



TUGAS AKHIR - KM184801

**DESAIN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN
PENYAKIT MALARIA DENGAN MENGGUNAKAN PRINSIP
MINIMUM PONTRYAGIN**

**NADHIRA AZANE PUTRI
06111640000114**

Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
Dr. Fatmawati, M.Si

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



TUGAS AKHIR - KM184801

**DESAIN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL
PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN
MENGUNAKAN PRINSIP MINIMUM
PONTYAGIN**

NADHIRA AZANE PUTRI
NRP 061116 4000 0114

Dosen Pembimbing:
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si
Dr. Fatmawati, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



FINAL PROJECT - KM184801

OPTIMAL CONTROL DESIGN OF MALARIA DISEASE SPREAD MODEL USING PONTRYAGIN MINIMUM PRINCIPLE

NADHIRA AZANE PUTRI
NRP 061116 4000 0114

Supervisors:
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si
Dr. Fatmawati, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

**DESAIN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL
PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN
MENGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN**

***OPTIMAL CONTROL DESIGN OF MALARIA DISEASE
SPREAD MODEL USING PONTRYAGIN MINIMUM
PRINCIPLE***

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
NADHIRA AZANE PUTRI
NRP. 06111640000114

Menyetujui, ..

Dosen Pembimbing II,



Dr. Fatmawati, M.Si
NIP. 19730704 199802 2 001

Dosen Pembimbing I,



Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
NIP. 19730930 199702 1 001

Mengetahui,
Kepala Departemen
Matematika FSAD ITS



Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, 18 Agustus 2020

DESAIN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN MENGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN

Nama : Nadhira Azane Putri
NRP : 06111640000114
Jurusan : Matematika
Pembimbing : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si
2. Dr. Fatmawati, M.Si

ABSTRAK

Malaria merupakan masalah utama untuk kesehatan di Indonesia, terutama di Provinsi Papua yang mempunyai jumlah penderita terbesar untuk penyakit malaria. Oleh karena itu, dilakukan desain kendali penyebaran penyakit malaria di Provinsi Papua Indonesia. Pada tugas akhir ini, dijelaskan tentang kendali optimal pada model matematika penyebaran malaria dilengkapi dengan tiga variabel kendali yaitu pencegahan manusia, pengobatan manusia dan penyemprotan insektisida terhadap nyamuk untuk mengurangi banyaknya manusia yang terinfeksi. Kemudian dilakukan perancangan masalah kendali optimal dengan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin untuk menurunkan sistem persamaan diferensial sebagai kondisi yang harus dipenuhi variabel-variabel kendali optimum. Selanjutnya metode Runge-Kutta orde 4 digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan secara numerik dengan bantuan *software* SCILAB 6.0. Hasil simulasi numerik menunjukkan menurunnya populasi manusia yang terinfeksi Parasit *Plasmodium* setelah adanya pemberian kendali berupa pengobatan dengan presentase reduksi sebesar 99.5% selama 100 hari.

Kata-kunci: *Malaria, Kendali Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, Runge-Kutta*

**OPTIMAL CONTROL DESIGN OF MALARIA DISEASE
SPREAD MODEL USING PONTRYAGIN MINIMUM
PRINCIPLE**

Name : Nadhira Azane Putri
NRP : 06111640000114
Department : Mathematics
Supervisor : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si
2. Dr. Fatmawati, M.Si

ABSTRACT

Malaria is a major problem for health in Indonesia, especially in Papua Province which has the largest number of sufferers for malaria. Therefore, the control of malaria spread in the Papua Province of Indonesia was carried out. In this final project, the optimal control in the mathematical model of malaria spread is explained with three control variables namely human prevention, human treatment and spraying of insecticides on mosquitoes to reduce the number of infected humans. Then do the optimal control problem design using Pontryagin's Minimum Principle method to derive the system of differential equations as a condition that must be satisfied by the optimum control variables. Furthermore, the Runge-Kutta 4th-order method is used to solve the numerical equation system with the help of SCILAB 6.0 software. The results of numerical simulation show a decrease in the human population infected with Plasmodium parasites after providing controls in the form of treatment with a reduction percentage of 99,5% for 100 days.

Keywords: *Malaria, Optimal Control, Pontryagin Minimum Principle, Runge-Kutta Method.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'alamiin, segala puji syukur bagi Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

“DESAIN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN MENGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN”

yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini, penulis telah banyak mendapat bantuan serta masukan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberikan dukungan selama perkuliahan ini.
2. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si dan Dr. Fatmawati, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah memberikan segala bimbingan dan motivasi dalam mengerjakan Tugas Akhir ini.
3. Drs. Suhud Wahyudi, M.Si, Dra. Nur Asiyah, M.Si, dan Dr. Tahiