daripada IPKM DBK dan IPM sedang.

6.3 Pemodelan Status IPKM dan IPM dengan GWMLR

Pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 menggunakan GWMLR diawali dengan menentukan letak geografis berdasarkan titik koordinat garis lintang (u_1) dan bujur (u_2) untuk setiap kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 (Lampiran 1), kemudian menghitung jarak *Euclidean* antara lokasi ke- i dan lokasi ke- j , untuk $i, j = 1, 2, \dots, 56$. Langkah selanjutnya adalah menentukan *bandwidth* optimum menggunakan metode CV. Setelah mendapatkan jarak *Euclidean* dan *bandwidth* optimum, menghitung pembobot spasial menggunakan fungsi *fixed kernel bi-square*.

Misalkan pembobot untuk Kabupaten Sambas ($i=1$) adalah $w(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{u}_1 = [u_{11} \ u_{21}]^T$. Untuk menghitung $w(\mathbf{u}_1)$ dilakukan dengan cara memasukkan jarak *Euclidean* dan nilai *bandwidth* optimum ke dalam fungsi pembobot *fixed kernel bi-square*. Pembobot yang didapat, digunakan untuk menaksir parameter model GWMLR di Kabupaten Sambas. Untuk mendapatkan penaksir parameter di Kabupaten Bengkayang ($i=2$) terlebih dahulu menghitung nilai pembobot $w(\mathbf{u}_2)$ dengan cara yang sama seperti menghitung $w(\mathbf{u}_1)$ pada Kabupaten Sambas. Perhitungan pembobot dilakukan sampai lokasi yang terakhir yaitu $w(\mathbf{u}_{56})$ untuk Kota Tarakan. Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 5 dan Lampiran 6, diperoleh nilai pembobot *fixed kernel bi-square* untuk semua lokasi seperti pada Lampiran 8.

Setelah mendapatkan pembobot untuk masing-masing kabupaten/kota, langkah selanjutnya adalah melakukan penaksiran parameter model GWMLR dengan metode MLE dan penyelesaian iteratif dengan metode BHHH pada persamaan (5.22). Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 5, diperoleh nilai CV sebesar 74,2712 dan *bandwidth* optimum sebesar 21,3378. Selanjutnya, diperoleh hasil taksiran parameter, *standard error*, dan nilai statistik uji Z model GWMLR untuk setiap kabupaten/kota yang dapat dilihat pada Lampiran 9. Sedangkan ringkasan statistik parameter model GWMLR disajikan pada Tabel 6.7.

Tabel 6.7 Ringkasan Statistik Parameter Model GWMLR

| Parameter | Minimum | Maksimum | Rata-rata | Standar Deviasi |
|----------------------------|----------|----------|-----------|-----------------|
| $\beta_{01}(\mathbf{u}_i)$ | -11,2962 | 0,0066 | -1,1285 | 2,1094 |
| $\beta_{11}(\mathbf{u}_i)$ | -4,9097 | 0,0019 | -0,4795 | 0,9047 |
| $\beta_{21}(\mathbf{u}_i)$ | -0,8253 | 3,9727 | 0,2470 | 0,7210 |
| $\beta_{31}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0038 | 13,7066 | 1,6560 | 2,7384 |
| $\beta_{41}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0045 | 9,4668 | 1,4428 | 2,1339 |
| $\beta_{51}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0343 | 0,4454 | 0,0345 | 0,0638 |
| $\beta_{02}(\mathbf{u}_i)$ | -15,4103 | 7,0209 | -1,6080 | 3,0291 |
| $\beta_{12}(\mathbf{u}_i)$ | -3,4265 | 0,0000 | -0,3331 | 0,6165 |
| $\beta_{22}(\mathbf{u}_i)$ | -1,2431 | 7,5665 | -0,3524 | 1,1292 |
| $\beta_{32}(\mathbf{u}_i)$ | -0,1008 | 27,7829 | 3,3495 | 5,4787 |
| $\beta_{42}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0188 | 16,3771 | 2,0987 | 3,1651 |
| $\beta_{52}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0359 | 3,1588 | 0,3433 | 0,6716 |
| $\beta_{03}(\mathbf{u}_i)$ | -69,0772 | 2,5735 | -3,1624 | 11,1446 |
| $\beta_{13}(\mathbf{u}_i)$ | -4,7541 | 0,0021 | -0,2747 | 0,7812 |
| $\beta_{23}(\mathbf{u}_i)$ | -46,5402 | 3,9402 | -1,8118 | 7,4987 |
| $\beta_{33}(\mathbf{u}_i)$ | -39,4853 | 2,5875 | -1,8050 | 6,3987 |
| $\beta_{43}(\mathbf{u}_i)$ | -1,3901 | 2,3970 | 0,2374 | 0,4401 |
| $\beta_{53}(\mathbf{u}_i)$ | -8,0271 | 1,4523 | -0,2049 | 1,2958 |

Setelah dilakukan penaksiran parameter, pembahasan selanjutnya adalah pengujian hipotesis model GWMLR. Pengujian hipotesis ini meliputi uji kesamaan model MLR dan GWMLR, uji serentak, dan uji parsial. Hipotesis yang digunakan untuk uji kesamaan adalah:

$$H_0 : \beta_{rs}(\mathbf{u}_i) = \beta_{rs}, \quad r = 1, 2, 3, 4, 5; \quad s = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, \dots, 56$$

$$H_1 : \text{Paling tidak ada satu } \beta_{rs}(\mathbf{u}_i) \neq \beta_{rs}.$$

Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 7, diperoleh nilai statistik uji Z sebesar 845,0513. Dari tabel distribusi normal standar diperoleh nilai $Z_{0,05}$ sebesar 1,6449. Karena nilai statistik uji Z lebih dari $Z_{0,05}$, maka tolak H_0 . Sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan yang signifikan

antara model MLR dan GWMLR atau ada pengaruh faktor geografis terhadap model.

Pengujian hipotesis selanjutnya adalah uji serentak. Hipotesis yang digunakan untuk uji ini adalah:

$$H_0 : \beta_{1s}(\mathbf{u}_i) = \beta_{2s}(\mathbf{u}_i) = \beta_{3s}(\mathbf{u}_i) = 0, \quad s = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, \dots, 56$$

$$H_1 : \text{Paling tidak ada satu } \beta_{rs}(\mathbf{u}_i) \neq 0, \quad r = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 6, diperoleh nilai statistik uji G^2 sebesar 461,4355. Dari tabel *chi-square* diperoleh nilai $\chi^2_{(0,1;6)}$ sebesar 10,6446. Karena nilai statistik G^2 lebih dari $\chi^2_{(0,1;6)}$, maka tolak H_0 . Sehingga dapat disimpulkan bahwa paling tidak, terdapat satu diantara faktor-faktor (pertumbuhan ekonomi, APM SMP, persentase penduduk yang minimal berpendidikan SMP, rasio dokter per 1000 penduduk, dan jumlah puskesmas) yang berpengaruh signifikan terhadap status IPKM dan IPM pada setiap kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018.

Pengujian yang terakhir pada pemodelan GWMLR adalah uji parsial. Uji ini digunakan untuk mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap IPKM dan IPM di setiap kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018. Untuk uji parsial ini, disajikan contoh hasil analisis data untuk Kota Samarinda, Kalimantan Timur (\mathbf{u}_{50}). Hipotesis yang digunakan untuk uji parsial parameter model GWMLR Kota Samarinda adalah:

$$H_0 : \beta_{rs}(\mathbf{u}_{50}) = 0,$$

$$H_1 : \beta_{rs}(\mathbf{u}_{50}) \neq 0, \quad r = 1, 2, \dots, 7; \quad s = 1, 2, 3.$$

Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 6, diperoleh nilai taksiran parameter (Est), *standard error* (Se), dan statistik uji parsial (Z) yang disajikan pada Tabel 6.8.

Tabel 6.8 Nilai Taksiran Parameter dan Statistik Uji Parsial
Model GWMLR Kota Samarinda

| Parameter | Est | Se | Z |
|----------------------------|---------|--------|----------|
| $\beta_{01}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0183 | 0,0089 | -2,0467* |
| $\beta_{11}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0089 | 0,0030 | -2,9690* |

Tabel 6.8 (Lanjutan)

| Parameter | Est | Se | Z |
|----------------------------|---------|--------|----------|
| $\beta_{01}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0183 | 0,0089 | -2,0467* |
| $\beta_{11}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0089 | 0,0030 | -2,9690* |
| $\beta_{21}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0001 | 0,0048 | -0,0126 |
| $\beta_{31}(\mathbf{u}_i)$ | 0,0311 | 0,0077 | 4,0189* |
| $\beta_{41}(\mathbf{u}_i)$ | 0,0333 | 0,0085 | 3,9023* |
| $\beta_{51}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0008 | 0,0007 | -1,1807 |
| $\beta_{02}(\mathbf{u}_i)$ | -0,2051 | 0,1446 | -1,4184 |
| $\beta_{12}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0153 | 0,0057 | -2,6863* |
| $\beta_{22}(\mathbf{u}_i)$ | -0,1515 | 0,1210 | -1,2516 |
| $\beta_{32}(\mathbf{u}_i)$ | 0,0104 | 0,1037 | 0,1002 |
| $\beta_{42}(\mathbf{u}_i)$ | 0,0572 | 0,0248 | 2,3078* |
| $\beta_{52}(\mathbf{u}_i)$ | -0,0180 | 0,0281 | -0,6395 |
| $\beta_{03}(\mathbf{u}_i)$ | 0,0356 | 0,0230 | 1,5437 |
| $\beta_{13}(\mathbf{u}_i)$ | 0,0003 | 0,0022 | 0,1345 |
| $\beta_{23}(\mathbf{u}_i)$ | 0,0417 | 0,0150 | 2,7755* |
| $\beta_{33}(\mathbf{u}_i)$ | 0,0219 | 0,0141 | 1,5510 |
| $\beta_{43}(\mathbf{u}_i)$ | 0,0166 | 0,0013 | 12,3740* |
| $\beta_{53}(\mathbf{u}_i)$ | 0,0133 | 0,0025 | 5,3935* |

* Signifikan pada $\alpha = 0,1$.

Berdasarkan Tabel 6.8, terlihat bahwa nilai statistik uji Z untuk parameter $\beta_{41}(\mathbf{u}_{50})$, $\beta_{42}(\mathbf{u}_{50})$, dan $\beta_{43}(\mathbf{u}_{50})$ lebih dari $Z_{0,05}$, sehingga tolak H_0 . Oleh karena itu, diperoleh kesimpulan bahwa rasio dokter per 1000 penduduk berpengaruh signifikan terhadap status IPKM dan IPM Kota Samarinda. Selanjutnya, dari Tabel 6.8 didapat model GWMLR Kota Samarinda sebagai berikut:

$$\hat{\zeta}_1(\mathbf{x}) = -0,0183 - 0,0089 X_1 - 0,0001 X_2 + 0,0311 X_3 + 0,0333 X_4 + \\ -0,0008 X_5, \quad (6.4)$$

$$\hat{\zeta}_2(\mathbf{x}) = -0,2051 - 0,0153 X_1 - 0,1515 X_2 + 0,0104 X_3 + 0,0572 X_4 + \\ -0,0180 X_5, \quad (6.5)$$

$$\hat{\zeta}_3(\mathbf{x}) = 0,0356 + 0,0003 X_1 + 0,0417 X_2 + 0,0219 X_3 + 0,0166 X_4 + 0,0133 X_5. \quad (6.6)$$

Interpretasi dari model GWMLR Kota Samarinda pada persamaan (6.6) adalah setiap penambahan 1 orang dokter per 1000 penduduk, Kota Samarinda memiliki kecenderungan sebesar 1,0167 kali mempunyai status IPKM dan IPM adalah IPKM B-DBK dan IPM tinggi daripada IPKM DBK dan IPM sedang.

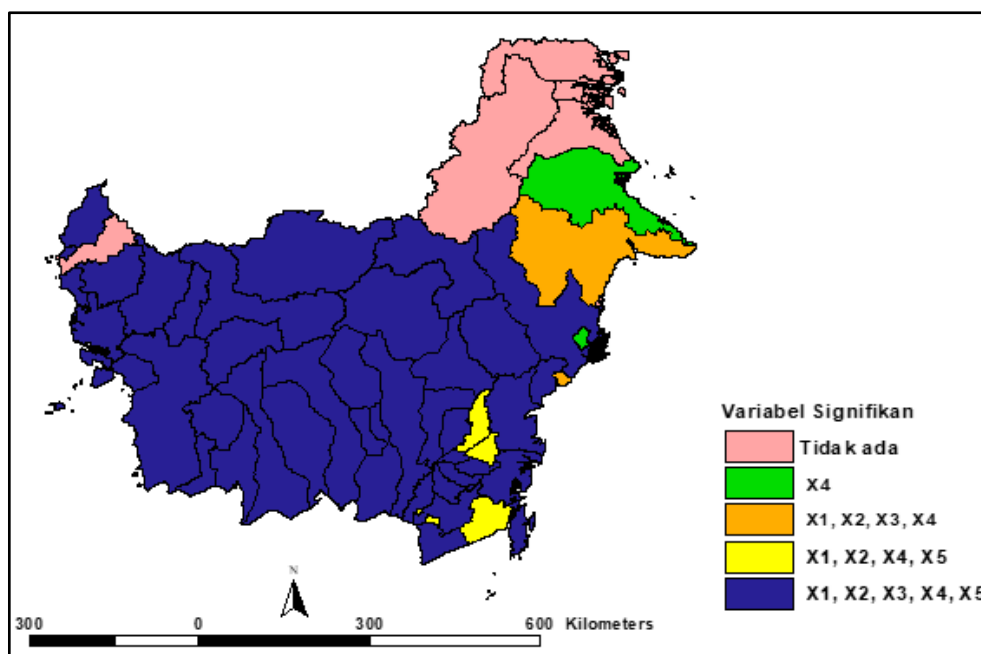
Berdasarkan hasil penaksiran parameter dan pengujian hipotesis model GWMLR untuk semua kabupaten/kota pada Lampiran 9, terdapat perbedaan jumlah parameter yang signifikan pada masing-masing kabupaten/kota. Pengelompokan kabupaten/kota berdasarkan variabel-variabel yang signifikan dalam model GWMLR disajikan pada Tabel 6.9 dan Gambar 6.3.

Tabel 6.9 Pengelompokan Kabupaten/Kota berdasarkan Variabel yang Signifikan dalam Model GWMLR

| Nama Kabupaten/Kota | Jumlah | Variabel |
|---|--------|--|
| Bengkayang, Kota Bontang, Malinau, Bulungan, Tana Tidung, Nunukan, Kota Tarakan | 7 | Tidak ada variabel yang signifikan |
| Berau, Kota Samarinda | 2 | Rasio dokter per 1000 penduduk (X_4) |
| Kutai Timur, Kota Balikpapan | 2 | Pertumbuhan ekonomi (X_1) APM SMP (X_2) Persentase penduduk yang minimal berpendidikan SMP (X_3) Rasio dokter per 1000 penduduk (X_4) |
| Tabalong, Tanah Bumbu, Balangan, Kota Banjarmasin, Kota Banjarbaru | 5 | Pertumbuhan ekonomi (X_1) APM SMP (X_2) Rasio dokter per 1000 penduduk (X_4) Jumlah puskesmas (X_5) |

Tabel 6.9 (Lanjutan)

| Nama Kabupaten/Kota | Jumlah | Variabel |
|--|--------|---|
| Sambas, Landak, Mempawah, Sanggau, Ketapang, Sintang, Kapuas Hulu, Sekadau, Melawi, Kayong Utara, Kubu Raya, Kota Pontianak, Kota Singkawang, Kotawaringin Barat, Kotawaringin Timur, Barito Selatan, Barito Utara, Sukamara, Lamandau, Seruyan, Katingan, Pulang Pisau, Gunung Mas, Barito Timur, Murung Raya, Kota Palangkaraya, Tanah Laut, Kotabaru, Banjar, Barito Kuala, Tapin, Hulu Sungai Selatan, Hulu Sungai Tengah, Hulu Sungai Utara, Paser, Kutai Barat, Kutai Kartanegara, Penajam Paser Utara, Mahakam Ulu. | 40 | Pertumbuhan ekonomi (X_1) APM SMP (X_2) Persentase penduduk yang minimal berpendidikan SMP (X_3) Rasio dokter per 1000 penduduk (X_4) Jumlah puskesmas (X_5). |

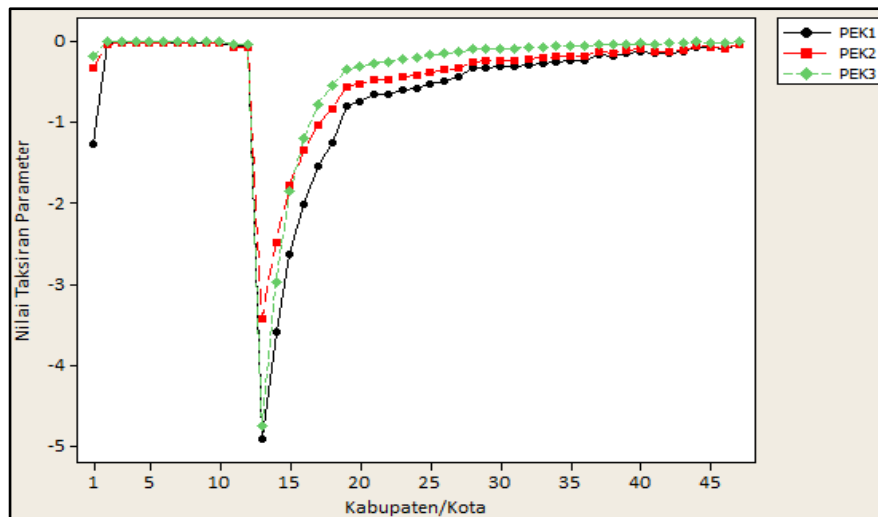


Gambar 6.3 Pemetaan Variabel yang Signifikan

Berdasarkan Tabel 6.9 dan Gambar 6.3, tampak bahwa dari 56 kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 ada 7 kabupaten/kota yang

mempunyai status IPKM dan IPM tidak dipengaruhi oleh pertumbuhan ekonomi, APM SMP, persentase penduduk minimal berpendidikan SMP, rasio dokter per 1000 penduduk, dan jumlah puskesmas. Berdasarkan konsep spasial heterogenitas, fenomena tersebut tidak menjadi masalah karena adanya variasi dari banyaknya parameter yang signifikan pada masing-masing lokasi. Untuk kepentingan substansinya, diperlukan penelitian lebih lanjut untuk mendapatkan faktor-faktor lain yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM 7 kabupaten/kota tersebut.

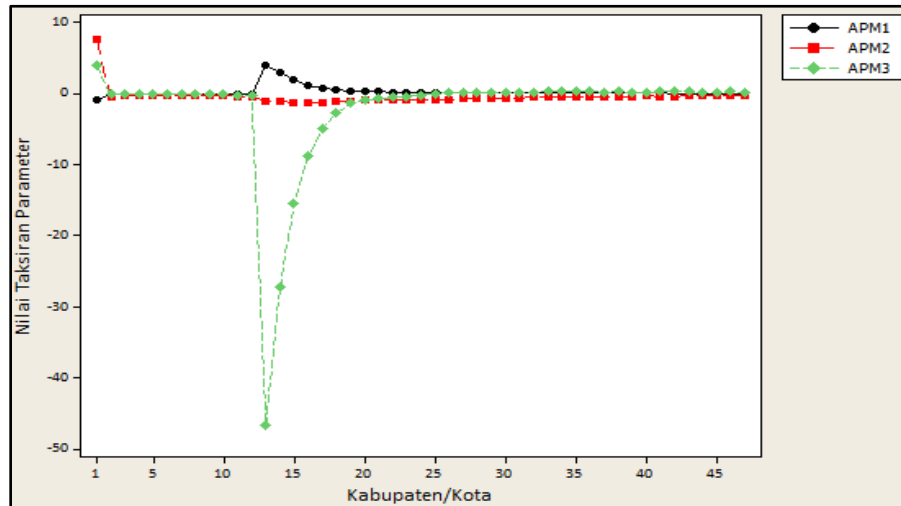
Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 9, disajikan grafik nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap model GWMLR untuk masing-masing prediktor seperti pada Gambar 6.4 sampai 6.8.



Gambar 6.4 Nilai Taksiran Parameter yang Signifikan terhadap Model GWMLR untuk Pertumbuhan Ekonomi

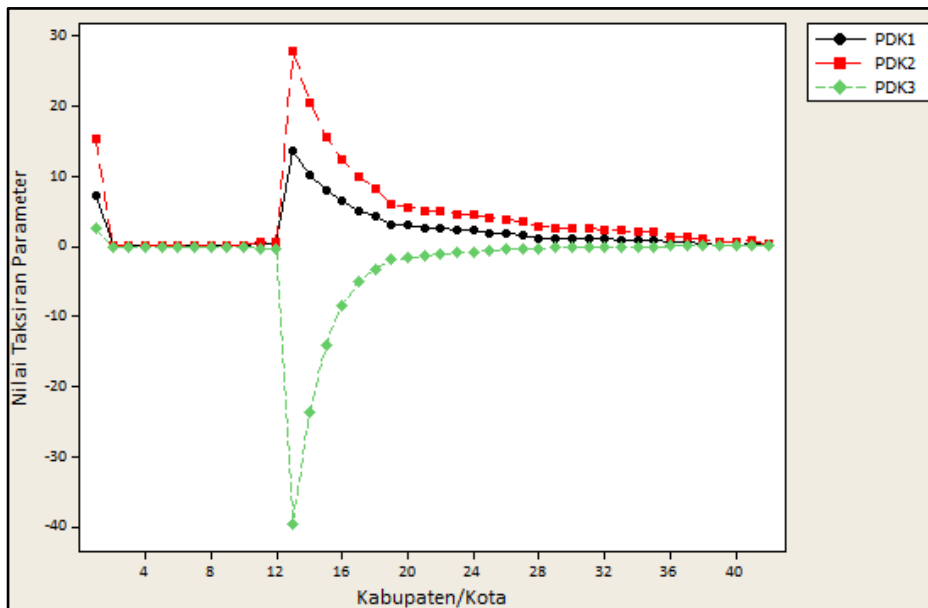
Gambar 6.4 menampilkan nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap model GWMLR untuk pertumbuhan ekonomi (PEK). Banyaknya nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap ketiga komponen model GWMLR (PEK1, PEK2, dan PEK3) sebanyak 141 parameter yang tersebar pada 47 kabupaten/kota, dimana 47 parameter untuk model marjinal status IPKM (PEK1), 47 parameter untuk model marjinal status IPM (PEK2), dan 47 parameter untuk model bersama (simultan) status IPKM dan IPM (PEK3). Model marjinal PEK1 dan PEK2 masing-masing menunjukkan adanya hubungan antara pertumbuhan

ekonomi dan status IPKM dan IPM secara individu. Sedangkan, model simultan PEK3 menunjukkan adanya hubungan antara pertumbuhan ekonomi dan status IPKM dan IPM secara simultan.



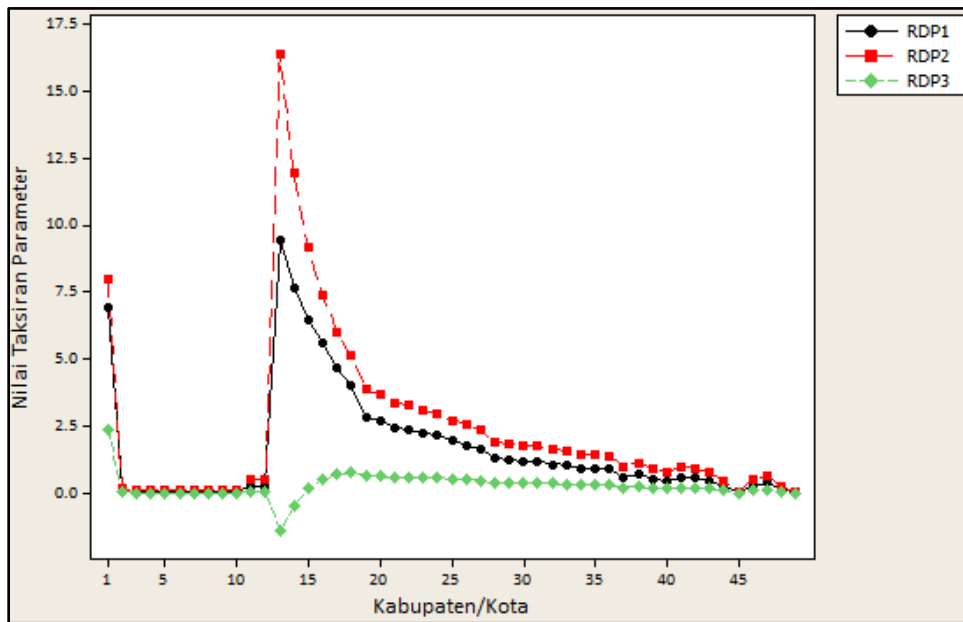
Gambar 6.5 Nilai Taksiran Parameter yang Signifikan terhadap Model GWMLR untuk APM SMP

Gambar 6.5 menampilkan nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap model GWMLR untuk APM SMP (AMP). Banyaknya nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap ketiga komponen model GWMLR (AMP1, AMP2, dan AMP3) sebanyak 141 parameter yang tersebar pada 47 kabupaten/kota, dimana 47 parameter untuk model marjinal status IPKM (APM1), 47 parameter untuk model marjinal status IPM (APM2), dan 47 parameter untuk model simultan status IPKM dan IPM (APM3). Model marjinal APM1 dan APM2 masing-masing menunjukkan adanya hubungan antara APM SMP dan status IPKM dan IPM secara individu. Sedangkan, model simultan APM3 menunjukkan adanya hubungan antara APM SMP dan status IPKM dan IPM secara simultan. Terdapat perbedaan nama kabupaten/kota untuk Gambar 6.4 dan 6.5 walaupun banyaknya parameter yang signifikan sama.



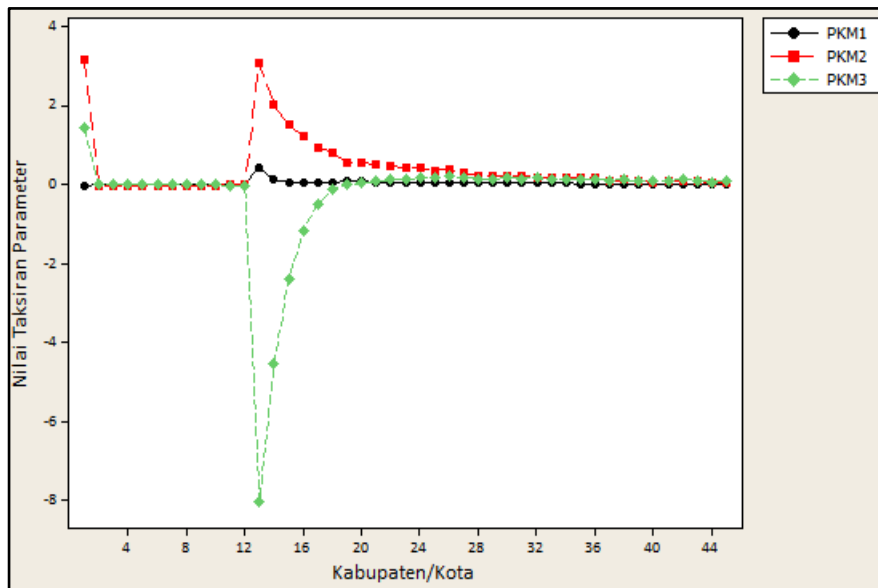
Gambar 6.6 Nilai Taksiran Parameter yang Signifikan terhadap Model GWMLR untuk Persentase Penduduk yang berpendidikan Minimal SMP

Gambar 6.6 menampilkan nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap model GWMLR untuk persentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP (PDK). Banyaknya nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap ketiga komponen model GWMLR (PDK1, PDK2, dan PDK3) sebanyak 126 parameter yang tersebar pada 42 kabupaten/kota, dimana 42 parameter untuk model marjinal status IPKM (PDK1), 42 parameter untuk model marjinal status IPM (PDK2), dan 47 parameter untuk model simultan status IPKM dan IPM (PDK3). Model marjinal PDK1 dan PDK2 masing-masing menunjukkan adanya hubungan antara persentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP dan status IPKM dan IPM secara individu. Sedangkan, model simultan PDK3 menunjukkan adanya hubungan antara persentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP dan status IPKM dan IPM secara simultan.



Gambar 6.7 Nilai Taksiran Parameter yang Signifikan terhadap Model GWMLR untuk Rasio Dokter per 1000 Penduduk

Gambar 6.7 menampilkan nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap model GWMLR untuk rasio dokter per 1000 penduduk (RDP). Banyaknya nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap ketiga komponen model GWMLR (RDP1, RDP2, dan RDP3) sebanyak 147 parameter yang tersebar pada 49 kabupaten/kota, dimana 49 parameter untuk model marjinal status IPKM (RDP1), 49 parameter untuk model marjinal status IPM (RDP2), dan 49 parameter untuk model simultan status IPKM dan IPM (RDP3). Model marjinal RDP1 dan RDP2 masing-masing menunjukkan adanya hubungan antara rasio dokter per 1000 penduduk dan status IPKM dan IPM secara individu. Sedangkan, model simultan RDP3 menunjukkan adanya hubungan antara rasio dokter per 1000 penduduk dan status IPKM dan IPM secara simultan.



Gambar 6.8 Nilai Taksiran Parameter yang Signifikan terhadap Model GWMLR untuk Jumlah Puskesmas

Gambar 6.8 menampilkan nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap model GWMLR untuk jumlah puskesmas (PKM). Banyaknya nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap ketiga komponen model GWMLR (PKM1, PKM2, dan PKM3) sebanyak 135 parameter yang tersebar pada 45 kabupaten/kota, dimana 45 parameter untuk model marjinal status IPKM (PKM1), 45 parameter untuk model marjinal status IPM (PKM2), dan 45 parameter untuk model simultan status IPKM dan IPM (PKM3). Model marjinal PKM1 dan PKM2 masing-masing menunjukkan adanya hubungan antara jumlah puskesmas dan status IPKM dan IPM secara individu. Sedangkan, model simultan PKM3 menunjukkan adanya hubungan antara jumlah puskesmas dan status IPKM dan IPM secara simultan.

Berdasarkan Gambar 6.4 sampai 6.8, total banyaknya nilai taksiran parameter yang signifikan terhadap model GWMLR untuk pertumbuhan ekonomi, APM SMP, persentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP, rasio dokter per 1000 penduduk, dan jumlah puskesmas adalah sebanyak 690 parameter.

BAB 7

KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini membahas kesimpulan hasil-hasil yang diperoleh pada penaksiran parameter, penentuan statistik uji, distribusi statistik uji, daerah penolakan pengujian hipotesis parameter model MLR dan GWMLR, penerapan model MLR dan GWMLR pada pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan, dan saran yang diajukan untuk penelitian lanjutan.

7.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan hasil pembahasan model MLR dapat disimpulkan:

1.1 Model MLR adalah model regresi yang dikembangkan dari distribusi multinomial. Model MLR yang dibahas mempunyai dua respon kategorik, dimana masing-masing respon mempunyai dua kategori dan terdapat dependensi antar respon, dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut:

$$\eta_1(\mathbf{x}) = \text{logit}(\pi_1(\mathbf{x})) = \ln\left(\frac{\pi_1(\mathbf{x})}{1 - \pi_1(\mathbf{x})}\right) = \boldsymbol{\beta}_1^T \mathbf{x}$$

$$\eta_2(\mathbf{x}) = \text{logit}(\pi_2(\mathbf{x})) = \ln\left(\frac{\pi_2(\mathbf{x})}{1 - \pi_2(\mathbf{x})}\right) = \boldsymbol{\beta}_2^T \mathbf{x}$$

$$\eta_3(\mathbf{x}) = \ln(\psi_1(\mathbf{x})) = \ln\left(\frac{\pi_{11}(\mathbf{x})\pi_{00}(\mathbf{x})}{\pi_{10}(\mathbf{x})\pi_{01}(\mathbf{x})}\right) = \boldsymbol{\beta}_3^T \mathbf{x}.$$

1.2 Penaksir parameter model MLR diperoleh dengan metode MLE. Penaksir maksimum likelihood (ML) parameter model MLR berbentuk fungsi yang tidak eksplisit. Penaksir ML dapat diperoleh dengan prosedur iteratif menggunakan metode Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH). Proses iterasi dengan metode BHHH menggunakan vektor gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$ yang berbentuk:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right]^T & \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right]^T & \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T}\right]^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{1}{n}[\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta})].$$

1.3 Pengujian hipotesis parameter model MLR meliputi uji serentak dan uji parsial. Statistik uji untuk uji serentak adalah statistik *Wilk's lambda* yang diturunkan berdasarkan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT), yaitu:

$$G_1^2 = 2(\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*)),$$

dimana $\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ dan $\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*)$ adalah masing-masing maksimum fungsi log-likelihood dibawah populasi dan dibawah hipotesis nol (H_0), yaitu:

$$\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \hat{\pi}_{11i} + y_{10i} \ln \hat{\pi}_{10i} + y_{01i} \ln \hat{\pi}_{01i} + y_{00i} \ln \hat{\pi}_{00i}),$$

$$\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) = \sum_{i=1}^n (y_{11i} \ln \hat{\pi}_{11i}^* + y_{10i} \ln \hat{\pi}_{10i}^* + y_{01i} \ln \hat{\pi}_{01i}^* + y_{00i} \ln \hat{\pi}_{00i}^*).$$

Statistik G_1^2 berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas v_1 . Daerah penolakan pada tingkat signifikansi α adalah $G_1^2 > \chi_{(\alpha, v_1)}^2$.

Statistik uji untuk pengujian parameter model MLR secara parsial adalah statistik Wald, yaitu:

$$Z_1 = \frac{\hat{\beta}_{rs}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_{rs})}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1).$$

Statistik Z_1 berdistribusi normal standar. Daerah penolakan pada tingkat signifikansi α adalah $|Z_1| > Z_{\alpha/2}$.

2. Berdasarkan hasil pembahasan model GWMLR dapat disimpulkan:

2.1 Model GWMLR adalah model MLR dengan semua parameter bergantung pada lokasi geografis. Model GWMLR pada lokasi pengamatan ke- i , untuk

$i = 1, 2, \dots, n$ dengan koordinat $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \quad u_{2i}]^T$ adalah:

$$\zeta_1(\mathbf{x}_i) = \text{logit}(p_1(\mathbf{x}_i)) = \ln\left(\frac{p_1(\mathbf{x}_i)}{1-p_1(\mathbf{x}_i)}\right) = \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i$$

$$\zeta_2(\mathbf{x}_i) = \text{logit}(p_2(\mathbf{x}_i)) = \ln\left(\frac{p_2(\mathbf{x}_i)}{1-p_2(\mathbf{x}_i)}\right) = \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i$$

$$\zeta_3(\mathbf{x}_i) = \ln(\psi_2(\mathbf{x}_i)) = \ln\left(\frac{p_{11}(\mathbf{x}_i)p_{00}(\mathbf{x}_i)}{p_{10}(\mathbf{x}_i)p_{01}(\mathbf{x}_i)}\right) = \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i.$$

2.2 Penaksiran parameter model GWMLR dilakukan secara lokal pada setiap lokasi pengamatan dan menggunakan pembobot spasial. Penaksiran parameter menggunakan metode MLE dan disimpulkan bahwa, penaksir ML parameter model GWMLR berbentuk fungsi yang tidak eksplisit. Penaksir ML parameter model GWMLR tidak dapat diperoleh secara analitik dan membutuhkan pendekatan secara numerik. Pendekatan numerik yang digunakan untuk mendapatkan penaksir ML parameter model GWMLR adalah metode BHHH. Vektor gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$ yang digunakan pada prosedur iteratif menggunakan metode BHHH adalah:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T & \left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T & \left[\frac{\partial L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = -\frac{1}{n}[\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))],$$

dimana $L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$ adalah fungsi likelihood terboboti untuk lokasi ke- i yang berbentuk:

$$L^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{j=1}^n (y_{11j} \ln p_{11j} + y_{10j} \ln p_{10j} + y_{01j} \ln p_{01j} + y_{00j} \ln p_{00j}) w_{ij}$$

dengan w_{ij} adalah pembobot spasial fungsi *fixed kernel bi-square*, yaitu

$$w_{ij} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{d_{ij}}{b} \right)^2 \right]^2, & \text{untuk } d_{ij} < b \\ 0, & \text{untuk } d_{ij} \geq b. \end{cases}$$

2.3 Pengujian hipotesis parameter model GWMLR meliputi uji kesamaan model MLR dan GWMLR, uji serentak dan uji parsial. Statistik uji untuk uji kesamaan model MLR dan GWMLR adalah statistik Voung, yaitu:

$$Z_V = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}},$$

dimana

$$M_i = \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)) - \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

$$\ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{i=1}^n (y_{1i} \ln \hat{p}_{1i} + y_{10i} \ln \hat{p}_{10i} + y_{01i} \ln \hat{p}_{01i} + y_{00i} \ln \hat{p}_{00i}),$$

$$\ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{i=1}^n (y_{1i} \ln \hat{\pi}_{1i} + y_{10i} \ln \hat{\pi}_{10i} + y_{01i} \ln \hat{\pi}_{01i} + y_{00i} \ln \hat{\pi}_{00i}),$$

$$\bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i,$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_3^T]^T$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i) = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_3^T(\mathbf{u}_i)]^T$ adalah berturut-turut penaksir ML parameter model MLR dan GWMLR yang diperoleh dengan metode BHHH.

Statistik Z_V berdistribusi normal standar. Daerah penolakan pada tingkat signifikansi α adalah $|Z_V| > Z_{\alpha/2}$.

Statistik uji untuk uji serentak adalah statistik *Wilk's lambda* yang diperoleh dengan metode MLRT, yaitu:

$$G_2^2 = 2(\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)),$$

dimana $\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*)$ dan $\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*)$ adalah berturut-turut maksimum fungsi log-likelihood dibawah populasi dan dibawah H_0 , yaitu:

$$\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^*) = \sum_{i=1}^n (y_{1i} \ln \hat{p}_{1i} + y_{10i} \ln \hat{p}_{10i} + y_{01i} \ln \hat{p}_{01i} + y_{00i} \ln \hat{p}_{00i}),$$

$$\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^*) = \sum_{i=1}^n (y_{1i} \ln \hat{p}_{1i}^* + y_{10i} \ln \hat{p}_{10i}^* + y_{01i} \ln \hat{p}_{01i}^* + y_{00i} \ln \hat{p}_{00i}^*).$$

Statistik G_2^2 berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas v_2 . Daerah penolakan pada tingkat signifikansi α adalah $G_2^2 > \chi_{(\alpha, v_2)}^2$.

Statistik uji untuk pengujian parameter model GWMLR secara parsial adalah statistik Wald, yaitu:

$$Z_2 = \frac{\hat{\beta}_{rs}(\mathbf{u}_j)}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_{rs}(\mathbf{u}_j))}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1).$$

Statistik Z_2 berdistribusi normal standar. Daerah penolakan pada tingkat signifikansi α adalah $|Z_2| > Z_{\alpha/2}$.

3. Berdasarkan hasil dan pembahasan penerapan model MLR dan GWMLR pada pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:
 - 3.1 Pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan dengan GWMLR diperoleh hasil yang berbeda dengan MLR. Pada model GWMLR, terdapat perbedaan prediktor yang berpengaruh signifikan terhadap status IPKM dan IPM untuk masing-masing kabupaten/kota.
 - 3.2 Berdasarkan model MLR dan GWMLR, faktor-faktor yang berpengaruh terhadap status IPKM dan IPKM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 adalah pertumbuhan ekonomi, Angka Partisipasi Murni (APM) Sekolah Menengah Pertama (SMP), persentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP, rasio dokter per 1000 penduduk, dan jumlah puskesmas.

7.2 Saran

Saran yang diajukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Standar *error* taksiran parameter model MLR dan GWMLR yang didapat pada kajian terapan mempunyai nilai yang sangat kecil, terutama pada model MLR. Hal ini menyebabkan nilai statistik uji parsial menjadi sangat besar. Oleh karena itu, diperlukan penelitian lanjutan yang membahas kajian simulasi untuk mendapatkan nilai standar *error* taksiran parameter dan nilai statistik uji parsial yang optimal.
2. Penelitian ini dapat dikembangkan lagi untuk pembobot-pembobot spasial yang lain misalnya kernel Gaussian, tri-cube, eksponensial, atau boxcar (baik bersifat *fixed* maupun *adaptive*).
3. Penaksir ML untuk penelitian selanjutnya dapat diperoleh dengan pendekatan numerik yang lain, misalnya Quasi-Newton sebagai alternatif.

4. Variabel respon pada model MLR dan GWMLR tidak hanya terbatas untuk dua kategori, tetapi bisa juga untuk tiga atau lebih kategori yang bersifat nominal maupun ordinal. Sehingga penelitian ini dapat dikembangkan untuk model *Geographically Weighted Multivariat Multinomial Logistic Regression* (GWMMLR) atau *Geographically Weighted Multivariat Ordinal Logistic Regression* (GWMOLR).
5. Penerapan model MLR dan GWMLR pada pemodelan status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 masih perlu dilakukan untuk penelitian selanjutnya, untuk mendapatkan faktor-faktor lain yang diduga berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM.
6. Berdasarkan faktor-faktor yang signifikan berpengaruh terhadap status IPKM dan IPM kabupaten/kota di Pulau Kalimantan tahun 2018 dari hasil penelitian ini, instansi atau pihak terkait dapat mengambil keputusan atau kebijakan yang dapat meningkatkan pembangunan kesehatan masyarakat dan pembangunan manusia, khususnya pada kabupaten/kota di Pulau Kalimantan sehingga sumber daya manusia yang berkualitas dan berdaya saing dapat terwujud.

DAFTAR PUSTAKA

- Agresti, A. (2013), *Categorical Data Analysis*, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.
- Atkinson, P., German, S., Sear, D. dan Clarck, M. (2003), "Exploring the Relations Between Riverbank Erosion and Geomorphological Controls Using Geographically Weighted Logistic Regression", *Geographical Analysis*, Vol. 35, No. 1, hal. 58-82.
- Badan Pusat Statistik (2014), *Indeks Pembangunan Manusia 2013*, Jakarta.
- Badan Pusat Statistik (2019), *Indeks Pembangunan Manusia 2018*, Jakarta.
- Bender, R. dan Grouven, U. (1997), "Ordinal Regression Model in Medical Research", *Journal of the Royal College of Physicians of London*, Vol. 31, No. 5, hal. 546-551.
- Bianco, A. M. dan Martinez, E. (2009), "Robust Testing in the Logistic Regression Model", *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 53, hal. 4095-4105.
- Bilder, C. R. dan Loughin, M. T. (2015), *Analysis of Categorical Data with R*, CRC Press, Boca Raton, USA.
- Bohning, D. (1992), "Multinomial Logistic Regression Algorithm", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 44, No. 1, hal. 197-200.
- Brunsdon, C., Fotheringham, A. S., dan Charlton, M. E. (1996), "Geographically Weighted Regression: A Method for Exploring Spatial Nonstationarity", *Geographical Analysis*, Vol. 28, No. 4, hal. 281-298.
- Cessie, S. Le. dan Houwelingen, J. C. V. (1994), "Logistic Regression for Correlated Binary Data", *Journal of the Royal Statistical Society Series C (Applied Statistics)*, Vol. 43, hal. 95-108.
- Charlton, M. dan Fotheringham, A. S. (2009), "Geographically Weighted Regression", *White Paper*, National Center for Geocomputation, National University of Ireland Maynooth, Ireland.
- Chen, V.Y dan Yang, T.C. (2012), "SAS Macro Programs for Geographically Weighted Generalized Linear Modeling with Spatial Point Data: Applications to Health Research", *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, Vol. 107, hal. 262-273.

- Dale, J. R. (1986), "Global Cross-Ratio Models for Bivariate, Discrete, Ordered Responses", *Biometrics*, Vol. 42, hal. 909-917.
- El-Sayed, A. M., Islam, M. A., dan Alzaid, A. A. (2013), "Estimation and Test of Measures of Association for Correlated Binary Data", *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, Vol. 36, No. 4, hal. 985-1008.
- Fathurahman, M., Purhadi, Sutikno, dan Ratnasari, V. (2016), "Pemodelan Geographically Weighted Logistic Regression pada Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat di Provinsi Papua", *Prosiding Seminar Nasional MIPA 2016* hal. 34-42. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran, Jatinangor.
- Fibriyani, V., Latra, I. N., dan Purhadi. (2015), "Geographically Weighted Multinomial Logistic Regression Model (Case Study: Human Development Index Value and Healths Status Areas of Districts/Cities 2013 in Sumatera)", *Proceedings of the IConSSE FSM SWCU*, hal. 13-19.
- Fotheringham, A. S., Brunson, C., dan Charlton, M. (1996), "Geographically Weighted Regression: A Method for Exploring Spatial Nonstationarity", *Geographical Analysis*, Vol. 28, hal. 1905-1927.
- Fotheringham, A. S., Brunson, C., dan Charlton, M. (1998), "Geographically Weighted Regression: A Natural Evolution of the Expansion Method for Spatial Data Analysis", *Environment and Planning*, Vol. 30, hal. 1905-1927.
- Fotheringham, A. S., Brunson, C. dan Charlton, M. (2002), *Geographically Weighted Regression: the analysis of spatially varying relationships*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, UK.
- Glonek, G. F .V. dan McCullagh, P. (1995), "Multivariate Logistic Models", *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological)*, Vol. 57, Issue 3, hal. 533-546.
- Greene, W. H. (2008), *Econometric Analysis*, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, USA.
- Henningsen, A. dan Toomet, O. (2011), "maxLik: Package for Maximum Likelihood Estimation in R", *Computational Statistics*, Vol. 26, hal. 443-458.
- Hogg, R. V., McKean, J. W., dan Craig, A. T. (2013), *Introduction to Mathematical Statistics*, Seventh Edition, Pearson Education, Inc., Boston, USA.
- Hosmer, D. W., Jovanovic, B., dan Lemeshow, S. (1989), "Best Subsets Logistic Regression", *Biometrics*, Vol. 45, No. 4, hal. 1265-1270.

- Hosmer, D. W., Lemeshow, S., dan Surdivant, R. X. (2013), *Applied Logistic Regression*, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.
- Hosseinian, S., dan Morgenthaler, S. (2011), “Robust Binary Regression”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 141, hal. 1497-1509.
- Islam, M. A., Chowdhury, R. I., dan Briollais, L. (2012), “A Binary Model for Testing Dependence in Outcomes”, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, Vol. 35, No. 4, hal. 845-858.
- Johnson, N. L., Kotz, S., dan Balakrishnan, N. (1997), *Discrete Multivariate Distributions*, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.
- Kementerian Kesehatan (2010a), *Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat*, Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan, Jakarta.
- Kementerian Kesehatan (2010b), *Pedoman Umum Penanggulangan Daerah Bermasalah Kesehatan Kabupaten/Kota*, Kementerian Kesehatan, Jakarta.
- Kementerian Kesehatan (2011), *Buku Saku Penanggulangan Daerah Bermasalah Kesehatan*, Kementerian Kesehatan, Jakarta.
- Kementerian Kesehatan (2014), *Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat*, Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan, Jakarta.
- Kementerian Kesehatan (2019), *Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat*, Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan, Jakarta.
- Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., dan Neter, J. (2004), *Applied Linear Regression Models*, McGraw-Hill, New York, USA.
- Luo, J. dan Nagaraj, K. (2008), “Modeling Urban Growth with Geographically Weighted Multinomial Logistic Regression”, *Proceedings of SPIE*, the International Society for Optical Engineering, Vol. 7144, hal. 1-11.
- Miller, H. J. (2004), “Tobler’s First Law and Spatial Analysis”, *Annals of the Association of American Geographers*, Vol. 94, hal. 284-289.
- Molenberghs, G. dan Lesaffre, E. (1999), “Marginal Modelling of Multivariate Categorical Data”, *Statistics in Medicine*, Vol. 18, hal. 2237-2255.
- Newberry, J. dan Taylor, A. (2005), *Family Health Support: Using social determinant of health and ecological models to plan holistic community services*, The Centre for Research and Education in Human Services, Ottawa, Canada.

- O'Brien, S. M. dan Dunson, D. B. (2004), "Bayesian Multivariate Logistic Regression", *Biometrics*, Vol. 60, hal. 739-746.
- Octavanny, M. A. D., Budiantara, I. N., dan Ratnasari, V. (2017), "Pemodelan Faktor-faktor yang memengaruhi Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat Provinsi Jawa Timur Menggunakan Pendekatan Regresi Semiparametrik", *Jurnal Sains dan Seni ITS*, Vol. 6, No. 1, hal. 122-128.
- Palmgren, J. (1989), "Regression Models for Bivariate Binary Responses", *Technical Report 101*, Department of Biostatistics, School of Public Health and Community Medicine, Seattle.
- Pawitan, Y. (2001), *In All Likelihood: Statistical Modelling and Inference using Likelihood*, Clarendon Press, Oxford, UK.
- Pregibon, D. (1981), "Logistic Regression Diagnostics", *The Annals of Statistics*, Vol. 9, No. 4, hal. 705-724.
- Purhadi, Rifada, M. dan S.P. Wulandari. (2012), "Geographically Weighted Ordinal Logistic Regression Model", *International Journal of Mathematics and Computation*, Vol. 16, No. 3, hal. 116-126.
- Rencher, A. C. (2000), *Linear Model in Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.
- Rodrigues, M., de la Riva, J., dan Fotheringham, S. (2014), "Modeling the Spatial Variation of the Explanatory Factors of Human-caused Wildfires in Spain using Geographically Weighted Logistic Regression", *Applied Geography*, Vol. 48, hal. 52-63.
- Samadi, H., Asdi, Y., dan Efendi. (2017), "Penerapan Model Regresi Spasial dalam menentukan Faktor-faktor yang mempengaruhi Indeks Pembangunan Manusia di Kabupaten/Kota Provinsi Sumatera Barat", *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. 6, No. 4, hal. 80-89.
- Shoukri, M. M., Martin, S. W., dan Mian, I. U. H. (1995), "Maximum Likelihood Estimation of the Kappa Coefficient from Models of Matched Binary Responses", *Statistics in Medicine*, Vol. 14, hal. 83-99.
- Shoukri, M. M., dan Mian, I. U. H. (1996), "Maximum Likelihood Estimation of the Kappa Coefficient from Bivariate Logistic Regression", *Statistics in Medicine*, Vol. 15, hal. 1409-1419.
- Young, Q. H. (1989), "Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypothesis", *Econometrica*, Vol. 57, hal. 307-333.

- Wang, Y., Kockelman, K.M. dan Wang, X. (2011), "Anticipating Land Use Change Using Geographically Weighted Regression Models for Discrete Response", *Transportation Research Record* No. 2245, hal. 111-123.
- Wardhani, N.W.S, Pramoedyo, H. dan Dianati, Y.N. (2014), "Food Security and Vulnerability Modeling of East Java Province based on Geographically Weighted Ordinal Logistic Semiparametric (GWOLRS) Model", *Journal of Degraded and Mining Lands Management*, Vol. 2, No. 1, hal. 231-234.
- Wu, W. dan Zhang, L. (2013), "Comparison of Spatial and Non-Spatial Logistic Regression Models for Modeling the Occurance of Cloud Cover in North-Eastern Puerto Rico", *Applied Geography*, Vol. 37, hal. 52-62.
- Yin, C., Wang, Z. dan Zhang, H. (2014), "Asymptotic Properties of Maximum Likelihood Estimator for Two-Step Logit Models", *Statistics and Probability Letters*, Vol. 85, hal. 135-143.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

Lampiran 1 Data Penelitian

| KABUPATEN/KOTA | u ₁ | u ₂ | Y ₁ | Y ₂ | X ₁ | X ₂ | X ₃ | X ₄ | X ₅ |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Sambas | 1,49 | 108,77 | 0 | 0 | 5,06 | 94,97 | 35,58 | 0,100 | 28 |
| Bengkayang | 1,04 | 108,93 | 0 | 0 | 5,10 | 90,60 | 43,42 | 0,074 | 17 |
| Landak | 0,51 | 109,14 | 0 | 0 | 5,37 | 93,20 | 44,47 | 0,055 | 16 |
| Mempawah | 0,35 | 108,14 | 0 | 0 | 5,12 | 91,69 | 46,83 | 0,071 | 14 |
| Sanggau | 0,35 | 109,32 | 0 | 0 | 5,87 | 90,46 | 41,48 | 0,075 | 20 |
| Ketapang | -1,68 | 109,46 | 0 | 0 | 4,47 | 93,36 | 41,90 | 0,122 | 27 |
| Sintang | 0,18 | 110,99 | 0 | 0 | 7,99 | 89,86 | 41,66 | 0,081 | 24 |
| Kapuas Hulu | 0,84 | 111,74 | 0 | 0 | 5,47 | 87,34 | 48,11 | 0,062 | 24 |
| Sekadau | 0,06 | 110,36 | 0 | 0 | 5,23 | 90,06 | 41,51 | 0,039 | 13 |
| Melawi | -0,73 | 111,23 | 0 | 0 | 5,88 | 86,81 | 42,61 | 0,060 | 13 |
| Kayong Utara | -1,25 | 109,01 | 0 | 0 | 5,44 | 94,12 | 35,59 | 0,015 | 10 |
| Kubu Raya | -0,38 | 108,95 | 0 | 0 | 5,02 | 97,01 | 47,27 | 0,152 | 22 |
| Kota Pontianak | -0,04 | 109,26 | 1 | 1 | 5,49 | 96,34 | 71,19 | 0,464 | 21 |
| Kota Singkawang | 0,88 | 108,82 | 1 | 1 | 5,03 | 98,82 | 51,17 | 0,222 | 15 |
| Kotawaringin Barat | -2,55 | 110,56 | 1 | 1 | 4,71 | 79,80 | 59,78 | 0,089 | 21 |
| Kotawaringin Timur | -2,23 | 111,56 | 0 | 1 | 6,93 | 73,82 | 54,43 | 0,105 | 19 |
| Kapuas | -1,91 | 113,10 | 0 | 0 | 7,01 | 74,20 | 49,26 | 0,071 | 30 |
| Barito Selatan | -1,96 | 114,45 | 0 | 0 | 5,12 | 92,08 | 58,61 | 0,044 | 12 |
| Barito Utara | -0,72 | 114,59 | 0 | 0 | 5,95 | 84,73 | 60,22 | 0,053 | 21 |
| Sukamara | -2,56 | 110,51 | 1 | 0 | 6,17 | 69,48 | 51,80 | 0,023 | 5 |
| Lamandau | -1,81 | 110,78 | 1 | 0 | 6,86 | 87,93 | 51,04 | 0,038 | 11 |

Lampiran 1 (Lanjutan)

| KABUPATEN/KOTA | u ₁ | u ₂ | Y ₁ | Y ₂ | X ₁ | X ₂ | X ₃ | X ₄ | X ₅ |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Seruyan | -2,13 | 111,00 | 0 | 0 | 5,21 | 79,25 | 49,61 | 0,034 | 12 |
| Katingan | -1,95 | 111,81 | 0 | 0 | 6,59 | 76,05 | 56,53 | 0,051 | 17 |
| Pulang Pisau | -2,50 | 112,83 | 0 | 0 | 5,94 | 79,06 | 54,68 | 0,037 | 15 |
| Gunung Mas | -0,99 | 112,95 | 0 | 1 | 6,87 | 79,25 | 62,59 | 0,038 | 18 |
| Barito Timur | -2,01 | 114,90 | 0 | 1 | 5,71 | 75,71 | 64,18 | 0,037 | 11 |
| Murung Raya | -0,03 | 113,05 | 0 | 0 | 5,61 | 75,88 | 45,06 | 0,045 | 18 |
| Kota Palangkaraya | -2,21 | 113,87 | 1 | 1 | 7,12 | 73,85 | 81,37 | 0,237 | 11 |
| Tanah Laut | -3,84 | 114,66 | 1 | 0 | 4,65 | 72,60 | 45,87 | 0,086 | 23 |
| Kotabaru | -3,53 | 114,91 | 0 | 0 | 4,88 | 72,80 | 45,03 | 0,082 | 33 |
| Banjar | -3,28 | 114,49 | 1 | 0 | 5,01 | 68,37 | 43,89 | 0,104 | 26 |
| Barito Kuala | -3,03 | 114,04 | 0 | 0 | 5,21 | 73,87 | 47,36 | 0,085 | 19 |
| Tapin | -2,87 | 114,87 | 0 | 0 | 5,02 | 71,59 | 48,26 | 0,081 | 14 |
| Hulu Sungai Selatan | -2,72 | 114,95 | 0 | 0 | 6,14 | 74,00 | 47,19 | 0,090 | 21 |
| Hulu Sungai Tengah | -2,61 | 115,24 | 0 | 0 | 5,15 | 71,13 | 49,53 | 0,074 | 20 |
| Hulu Sungai Utara | -2,42 | 114,99 | 0 | 0 | 5,81 | 73,66 | 46,63 | 0,052 | 13 |
| Tabalong | -1,84 | 114,88 | 1 | 1 | 3,78 | 77,37 | 54,48 | 0,074 | 20 |
| Tanah Bumbu | -3,44 | 115,11 | 1 | 1 | 4,14 | 79,73 | 53,12 | 0,096 | 14 |
| Balangan | -2,29 | 115,30 | 1 | 0 | 3,11 | 72,80 | 45,83 | 0,062 | 12 |
| Kota Banjarmasin | -3,32 | 114,56 | 1 | 1 | 6,40 | 76,97 | 68,77 | 0,355 | 29 |
| Kota Banjarbaru | -3,46 | 114,73 | 1 | 1 | 6,90 | 78,09 | 78,33 | 0,126 | 9 |
| Paser | -1,69 | 115,55 | 1 | 1 | 3,68 | 78,53 | 56,84 | 0,082 | 19 |

Lampiran 1 (Lanjutan)

| KABUPATEN/KOTA | u ₁ | u ₂ | Y ₁ | Y ₂ | X ₁ | X ₂ | X ₃ | X ₄ | X ₅ |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Kutai Barat | -0,47 | 115,31 | 1 | 1 | 5,04 | 79,36 | 56,58 | 0,048 | 19 |
| Kutai Kartanegara | 0,20 | 115,45 | 1 | 1 | 2,12 | 86,18 | 60,08 | 0,167 | 32 |
| Kutai Timur | 0,93 | 116,38 | 1 | 1 | 2,34 | 75,01 | 62,03 | 0,125 | 21 |
| Berau | 1,81 | 116,48 | 1 | 1 | 2,05 | 79,19 | 61,11 | 0,099 | 21 |
| Penajam Paser Utara | -1,20 | 116,37 | 1 | 1 | 1,24 | 80,10 | 55,06 | 0,059 | 11 |
| Mahakam Ulu | 0,67 | 113,71 | 0 | 0 | 5,40 | 89,70 | 44,75 | 0,011 | 5 |
| Kota Balikpapan | -1,17 | 116,70 | 1 | 1 | 4,95 | 82,93 | 77,47 | 0,395 | 27 |
| Kota Samarinda | -0,50 | 117,10 | 1 | 1 | 4,94 | 74,16 | 75,02 | 0,378 | 26 |
| Kota Bontang | 0,14 | 117,44 | 1 | 1 | -4,10 | 72,29 | 74,75 | 0,149 | 6 |
| Malinau | 2,58 | 114,56 | 1 | 1 | 5,74 | 81,13 | 64,12 | 0,048 | 17 |
| Bulungan | 2,85 | 116,43 | 1 | 1 | 5,02 | 75,74 | 57,59 | 0,114 | 13 |
| Tana Tidung | 3,55 | 116,98 | 1 | 0 | 3,88 | 77,02 | 57,35 | 0,010 | 5 |
| Nunukan | 3,91 | 115,62 | 0 | 0 | 6,33 | 76,87 | 52,46 | 0,083 | 17 |
| Kota Tarakan | 3,36 | 117,51 | 1 | 1 | 7,55 | 79,45 | 72,82 | 0,100 | 7 |

Keterangan:

u₁ = Titik koordinat lintang.

u₂ = Titik koordinat bujur.

Y₁ = IPKM (0 = IPKM DBK, 1 = IPKM B-DBK).

Y₂ = IPM (0 = IPM sedang, 1 = IPM tinggi).

X₁ = Pertumbuhan ekonomi.

X₂ = APM SMP.

X₃ = Persentase penduduk yang berpendidikan minimal SMP.

X₄ = Rasio dokter per 1000 penduduk.

X₅ = Jumlah puskesmas.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

Lampiran 2 Script dan Output R Deskripsi Variabel Penelitian

```
> mfrdi sa=read.csv("D:/di samfr/datadi samfr.csv", header=TRUE,
  sep=",")
> X=as.matrix(mfrdi sa[, 5: 10])
> X1=X[, 1]
> X2=X[, 2]
> X3=X[, 3]
> X4=X[, 4]
> X5=X[, 5]
> Y=mfrdi sa[, 11: 12]
> y1=Y[, 1]
> y2=Y[, 2]
> n=nrow(Y)
> y11=matrix(0, n, 1)
> for (i in 1:n) {
+   if (y1[i]==1 & y2[i]==1)
+     y11[i, 1]=1 else
+     y11[i, 1]=0
+ }
> y10=matrix(0, n, 1)
> for (i in 1:n) {
+   if (y1[i]==1 & y2[i]==0)
+     y10[i, 1]=1 else
+     y10[i, 1]=0
+ }
> y01=matrix(0, n, 1)
> for (i in 1:n) {
+   if (y1[i]==0 & y2[i]==1)
+     y01[i, 1]=1 else
+     y01[i, 1]=0
+ }
> y00=matrix(0, n, 1)
> for (i in 1:n) {
+   if (y1[i]==0 & y2[i]==0)
+     y00[i, 1]=1 else
+     y00[i, 1]=0
+ }
> Y11=sum(y11)
> Y10=sum(y10)
> Y01=sum(y01)
> Y00=sum(y00)
> sd.X1=sd(X1)
> sd.X2=sd(X2)
> sd.X3=sd(X3)
> sd.X4=sd(X4)
> sd.X5=sd(X5)
> tabkon=array(data=c(Y11, Y01, Y11+Y01, Y10, Y00, Y10+Y00, Y11+Y10,
  Y01+Y00, Y11+Y10+Y01+Y00),
  dim=c(3, 3), dimnames=list(respon=c("Y1=1", "Y1=0", "Total"),
  c("Y2=1", "Y2=0", "Total")))
> st.dev=array(data=c(sd.X1, sd.X2, sd.X3, sd.X4, sd.X5),
  dim=c(5, 1),
  dimnames=list(standar.devi asi =c("X1", "X2", "X3", "X4", "X5"), c("Ni
  lai")))
> tabkon=array(data=c(Y11, Y01, Y11+Y01, Y10, Y00, Y10+Y00, Y11+Y10,
  Y01+Y00, Y11+Y10+Y01+Y00),
  dim=c(3, 3), dimnames=list(respon=c("Y1=1", "Y1=0", "Total"),
  c("Y2=1", "Y2=0", "Total")))
```


Lampiran 2 (Lanjutan)

```
> st.dev=array(data=c(sd.X1, sd.X2, sd.X3, sd.X4, sd.X5),
dim=c(5, 1),
+ dimnames=list(standar.devi.asi=c("X1", "X2", "X3", "X4", "X5"),
c("Nilai")))

> tabkon # Tabel kontingensi respon
respon Y2=1 Y2=0 Total
Y1=1    20     6    26
Y1=0     3    27    30
Total   23    33    56

> # Diagram lingkaran untuk kategori respon
> katrespon=read.csv("D:/di samfr/ny1y2.csv", header=TRUE, sep=", ")
> katrespon
> Persen=round(katrespon$Jumlah/sum(katrespon$Jumlah)*100, 2)
> Persen=paste(Persen, "%", sep="")
> pie(katrespon$Jumlah, label=Persen, col=c("green", "blue",
"yellow", "red"))
> colors=c("green", "blue", "yellow", "red")
> legend(1, 0.5, c("nY11", "nY10", "nY01", "nY00"), cex=0.8,
fill=colors)

> # Deskripsi untuk prediktor
> summary(X)

      X1          X2          X3          X4
X5
Min.   : -4.100   Min.   : 68.37   Min.   : 35.58   Min.   : 0.01000
Max.   :  5.00    Max.   : 98.82   Max.   : 81.37   Max.   : 0.46400
1st Qu.:  4.925   1st Qu.: 74.19   1st Qu.: 45.86   1st Qu.: 0.05025
2nd Qu.: 12.75    2nd Qu.: 79.22   2nd Qu.: 52.13   2nd Qu.: 0.07800
Mean   :  5.084   Mean   : 81.19   Mean   : 54.25   Mean   : 0.10230
SD     : 17.57    SD     : 17.57    SD     : 17.57    SD     : 17.57
3rd Qu.:  5.942   3rd Qu.: 88.37   3rd Qu.: 60.12   3rd Qu.: 0.10425
4th Qu.: 21.00    4th Qu.: 98.82   4th Qu.: 81.37   4th Qu.: 0.46400

> st.dev
standar.devi.asi      Nilai
X1  1.82747295
X2  8.14344756
X3 11.05320093
X4  0.09467743
X5  6.93307525
```

Lampiran 3 Script dan Output R Uji Dependensi Antar Variabel Penelitian

```
> mfrdi sa=read.csv("D:/di samfr/datadi samfr.csv", header=TRUE,
sep=",")
> X=as.matrix(mfrdi sa[, 5: 10])
> X2=X[, 1]
> X3=X[, 2]
> X4=X[, 3]
> X5=X[, 4]
> X6=X[, 5]
> X7=X[, 6]
> Y=mfrdi sa[, 11: 12]
> y1=Y[, 1]
> y2=Y[, 2]
> n=nrow(Y)

> y11=matrix(0, n, 1)
> for (i in 1:n) {
+   if (y1[i]==1 & y2[i]==1)
+     y11[i, 1]=1 else
+     y11[i, 1]=0
+ }
> y10=matrix(0, n, 1)
> for (i in 1:n) {
+   if (y1[i]==1 & y2[i]==0)
+     y10[i, 1]=1 else
+     y10[i, 1]=0
+ }
> y01=matrix(0, n, 1)
> for (i in 1:n) {
+   if (y1[i]==0 & y2[i]==1)
+     y01[i, 1]=1 else
+     y01[i, 1]=0
+ }
> y00=matrix(0, n, 1)
> for (i in 1:n) {
+   if (y1[i]==0 & y2[i]==0)
+     y00[i, 1]=1 else
+     y00[i, 1]=0
+ }
> Y11=sum(y11)
> Y10=sum(y10)
> Y01=sum(y01)
> Y00=sum(y00)

> tabkon=array(data=c(Y11, Y01, Y10, Y00), dim=c(2, 2),
+ di mnames=list(respon=c("Y1=1", "Y1=0"), c("Y2=1", "Y2=0")))
> tabkon

respon Y2=1 Y2=0
Y1=1    20    6
Y1=0     3   27

> # Nilai odds rasio respon
> oddsratio=tabkon[1, 1]*tabkon[2, 2]/(tabkon[2, 1]*tabkon[1, 2])
> OR=round(oddsratio, 4)
> OR
[1] 30
```

Lampiran 3 (Lanjutan)

```
> # Interval konfiden si 90% untuk odds rasi o variabel dependen
> al pha=0.1
> var. logOR=1/tabkon[1,1]+1/tabkon[1,2]+1/tabkon[2,1]+1/tabkon[2,
2]
> intkonf. OR=exp(log(oddsratio)+qnorm(p=c(al pha/2, 1-al pha/2))*sqr
t(var. logOR))
> int. konf. OR=round(intkonf. OR, 4)
> int. konf. OR
[1] 8.5074 105.7901

> # Uji dependensi antara IPKM (Y1) dan IPM (Y2)
> library(vcd)
> assocstats(tabkon)
      X^2 df      P(> X^2)
Likelihood Ratio 28.242  1 0.00000010708
Pearson          25.775  1 0.00000038370
Phi -Coefficient   : 0.678
Contingency Coeff.: 0.561
Cramer's V        : 0.678
> qchisq(p=0.9, df=1) # Menghitung nilai tabel chi-square
[1] 2.705543

> # Uji multikolinieritas
> library(car)
> Mod.RLB <- glm(Z ~ X1+X2+X3+X4+X5, family=gaussian(identity),
data=mfrdisa) # Z = IPKM (data kontinu)
> vif(Mod.RLB) # Nilai VIF variabel independen
      X2      X3      X4      X5      X6      X7
1.400255 1.040357 1.494799 2.300214 2.561735 1.516535
```

Lampiran 4 Script MATLAB Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model MLR

```
function hasil = mlr2(y1,y2,x,MaxIter,toleransi);

if nargin<4
    toleransi = 10^-5;
    MaxIter = 1000;
end

if nargin<5
    toleransi = 10^-5;
end

X=[ones(size(x,1),1) x];

[n p] = size(X);
param1 = zeros(p*3,1);
g = zeros(p*3,1);

y11=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(y1(ii)==1,y2(ii)==1)
        y11(ii,1)=1;
    else
        y11(ii,1)=0;
    end
end

y00=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(y1(ii)==0,y2(ii)==0)
        y00(ii,1)=1;
    else
        y00(ii,1)=0;
    end
end

y01=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(y1(ii)==0,y2(ii)==1)
        y01(ii,1)=1;
    else
        y01(ii,1)=0;
    end
end

y10=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(y1(ii)==1,y2(ii)==0)
```

Lampiran 4 (Lanjutan)

```
y10(ii,1)=1;
else
y10(ii,1)=0;
end
end

H1=eye(p*3);

psi = sum(y11)*sum(y00)/(sum(y10)*sum(y01));

iterasi=0;
error=1000;

while error>=toleransi && iterasi<MaxIter
iterasi=iterasi+1;

phila=exp(X*param1(1:p));
phila(find(phila==Inf))=0.9;
phi2a=exp(X*param1(p+1:2*p));
phi2a(find(phi2a==Inf))=0.9;

phil=phila./(1+phila);
phi2=phi2a./(1+phi2a);
a=1+(psi-1)*(phil+phi2);
b=-4*psi*(psi-1)*phil.*phi2;
phi11=(a-sqrt(a.^2+b))/(2*psi-1);
phi11(find(phi11<0.0001))=0.0001;
phi10=phil-phi11;
phi10(find(phi10<0.0001))=0.0001;
phi01=phi2-phi11;
phi01(find(phi01<0.0001))=0.0001;
phi00=1-phil-phi2+phi11;
phi00(find(phi00<0.0001))=0.0001;

omega_atas=(phi11.*phi10.*phi01.*phi00);
omega_bawah=phil.*(1-phil).*phi2.*(1-
phi2).*((1./phi11)+(1./phi10)+(1./phi01)+(1./phi00)).^-1);
pembagidelta=(phil.*phi2.*(1-phil).*(1-phi2));
pembagidelta(find(pembagidelta<0.0001))=0.0001;
delta=(phi11.*phi10.*phi01.*phi00).*((1./phi11)+(1./phi01)+(1./phi
10)+(1./phi00))./pembagidelta;
delta(find(delta<0.0001))=0.0001;

gla=zeros(n,p);
for i=1:n
    gla(i,:)=1/delta(i)*((y11(i).*phi01(i)-
y01(i).*phi11(i))./phi2(i))+((y10(i).*phi10(i)-
y00(i).*phi10(i))./(1-phi2(i))))*X(i,:);
end
gg1=sum(gla);
```

Lampiran 4 (Lanjutan)

```
g2a=zeros(n,p);
for i=1:n
    g2a(i,:)=1/delta(i).*((y11(i)*phi10(i)-
y10(i)*phi11(i))/phi1(i))+((y01(i)*phi10(i)-y00(i)*phi01(i))/(1-
phi1(i))))*X(i,:);
end
gg2=sum(g2a);

g3a=zeros(n,p);
for i=1:n
    g3a(i,:)=(((y11(i)/phi11(i))-(y10(i)/phi10(i))-
(y01(i)/phi01(i))+(y00(i)/phi00(i)))/((1/phi11(i))+(1/phi10(i))+(1
/phi01(i))+(1/phi00(i))))*X(i,:);
end
gg3=sum(g3a);

g1=[gg1';gg2';gg3'];
g1(find(g1==Inf))=1000;
g1(isnan(g1))=1000;

H1=-(1/n)*(g1*g1');
H1(find(H1==Inf))=1000;
H1(isnan(H1))=1000;

param2=param1-pinv(H1)*g1;
error=sum(sqrt((param1-param2).^2));
param1=param2;

end

Q=zeros(n,1);
for u=1:n

Q(u)=y11(u)*log(abs(phi11(u)))+y10(u)*log(abs(phi10(u)))+y01(u)*lo
g(abs(phi01(u)))+y00(u)*log(abs(phi00(u)));
end
Q0=sum(Q);
K=3*p;

SE=sqrt(abs(diag(pinv(H1))));
G2=param1./SE;

bintang=[];
for j=1:3
    bintang(j)=j*p-(p-1);
end
bintang=bintang';

philbintang=exp(param1(1))./(1+exp(param1(1)));
```

Lampiran 4 (Lanjutan)

```
phi2bintang=exp(param1(p*2+1)./(1+exp(param1(p*2+1))));
abintang=1+(psi-1)*(philbintang+phi2bintang);
bbintang=-4*psi*(psi-1)*philbintang.*phi2bintang;
phillbintang=(abintang-sqrt(abintang.^2+bbintang))/(2*psi-1);
phillbintang(find(phillbintang<=0))=0.0001;
phil0bintang=philbintang-phillbintang;
phil0bintang(find(phil0bintang<=0))=0.0001;
phi01bintang=phi2bintang-phillbintang;
phi01bintang(find(phi01bintang<=0))=0.0001;
phi00bintang=1-philbintang-phi2bintang+phillbintang;
phi00bintang(find(phi00bintang<0.0001))=0.0001;

GG=zeros(n,1);
for u=1:n

GG(u)=y11(u)*log(abs(phil1(u)./phillbintang))+y10(u)*log(abs((phil
(u)-phil1(u))./(philbintang-
phillbintang)))+y01(u)*log(abs((phi2(u)-phil1(u))./(phi2bintang-
phillbintang)))+y00(u)*log(abs((1-phil(u)-phi2(u)+phil1(u))./(1-
philbintang-phi2bintang+phillbintang)));
end
G1=abs(sum(GG));

philhasil=exp(X*param1(1:p,:))./(1+exp(X*param1(1:p,:)));
phi2hasil=exp(X*param1((p+1):(p*2),:))./(1+exp(X*param1((p+1):(p*2
),:)));
ahasil=1+(psi-1)*(philhasil+phi2hasil);
bhasil=-4*psi*(psi-1)*philhasil.*phi2hasil;
phillhasil=(ahasil-sqrt(ahasil.^2+bhasil))/(2*psi-1);
phillhasil(find(phillhasil<0.0001))=0.0001;
phil0hasil=philhasil-phillhasil;
phil0hasil(find(phil0hasil<0.0001))=0.0001;
phi01hasil=phi2hasil-phillhasil;
phi01hasil(find(phi01hasil<0.0001))=0.0001;
phi00hasil=1-philhasil-phi2hasil+phillhasil;
phi00hasil(find(phi00hasil<0.0001))=0.0001;
phi00hasil(find(phi00hasil>1))=1;

omega_atashasil=(phillhasil.*phil0hasil.*phi01hasil.*phi00hasil);
omega_bawahhasil=philhasil.*(1-philhasil).*phi2hasil.*(1-
phi2hasil).*((1./phillhasil)+(1./phil0hasil)+(1./phi01hasil)+(1./
phi00hasil)).^-1);
omega_bawahhasil(find(omega_bawahhasil<0.0001))=0.0001;
omegahasil=omega_atashasil./omega_bawahhasil;
omegahasil(find(omegahasil<0.01));

deltahasil=(phillhasil.*phil0hasil.*phi01hasil.*phi00hasil).*((1./
phillhasil)+(1./phi01hasil)+(1./phil0hasil)+(1./phi00hasil))./(phi
lhasil.*phi2hasil.*(1-philhasil).*(1-phi2hasil));
deltahasil(find(deltahasil<0.0001))=0.0001;
```

Lampiran 4 (Lanjutan)

```
hasil.parameter=param1;  
hasil.g=g1;  
hasil.K=K;  
hasil.SE=SE;  
hasil.G1=G1;  
hasil.G2=G2;  
hasil.psi=psi;
```


(Halaman ini sengaja dikosongkan)

Lampiran 5 Script MATLAB Penentuan *Bandwidth* Optimum

```
function score= gwscore2(bdwt,y1,y2,x,koordinat,flag)

toleransi = 0.01;
MaxIter = 40;

east=koordinat(:,1);
north=koordinat(:,2);
X=[ones(size(x,1),1) x];
[n k] = size(X);

param = zeros(size(X,2)*3,1);
g = zeros(size(X,2)*3,1);
H = zeros(size(X,2)*3);
H_1=zeros(size(X,2));
H_2=zeros(size(X,2));
H_3=zeros(size(X,2));
H_4=zeros(size(X,2));
H_5=zeros(size(X,2));
H_6=zeros(size(X,2));

y11=zeros(size(y1,1),1);
for ii=1:size(y1,1)
if and(y1(ii)==1,y2(ii)==1)
y11(ii,1)=1;
else
y11(ii,1)=0;
end
end

y10=zeros(size(y1,1),1);
for ii=1:size(y1,1)
if and(y1(ii)==1,y2(ii)==0)
y10(ii,1)=1;
else
y10(ii,1)=0;
end
end

y01=zeros(size(y1,1),1);
for ii=1:size(y1,1)
if and(y1(ii)==0,y2(ii)==1)
y01(ii,1)=1;
else
y01(ii,1)=0;
end
end

y00=zeros(size(y1,1),1);
for ii=1:size(y1,1)
if and(y1(ii)==0,y2(ii)==0)
y00(ii,1)=1;
```

Lampiran 5 (Lanjutan)

```
else
y00(ii,1)=0;
end
end

psi = sum(y11)*sum(y00)/(sum(y10)*sum(y01));

for iter=1:n;
dx = east - east(iter,1);
dy = north - north(iter,1);
d = (dx.*dx + dy.*dy);
sd = std(sqrt(d));
ds = sort(d);
if flag==1
wt = stdn_pdf(sqrt(d)/(sd*bdwt));
else
wt = zeros(n,1);
nzip = find(d <= bdwt);
wt(nzip,1) = (1-(d(nzip,1)/bdwt).^2).^2;
end;
wt = sqrt(wt);
nzip = find(wt >= 0.01);

iterasi=0;
error=1000;

while error>=toleransi && iterasi<MaxIter
iterasi=iterasi+1;
param1=param;
phi1=exp(X*param(1:size(X,2),:))./(1+exp(X*param(1:size(X,2),:)))
;
phi2=exp(X*param((size(X,2)+1):(size(X,2)*2),:))./(1+exp(X*param(
(size(X,2)+1):(size(X,2)*2),:)));
a=1+(psi-1)*(phi1+phi2);
b=-4*psi*(psi-1)*phi1.*phi2;
phi11=(a-sqrt(a.^2+b))/(2*psi-1);
phi10=phi1-phi11;
phi01=phi2-phi11;
phi00=1-phi1-phi2+phi11;
delta_atas=(phi11.*phi10.*phi01.*phi00);
delta_bawah=phi1.*(1-phi1).*phi2.*(1-
phi2).*((1./phi11)+(1./phi10)+(1./phi01)+(1./phi00)).^-1);
delta_bawah(find(delta_bawah<0.01))=0.01;
delta=delta_atas./delta_bawah;
delta(find(delta==0))=0.01;
for j=1:size(X,2)
for i=1:size(y1,1)
```

Lampiran 5 (Lanjutan)

```
g_1a=X(i,j)*y11(i,1)*phi11(i,1)*phi01(i,1)/(phi11(i,1)*phi2(i,1)*
delta(i,1));
g_1b=X(i,j)*y10(i,1)*phi10(i,1)*phi00(i,1)/(phi10(i,1)*(1-
phi2(i,1))*delta(i,1));

g_1c=X(i,j)*y01(i,1)*phi11(i,1)*phi01(i,1)/(phi01(i,1)*phi2(i,1)*
delta(i,1));
g_1d=X(i,j)*y00(i,1)*phi10(i,1)*phi00(i,1)/(phi00(i,1)*(1-
phi2(i,1))*delta(i,1));
g_1hasil=((g_1a+g_1b)-(g_1c+g_1d))*wt(i,1);
end;
g(j,1)=g(j,1)+g_1hasil;
end;

for j=1:size(X,2)
for i=1:size(y2,1)
g_2a=X(i,j)*y11(i,1)*phi11(i,1)*phi10(i,1)/(phi11(i,1)*phi1(i,1)*
delta(i,1));
g_2b=X(i,j)*y01(i,1)*phi01(i,1)*phi00(i,1)/(phi01(i,1)*(1-
phi1(i,1))*delta(i,1));
g_2c=X(i,j)*y10(i,1)*phi11(i,1)*phi10(i,1)/(phi10(i,1)*phi1(i,1)*
delta(i,1));
g_2d=X(i,j)*y00(i,1)*phi01(i,1)*phi00(i,1)/(phi00(i,1)*(1-
phi1(i,1))*delta(i,1));
g_2hasil=((g_2a+g_2b)-(g_2c+g_2d))*wt(i,1);
end;
g(j+size(X,2),1)=g(j+size(X,2),1)+g_2hasil;
end;

for j=1:size(X,2)
for i=1:size(y2,1)
g_3a=y11(i,1)/phi11(i,1)-y10(i,1)/phi10(i,1)-
y01(i,1)/phi01(i,1)+y00(i,1)/phi00(i,1);
g_3b=1/(1/phi11(i,1)+1/phi10(i,1)+1/phi01(i,1)+1/phi00(i,1));
g_3hasil=(g_3a*g_3b*X(i,j))*wt(i,1);
end;
g(j+2*size(X,2),1)=g(j+2*size(X,2),1)+g_3hasil;
end;

g(find(g==Inf))=1000;
g(isnan(g))=1000;
H=-(1/n)*(g*g');
H(find(H==Inf))=1000;
H(isnan(H))=1000;

param_hasil=param-pinv(H)*g;
param=param_hasil;
param2=param_hasil;
error=sum(sqrt((param1-param2).^2));
end;
```

Lampiran 5 (Lanjutan)

```
cv(iter,:)=abs((y11(iter,:)-phi11(iter,:)))+abs((y10(iter,:)-
phi10(iter,:)))+abs((y01(iter,:)-
phi01(iter,:)))+abs((y00(iter,:)-phi00(iter,:)));
end;
score=sum(cv);

function bdwt= bdwt_best2(y1,y2,x,koordinat,kernel,option);

if nargin<6
    option=2;
end;

north=koordinat(:,1);
east=koordinat(:,2);
for i=1:size(y1,1)
for j=1:size(y1,1)
D(i,j)=((north(i)-north(j))^2)+((east(i)-east(j))^2);
end;end;

bmin=vec(quantile(D,1/size(y1,1),1));
bq25=vec(quantile(D,0.25,1));
bq75=vec(quantile(D,0.75,1));
bmax=vec(max(D));
bmax=bmax(find(bmax~=max(max(D))));
bmedian=vec(median(D));
if option==1
    bb=[bmin;bmedian;bmax]
else
    bb=[bmin;bq25;bmedian;bq75;bmax];
end;

bb=sort(bb);
bb=unique(bb);
bb=bb(find(bb>0));
score=zeros(size(bb,1),1);
for k=1:size(bb,1)
    coba=bb(k,1);
    coba_bdwt=abs(coba)
    score(k,1)= gwscore2(coba_bdwt,y1,y2,x,koordinat,kernel);
    hasil_score=score(k,1)
end;
bdwt=bb(find(score==min(score)));
```

Lampiran 6 Script MATLAB Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis
Model GWMLR

```
function hasil=
gwmlr2(y1,y2,x,koordinat,bdwt,kernel,MaxIter,toleransi);

if nargin<6
    toleransi = 10^-5;
    MaxIter = 1000;
    kernel=1;
end

if nargin<7
    MaxIter = 1000;
    toleransi = 10^-5;
end

if nargin<8
    toleransi = 10^-5;
end

east=koordinat(:,1);
north=koordinat(:,2);
nn = size(east,1);
d = zeros(nn);
for ii=1:nn
    for jj=1:nn
        d(ii,jj) = ((east(ii)-east(jj))^2)+((north(ii)-north(jj))^2);
    end
end
d = sqrt(d);
sd = diag(std(d));

if kernel==1
    wt = exp(-(d./bdwt).^2);
else
    wt = zeros(nn);
    nzip = find(d <= bdwt);
    wt(nzip) = (1-(d(nzip)/bdwt).^2).^2;
end;

X=[ones(size(x,1),1) x];

[n p] = size(X);
param1 = zeros(p*3,n);
g = zeros(p*3,n);

y11=zeros(n,1);
for ii=1:n
```

Lampiran 6 (Lanjutan)

```
if and(y1(ii)==1,y2(ii)==1)
y11(ii,1)=1;
else
y11(ii,1)=0;
end
end

y00=zeros(n,1);
for ii=1:n
if and(y1(ii)==0,y2(ii)==0)
y00(ii,1)=1;
else
y00(ii,1)=0;
end
end

y01=zeros(n,1);
for ii=1:n
if and(y1(ii)==0,y2(ii)==1)
y01(ii,1)=1;
else
y01(ii,1)=0;
end
end

y10=zeros(n,1);
for ii=1:n
if and(y1(ii)==1,y2(ii)==0)
y10(ii,1)=1;
else
y10(ii,1)=0;
end
end

psi = sum(y11)*sum(y00)/(sum(y10)*sum(y01));

phila=zeros(n);
phi2a=zeros(n);
phil=zeros(n);
phi2=zeros(n);

Q1a=zeros(n);
for j=1:n
H1=eye(p*3);
iterasi=0;
error=1000;

while error>=toleransi && iterasi<MaxIter
iterasi=iterasi+1;
```

Lampiran 6 (Lanjutan)

```
phi1a(:,j)=exp(X*param1(1:p,j));
phi1a(find(phi1a(:,j)==Inf),j)=0.9;
phi2a(:,j)=exp(X*param1(p+1:2*p,j));
phi2a(find(phi2a(:,j)==Inf),j)=0.9;
phi1(:,j)=phi1a(:,j)/(1+phi1a(:,j));
phi2(:,j)=phi2a(:,j)/(1+phi2a(:,j));
a(:,j)=1+(psi-1)*(phi1(:,j)+phi2(:,j));
b(:,j)=-4*psi*(psi-1)*phi1(:,j).*phi2(:,j);
phi11(:,j)=(a(:,j)-sqrt(a(:,j).^2+b(:,j)))/(2*psi-1);
phi11(find(phi11(:,j)<0.0001),j)=0.0001;
phi10(:,j)=phi1(:,j)-phi11(:,j);
phi10(find(phi10(:,j)<0.0001),j)=0.0001;
phi01(:,j)=phi2(:,j)-phi11(:,j);
phi01(find(phi01(:,j)<0.0001),j)=0.0001;
phi00(:,j)=1-phi1(:,j)-phi2(:,j)+phi11(:,j);
phi00(find(phi00(:,j)<0.0001),j)=0.0001;
omega_atas(:,j)=(phi11(:,j).*phi10(:,j).*phi01(:,j).*phi00(:,j));
omega_bawah(:,j)=phi1(:,j).*(1-phi1(:,j)).*phi2(:,j).*(1-
phi2(:,j)).*((1./phi11(:,j))+(1./phi10(:,j))+(1./phi01(:,j))+(1./
phi00(:,j))).^-1);
pembagidelta(:,j)=(phi1(:,j).*phi2(:,j).*(1-phi1(:,j)).*(1-
phi2(:,j)));
pembagidelta(find(pembagidelta(:,j)<0.0001),j)=0.0001;
delta(:,j)=(phi11(:,j).*phi10(:,j).*phi01(:,j).*phi00(:,j)).*((1./
phi11(:,j))+(1./phi01(:,j))+(1./phi10(:,j))+(1./phi00(:,j)))./pemb
agidelta(:,j);
delta(find(delta(:,j)<0.0001),j)=0.0001;

g1a=zeros(n,p);
for i=1:n
    g1a(i,:)=1/delta(i,j)*((y11(i).*phi01(i,j)-
y01(i).*phi11(i,j))./phi2(i,j))+(y10(i).*phi10(i,j)-
y00(i).*phi10(i,j))./(1-phi2(i,j)))*X(i,:).*wt(i,j);
end
gg1=sum(g1a);

g2a=zeros(n,p);
for i=1:n
    g2a(i,:)=1/delta(i,j).*((y11(i)*phi10(i,j)-
y10(i)*phi11(i,j))/phi1(i,j))+(y01(i)*phi10(i,j)-
y00(i)*phi01(i,j))/(1-phi1(i,j)))*X(i,:).*wt(i,j);
end
gg2=sum(g2a);

g3a=zeros(n,p);
for i=1:n
    g3a(i,:)=((y11(i)/phi11(i,j))-y10(i)/phi10(i,j))-
(y01(i)/phi01(i,j))+y00(i)/phi00(i,j))/((1/phi11(i,j))+(1/phi10(
i,j))+(1/phi01(i,j))+(1/phi00(i,j)))*X(i,:).*wt(i,j);
end
gg3=sum(g3a);
```


Lampiran 6 (Lanjutan)

```
g1(:,j)=[gg1';gg2';gg3'];
g1(find(g1(:,j)==Inf),j)=1000;
g1(isnan(g1(:,j)),j)=1000;

H1=-(1/n)*(g1*g1');
H1(find(H1==Inf))=1000;
H1(isnan(H1))=1000;

param2(:,j)=param1(:,j)-pinv(H1)*g1(:,j);
error=sum(sqrt((param1(:,j)-param2(:,j)).^2));
param1(:,j)=param2(:,j);

end

philbintang(:,j)=exp(param1(1,j))./(1+exp(param1(1,j)));
phi2bintang(:,j)=exp(param1(p*2+1,j))./(1+exp(param1(p*2+1,j)));
abintang(:,j)=1+(psi-1)*(philbintang(:,j)+phi2bintang(:,j));
bbintang(:,j)=-4*psi*(psi-1)*philbintang(:,j).*phi2bintang(:,j);
phillbintang(:,j)=(abintang(:,j)-
sqrt(abintang(:,j).^2+bbintang(:,j)))/(2*psi-1);
phillbintang(find(phillbintang(:,j)<=0),j)=0.0001;
phil0bintang(:,j)=philbintang(:,j)-phillbintang(:,j);
phil0bintang(find(phil0bintang(:,j)<=0),j)=0.0001;
phi01bintang(:,j)=phi2bintang(:,j)-phillbintang(:,j);
phi01bintang(find(phi01bintang(:,j)<=0),j)=0.0001;
phi00bintang(:,j)=1-philbintang(:,j)-
phi2bintang(:,j)+phillbintang(:,j);
phi00bintang(find(phi00bintang(:,j)<0.0001),j)=0.0001;

La=zeros(n,1);
for u=1:n
La(u)=y11(u)*log(abs(phi11(u,j)))+y10(u)*log(abs(phi10(u,j)))+y01(u)
*log(abs(phi01(u,j)))+y00(u)*log(abs(phi00(u,j)));
end
L(:,j)=sum(La);

Lwa=zeros(n,1);
for u=1:n
Lwa(u)=y11(u).*log(abs(phillbintang(:,j)))+y10(u).*log(abs(phil0bi
ntang(:,j)))+y01(u).*log(abs(phi01bintang(:,j)))+y00(u).*log(abs(p
hi00bintang(:,j)));
end
Lw(:,j)=sum(Lwa);

G4=-2*(Lw(:,j)-L(:,j));
```

Lampiran 6 (Lanjutan)

```

for u=1:n
Q1a(u,j)=(y11(u)*log(abs(phi11(u,j)))+y10(u)*log(abs(phi10(u,j)))+
y01(u)*log(abs(phi01(u,j)))+y00(u)*log(abs(phi00(u,j)))).*wt(u,j);
end
Q1(:,j)=sum(Q1a(u,j));

SE(:,j)=sqrt(abs(diag(pinv(H1)))));
G5(:,j)=param1(:,j)./SE(:,j);

bintang=[];
for k=1:3
    bintang(k)=k*p-(p-1);
end
bintang=bintang';

GG=zeros(n,1);
for u=1:n
GG(u)=y11(u)*log(abs(phi11(u,j)./phi11bintang(:,j)))+y10(u)*log(ab
s((phi1(u,j)-phi11(u,j))./(phi1bintang(:,j)-
phi11bintang(:,j))))+y01(u)*log(abs((phi2(u,j)-
phi11(u,j))./(phi2bintang(:,j)-
phi11bintang(:,j))))+y00(u)*log(abs((1-phi1(u,j)-
phi2(u,j)+phi11(u,j))./(1-phi1bintang(:,j)-
phi2bintang(:,j)+phi11bintang(:,j))));
end
G1(:,j)=abs(sum(GG));

philhasil(:,j)=exp(X*param1(1:p,j))./(1+exp(X*param1(1:p,j)));
phi2hasil(:,j)=exp(X*param1((p+1):(p*2),j))./(1+exp(X*param1((p+1)
:(p*2),j)));
ahasil=1+(psi-1)*(philhasil(:,j)+phi2hasil(:,j));
bhasil=-4*psi*(psi-1)*philhasil(:,j).*phi2hasil(:,j);
phil1hasil(:,j)=(ahasil-sqrt(ahasil.^2+bhasil))/(2*psi-1);
phil1hasil(find(phil1hasil(:,j)<0.0001),j)=0.0001;
phi10hasil(:,j)=phil(:,j)-phil1hasil(:,j);
phi10hasil(find(phi10hasil(:,j)<0.0001),j)=0.0001;
phi01hasil(:,j)=phi2hasil(:,j)-phil1hasil(:,j);
phi01hasil(find(phi01hasil(:,j)<0.0001),j)=0.0001;
phi00hasil(:,j)=1-philhasil(:,j)-phi2hasil(:,j)+phil1hasil(:,j);
phi00hasil(find(phi00hasil(:,j)<0.0001),j)=0.0001;
phi00hasil(find(phi00hasil(:,j)>1),j)=1;
omega_atashasil=(phil1hasil(:,j).*phi10hasil(:,j).*phi01hasil(:,j)
.*phi00hasil(:,j));
omega_bawahhasil=philhasil(:,j).*(1-
philhasil(:,j)).*phi2hasil(:,j).*(1-
phi2hasil(:,j)).*(((1./phil1hasil(:,j)))+(1./phi10hasil(:,j)))+(1./p
hi01hasil(:,j)))+(1./phi00hasil(:,j))).^-1;

```

Lampiran 6 (Lanjutan)

```
omega_bawahhasil(find(omega_bawahhasil<0.0001))=0.0001;
omegahasil=omega_atashasil./omega_bawahhasil;
omegahasil(find(omegahasil<0.01));
deltahasil(:,j)=(phillhasil(:,j).*phi10hasil(:,j).*phi01hasil(:,j)
.*phi00hasil(:,j)).*((1./phillhasil(:,j))+(1./phi01hasil(:,j))+(1.
/phi10hasil(:,j))+(1./phi00hasil(:,j)))./(philhasil(:,j).*phi2hasi
l(:,j).*(1-philhasil(:,j)).*(1-phi2hasil(:,j)));
deltahasil(find(deltahasil(:,j)<0.0001),j)=0.0001;

end
meanphi1=mean(philhasil);
meanphi2=mean(phi2hasil);
nn1=find(and(~isnan(meanphi1),or(abs(meanphi1-
0.5>0.00001),abs(meanphi1-1>0.00001))));
nn2=find(and(~isnan(meanphi2),or(abs(meanphi2-
0.5>0.00001),abs(meanphi2-1>0.00001))));
nnn=max([nn1 nn2]);

hasil.parameter=param1;
hasil.g=g1(:,nnn);
hasil.SE=SE;
hasil.G4=G4;
hasil.G5=G5;
hasil.K=K;
hasil.psi=psi;
hasil.jarak=d;
hasil.bobot=wt;
```

Lampiran 7 Script MATLAB Pengujian Kesamaan Model MLR dan GWMLR

```
function uji=  
uji_kesamaan(y1,y2,x,koordinat,bdwt,kernel,MaxIter,toleransi);  
  
gwmlr= gwmlr2(y1,y2,x,koordinat,bdwt,kernel,MaxIter,toleransi);  
mlr = mlr2(y1,y2,x,MaxIter,toleransi);  
n=size(x,1);  
Q0=mlr.Q0;  
Q1=gwmlr.Q1;  
  
Mi=Q1-Q0;  
Mbar=mean(Mi);  
Mii=sum((Mi-Mbar).^2);  
G3=(sqrt(n)*Mbar)./sqrt(sqrt(n*Mii));  
  
uji.G3=G3;  
uji.Q0=Q0;  
uji.Q1=Q1;  
uji.Mi=Mi;  
uji.Mbar=Mbar;
```

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

Lampiran 8 Matriks Pembobot Spasial *Fixed Kernel Bi-square*

| LOKASI | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.9989 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 0.9946 | 0.9984 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 0.9916 | 0.9945 | 0.9949 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 5 | 0.9921 | 0.9969 | 0.9997 | 0.9931 | 1 | | | | | | | | | | |
| 6 | 0.9484 | 0.9622 | 0.9758 | 0.9711 | 0.9795 | 1 | | | | | | | | | |
| 7 | 0.9673 | 0.9754 | 0.9825 | 0.9599 | 0.9861 | 0.9714 | 1 | | | | | | | | |
| 8 | 0.9546 | 0.9610 | 0.9662 | 0.9355 | 0.9700 | 0.9435 | 0.9950 | 1 | | | | | | | |
| 9 | 0.9774 | 0.9851 | 0.9916 | 0.9753 | 0.9942 | 0.9810 | 0.9980 | 0.9876 | 1 | | | | | | |
| 10 | 0.9462 | 0.9586 | 0.9709 | 0.9475 | 0.9762 | 0.9801 | 0.9956 | 0.9865 | 0.9932 | 1 | | | | | |
| 11 | 0.9628 | 0.9741 | 0.9846 | 0.9836 | 0.9869 | 0.9981 | 0.9706 | 0.9422 | 0.9825 | 0.9743 | 1 | | | | |
| 12 | 0.9825 | 0.9900 | 0.9959 | 0.9941 | 0.9967 | 0.9903 | 0.9779 | 0.9545 | 0.9892 | 0.9737 | 0.9962 | 1 | | | |
| 13 | 0.9872 | 0.9937 | 0.9984 | 0.9930 | 0.9992 | 0.9865 | 0.9850 | 0.9659 | 0.9940 | 0.9785 | 0.9924 | 0.9989 | 1 | | |
| 14 | 0.9981 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9963 | 0.9974 | 0.9657 | 0.9743 | 0.9581 | 0.9849 | 0.9587 | 0.9774 | 0.9920 | 0.9948 | 1 | |
| 15 | 0.9054 | 0.9243 | 0.9443 | 0.9304 | 0.9512 | 0.9903 | 0.9624 | 0.9370 | 0.9663 | 0.9814 | 0.9798 | 0.9641 | 0.9607 | 0.9279 | 1 |
| 16 | 0.8955 | 0.9145 | 0.9347 | 0.9109 | 0.9429 | 0.9767 | 0.9698 | 0.9536 | 0.9671 | 0.9883 | 0.9633 | 0.9498 | 0.9505 | 0.9165 | 0.9945 |
| 17 | 0.8551 | 0.8746 | 0.8959 | 0.8579 | 0.9060 | 0.9350 | 0.9567 | 0.9538 | 0.9442 | 0.9759 | 0.9166 | 0.9052 | 0.9115 | 0.8746 | 0.9662 |
| 18 | 0.7927 | 0.8136 | 0.8369 | 0.7883 | 0.8490 | 0.8798 | 0.9195 | 0.9260 | 0.8993 | 0.9419 | 0.8561 | 0.8440 | 0.8537 | 0.8123 | 0.9246 |
| 19 | 0.8168 | 0.8331 | 0.8510 | 0.7990 | 0.8615 | 0.8693 | 0.9328 | 0.9483 | 0.9102 | 0.9447 | 0.8501 | 0.8477 | 0.8618 | 0.8299 | 0.9051 |
| 20 | 0.9058 | 0.9247 | 0.9447 | 0.9313 | 0.9515 | 0.9907 | 0.9619 | 0.9361 | 0.9661 | 0.9809 | 0.9804 | 0.9646 | 0.9611 | 0.9284 | 1.0000 |
| 21 | 0.9272 | 0.9435 | 0.9603 | 0.9431 | 0.9665 | 0.9913 | 0.9802 | 0.9609 | 0.9818 | 0.9932 | 0.9830 | 0.9734 | 0.9732 | 0.9457 | 0.9970 |

Lampiran 8 (Lanjutan)

| LOKASI | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 0.9878 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | 0.9586 | 0.9910 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 19 | 0.9439 | 0.9820 | 0.9923 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 20 | 0.9940 | 0.9649 | 0.9227 | 0.9030 | 1 | | | | | | | | | | |
| 21 | 0.9961 | 0.9734 | 0.9341 | 0.9235 | 0.9968 | 1 | | | | | | | | | |

Lampiran 8 (Lanjutan)

| LOKASI | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 22 | 0.9122 | 0.9301 | 0.9489 | 0.9301 | 0.9559 | 0.9873 | 0.9737 | 0.9540 | 0.9743 | 0.9900 | 0.9766 | 0.9642 | 0.9636 | 0.9326 | 0.9982 |
| 23 | 0.8981 | 0.9162 | 0.9356 | 0.9090 | 0.9438 | 0.9724 | 0.9743 | 0.9617 | 0.9697 | 0.9910 | 0.9591 | 0.9478 | 0.9502 | 0.9176 | 0.9905 |
| 24 | 0.8456 | 0.8670 | 0.8906 | 0.8560 | 0.9011 | 0.9412 | 0.9482 | 0.9396 | 0.9381 | 0.9719 | 0.9214 | 0.9053 | 0.9088 | 0.8681 | 0.9746 |
| 25 | 0.8861 | 0.9018 | 0.9185 | 0.8800 | 0.9270 | 0.9381 | 0.9743 | 0.9762 | 0.9616 | 0.9850 | 0.9241 | 0.9203 | 0.9292 | 0.9005 | 0.9600 |
| 26 | 0.7679 | 0.7893 | 0.8133 | 0.7616 | 0.8260 | 0.8579 | 0.9027 | 0.9121 | 0.8802 | 0.9264 | 0.8325 | 0.8199 | 0.8306 | 0.7876 | 0.9073 |
| 27 | 0.9002 | 0.9120 | 0.9241 | 0.8832 | 0.9314 | 0.9240 | 0.9788 | 0.9878 | 0.9643 | 0.9812 | 0.9135 | 0.9177 | 0.9299 | 0.9092 | 0.9386 |
| 28 | 0.8126 | 0.8339 | 0.8576 | 0.8140 | 0.8692 | 0.9044 | 0.9317 | 0.9325 | 0.9151 | 0.9550 | 0.8818 | 0.8678 | 0.8752 | 0.8335 | 0.9458 |
| 29 | 0.7112 | 0.7385 | 0.7697 | 0.7239 | 0.7843 | 0.8487 | 0.8583 | 0.8546 | 0.8396 | 0.8964 | 0.8174 | 0.7909 | 0.7952 | 0.7396 | 0.9104 |
| 30 | 0.7120 | 0.7385 | 0.7688 | 0.7205 | 0.7833 | 0.8423 | 0.8606 | 0.8605 | 0.8401 | 0.8966 | 0.8112 | 0.7870 | 0.7930 | 0.7389 | 0.9037 |
| 31 | 0.7435 | 0.7689 | 0.7979 | 0.7520 | 0.8116 | 0.8664 | 0.8833 | 0.8819 | 0.8648 | 0.9167 | 0.8376 | 0.8152 | 0.8209 | 0.7695 | 0.9222 |
| 32 | 0.7749 | 0.7993 | 0.8268 | 0.7836 | 0.8396 | 0.8900 | 0.9050 | 0.9019 | 0.8886 | 0.9356 | 0.8636 | 0.8431 | 0.8484 | 0.7999 | 0.9397 |
| 33 | 0.7403 | 0.7646 | 0.7923 | 0.7427 | 0.8060 | 0.8534 | 0.8827 | 0.8864 | 0.8615 | 0.9134 | 0.8249 | 0.8057 | 0.8135 | 0.7642 | 0.9094 |
| 34 | 0.7416 | 0.7655 | 0.7926 | 0.7421 | 0.8062 | 0.8510 | 0.8839 | 0.8891 | 0.8621 | 0.9136 | 0.8227 | 0.8046 | 0.8132 | 0.7648 | 0.9064 |
| 35 | 0.7299 | 0.7535 | 0.7805 | 0.7277 | 0.7943 | 0.8370 | 0.8758 | 0.8837 | 0.8522 | 0.9050 | 0.8083 | 0.7910 | 0.8007 | 0.7524 | 0.8942 |
| 36 | 0.7499 | 0.7728 | 0.7987 | 0.7472 | 0.8120 | 0.8514 | 0.8902 | 0.8975 | 0.8677 | 0.9174 | 0.8241 | 0.8083 | 0.8180 | 0.7716 | 0.9048 |
| 37 | 0.7740 | 0.7948 | 0.8181 | 0.7661 | 0.8305 | 0.8593 | 0.9069 | 0.9172 | 0.8842 | 0.9290 | 0.8346 | 0.8234 | 0.8345 | 0.7929 | 0.9071 |
| 38 | 0.7053 | 0.7316 | 0.7617 | 0.7118 | 0.7763 | 0.8336 | 0.8562 | 0.8581 | 0.8346 | 0.8919 | 0.8023 | 0.7789 | 0.7856 | 0.7317 | 0.8961 |
| 39 | 0.7373 | 0.7599 | 0.7855 | 0.7317 | 0.7991 | 0.8361 | 0.8812 | 0.8915 | 0.8569 | 0.9079 | 0.8083 | 0.7936 | 0.8043 | 0.7583 | 0.8912 |
| 40 | 0.7384 | 0.7640 | 0.7932 | 0.7469 | 0.8071 | 0.8626 | 0.8797 | 0.8785 | 0.8609 | 0.9136 | 0.8333 | 0.8107 | 0.8164 | 0.7645 | 0.9193 |
| 41 | 0.7241 | 0.7503 | 0.7802 | 0.7329 | 0.7944 | 0.8522 | 0.8693 | 0.8684 | 0.8497 | 0.9045 | 0.8220 | 0.7983 | 0.8040 | 0.7508 | 0.9116 |
| 42 | 0.7409 | 0.7616 | 0.7849 | 0.7282 | 0.7980 | 0.8243 | 0.8830 | 0.8988 | 0.8566 | 0.9051 | 0.7980 | 0.7878 | 0.8010 | 0.7589 | 0.8767 |

Lampiran 8 (Lanjutan)

| LOKASI | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 22 | 0.9984 | 0.9780 | 0.9416 | 0.9275 | 0.9979 | 0.9993 | 1 | | | | | | | | |
| 23 | 0.9993 | 0.9917 | 0.9657 | 0.9546 | 0.9898 | 0.9946 | 0.9966 | 1 | | | | | | | |
| 24 | 0.9916 | 0.9979 | 0.9856 | 0.9691 | 0.9734 | 0.9769 | 0.9828 | 0.9933 | 1 | | | | | | |
| 25 | 0.9828 | 0.9957 | 0.9842 | 0.9863 | 0.9586 | 0.9735 | 0.9748 | 0.9890 | 0.9886 | 1 | | | | | |
| 26 | 0.9451 | 0.9839 | 0.9990 | 0.9913 | 0.9052 | 0.9173 | 0.9258 | 0.9531 | 0.9777 | 0.9761 | 1 | | | | |
| 27 | 0.9652 | 0.9825 | 0.9720 | 0.9859 | 0.9372 | 0.9591 | 0.9577 | 0.9742 | 0.9697 | 0.9954 | 0.9639 | 1 | | | |
| 28 | 0.9737 | 0.9966 | 0.9980 | 0.9864 | 0.9441 | 0.9524 | 0.9595 | 0.9787 | 0.9942 | 0.9884 | 0.9945 | 0.9732 | 1 | | |
| 29 | 0.9403 | 0.9696 | 0.9823 | 0.9522 | 0.9085 | 0.9070 | 0.9206 | 0.9428 | 0.9746 | 0.9459 | 0.9832 | 0.9168 | 0.9838 | 1 | |
| 30 | 0.9369 | 0.9709 | 0.9868 | 0.9607 | 0.9017 | 0.9031 | 0.9162 | 0.9408 | 0.9734 | 0.9495 | 0.9886 | 0.9235 | 0.9860 | 0.9992 | 1 |
| 31 | 0.9525 | 0.9812 | 0.9914 | 0.9677 | 0.9204 | 0.9225 | 0.9341 | 0.9560 | 0.9834 | 0.9625 | 0.9912 | 0.9382 | 0.9924 | 0.9983 | 0.9988 |
| 32 | 0.9666 | 0.9894 | 0.9935 | 0.9722 | 0.9380 | 0.9407 | 0.9507 | 0.9697 | 0.9914 | 0.9736 | 0.9912 | 0.9511 | 0.9965 | 0.9948 | 0.9950 |
| 33 | 0.9444 | 0.9800 | 0.9950 | 0.9768 | 0.9074 | 0.9133 | 0.9244 | 0.9499 | 0.9788 | 0.9645 | 0.9963 | 0.9443 | 0.9929 | 0.9951 | 0.9978 |
| 34 | 0.9426 | 0.9798 | 0.9959 | 0.9796 | 0.9044 | 0.9116 | 0.9224 | 0.9488 | 0.9776 | 0.9656 | 0.9975 | 0.9469 | 0.9929 | 0.9934 | 0.9967 |
| 35 | 0.9332 | 0.9750 | 0.9948 | 0.9803 | 0.8920 | 0.9006 | 0.9116 | 0.9403 | 0.9713 | 0.9613 | 0.9976 | 0.9439 | 0.9899 | 0.9908 | 0.9953 |
| 36 | 0.9423 | 0.9811 | 0.9975 | 0.9849 | 0.9027 | 0.9121 | 0.9221 | 0.9493 | 0.9769 | 0.9694 | 0.9991 | 0.9535 | 0.9936 | 0.9895 | 0.9939 |
| 37 | 0.9453 | 0.9843 | 0.9990 | 0.9934 | 0.9050 | 0.9183 | 0.9262 | 0.9537 | 0.9771 | 0.9780 | 0.9999 | 0.9674 | 0.9943 | 0.9800 | 0.9859 |
| 38 | 0.9314 | 0.9686 | 0.9870 | 0.9623 | 0.8940 | 0.8965 | 0.9097 | 0.9360 | 0.9700 | 0.9477 | 0.9897 | 0.9227 | 0.9849 | 0.9982 | 0.9998 |
| 39 | 0.9317 | 0.9754 | 0.9959 | 0.9853 | 0.8890 | 0.9000 | 0.9102 | 0.9399 | 0.9697 | 0.9645 | 0.9988 | 0.9501 | 0.9898 | 0.9861 | 0.9916 |
| 40 | 0.9500 | 0.9796 | 0.9908 | 0.9667 | 0.9175 | 0.9194 | 0.9313 | 0.9537 | 0.9819 | 0.9606 | 0.9909 | 0.9360 | 0.9915 | 0.9986 | 0.9992 |
| 41 | 0.9434 | 0.9750 | 0.9885 | 0.9630 | 0.9097 | 0.9111 | 0.9236 | 0.9471 | 0.9776 | 0.9545 | 0.9894 | 0.9289 | 0.9886 | 0.9993 | 0.9998 |
| 42 | 0.9211 | 0.9702 | 0.9936 | 0.9908 | 0.8743 | 0.8901 | 0.8989 | 0.9314 | 0.9604 | 0.9643 | 0.9974 | 0.9558 | 0.9847 | 0.9733 | 0.9812 |

Lampiran 8 (Lanjutan)

| LOKASI | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----|----|----|----|
| 22 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 26 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 27 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 29 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 30 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 31 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 32 | 0.9987 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 33 | 0.9984 | 0.9965 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 34 | 0.9974 | 0.9954 | 0.9999 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 35 | 0.9950 | 0.9920 | 0.9990 | 0.9995 | 1 | | | | | | | | | | |
| 36 | 0.9951 | 0.9937 | 0.9989 | 0.9995 | 0.9995 | 1 | | | | | | | | | |
| 37 | 0.9890 | 0.9895 | 0.9947 | 0.9961 | 0.9964 | 0.9983 | 1 | | | | | | | | |
| 38 | 0.9980 | 0.9935 | 0.9981 | 0.9973 | 0.9965 | 0.9948 | 0.9871 | 1 | | | | | | | |
| 39 | 0.9919 | 0.9894 | 0.9974 | 0.9985 | 0.9995 | 0.9994 | 0.9981 | 0.9933 | 1 | | | | | | |
| 40 | 1.0000 | 0.9982 | 0.9985 | 0.9975 | 0.9952 | 0.9951 | 0.9886 | 0.9984 | 0.9920 | 1 | | | | | |
| 41 | 0.9996 | 0.9967 | 0.9982 | 0.9970 | 0.9951 | 0.9943 | 0.9869 | 0.9993 | 0.9916 | 0.9998 | 1 | | | | |
| 42 | 0.9819 | 0.9799 | 0.9908 | 0.9930 | 0.9953 | 0.9958 | 0.9977 | 0.9839 | 0.9979 | 0.9820 | 0.9812 | 1 | | | |

Lampiran 8 (Lanjutan)

| LOKASI | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 43 | 0.7819 | 0.7979 | 0.8156 | 0.7581 | 0.8267 | 0.8306 | 0.9075 | 0.9295 | 0.8807 | 0.9187 | 0.8099 | 0.8092 | 0.8256 | 0.7937 | 0.8709 |
| 44 | 0.7833 | 0.7969 | 0.8116 | 0.7521 | 0.8220 | 0.8138 | 0.9037 | 0.9308 | 0.8754 | 0.9094 | 0.7953 | 0.7997 | 0.8185 | 0.7916 | 0.8498 |
| 45 | 0.7317 | 0.7433 | 0.7559 | 0.6898 | 0.7663 | 0.7468 | 0.8583 | 0.8959 | 0.8247 | 0.8599 | 0.7282 | 0.7373 | 0.7600 | 0.7363 | 0.7847 |
| 46 | 0.7261 | 0.7344 | 0.7431 | 0.6757 | 0.7524 | 0.7181 | 0.8438 | 0.8871 | 0.8089 | 0.8382 | 0.7026 | 0.7179 | 0.7431 | 0.7262 | 0.7496 |
| 47 | 0.7033 | 0.7227 | 0.7447 | 0.6820 | 0.7580 | 0.7759 | 0.8527 | 0.8769 | 0.8215 | 0.8721 | 0.7491 | 0.7424 | 0.7589 | 0.7186 | 0.8311 |
| 48 | 0.8793 | 0.8891 | 0.8988 | 0.8514 | 0.9061 | 0.8863 | 0.9624 | 0.9807 | 0.9432 | 0.9601 | 0.8761 | 0.8855 | 0.9017 | 0.8846 | 0.9018 |
| 49 | 0.6827 | 0.7022 | 0.7243 | 0.6599 | 0.7379 | 0.7555 | 0.8363 | 0.8628 | 0.8036 | 0.8560 | 0.7279 | 0.7213 | 0.7385 | 0.6979 | 0.8130 |
| 50 | 0.6689 | 0.6862 | 0.7058 | 0.6382 | 0.7189 | 0.7252 | 0.8211 | 0.8542 | 0.7857 | 0.8360 | 0.6990 | 0.6973 | 0.7172 | 0.6807 | 0.7803 |
| 51 | 0.6542 | 0.6694 | 0.6866 | 0.6164 | 0.6992 | 0.6950 | 0.8041 | 0.8429 | 0.7665 | 0.8143 | 0.6703 | 0.6730 | 0.6952 | 0.6628 | 0.7474 |
| 52 | 0.8350 | 0.8380 | 0.8398 | 0.7838 | 0.8454 | 0.7927 | 0.9102 | 0.9462 | 0.8844 | 0.8935 | 0.7869 | 0.8102 | 0.8339 | 0.8299 | 0.8009 |
| 53 | 0.7220 | 0.7262 | 0.7301 | 0.6623 | 0.7378 | 0.6863 | 0.8259 | 0.8749 | 0.7906 | 0.8119 | 0.6749 | 0.6975 | 0.7252 | 0.7167 | 0.7090 |
| 54 | 0.6758 | 0.6781 | 0.6797 | 0.6092 | 0.6870 | 0.6267 | 0.7792 | 0.8346 | 0.7412 | 0.7611 | 0.6163 | 0.6425 | 0.6724 | 0.6674 | 0.6484 |
| 55 | 0.7551 | 0.7541 | 0.7517 | 0.6882 | 0.7569 | 0.6859 | 0.8321 | 0.8821 | 0.8001 | 0.8076 | 0.6813 | 0.7120 | 0.7410 | 0.7437 | 0.6936 |
| 56 | 0.6426 | 0.6462 | 0.6494 | 0.5768 | 0.6576 | 0.6022 | 0.7557 | 0.8128 | 0.7157 | 0.7405 | 0.5896 | 0.6136 | 0.6437 | 0.6355 | 0.6294 |

Lampiran 8 (Lanjutan)

| LOKASI | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 43 | 0.9166 | 0.9657 | 0.9854 | 0.9971 | 0.8685 | 0.8922 | 0.8969 | 0.9296 | 0.9496 | 0.9712 | 0.9874 | 0.9738 | 0.9748 | 0.9424 | 0.9533 |
| 44 | 0.8983 | 0.9511 | 0.9721 | 0.9921 | 0.8473 | 0.8757 | 0.8786 | 0.9132 | 0.9309 | 0.9623 | 0.9744 | 0.9713 | 0.9592 | 0.9176 | 0.9307 |
| 45 | 0.8418 | 0.9087 | 0.9409 | 0.9708 | 0.7818 | 0.8163 | 0.8188 | 0.8603 | 0.8826 | 0.9247 | 0.9469 | 0.9412 | 0.9214 | 0.8764 | 0.8935 |
| 46 | 0.8089 | 0.8785 | 0.9110 | 0.9511 | 0.7466 | 0.7864 | 0.7866 | 0.8294 | 0.8479 | 0.9017 | 0.9169 | 0.9262 | 0.8892 | 0.8327 | 0.8521 |
| 47 | 0.8834 | 0.9452 | 0.9789 | 0.9832 | 0.8284 | 0.8491 | 0.8579 | 0.8968 | 0.9306 | 0.9425 | 0.9861 | 0.9394 | 0.9642 | 0.9515 | 0.9628 |
| 48 | 0.9363 | 0.9654 | 0.9633 | 0.9866 | 0.9000 | 0.9282 | 0.9260 | 0.9487 | 0.9470 | 0.9835 | 0.9578 | 0.9954 | 0.9591 | 0.8973 | 0.9075 |
| 49 | 0.8679 | 0.9340 | 0.9720 | 0.9770 | 0.8101 | 0.8317 | 0.8410 | 0.8819 | 0.9186 | 0.9312 | 0.9805 | 0.9287 | 0.9554 | 0.9447 | 0.9569 |
| 50 | 0.8397 | 0.9127 | 0.9551 | 0.9687 | 0.7773 | 0.8038 | 0.8118 | 0.8562 | 0.8926 | 0.9152 | 0.9650 | 0.9191 | 0.9348 | 0.9168 | 0.9318 |
| 51 | 0.8104 | 0.8889 | 0.9348 | 0.9565 | 0.7442 | 0.7751 | 0.7818 | 0.8289 | 0.8648 | 0.8964 | 0.9458 | 0.9064 | 0.9113 | 0.8864 | 0.9038 |
| 52 | 0.8468 | 0.8924 | 0.9002 | 0.9466 | 0.7986 | 0.8403 | 0.8344 | 0.8654 | 0.8621 | 0.9253 | 0.8976 | 0.9554 | 0.8871 | 0.8057 | 0.8226 |
| 53 | 0.7692 | 0.8394 | 0.8701 | 0.9215 | 0.7061 | 0.7514 | 0.7486 | 0.7917 | 0.8042 | 0.8711 | 0.8752 | 0.9045 | 0.8467 | 0.7763 | 0.7978 |
| 54 | 0.7125 | 0.7896 | 0.8258 | 0.8846 | 0.6454 | 0.6942 | 0.6907 | 0.7370 | 0.7506 | 0.8254 | 0.8326 | 0.8646 | 0.7985 | 0.7242 | 0.7480 |
| 55 | 0.7490 | 0.8102 | 0.8300 | 0.8914 | 0.6909 | 0.7406 | 0.7334 | 0.7721 | 0.7720 | 0.8513 | 0.8312 | 0.8931 | 0.8089 | 0.7201 | 0.7418 |
| 56 | 0.6964 | 0.7792 | 0.8217 | 0.8789 | 0.6262 | 0.6743 | 0.6723 | 0.7213 | 0.7402 | 0.8125 | 0.8308 | 0.8502 | 0.7922 | 0.7244 | 0.7488 |

Lampiran 8 (Lanjutan)

| LOKASI | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 43 | 0.9579 | 0.9599 | 0.9707 | 0.9744 | 0.9774 | 0.9807 | 0.9898 | 0.9565 | 0.9836 | 0.9573 | 0.9545 | 0.9923 | 1 | | |
| 44 | 0.9363 | 0.9393 | 0.9521 | 0.9569 | 0.9610 | 0.9652 | 0.9778 | 0.9347 | 0.9693 | 0.9356 | 0.9321 | 0.9823 | 0.9977 | 1 | |
| 45 | 0.8970 | 0.8977 | 0.9187 | 0.9251 | 0.9325 | 0.9357 | 0.9513 | 0.8998 | 0.9435 | 0.8967 | 0.8938 | 0.9628 | 0.9846 | 0.9931 | 1 |
| 46 | 0.8572 | 0.8594 | 0.8821 | 0.8897 | 0.8981 | 0.9026 | 0.9227 | 0.8591 | 0.9116 | 0.8565 | 0.8527 | 0.9359 | 0.9677 | 0.9819 | 0.9961 |
| 47 | 0.9613 | 0.9569 | 0.9751 | 0.9786 | 0.9839 | 0.9832 | 0.9870 | 0.9675 | 0.9884 | 0.9618 | 0.9617 | 0.9955 | 0.9918 | 0.9861 | 0.9776 |
| 48 | 0.9211 | 0.9326 | 0.9323 | 0.9363 | 0.9360 | 0.9452 | 0.9623 | 0.9086 | 0.9447 | 0.9191 | 0.9121 | 0.9560 | 0.9809 | 0.9839 | 0.9646 |
| 49 | 0.9542 | 0.9484 | 0.9693 | 0.9730 | 0.9792 | 0.9778 | 0.9814 | 0.9622 | 0.9841 | 0.9548 | 0.9552 | 0.9921 | 0.9880 | 0.9830 | 0.9777 |
| 50 | 0.9291 | 0.9232 | 0.9481 | 0.9531 | 0.9611 | 0.9600 | 0.9669 | 0.9384 | 0.9683 | 0.9297 | 0.9299 | 0.9811 | 0.9841 | 0.9841 | 0.9873 |
| 51 | 0.9013 | 0.8956 | 0.9237 | 0.9299 | 0.9394 | 0.9386 | 0.9487 | 0.9114 | 0.9486 | 0.9019 | 0.9017 | 0.9659 | 0.9758 | 0.9804 | 0.9913 |
| 52 | 0.8367 | 0.8486 | 0.8575 | 0.8647 | 0.8686 | 0.8788 | 0.9048 | 0.8268 | 0.8831 | 0.8346 | 0.8269 | 0.9069 | 0.9516 | 0.9682 | 0.9703 |
| 53 | 0.8052 | 0.8099 | 0.8330 | 0.8418 | 0.8509 | 0.8573 | 0.8825 | 0.8054 | 0.8672 | 0.8042 | 0.7992 | 0.8966 | 0.9400 | 0.9607 | 0.9818 |
| 54 | 0.7548 | 0.7587 | 0.7861 | 0.7959 | 0.8069 | 0.8130 | 0.8407 | 0.7569 | 0.8250 | 0.7539 | 0.7489 | 0.8589 | 0.9081 | 0.9338 | 0.9644 |
| 55 | 0.7542 | 0.7642 | 0.7823 | 0.7916 | 0.7994 | 0.8091 | 0.8400 | 0.7486 | 0.8177 | 0.7524 | 0.7450 | 0.8503 | 0.9065 | 0.9327 | 0.9536 |
| 56 | 0.7532 | 0.7547 | 0.7856 | 0.7955 | 0.8077 | 0.8123 | 0.8385 | 0.7584 | 0.8256 | 0.7527 | 0.7488 | 0.8596 | 0.9055 | 0.9306 | 0.9647 |

Lampiran 8 (Lanjutan)

| LOKASI | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----|
| 43 | | | | | | | | | | | |
| 44 | | | | | | | | | | | |
| 45 | | | | | | | | | | | |
| 46 | 1 | | | | | | | | | | |
| 47 | 0.9555 | 1 | | | | | | | | | |
| 48 | 0.9559 | 0.9482 | 1 | | | | | | | | |
| 49 | 0.9561 | 0.9995 | 0.9397 | 1 | | | | | | | |
| 50 | 0.9718 | 0.9949 | 0.9371 | 0.9970 | 1 | | | | | | |
| 51 | 0.9817 | 0.9855 | 0.9308 | 0.9888 | 0.9974 | 1 | | | | | |
| 52 | 0.9789 | 0.9147 | 0.9784 | 0.9096 | 0.9224 | 0.9305 | 1 | | | | |
| 53 | 0.9946 | 0.9202 | 0.9406 | 0.9210 | 0.9429 | 0.9589 | 0.9824 | 1 | | | |
| 54 | 0.9838 | 0.8893 | 0.9079 | 0.8921 | 0.9201 | 0.9421 | 0.9665 | 0.9961 | 1 | | |
| 55 | 0.9746 | 0.8719 | 0.9310 | 0.8705 | 0.8954 | 0.9149 | 0.9857 | 0.9912 | 0.9902 | 1 | |
| 56 | 0.9829 | 0.8933 | 0.8952 | 0.8976 | 0.9266 | 0.9491 | 0.9543 | 0.9929 | 0.9984 | 0.9809 | 1 |

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

Lampiran 9 Output MATLAB Taksiran Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model GWMLR

| Par | Est1 | Se1 | Z1 | Est2 | Se2 | Z2 | Est3 | Se3 | Z3 |
|--------------|----------|-------------|--------------|--------------|-------------|--------------|----------|-------------|--------------|
| β_{01} | -0.42743 | 2.03775E-08 | -2.09757E+07 | -4.09927E-15 | 2.03775E-08 | -2.01166E-07 | -0.06154 | 2.03775E-08 | -3.02016E+06 |
| β_{11} | -1.27785 | 1.13516E-09 | -1.12570E+09 | -2.28355E-16 | 1.13516E-09 | -2.01166E-07 | -0.02458 | 1.13516E-09 | -2.16547E+07 |
| β_{21} | -0.82530 | 1.79540E-08 | -4.59674E+07 | -3.61175E-15 | 1.79540E-08 | -2.01166E-07 | -0.00332 | 1.79540E-08 | -1.84963E+05 |
| β_{31} | 7.32306 | 1.07762E-08 | 6.79560E+08 | -2.16781E-15 | 1.07762E-08 | -2.01166E-07 | 0.10997 | 1.07762E-08 | 1.02047E+07 |
| β_{41} | 6.92863 | 1.58098E-09 | 4.38250E+09 | -3.18039E-16 | 1.58098E-09 | -2.01166E-07 | 0.09950 | 1.58098E-09 | 6.29371E+07 |
| β_{51} | -0.03433 | 3.95764E-09 | -8.67449E+06 | -7.96144E-16 | 3.95764E-09 | -2.01166E-07 | -0.00018 | 3.95764E-09 | -4.60054E+04 |
| β_{02} | 7.02094 | 3.39633E-16 | 2.06722E+16 | -6.83227E-23 | 3.39633E-16 | -2.01166E-07 | -0.46535 | 3.39633E-16 | -1.37017E+15 |
| β_{12} | -0.33194 | 1.86566E-17 | -1.77921E+16 | -3.75309E-24 | 1.86566E-17 | -2.01166E-07 | -0.03910 | 1.86566E-17 | -2.09580E+15 |
| β_{22} | 7.56653 | 2.80965E-16 | 2.69305E+16 | -5.65207E-23 | 2.80965E-16 | -2.01166E-07 | -0.36151 | 2.80965E-16 | -1.28666E+15 |
| β_{32} | 15.48299 | 1.60462E-16 | 9.64902E+16 | -3.22795E-23 | 1.60462E-16 | -2.01166E-07 | 0.08861 | 1.60462E-16 | 5.52221E+14 |
| β_{42} | 7.96677 | 2.19342E-17 | 3.63213E+17 | -4.41242E-24 | 2.19342E-17 | -2.01166E-07 | 0.16375 | 2.19342E-17 | 7.46557E+15 |
| β_{52} | 3.15879 | 6.13016E-17 | 5.15287E+16 | -1.23318E-23 | 6.13016E-17 | -2.01166E-07 | -0.03594 | 6.13015E-17 | -5.86327E+14 |
| β_{03} | 2.57351 | 2.79425E-15 | 9.21003E+14 | 5.62110E-22 | 2.79425E-15 | 2.01166E-07 | -0.05217 | 2.79425E-15 | -1.86706E+13 |
| β_{13} | -0.18960 | 1.56628E-16 | -1.21052E+15 | 3.15083E-23 | 1.56628E-16 | 2.01166E-07 | -0.00764 | 1.56628E-16 | -4.87953E+13 |
| β_{23} | 3.94017 | 2.36290E-15 | 1.66751E+15 | 4.75337E-22 | 2.36290E-15 | 2.01166E-07 | 0.00438 | 2.36290E-15 | 1.85371E+12 |
| β_{33} | 2.58755 | 1.30129E-15 | 1.98845E+15 | 2.61776E-22 | 1.30129E-15 | 2.01166E-07 | -0.02949 | 1.30129E-15 | -2.26621E+13 |
| β_{43} | 2.39701 | 1.86453E-16 | 1.28558E+16 | 3.75082E-23 | 1.86453E-16 | 2.01166E-07 | 0.03138 | 1.86453E-16 | 1.68276E+14 |
| β_{53} | 1.45229 | 5.11482E-16 | 2.83937E+15 | 1.02893E-22 | 5.11482E-16 | 2.01166E-07 | 0.01287 | 5.11482E-16 | 2.51693E+13 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est4 | Se4 | Z4 | Est5 | Se5 | Z5 | Est6 | Se6 | Z6 |
|--------------|----------|-------------|--------------|----------|-------------|--------------|----------|-------------|--------------|
| β_{01} | -0.03976 | 2.03775E-08 | -1.95124E+06 | -0.04271 | 2.03775E-08 | -2.09570E+06 | -0.04465 | 2.03775E-08 | -2.19136E+06 |
| β_{11} | -0.01532 | 1.13516E-09 | -1.34950E+07 | -0.01658 | 1.13516E-09 | -1.46061E+07 | -0.01708 | 1.13516E-09 | -1.50505E+07 |
| β_{21} | -0.00316 | 1.79540E-08 | -1.75837E+05 | -0.00205 | 1.79540E-08 | -1.13997E+05 | -0.00028 | 1.79540E-08 | -1.58134E+04 |
| β_{31} | 0.07276 | 1.07762E-08 | 6.75184E+06 | 0.07588 | 1.07762E-08 | 7.04137E+06 | 0.07620 | 1.07762E-08 | 7.07118E+06 |
| β_{41} | 0.06359 | 1.58098E-09 | 4.02241E+07 | 0.06802 | 1.58098E-09 | 4.30227E+07 | 0.07005 | 1.58098E-09 | 4.43096E+07 |
| β_{51} | -0.00007 | 3.95764E-09 | -1.88302E+04 | 0.00014 | 3.95764E-09 | 3.63018E+04 | 0.00064 | 3.95764E-09 | 1.62088E+05 |
| β_{02} | -0.22901 | 3.39633E-16 | -6.74278E+14 | -0.25451 | 3.39633E-16 | -7.49360E+14 | -0.25713 | 3.39633E-16 | -7.57083E+14 |
| β_{12} | -0.02165 | 1.86566E-17 | -1.16020E+15 | -0.02371 | 1.86566E-17 | -1.27102E+15 | -0.02401 | 1.86566E-17 | -1.28685E+15 |
| β_{22} | -0.17866 | 2.80965E-16 | -6.35873E+14 | -0.19734 | 2.80965E-16 | -7.02378E+14 | -0.19729 | 2.80965E-16 | -7.02202E+14 |
| β_{32} | 0.09798 | 1.60462E-16 | 6.10589E+14 | 0.09839 | 1.60462E-16 | 6.13138E+14 | 0.10514 | 1.60462E-16 | 6.55237E+14 |
| β_{42} | 0.11455 | 2.19342E-17 | 5.22259E+15 | 0.11991 | 2.19342E-17 | 5.46674E+15 | 0.12416 | 2.19342E-17 | 5.66077E+15 |
| β_{52} | -0.01187 | 6.13015E-17 | -1.93552E+14 | -0.01422 | 6.13015E-17 | -2.31985E+14 | -0.01424 | 6.13016E-17 | -2.32354E+14 |
| β_{03} | -0.05071 | 2.79425E-15 | -1.81476E+13 | -0.04564 | 2.79425E-15 | -1.63332E+13 | -0.05203 | 2.79425E-15 | -1.86207E+13 |
| β_{13} | -0.00583 | 1.56628E-16 | -3.72400E+13 | -0.00577 | 1.56628E-16 | -3.68075E+13 | -0.00629 | 1.56628E-16 | -4.01315E+13 |
| β_{23} | -0.01077 | 2.36290E-15 | -4.55936E+12 | -0.00518 | 2.36290E-15 | -2.19152E+12 | -0.00930 | 2.36290E-15 | -3.93687E+12 |
| β_{33} | -0.02860 | 1.30129E-15 | -2.19796E+13 | -0.02545 | 1.30129E-15 | -1.95553E+13 | -0.02881 | 1.30129E-15 | -2.21401E+13 |
| β_{43} | 0.01842 | 1.86453E-16 | 9.88127E+13 | 0.02055 | 1.86453E-16 | 1.10218E+14 | 0.02079 | 1.86453E-16 | 1.11519E+14 |
| β_{53} | 0.00522 | 5.11482E-16 | 1.02080E+13 | 0.00702 | 5.11482E-16 | 1.37151E+13 | 0.00616 | 5.11482E-16 | 1.20445E+13 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est7 | Se7 | Z7 | Est8 | Se8 | Z8 | Est9 | Se9 | Z9 |
|--------------|----------|-------------|--------------|----------|-------------|--------------|----------|-------------|--------------|
| β_{01} | -0.04578 | 2.03775E-08 | -2.24683E+06 | -0.04625 | 2.03775E-08 | -2.26942E+06 | -0.04565 | 2.03775E-08 | -2.24036E+06 |
| β_{11} | -0.01853 | 1.13516E-09 | -1.63251E+07 | -0.01873 | 1.13516E-09 | -1.64964E+07 | -0.01783 | 1.13516E-09 | -1.57096E+07 |
| β_{21} | -0.00213 | 1.79540E-08 | -1.18756E+05 | -0.00213 | 1.79540E-08 | -1.18802E+05 | -0.00101 | 1.79540E-08 | -5.61741E+04 |
| β_{31} | 0.08101 | 1.07762E-08 | 7.51742E+06 | 0.08183 | 1.07762E-08 | 7.59377E+06 | 0.07914 | 1.07762E-08 | 7.34416E+06 |
| β_{41} | 0.07488 | 1.58098E-09 | 4.73631E+07 | 0.07569 | 1.58098E-09 | 4.78756E+07 | 0.07220 | 1.58098E-09 | 4.56676E+07 |
| β_{51} | 0.00024 | 3.95764E-09 | 6.03001E+04 | 0.00010 | 3.95764E-09 | 2.63165E+04 | 0.00042 | 3.95764E-09 | 1.05290E+05 |
| β_{02} | -0.28955 | 3.39633E-16 | -8.52526E+14 | -0.29749 | 3.39633E-16 | -8.75923E+14 | -0.27219 | 3.39633E-16 | -8.01426E+14 |
| β_{12} | -0.02660 | 1.86566E-17 | -1.42578E+15 | -0.02721 | 1.86566E-17 | -1.45851E+15 | -0.02529 | 1.86566E-17 | -1.35573E+15 |
| β_{22} | -0.22268 | 2.80965E-16 | -7.92538E+14 | -0.22930 | 2.80965E-16 | -8.16100E+14 | -0.20939 | 2.80965E-16 | -7.45250E+14 |
| β_{32} | 0.10094 | 1.60462E-16 | 6.29059E+14 | 0.09790 | 1.60462E-16 | 6.10107E+14 | 0.10270 | 1.60462E-16 | 6.40004E+14 |
| β_{42} | 0.12844 | 2.19342E-17 | 5.85591E+15 | 0.12801 | 2.19342E-17 | 5.83593E+15 | 0.12594 | 2.19341E-17 | 5.74164E+15 |
| β_{52} | -0.01740 | 6.13015E-17 | -2.83888E+14 | -0.01848 | 6.13015E-17 | -3.01454E+14 | -0.01544 | 6.13015E-17 | -2.51811E+14 |
| β_{03} | -0.04062 | 2.79425E-15 | -1.45353E+13 | -0.03680 | 2.79425E-15 | -1.31688E+13 | -0.04277 | 2.79425E-15 | -1.53058E+13 |
| β_{13} | -0.00581 | 1.56628E-16 | -3.70627E+13 | -0.00557 | 1.56628E-16 | -3.55802E+13 | -0.00583 | 1.56628E-16 | -3.72312E+13 |
| β_{23} | 0.00113 | 2.36290E-15 | 4.78905E+11 | 0.00409 | 2.36290E-15 | 1.73120E+12 | -0.00139 | 2.36290E-15 | -5.86925E+11 |
| β_{33} | -0.02204 | 1.30129E-15 | -1.69408E+13 | -0.01961 | 1.30129E-15 | -1.50675E+13 | -0.02354 | 1.30129E-15 | -1.80917E+13 |
| β_{43} | 0.02350 | 1.86453E-16 | 1.26046E+14 | 0.02405 | 1.86453E-16 | 1.29001E+14 | 0.02242 | 1.86453E-16 | 1.20228E+14 |
| β_{53} | 0.00923 | 5.11482E-16 | 1.80514E+13 | 0.01008 | 5.11482E-16 | 1.97104E+13 | 0.00833 | 5.11482E-16 | 1.62882E+13 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est10 | Se10 | Z10 | Est11 | Se11 | Z11 | Est12 | Se12 | Z12 |
|--------------|----------|-------------|--------------|----------|-------------|--------------|----------|-------------|--------------|
| β_{01} | -0.04629 | 2.03775E-08 | -2.27158E+06 | -0.04483 | 2.03775E-08 | -2.20009E+06 | -0.15677 | 2.03775E-08 | -7.69308E+06 |
| β_{11} | -0.01858 | 1.13516E-09 | -1.63663E+07 | -0.01711 | 1.13516E-09 | -1.50691E+07 | -0.05981 | 1.13516E-09 | -5.26900E+07 |
| β_{21} | -0.00100 | 1.79540E-08 | -5.58704E+04 | -0.00074 | 1.79540E-08 | -4.12214E+04 | -0.02410 | 1.79540E-08 | -1.34231E+06 |
| β_{31} | 0.08000 | 1.07762E-08 | 7.42362E+06 | 0.07733 | 1.07762E-08 | 7.17595E+06 | 0.30825 | 1.07762E-08 | 2.86046E+07 |
| β_{41} | 0.07507 | 1.58098E-09 | 4.74820E+07 | 0.06966 | 1.58098E-09 | 4.40633E+07 | 0.24751 | 1.58098E-09 | 1.56555E+08 |
| β_{51} | 0.00040 | 3.95764E-09 | 1.02140E+05 | 0.00071 | 3.95764E-09 | 1.80433E+05 | -0.00454 | 3.95764E-09 | -1.14747E+06 |
| β_{02} | -0.29622 | 3.39633E-16 | -8.72171E+14 | -0.22951 | 3.39633E-16 | -6.75760E+14 | -0.46263 | 3.39633E-16 | -1.36216E+15 |
| β_{12} | -0.02692 | 1.86566E-17 | -1.44276E+15 | -0.02260 | 1.86566E-17 | -1.21154E+15 | -0.06790 | 1.86566E-17 | -3.63965E+15 |
| β_{22} | -0.22735 | 2.80965E-16 | -8.09167E+14 | -0.17450 | 2.80965E-16 | -6.21081E+14 | -0.38094 | 2.80965E-16 | -1.35582E+15 |
| β_{32} | 0.09829 | 1.60462E-16 | 6.12571E+14 | 0.12109 | 1.60462E-16 | 7.54630E+14 | 0.68099 | 1.60462E-16 | 4.24393E+15 |
| β_{42} | 0.12796 | 2.19341E-17 | 5.83402E+15 | 0.12822 | 2.19341E-17 | 5.84571E+15 | 0.50914 | 2.19341E-17 | 2.32120E+16 |
| β_{52} | -0.01885 | 6.13015E-17 | -3.07510E+14 | -0.00887 | 6.13015E-17 | -1.44658E+14 | 0.00704 | 6.13015E-17 | 1.14899E+14 |
| β_{03} | -0.04324 | 2.79425E-15 | -1.54745E+13 | -0.05047 | 2.79425E-15 | -1.80622E+13 | -0.53854 | 2.79425E-15 | -1.92731E+14 |
| β_{13} | -0.00596 | 1.56628E-16 | -3.80465E+13 | -0.00630 | 1.56628E-16 | -4.02037E+13 | -0.04149 | 1.56628E-16 | -2.64877E+14 |
| β_{23} | -0.00092 | 2.36290E-15 | -3.87784E+11 | -0.00782 | 2.36290E-15 | -3.31085E+12 | -0.31619 | 2.36290E-15 | -1.33816E+14 |
| β_{33} | -0.02324 | 1.30129E-15 | -1.78581E+13 | -0.02854 | 1.30129E-15 | -2.19312E+13 | -0.29810 | 1.30129E-15 | -2.29082E+14 |
| β_{43} | 0.02334 | 1.86453E-16 | 1.25186E+14 | 0.02107 | 1.86453E-16 | 1.13023E+14 | 0.04002 | 1.86453E-16 | 2.14625E+14 |
| β_{53} | 0.00875 | 5.11482E-16 | 1.71151E+13 | 0.00640 | 5.11482E-16 | 1.25212E+13 | -0.03814 | 5.11482E-16 | -7.45613E+13 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est13 | Se13 | Z13 | Est14 | Se14 | Z14 | Est15 | Se15 | Z15 |
|--------------|----------|-------------|--------------|-----------|---------|--------------|-----------|---------|--------------|
| β_{01} | -0.15771 | 2.03775E-08 | -7.73918E+06 | -11.29617 | 0.00334 | -3.38499E+03 | -8.42135 | 0.00012 | -7.30011E+04 |
| β_{11} | -0.06095 | 1.13516E-09 | -5.36891E+07 | -4.90970 | 0.00187 | -2.62009E+03 | -3.58629 | 0.00055 | -6.46762E+03 |
| β_{21} | -0.02522 | 1.79540E-08 | -1.40492E+06 | 3.97270 | 0.00370 | 1.07451E+03 | 2.96909 | 0.00458 | 647.81474 |
| β_{31} | 0.31186 | 1.07762E-08 | 2.89396E+07 | 13.70662 | 0.01142 | 1.20025E+03 | 10.18341 | 0.00736 | 1.38444E+03 |
| β_{41} | 0.25083 | 1.58098E-09 | 1.58658E+08 | 9.46684 | 0.01054 | 897.88924 | 7.67447 | 0.00582 | 1.31843E+03 |
| β_{51} | -0.00544 | 3.95764E-09 | -1.37383E+06 | 0.44543 | 0.00081 | 547.44519 | 0.12590 | 0.00081 | 155.74891 |
| β_{02} | -0.46988 | 3.39633E-16 | -1.38349E+15 | -15.41030 | 0.29734 | -51.82780 | -11.33420 | 0.25421 | -44.58651 |
| β_{12} | -0.06889 | 1.86566E-17 | -3.69238E+15 | -3.42647 | 0.01599 | -214.25136 | -2.48728 | 0.01310 | -189.91146 |
| β_{22} | -0.38543 | 2.80965E-16 | -1.37180E+15 | -1.10293 | 0.23673 | -4.65897 | -1.06776 | 0.20321 | -5.25442 |
| β_{32} | 0.68413 | 1.60462E-16 | 4.26352E+15 | 27.78295 | 0.13588 | 204.47017 | 20.65031 | 0.12517 | 164.97398 |
| β_{42} | 0.51227 | 2.19341E-17 | 2.33551E+16 | 16.37706 | 0.01050 | 1.55993E+03 | 11.93415 | 0.01296 | 921.17324 |
| β_{52} | 0.00757 | 6.13015E-17 | 1.23492E+14 | 3.09740 | 0.04607 | 67.23424 | 2.01720 | 0.04064 | 49.63323 |
| β_{03} | -0.52949 | 2.79425E-15 | -1.89492E+14 | -69.07721 | 0.02979 | -2.31913E+03 | -41.08496 | 0.03348 | -1.22698E+03 |
| β_{13} | -0.04105 | 1.56628E-16 | -2.62093E+14 | -4.75414 | 0.00166 | -2.86757E+03 | -2.96989 | 0.00214 | -1.39050E+03 |
| β_{23} | -0.30832 | 2.36290E-15 | -1.30483E+14 | -46.54023 | 0.02794 | -1.66571E+03 | -27.22170 | 0.02855 | -953.57005 |
| β_{33} | -0.29282 | 1.30129E-15 | -2.25020E+14 | -39.48530 | 0.01784 | -2.21322E+03 | -23.60788 | 0.02018 | -1.16987E+03 |
| β_{43} | 0.04194 | 1.86453E-16 | 2.24922E+14 | -1.39008 | 0.00553 | -251.16298 | -0.47379 | 0.00425 | -111.54634 |
| β_{53} | -0.03582 | 5.11482E-16 | -7.00333E+13 | -8.02712 | 0.00737 | -1.08916E+03 | -4.51533 | 0.00692 | -652.64438 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est16 | Se16 | Z16 | Est17 | Se17 | Z17 | Est18 | Se18 | Z18 |
|--------------|-----------|---------|--------------|-----------|---------|--------------|----------|---------|--------------|
| β_{01} | -6.34068 | 0.00148 | -4.29232E+03 | -4.87041 | 0.00245 | -1.98628E+03 | -3.70518 | 0.00316 | -1.17404E+03 |
| β_{11} | -2.62905 | 0.00010 | -2.54800E+04 | -2.02029 | 0.00050 | -4.03738E+03 | -1.54503 | 0.00077 | -2.00379E+03 |
| β_{21} | 1.93159 | 0.00486 | 397.53601 | 1.24398 | 0.00496 | 250.99884 | 0.78393 | 0.00503 | 155.77299 |
| β_{31} | 8.08043 | 0.00506 | 1.59761E+03 | 6.50847 | 0.00353 | 1.84320E+03 | 5.15511 | 0.00243 | 2.11826E+03 |
| β_{41} | 6.45698 | 0.00342 | 1.88687E+03 | 5.59156 | 0.00190 | 2.93950E+03 | 4.69330 | 0.00085 | 5.53823E+03 |
| β_{51} | 0.05742 | 0.00073 | 78.43951 | 0.05786 | 0.00066 | 87.69544 | 0.05284 | 0.00061 | 87.24982 |
| β_{02} | -8.38078 | 0.22763 | -36.81761 | -6.52522 | 0.21024 | -31.03698 | -5.11577 | 0.19895 | -25.71370 |
| β_{12} | -1.77722 | 0.01140 | -155.90482 | -1.34840 | 0.01031 | -130.83349 | -1.03050 | 0.00959 | -107.45732 |
| β_{22} | -1.21453 | 0.18254 | -6.65339 | -1.24314 | 0.16906 | -7.35311 | -1.19268 | 0.16039 | -7.43634 |
| β_{32} | 15.66746 | 0.11708 | 133.81773 | 12.45368 | 0.11145 | 111.73751 | 9.92321 | 0.10789 | 91.97163 |
| β_{42} | 9.18141 | 0.01379 | 665.76574 | 7.41533 | 0.01422 | 521.56955 | 5.99693 | 0.01457 | 411.66303 |
| β_{52} | 1.52366 | 0.03717 | 40.98652 | 1.21876 | 0.03488 | 34.93735 | 0.94787 | 0.03342 | 28.36061 |
| β_{03} | -24.13621 | 0.03396 | -710.67765 | -14.43965 | 0.03342 | -432.00529 | -8.54828 | 0.03262 | -262.04583 |
| β_{13} | -1.84980 | 0.00229 | -808.93634 | -1.19563 | 0.00233 | -513.99510 | -0.77774 | 0.00233 | -334.11350 |
| β_{23} | -15.49649 | 0.02782 | -557.00787 | -8.81756 | 0.02678 | -329.27168 | -4.84486 | 0.02576 | -188.07941 |
| β_{33} | -13.96681 | 0.02053 | -680.36316 | -8.38280 | 0.02025 | -414.01191 | -4.94518 | 0.01979 | -249.93604 |
| β_{43} | 0.15761 | 0.00352 | 44.73107 | 0.53699 | 0.00303 | 177.07906 | 0.71021 | 0.00265 | 267.81113 |
| β_{53} | -2.37571 | 0.00647 | -366.94277 | -1.15860 | 0.00607 | -190.74957 | -0.47243 | 0.00573 | -82.38983 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est19 | Se19 | Z19 | Est20 | Se20 | Z20 | Est21 | Se21 | Z21 |
|--------------|----------|---------|--------------|----------|---------|-------------|----------|---------|-------------|
| β_{01} | -3.00726 | 0.00364 | -825.50671 | -2.18719 | 0.00410 | -533.13412 | -2.01626 | 0.00447 | -451.11390 |
| β_{11} | -1.24645 | 0.00098 | -1.27744E+03 | -0.79013 | 0.00111 | -709.22703 | -0.74182 | 0.00124 | -598.30068 |
| β_{21} | 0.50924 | 0.00501 | 101.55086 | 0.34707 | 0.00505 | 68.71206 | 0.27357 | 0.00503 | 54.36715 |
| β_{31} | 4.36721 | 0.00157 | 2.79022E+03 | 3.19130 | 0.00083 | 3.85271E+03 | 3.01333 | 0.00017 | 1.80283E+04 |
| β_{41} | 3.99582 | 0.00004 | 1.01638E+05 | 2.82947 | 0.00056 | 5.08890E+03 | 2.67349 | 0.00109 | 2.44665E+03 |
| β_{51} | 0.04382 | 0.00057 | 77.48949 | 0.09393 | 0.00056 | 167.22740 | 0.08026 | 0.00056 | 143.44196 |
| β_{02} | -4.23872 | 0.19091 | -22.20324 | -3.07837 | 0.18639 | -16.51564 | -2.89608 | 0.18236 | -15.88148 |
| β_{12} | -0.83775 | 0.00908 | -92.30885 | -0.56484 | 0.00878 | -64.35556 | -0.53048 | 0.00851 | -62.34402 |
| β_{22} | -1.15521 | 0.15426 | -7.48877 | -0.97756 | 0.15094 | -6.47643 | -0.95975 | 0.14798 | -6.48585 |
| β_{32} | 8.32420 | 0.10549 | 78.91201 | 5.98459 | 0.10449 | 57.27285 | 5.64579 | 0.10363 | 54.48124 |
| β_{42} | 5.13813 | 0.01490 | 344.76812 | 3.89541 | 0.01533 | 254.15699 | 3.69890 | 0.01572 | 235.22825 |
| β_{52} | 0.82827 | 0.03240 | 25.56363 | 0.58161 | 0.03188 | 18.24349 | 0.56290 | 0.03142 | 17.91549 |
| β_{03} | -5.46617 | 0.03179 | -171.92080 | -3.10557 | 0.03147 | -98.69157 | -2.55798 | 0.03109 | -82.27482 |
| β_{13} | -0.55147 | 0.00232 | -237.97194 | -0.35313 | 0.00233 | -151.62903 | -0.31063 | 0.00233 | -133.05624 |
| β_{23} | -2.77058 | 0.02483 | -111.60173 | -1.30483 | 0.02435 | -53.58796 | -0.94851 | 0.02386 | -39.75949 |
| β_{33} | -3.18104 | 0.01930 | -164.78437 | -1.88208 | 0.01912 | -98.43036 | -1.56450 | 0.01891 | -82.73781 |
| β_{43} | 0.76492 | 0.00233 | 327.71658 | 0.62941 | 0.00212 | 297.55910 | 0.63014 | 0.00191 | 330.00743 |
| β_{53} | -0.12797 | 0.00544 | -23.51808 | 0.00019 | 0.00528 | 0.03657 | 0.06297 | 0.00512 | 12.28937 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est22 | Se22 | Z22 | Est23 | Se23 | Z23 | Est24 | Se24 | Z24 |
|--------------|----------|---------|-------------|----------|---------|-------------|----------|---------|-------------|
| β_{01} | -1.82542 | 0.00475 | -384.24082 | -1.72928 | 0.00505 | -342.54323 | -1.59528 | 0.00531 | -300.19060 |
| β_{11} | -0.66073 | 0.00136 | -487.38070 | -0.64598 | 0.00146 | -442.37424 | -0.60568 | 0.00156 | -387.24890 |
| β_{21} | 0.26405 | 0.00499 | 52.93808 | 0.22582 | 0.00497 | 45.47084 | 0.21791 | 0.00494 | 44.15359 |
| β_{31} | 2.69737 | 0.00038 | 7.02850E+03 | 2.58701 | 0.00093 | 2.79669E+03 | 2.36385 | 0.00143 | 1.65672E+03 |
| β_{41} | 2.42784 | 0.00157 | 1.54256E+03 | 2.37464 | 0.00204 | 1.16478E+03 | 2.23759 | 0.00247 | 905.36167 |
| β_{51} | 0.07608 | 0.00055 | 139.07306 | 0.07200 | 0.00055 | 131.10943 | 0.06878 | 0.00055 | 125.06440 |
| β_{02} | -2.64685 | 0.17898 | -14.78860 | -2.57470 | 0.17581 | -14.64505 | -2.43119 | 0.17300 | -14.05330 |
| β_{12} | -0.47767 | 0.00828 | -57.68469 | -0.46534 | 0.00807 | -57.69618 | -0.43581 | 0.00787 | -55.36484 |
| β_{22} | -0.90772 | 0.14552 | -6.23793 | -0.89271 | 0.14320 | -6.23409 | -0.85068 | 0.14115 | -6.02662 |
| β_{32} | 5.13306 | 0.10299 | 49.83982 | 4.99543 | 0.10239 | 48.78644 | 4.69423 | 0.10192 | 46.05894 |
| β_{42} | 3.38741 | 0.01611 | 210.23795 | 3.28998 | 0.01648 | 199.69004 | 3.08456 | 0.01683 | 183.33198 |
| β_{52} | 0.50121 | 0.03105 | 16.14440 | 0.48488 | 0.03069 | 15.79755 | 0.43411 | 0.03039 | 14.28617 |
| β_{03} | -2.06111 | 0.03074 | -67.04855 | -1.83218 | 0.03036 | -60.35595 | -1.57200 | 0.02998 | -52.43994 |
| β_{13} | -0.26589 | 0.00234 | -113.66730 | -0.24766 | 0.00234 | -105.83166 | -0.22231 | 0.00234 | -95.01775 |
| β_{23} | -0.66836 | 0.02341 | -28.55385 | -0.53102 | 0.02295 | -23.14280 | -0.40552 | 0.02250 | -18.01949 |
| β_{33} | -1.26285 | 0.01871 | -67.49409 | -1.11522 | 0.01849 | -60.31587 | -0.93825 | 0.01827 | -51.36137 |
| β_{43} | 0.59855 | 0.00172 | 347.39819 | 0.59980 | 0.00154 | 388.73617 | 0.57791 | 0.00137 | 420.75923 |
| β_{53} | 0.09532 | 0.00498 | 19.13554 | 0.12243 | 0.00484 | 25.31118 | 0.13584 | 0.00470 | 28.90532 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est25 | Se25 | Z25 | Est26 | Se26 | Z26 | Est27 | Se27 | Z27 |
|--------------|----------|---------|-------------|----------|---------|------------|----------|---------|------------|
| β_{01} | -1.52355 | 0.00557 | -273.43648 | -1.33657 | 0.00586 | -228.09447 | -1.24468 | 0.00603 | -206.50647 |
| β_{11} | -0.58303 | 0.00166 | -351.22372 | -0.52715 | 0.00175 | -301.29519 | -0.48458 | 0.00183 | -264.66263 |
| β_{21} | 0.17213 | 0.00491 | 35.03278 | 0.16834 | 0.00495 | 34.02091 | 0.10866 | 0.00488 | 22.24615 |
| β_{31} | 2.31961 | 0.00190 | 1.22104E+03 | 1.99351 | 0.00233 | 853.94842 | 1.94423 | 0.00272 | 715.49474 |
| β_{41} | 2.15285 | 0.00288 | 747.44012 | 1.96579 | 0.00327 | 601.70566 | 1.80476 | 0.00362 | 498.54368 |
| β_{51} | 0.05498 | 0.00055 | 99.53285 | 0.05603 | 0.00056 | 99.31036 | 0.03992 | 0.00056 | 71.89285 |
| β_{02} | -2.33160 | 0.17035 | -13.68724 | -2.13379 | 0.16808 | -12.69534 | -1.98656 | 0.16600 | -11.96755 |
| β_{12} | -0.42011 | 0.00769 | -54.63864 | -0.37987 | 0.00753 | -50.46533 | -0.35251 | 0.00738 | -47.76522 |
| β_{22} | -0.85199 | 0.13922 | -6.11962 | -0.78406 | 0.13758 | -5.69915 | -0.78293 | 0.13607 | -5.75398 |
| β_{32} | 4.52880 | 0.10147 | 44.63041 | 4.11056 | 0.10118 | 40.62759 | 3.84345 | 0.10093 | 38.07998 |
| β_{42} | 2.99886 | 0.01716 | 174.72860 | 2.70642 | 0.01750 | 154.68002 | 2.59094 | 0.01783 | 145.27883 |
| β_{52} | 0.44612 | 0.03010 | 14.82122 | 0.37053 | 0.02986 | 12.40827 | 0.39081 | 0.02965 | 13.17991 |
| β_{03} | -1.24740 | 0.02955 | -42.21258 | -0.96489 | 0.02913 | -33.12760 | -0.67043 | 0.02871 | -23.35252 |
| β_{13} | -0.19829 | 0.00233 | -84.92276 | -0.16763 | 0.00233 | -71.97555 | -0.14449 | 0.00232 | -62.22167 |
| β_{23} | -0.17970 | 0.02203 | -8.15554 | -0.06920 | 0.02158 | -3.20634 | 0.14537 | 0.02114 | 6.87746 |
| β_{33} | -0.75953 | 0.01802 | -42.14928 | -0.55347 | 0.01777 | -31.15294 | -0.42514 | 0.01753 | -24.25850 |
| β_{43} | 0.58401 | 0.00121 | 483.63334 | 0.54622 | 0.00105 | 520.32431 | 0.53324 | 0.00090 | 592.89937 |
| β_{53} | 0.18055 | 0.00456 | 39.61455 | 0.18619 | 0.00442 | 42.11073 | 0.21617 | 0.00429 | 50.38299 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est28 | Se28 | Z28 | Est29 | Se29 | Z29 | Est30 | Se30 | Z30 |
|--------------|----------|---------|------------|----------|---------|------------|----------|---------|------------|
| β_{01} | -1.13420 | 0.00625 | -181.55933 | -0.86531 | 0.00642 | -134.71600 | -0.82587 | 0.00658 | -125.42545 |
| β_{11} | -0.43759 | 0.00191 | -229.32234 | -0.33516 | 0.00198 | -169.59635 | -0.32464 | 0.00205 | -158.69436 |
| β_{21} | 0.13824 | 0.00488 | 28.31850 | 0.13713 | 0.00489 | 28.04801 | 0.11379 | 0.00487 | 23.38667 |
| β_{31} | 1.69825 | 0.00310 | 548.48489 | 1.23557 | 0.00338 | 366.02562 | 1.20480 | 0.00368 | 327.59717 |
| β_{41} | 1.65336 | 0.00396 | 417.64830 | 1.28539 | 0.00427 | 301.15527 | 1.24257 | 0.00456 | 272.20625 |
| β_{51} | 0.05366 | 0.00056 | 96.68871 | 0.05165 | 0.00056 | 91.68817 | 0.05232 | 0.00058 | 90.37754 |
| β_{02} | -1.85660 | 0.16415 | -11.31012 | -1.51654 | 0.16270 | -9.32105 | -1.47077 | 0.16130 | -9.11822 |
| β_{12} | -0.32163 | 0.00725 | -44.38215 | -0.25200 | 0.00714 | -35.30901 | -0.24422 | 0.00703 | -34.73526 |
| β_{22} | -0.71792 | 0.13475 | -5.32784 | -0.60589 | 0.13372 | -4.53088 | -0.59661 | 0.13274 | -4.49474 |
| β_{32} | 3.53032 | 0.10078 | 35.03010 | 2.80377 | 0.10079 | 27.81738 | 2.71932 | 0.10081 | 26.97403 |
| β_{42} | 2.36946 | 0.01817 | 130.42070 | 1.89988 | 0.01851 | 102.62046 | 1.84520 | 0.01885 | 97.87398 |
| β_{52} | 0.31911 | 0.02947 | 10.82803 | 0.22388 | 0.02934 | 7.63111 | 0.21891 | 0.02921 | 7.49371 |
| β_{03} | -0.66084 | 0.02836 | -23.30101 | -0.41138 | 0.02806 | -14.66125 | -0.34517 | 0.02775 | -12.43674 |
| β_{13} | -0.13434 | 0.00232 | -57.93516 | -0.09844 | 0.00232 | -42.49601 | -0.09207 | 0.00231 | -39.80226 |
| β_{23} | 0.07933 | 0.02076 | 3.82206 | 0.13504 | 0.02042 | 6.61190 | 0.17050 | 0.02009 | 8.48619 |
| β_{33} | -0.39210 | 0.01732 | -22.63943 | -0.22889 | 0.01714 | -13.35707 | -0.19061 | 0.01695 | -11.24480 |
| β_{43} | 0.48547 | 0.00076 | 638.61937 | 0.39612 | 0.00063 | 626.12288 | 0.38900 | 0.00051 | 766.11537 |
| β_{53} | 0.18293 | 0.00418 | 43.81467 | 0.15683 | 0.00407 | 38.50088 | 0.16137 | 0.00397 | 40.62111 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est31 | Se31 | Z31 | Est32 | Se32 | Z32 | Est33 | Se33 | Z33 |
|--------------|----------|---------|------------|----------|---------|-------------|----------|---------|-------------|
| β_{01} | -0.80849 | 0.00675 | -119.73982 | -0.79548 | 0.00692 | -114.88797 | -0.71706 | 0.00708 | -101.21052 |
| β_{11} | -0.31573 | 0.00211 | -149.78649 | -0.30255 | 0.00217 | -139.49589 | -0.28446 | 0.00223 | -127.39170 |
| β_{21} | 0.11983 | 0.00484 | 24.73548 | 0.11738 | 0.00485 | 24.22331 | 0.09434 | 0.00486 | 19.42207 |
| β_{31} | 1.16690 | 0.00399 | 292.28306 | 1.15271 | 0.00428 | 269.60521 | 1.05325 | 0.00453 | 232.52842 |
| β_{41} | 1.20743 | 0.00486 | 248.60977 | 1.16013 | 0.00514 | 225.86460 | 1.08351 | 0.00540 | 200.54373 |
| β_{51} | 0.05013 | 0.00058 | 86.06572 | 0.04797 | 0.00060 | 80.55605 | 0.04500 | 0.00059 | 75.93602 |
| β_{02} | -1.43883 | 0.15995 | -8.99535 | -1.39760 | 0.15864 | -8.80977 | -1.31610 | 0.15740 | -8.36134 |
| β_{12} | -0.23794 | 0.00693 | -34.34237 | -0.22997 | 0.00683 | -33.67315 | -0.21564 | 0.00673 | -32.02029 |
| β_{22} | -0.59046 | 0.13179 | -4.48042 | -0.58208 | 0.13086 | -4.44805 | -0.55555 | 0.12999 | -4.27388 |
| β_{32} | 2.64921 | 0.10084 | 26.27190 | 2.56459 | 0.10087 | 25.42508 | 2.40347 | 0.10092 | 23.81563 |
| β_{42} | 1.80918 | 0.01919 | 94.29642 | 1.76252 | 0.01952 | 90.30868 | 1.65264 | 0.01984 | 83.28783 |
| β_{52} | 0.21866 | 0.02909 | 7.51572 | 0.21637 | 0.02898 | 7.46616 | 0.19941 | 0.02887 | 6.90624 |
| β_{03} | -0.30697 | 0.02746 | -11.17944 | -0.26936 | 0.02717 | -9.91294 | -0.18518 | 0.02687 | -6.89075 |
| β_{13} | -0.08828 | 0.00231 | -38.20900 | -0.08400 | 0.00231 | -36.39981 | -0.07417 | 0.00230 | -32.19602 |
| β_{23} | 0.19368 | 0.01977 | 9.79746 | 0.21360 | 0.01945 | 10.98020 | 0.24512 | 0.01913 | 12.81118 |
| β_{33} | -0.17406 | 0.01677 | -10.37724 | -0.15847 | 0.01660 | -9.54474 | -0.10212 | 0.01642 | -6.21795 |
| β_{43} | 0.38238 | 0.00039 | 989.34314 | 0.37277 | 0.00027 | 1.38817E+03 | 0.35593 | 0.00015 | 2.33868E+03 |
| β_{53} | 0.16253 | 0.00387 | 41.94491 | 0.16205 | 0.00378 | 42.87204 | 0.16294 | 0.00368 | 44.22654 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est34 | Se34 | Z34 | Est35 | Se35 | Z35 | Est36 | Se36 | Z36 |
|--------------|----------|---------|-------------|----------|---------|-------------|----------|---------|-------------|
| β_{01} | -0.68785 | 0.00724 | -95.03056 | -0.62336 | 0.00738 | -84.48541 | -0.60573 | 0.00752 | -80.56109 |
| β_{11} | -0.26668 | 0.00229 | -116.40659 | -0.24619 | 0.00234 | -105.03557 | -0.23812 | 0.00240 | -99.07964 |
| β_{21} | 0.10734 | 0.00485 | 22.12830 | 0.08312 | 0.00481 | 17.29854 | 0.09273 | 0.00481 | 19.28358 |
| β_{31} | 0.98533 | 0.00479 | 205.61570 | 0.91465 | 0.00510 | 179.50097 | 0.87101 | 0.00533 | 163.56632 |
| β_{41} | 1.01776 | 0.00566 | 179.71107 | 0.93925 | 0.00592 | 158.69694 | 0.90170 | 0.00616 | 146.36404 |
| β_{51} | 0.04171 | 0.00061 | 68.46538 | 0.03744 | 0.00062 | 59.91285 | 0.03461 | 0.00063 | 55.21421 |
| β_{02} | -1.25233 | 0.15623 | -8.01615 | -1.17330 | 0.15510 | -7.56468 | -1.13749 | 0.15402 | -7.38536 |
| β_{12} | -0.20372 | 0.00664 | -30.66229 | -0.18933 | 0.00656 | -28.87578 | -0.18257 | 0.00647 | -28.20603 |
| β_{22} | -0.53721 | 0.12916 | -4.15923 | -0.51168 | 0.12837 | -3.98605 | -0.50184 | 0.12761 | -3.93267 |
| β_{32} | 2.27057 | 0.10099 | 22.48355 | 2.11144 | 0.10107 | 20.88998 | 2.03340 | 0.10117 | 20.09963 |
| β_{42} | 1.56850 | 0.02017 | 77.77949 | 1.46440 | 0.02049 | 71.47331 | 1.41853 | 0.02081 | 68.17303 |
| β_{52} | 0.18834 | 0.02878 | 6.54521 | 0.17373 | 0.02868 | 6.05672 | 0.16988 | 0.02860 | 5.94024 |
| β_{03} | -0.13507 | 0.02658 | -5.08128 | -0.08293 | 0.02629 | -3.15479 | -0.05628 | 0.02600 | -2.16459 |
| β_{13} | -0.06756 | 0.00230 | -29.38346 | -0.06001 | 0.00229 | -26.14966 | -0.05654 | 0.00229 | -24.68618 |
| β_{23} | 0.26198 | 0.01882 | 13.92023 | 0.27438 | 0.01851 | 14.82366 | 0.28497 | 0.01821 | 15.65309 |
| β_{33} | -0.07337 | 0.01625 | -4.51588 | -0.04168 | 0.01607 | -2.59384 | -0.02901 | 0.01590 | -1.82497 |
| β_{43} | 0.34015 | 0.00004 | 8.78484E+03 | 0.32025 | 0.00007 | 4.41600E+03 | 0.31114 | 0.00018 | 1.71746E+03 |
| β_{53} | 0.16045 | 0.00359 | 44.68326 | 0.15599 | 0.00350 | 44.58843 | 0.15446 | 0.00341 | 45.31603 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est37 | Se37 | Z37 | Est38 | Se38 | Z38 | Est39 | Se39 | Z39 |
|--------------|----------|---------|-------------|----------|---------|-----------|----------|---------|-----------|
| β_{01} | -0.59514 | 0.00766 | -77.72770 | -0.40775 | 0.00776 | -52.52607 | -0.45876 | 0.00793 | -57.84060 |
| β_{11} | -0.23493 | 0.00246 | -95.59640 | -0.15915 | 0.00251 | -63.43827 | -0.18344 | 0.00256 | -71.78967 |
| β_{21} | 0.07938 | 0.00482 | 16.48024 | 0.07284 | 0.00480 | 15.17009 | 0.06212 | 0.00482 | 12.89426 |
| β_{31} | 0.87585 | 0.00554 | 158.02423 | 0.56716 | 0.00574 | 98.82096 | 0.66927 | 0.00600 | 111.57235 |
| β_{41} | 0.88897 | 0.00640 | 138.98991 | 0.60573 | 0.00661 | 91.68745 | 0.70150 | 0.00683 | 102.72721 |
| β_{51} | 0.03166 | 0.00063 | 50.14354 | 0.02841 | 0.00064 | 44.29909 | 0.03034 | 0.00065 | 46.46433 |
| β_{02} | -1.12204 | 0.15296 | -7.33573 | -0.84943 | 0.15207 | -5.58585 | -0.93492 | 0.15113 | -6.18622 |
| β_{12} | -0.18049 | 0.00639 | -28.24673 | -0.12818 | 0.00632 | -20.28716 | -0.14542 | 0.00624 | -23.29069 |
| β_{22} | -0.50132 | 0.12686 | -3.95189 | -0.39910 | 0.12624 | -3.16148 | -0.43388 | 0.12558 | -3.45502 |
| β_{32} | 2.00851 | 0.10125 | 19.83614 | 1.41858 | 0.10143 | 13.98619 | 1.61264 | 0.10156 | 15.87818 |
| β_{42} | 1.40595 | 0.02112 | 66.56267 | 1.01266 | 0.02145 | 47.21411 | 1.14319 | 0.02176 | 52.52481 |
| β_{52} | 0.17345 | 0.02851 | 6.08311 | 0.10569 | 0.02845 | 3.71468 | 0.13128 | 0.02838 | 4.62519 |
| β_{03} | -0.02303 | 0.02571 | -0.89561 | 0.00366 | 0.02547 | 0.14384 | 0.02899 | 0.02520 | 1.15033 |
| β_{13} | -0.05400 | 0.00229 | -23.63065 | -0.03643 | 0.00228 | -15.96472 | -0.04014 | 0.00228 | -17.62634 |
| β_{23} | 0.30864 | 0.01790 | 17.24383 | 0.23047 | 0.01764 | 13.06807 | 0.28162 | 0.01735 | 16.23114 |
| β_{33} | -0.01281 | 0.01572 | -0.81437 | 0.00635 | 0.01558 | 0.40785 | 0.02042 | 0.01542 | 1.32436 |
| β_{43} | 0.31047 | 0.00029 | 1.07610E+03 | 0.22115 | 0.00039 | 571.52142 | 0.25395 | 0.00049 | 520.12220 |
| β_{53} | 0.15887 | 0.00332 | 47.87964 | 0.11304 | 0.00324 | 34.89601 | 0.13435 | 0.00316 | 42.58130 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est40 | Se40 | Z40 | Est41 | Se41 | Z41 | Est42 | Se42 | Z42 |
|--------------|----------|---------|-----------|----------|---------|-----------|----------|---------|-----------|
| β_{01} | -0.35777 | 0.00805 | -44.46628 | -0.30130 | 0.00809 | -37.22511 | -0.37480 | 0.00825 | -45.45429 |
| β_{11} | -0.14093 | 0.00260 | -54.22395 | -0.11992 | 0.00265 | -45.27456 | -0.14933 | 0.00270 | -55.41028 |
| β_{21} | 0.05518 | 0.00481 | 11.46174 | 0.05516 | 0.00476 | 11.57606 | 0.05431 | 0.00477 | 11.38502 |
| β_{31} | 0.51000 | 0.00619 | 82.36452 | 0.41787 | 0.00634 | 65.86744 | 0.54220 | 0.00659 | 82.27064 |
| β_{41} | 0.53416 | 0.00703 | 76.02301 | 0.44584 | 0.00721 | 61.86744 | 0.56617 | 0.00741 | 76.39120 |
| β_{51} | 0.03015 | 0.00067 | 45.27307 | 0.01962 | 0.00067 | 29.48501 | 0.02375 | 0.00068 | 34.79289 |
| β_{02} | -0.77652 | 0.15030 | -5.16656 | -0.68582 | 0.14954 | -4.58635 | -0.79536 | 0.14870 | -5.34887 |
| β_{12} | -0.11484 | 0.00618 | -18.59410 | -0.09857 | 0.00611 | -16.12447 | -0.12063 | 0.00604 | -19.95585 |
| β_{22} | -0.37548 | 0.12500 | -3.00384 | -0.34140 | 0.12447 | -2.74270 | -0.38578 | 0.12389 | -3.11403 |
| β_{32} | 1.26209 | 0.10175 | 12.40435 | 1.06729 | 0.10195 | 10.46870 | 1.32259 | 0.10211 | 12.95229 |
| β_{42} | 0.91300 | 0.02209 | 41.33651 | 0.78155 | 0.02241 | 34.88036 | 0.95267 | 0.02272 | 41.93503 |
| β_{52} | 0.09442 | 0.02833 | 3.33272 | 0.07558 | 0.02828 | 2.67220 | 0.10767 | 0.02823 | 3.81414 |
| β_{03} | 0.01957 | 0.02498 | 0.78364 | 0.03163 | 0.02477 | 1.27726 | 0.07843 | 0.02450 | 3.20042 |
| β_{13} | -0.03158 | 0.00227 | -13.88251 | -0.02578 | 0.00227 | -11.34057 | -0.02955 | 0.00227 | -13.02951 |
| β_{23} | 0.22105 | 0.01710 | 12.92532 | 0.19900 | 0.01687 | 11.79747 | 0.27382 | 0.01659 | 16.50140 |
| β_{33} | 0.01139 | 0.01528 | 0.74535 | 0.01917 | 0.01516 | 1.26431 | 0.04840 | 0.01500 | 3.22609 |
| β_{43} | 0.19861 | 0.00058 | 341.25736 | 0.17016 | 0.00067 | 253.30014 | 0.21419 | 0.00077 | 278.98290 |
| β_{53} | 0.10354 | 0.00308 | 33.60834 | 0.09027 | 0.00301 | 29.98461 | 0.11994 | 0.00293 | 40.93727 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est43 | Se43 | Z43 | Est44 | Se44 | Z44 | Est45 | Se45 | Z45 |
|--------------|----------|---------|-----------|----------|---------|-----------|----------|---------|-----------|
| β_{01} | -0.37393 | 0.00837 | -44.66212 | -0.31515 | 0.00847 | -37.18961 | -0.16378 | 0.00857 | -19.10458 |
| β_{11} | -0.14849 | 0.00274 | -54.13454 | -0.12663 | 0.00279 | -45.44225 | -0.06567 | 0.00283 | -23.23495 |
| β_{21} | 0.04493 | 0.00480 | 9.36670 | 0.04127 | 0.00477 | 8.65808 | 0.02894 | 0.00479 | 6.04646 |
| β_{31} | 0.55830 | 0.00676 | 82.53279 | 0.46638 | 0.00698 | 66.78344 | 0.23161 | 0.00712 | 32.52841 |
| β_{41} | 0.56164 | 0.00761 | 73.85103 | 0.46818 | 0.00779 | 60.09416 | 0.23730 | 0.00794 | 29.87785 |
| β_{51} | 0.01956 | 0.00068 | 28.88530 | 0.01488 | 0.00068 | 21.79150 | 0.00541 | 0.00068 | 7.94448 |
| β_{02} | -0.78544 | 0.14788 | -5.31147 | -0.68618 | 0.14712 | -4.66397 | -0.42975 | 0.14659 | -2.93171 |
| β_{12} | -0.11995 | 0.00598 | -20.06467 | -0.10253 | 0.00592 | -17.33360 | -0.05697 | 0.00587 | -9.71226 |
| β_{22} | -0.38831 | 0.12331 | -3.14911 | -0.35242 | 0.12278 | -2.87043 | -0.24776 | 0.12240 | -2.02412 |
| β_{32} | 1.31160 | 0.10227 | 12.82464 | 1.10423 | 0.10245 | 10.77783 | 0.55142 | 0.10269 | 5.36959 |
| β_{42} | 0.95074 | 0.02302 | 41.29195 | 0.81268 | 0.02333 | 34.83087 | 0.43255 | 0.02362 | 18.31112 |
| β_{52} | 0.11516 | 0.02818 | 4.08655 | 0.09794 | 0.02814 | 3.48040 | 0.04199 | 0.02813 | 1.49274 |
| β_{03} | 0.11514 | 0.02423 | 4.75145 | 0.13746 | 0.02396 | 5.73602 | 0.11521 | 0.02375 | 4.85110 |
| β_{13} | -0.02721 | 0.00226 | -12.02922 | -0.02053 | 0.00226 | -9.10036 | -0.00779 | 0.00225 | -3.45915 |
| β_{23} | 0.30323 | 0.01631 | 18.59112 | 0.28796 | 0.01603 | 17.96102 | 0.18311 | 0.01581 | 11.58543 |
| β_{33} | 0.06587 | 0.01484 | 4.43790 | 0.07833 | 0.01468 | 5.33468 | 0.06763 | 0.01456 | 4.64563 |
| β_{43} | 0.21609 | 0.00086 | 250.31637 | 0.18675 | 0.00096 | 195.32749 | 0.10164 | 0.00104 | 98.16682 |
| β_{53} | 0.12650 | 0.00285 | 44.42472 | 0.11423 | 0.00277 | 41.28343 | 0.06732 | 0.00270 | 24.93507 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est46 | Se46 | Z46 | Est47 | Se47 | Z47 | Est48 | Se48 | Z48 |
|--------------|----------|---------|----------|----------|---------|-----------|----------|---------|-----------|
| β_{01} | -0.03224 | 0.00866 | -3.72253 | -0.17397 | 0.00871 | -19.96896 | -0.23762 | 0.00883 | -26.92032 |
| β_{11} | -0.01378 | 0.00285 | -4.83751 | -0.07758 | 0.00289 | -26.85549 | -0.09768 | 0.00293 | -33.33551 |
| β_{21} | 0.00794 | 0.00483 | 1.64592 | 0.01565 | 0.00478 | 3.27628 | 0.02154 | 0.00480 | 4.48427 |
| β_{31} | 0.04265 | 0.00721 | 5.91725 | 0.26392 | 0.00737 | 35.82507 | 0.36632 | 0.00751 | 48.75298 |
| β_{41} | 0.04646 | 0.00803 | 5.78693 | 0.28516 | 0.00818 | 34.84143 | 0.36021 | 0.00835 | 43.12588 |
| β_{51} | -0.00078 | 0.00068 | -1.13831 | 0.01449 | 0.00069 | 20.89661 | 0.01240 | 0.00070 | 17.78969 |
| β_{02} | -0.21676 | 0.14639 | -1.48069 | -0.49027 | 0.14579 | -3.36281 | -0.57826 | 0.14514 | -3.98412 |
| β_{12} | -0.01800 | 0.00584 | -3.08001 | -0.06661 | 0.00579 | -11.50364 | -0.08225 | 0.00573 | -14.34219 |
| β_{22} | -0.15674 | 0.12228 | -1.28183 | -0.26858 | 0.12186 | -2.20391 | -0.31516 | 0.12141 | -2.59581 |
| β_{32} | 0.04954 | 0.10289 | 0.48146 | 0.67336 | 0.10312 | 6.52996 | 0.85892 | 0.10332 | 8.31319 |
| β_{42} | 0.08473 | 0.02379 | 3.56123 | 0.51271 | 0.02409 | 21.28487 | 0.65488 | 0.02439 | 26.85236 |
| β_{52} | -0.01174 | 0.02814 | -0.41709 | 0.04703 | 0.02812 | 1.67251 | 0.07739 | 0.02809 | 2.75483 |
| β_{03} | 0.04808 | 0.02367 | 2.03183 | 0.09320 | 0.02346 | 3.97303 | 0.13110 | 0.02323 | 5.64408 |
| β_{13} | 0.00014 | 0.00225 | 0.06275 | -0.01204 | 0.00225 | -5.35153 | -0.01505 | 0.00225 | -6.70115 |
| β_{23} | 0.05725 | 0.01571 | 3.64497 | 0.18313 | 0.01548 | 11.82730 | 0.25094 | 0.01524 | 16.47095 |
| β_{33} | 0.02850 | 0.01451 | 1.96412 | 0.05689 | 0.01439 | 3.95494 | 0.06712 | 0.01425 | 4.70837 |
| β_{43} | 0.02309 | 0.00108 | 21.44430 | 0.11735 | 0.00116 | 101.36839 | 0.14897 | 0.00124 | 119.94263 |
| β_{53} | 0.01835 | 0.00267 | 6.87822 | 0.07188 | 0.00260 | 27.63039 | 0.09406 | 0.00253 | 37.18620 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est49 | Se49 | Z49 | Est50 | Se50 | Z50 | Est51 | Se51 | Z51 |
|--------------|----------|---------|-----------|----------|---------|----------|----------|---------|----------|
| β_{01} | -0.09313 | 0.00889 | -10.47288 | -0.01832 | 0.00895 | -2.04669 | 0.00244 | 0.00898 | 0.27149 |
| β_{11} | -0.03906 | 0.00296 | -13.17616 | -0.00885 | 0.00298 | -2.96903 | 0.00005 | 0.00298 | 0.01561 |
| β_{21} | 0.01956 | 0.00479 | 4.08656 | -0.00006 | 0.00479 | -0.01263 | -0.00398 | 0.00483 | -0.82391 |
| β_{31} | 0.12496 | 0.00765 | 16.32813 | 0.03108 | 0.00773 | 4.01890 | 0.00187 | 0.00773 | 0.24168 |
| β_{41} | 0.13826 | 0.00848 | 16.30579 | 0.03335 | 0.00855 | 3.90233 | 0.00203 | 0.00855 | 0.23764 |
| β_{51} | 0.00652 | 0.00070 | 9.31015 | -0.00084 | 0.00071 | -1.18073 | -0.00040 | 0.00071 | -0.56941 |
| β_{02} | -0.32597 | 0.14474 | -2.25214 | -0.20509 | 0.14458 | -1.41845 | -0.17523 | 0.14458 | -1.21196 |
| β_{12} | -0.03723 | 0.00570 | -6.53593 | -0.01525 | 0.00568 | -2.68625 | -0.00881 | 0.00568 | -1.55130 |
| β_{22} | -0.20121 | 0.12114 | -1.66093 | -0.15150 | 0.12105 | -1.25157 | -0.14149 | 0.12104 | -1.16891 |
| β_{32} | 0.30187 | 0.10357 | 2.91475 | 0.01040 | 0.10373 | 0.10022 | -0.08479 | 0.10373 | -0.81743 |
| β_{42} | 0.25769 | 0.02464 | 10.45707 | 0.05719 | 0.02478 | 2.30776 | -0.00644 | 0.02478 | -0.25990 |
| β_{52} | 0.01064 | 0.02809 | 0.37897 | -0.01797 | 0.02810 | -0.63950 | -0.02839 | 0.02810 | -1.01043 |
| β_{03} | 0.06391 | 0.02309 | 2.76790 | 0.03557 | 0.02304 | 1.54372 | 0.02580 | 0.02304 | 1.11970 |
| β_{13} | -0.00476 | 0.00224 | -2.12089 | 0.00030 | 0.00225 | 0.13453 | 0.00180 | 0.00225 | 0.80162 |
| β_{23} | 0.10522 | 0.01508 | 6.97898 | 0.04166 | 0.01501 | 2.77548 | 0.02130 | 0.01501 | 1.41909 |
| β_{33} | 0.03916 | 0.01417 | 2.76341 | 0.02193 | 0.01414 | 1.55100 | 0.01605 | 0.01414 | 1.13526 |
| β_{43} | 0.06028 | 0.00131 | 46.16198 | 0.01656 | 0.00134 | 12.37399 | 0.00298 | 0.00134 | 2.22662 |
| β_{53} | 0.03903 | 0.00248 | 15.73899 | 0.01325 | 0.00246 | 5.39353 | 0.00510 | 0.00246 | 2.07534 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est52 | Se52 | Z52 | Est53 | Se53 | Z53 | Est54 | Se54 | Z54 |
|--------------|----------|---------|----------|----------|---------|----------|----------|---------|----------|
| β_{01} | 0.00071 | 0.00899 | 0.07917 | 0.00508 | 0.00892 | 0.56977 | 0.00646 | 0.00887 | 0.72818 |
| β_{11} | -0.00059 | 0.00298 | -0.19880 | 0.00125 | 0.00298 | 0.41795 | 0.00181 | 0.00298 | 0.60702 |
| β_{21} | -0.00457 | 0.00485 | -0.94255 | -0.00466 | 0.00478 | -0.97527 | -0.00479 | 0.00474 | -1.01101 |
| β_{31} | 0.00587 | 0.00772 | 0.76028 | -0.00141 | 0.00771 | -0.18288 | -0.00355 | 0.00769 | -0.46126 |
| β_{41} | 0.00439 | 0.00855 | 0.51300 | -0.00225 | 0.00855 | -0.26345 | -0.00425 | 0.00854 | -0.49702 |
| β_{51} | -0.00050 | 0.00071 | -0.70681 | -0.00065 | 0.00070 | -0.91958 | -0.00070 | 0.00069 | -1.01086 |
| β_{02} | -0.18403 | 0.14458 | -1.27287 | -0.16850 | 0.14459 | -1.16540 | -0.16259 | 0.14459 | -1.12445 |
| β_{12} | -0.00965 | 0.00568 | -1.69991 | -0.00782 | 0.00568 | -1.37677 | -0.00720 | 0.00568 | -1.26900 |
| β_{22} | -0.14821 | 0.12104 | -1.22445 | -0.13811 | 0.12105 | -1.14095 | -0.13408 | 0.12105 | -1.10763 |
| β_{32} | -0.08083 | 0.10373 | -0.77927 | -0.09620 | 0.10373 | -0.92741 | -0.10006 | 0.10373 | -0.96462 |
| β_{42} | -0.00133 | 0.02478 | -0.05375 | -0.01466 | 0.02478 | -0.59160 | -0.01843 | 0.02478 | -0.74381 |
| β_{52} | -0.02808 | 0.02810 | -0.99949 | -0.02910 | 0.02810 | -1.03580 | -0.02912 | 0.02810 | -1.03652 |
| β_{03} | 0.02900 | 0.02304 | 1.25882 | 0.02527 | 0.02304 | 1.09659 | 0.02430 | 0.02304 | 1.05485 |
| β_{13} | 0.00182 | 0.00225 | 0.80918 | 0.00203 | 0.00225 | 0.90334 | 0.00209 | 0.00225 | 0.93184 |
| β_{23} | 0.02520 | 0.01501 | 1.67908 | 0.01927 | 0.01501 | 1.28355 | 0.01767 | 0.01501 | 1.17686 |
| β_{33} | 0.01743 | 0.01414 | 1.23254 | 0.01554 | 0.01414 | 1.09878 | 0.01498 | 0.01414 | 1.05935 |
| β_{43} | 0.00426 | 0.00134 | 3.18248 | 0.00125 | 0.00134 | 0.93297 | 0.00037 | 0.00134 | 0.27512 |
| β_{53} | 0.00624 | 0.00246 | 2.54055 | 0.00417 | 0.00246 | 1.69581 | 0.00358 | 0.00246 | 1.45508 |

Lampiran 9 (Lanjutan)

| Par | Est55 | Se55 | Z55 | Est56 | Se56 | Z56 |
|--------------|----------|---------|----------|----------|---------|----------|
| β_{01} | 0.00598 | 0.00894 | 0.66858 | 0.00659 | 0.00889 | 0.74079 |
| β_{11} | 0.00167 | 0.00298 | 0.56103 | 0.00187 | 0.00299 | 0.62719 |
| β_{21} | -0.00470 | 0.00479 | -0.98029 | -0.00479 | 0.00474 | -1.01012 |
| β_{31} | -0.00285 | 0.00772 | -0.36939 | -0.00377 | 0.00771 | -0.48879 |
| β_{41} | -0.00371 | 0.00855 | -0.43418 | -0.00448 | 0.00855 | -0.52368 |
| β_{51} | -0.00068 | 0.00069 | -0.97895 | -0.00065 | 0.00069 | -0.94022 |
| β_{02} | -0.16754 | 0.14459 | -1.15873 | -0.16066 | 0.14459 | -1.11113 |
| β_{12} | -0.00754 | 0.00568 | -1.32786 | -0.00707 | 0.00568 | -1.24533 |
| β_{22} | -0.13798 | 0.12105 | -1.13990 | -0.13257 | 0.12105 | -1.09518 |
| β_{32} | -0.10077 | 0.10373 | -0.97142 | -0.09988 | 0.10373 | -0.96285 |
| β_{42} | -0.01757 | 0.02478 | -0.70917 | -0.01882 | 0.02478 | -0.75929 |
| β_{52} | -0.02962 | 0.02810 | -1.05425 | -0.02894 | 0.02810 | -1.03006 |
| β_{03} | 0.02508 | 0.02304 | 1.08850 | 0.02400 | 0.02304 | 1.04163 |
| β_{13} | 0.00211 | 0.00225 | 0.93895 | 0.00209 | 0.00225 | 0.92958 |
| β_{23} | 0.01857 | 0.01501 | 1.23690 | 0.01731 | 0.01501 | 1.15296 |
| β_{33} | 0.01537 | 0.01414 | 1.08714 | 0.01482 | 0.01414 | 1.04796 |
| β_{43} | 0.00065 | 0.00134 | 0.48693 | 0.00025 | 0.00134 | 0.18396 |
| β_{53} | 0.00384 | 0.00246 | 1.56297 | 0.00347 | 0.00246 | 1.41047 |

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

RIWAYAT HIDUP PENULIS

I. IDENTITAS PRIBADI



Nama : M. Fathurahman
NRP : 06211360010001
Tempat/Tanggal Lahir : Tangga, Bima, 7 Juni 1979
Alamat : Jl. K.S. Tubun Gg. Saudara
No. 36A Samarinda 75123,
Kalimantan Timur
Instansi : Universitas Mulawarman
FMIPA Jurusan Matematika
Program Studi Statistika
NIP : 19790607 200501 1 005
E-mail : fathur@fmipa.unmul.ac.id
fathurstat@gmail.com
Telp/HP : 081256250251
Tanggal Masuk S3 : 3 September 2013
Tanggal Kualifikasi : 18 Pebruari 2015

II. RIWAYAT PENDIDIKAN

| No | Jenjang | Tempat Pendidikan | Bidang Studi/Keahlian | Tahun Masuk | Tahun Lulus |
|----|---------|---------------------------|-----------------------|-------------|-------------|
| 1 | S2 | ITS Surabaya | Statistika | 2006 | 2008 |
| 2 | S1 | UGM Yogyakarta | Statistika | 1996 | 2002 |
| 3 | SMA | SMAN Tente Bima NTB | Fisika (A1) | 1993 | 1996 |
| 4 | SMP | SMPN 1 Monta Bima NTB | - | 1990 | 1993 |
| 5 | SD | SDN INPRES Tenga Bima NTB | - | 1984 | 1990 |

III. RIWAYAT PUBLIKASI

Publikasi yang telah dilakukan dalam bentuk jurnal dan seminar selama masa studi.

Jurnal Internasional

Fathurahman, M., Puhadi, Sutikno, and Ratnasari, V., (2020), Geographically Weighted Multivariate Logistic Regression Model and Its Application, *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2020, Article ID 8353481, 10 pages, <https://doi.org/10.1155/2020/8353481>.

Seminar Internasional

1. Fathurahman, M., Puhadi, Sutikno, and Ratnasari, V., (2014), Estimation of Parameter Geographically Weighted Bivariate Binary Logistic Regression,

Proceeding International Conference on Statistics and Mathematics (ICSM 2014), ISSN: 2460-0237, pp. 113-117.

2. Fathurahman, M., Puhadi, Sutikno, and Ratnasari, V., (2019), Hypothesis Testing of Geographically Weighted Bivariate Logistic Regression, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 1417, doi:10.1088/1742-6596/1417/1/012008.

Prosiding Seminar Nasional

1. Fathurahman, M., Puhadi, Sutikno, dan Ratnasari, V., (2014), Estimasi dan Pengujian Hipotesis pada Model Geographically Weighted Multinomial Logistic Regression, *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII – 2014*, ISBN: 978-602-96426-3-6, hal. 1339-1348.
2. Fathurahman, M., Puhadi, Sutikno, dan Ratnasari, V., (2016), Pemodelan Geographically Weighted Logistic Regression pada Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat di Provinsi Papua, *Prosiding Seminar Nasional MIPA 2016*, ISBN: 978-602-72216-1-1, hal. 34-42.

Hibah Penelitian Disertasi Doktor

1. Fathurahman, M., Puhadi, Sutikno, dan Ratnasari, V., (2016), *Geographically Weighted Bivariate Binary Logistic Regression* (Studi Kasus Pemodelan Indeks Pembangunan Manusia dan Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat). Dibiayai oleh Direktur Riset dan Pengabdian Masyarakat, Direktorat Jenderal Penguatan Riset dan Pengembangan Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi, sesuai dengan Surat Perjanjian Penugasan Pelaksanaan Program Penelitian Nomor: 029/SP2H/LT/DRPM/II/2016, Tanggal 17 Pebruari 2016.
2. Fathurahman, M., Puhadi, Sutikno, dan Ratnasari, V., (2017), *Geographically Weighted Logistic Regression* (Studi Kasus: Pemodelan Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat di Provinsi Papua Tahun 2013), *Poster Terbaik* pada Seminar Hasil Program Peningkatan Kapasitas Riset (Penelitian Disertasi Doktor) yang sudah selesai tahun 2016. Surat Keputusan Direktur Riset dan Pengabdian Masyarakat, Direktorat Jenderal Penguatan Riset dan Pengembangan Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi, Nomor: 0669/E3.4/LT/2017, Tanggal 13 Maret 2017 dan Piagam Penghargaan, Nomor: 0670/E3.4/LT/2017, Tanggal 13 Maret 2017.

IV. RIWAYAT SEMINAR

Seminar internasional dan nasional yang diikuti selama masa studi.

Seminar Internasional

1. International Conference on Statistics and Mathematics (ICMS), Department of Statistics and Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural

Sciences, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 27 – 28 November 2014.

Judul Artikel: *Estimation of Parameter Geographically Weighted Bivariate Binary Logistic Regression*.

2. The Asian Mathematical Conference 2016 (AMC 2016), South East Asian Mathematical Society (SEAMS) and Indonesian Mathematical Society (IndoMS), Bali, Indonesia, 25 – 29 July 2016.

Judul Artikel: *Bivariate Logistic Regression Modeling*.

3. Mathematics, Informatics, Science, and Education International Conference (MISEIC) 2019, Universitas Negeri Surabaya, 28 September 2019.

Judul Artikel: *Hypothesis Testing of Geographically Weighted Bivariate Logistic Regression*.

Seminar Nasional

1. Konferensi Nasional Matematika (KNM) XVII, Himpunan Matematika Indonesia (IndoMS), Jurusan Matematika, dan Jurusan Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 11 – 14 Juni 2014.

Judul Artikel: *Estimasi dan Pengujian Hipotesis pada Model Geographically Weighted Multinomial Logistic Regression*.

2. Seminar Nasional MIPA 2016, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Padjadjaran, Jatinangor, 27 – 28 Oktober 2016.

Judul Artikel: *Pemodelan Geographically Weighted Logistic Regression pada Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat di Provinsi Papua*.

3. Seminar Hasil Program Peningkatan Kapasitas Riset (Penelitian Disertasi Doktor) yang sudah selesai tahun 2016, Direktorat Jenderal Penguatan Riset dan Pengembangan Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi, Tangerang, 7 – 8 Maret 2017.

Judul Artikel: *Geographically Weighted Bivariate Binary Logistic Regression (Studi Kasus Pemodelan Indeks Pembangunan Manusia dan Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat)*.

Judul Poster: *Geographically Weighted Logistic Regression (Studi Kasus: Pemodelan Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat di Provinsi Papua Tahun 2013)*.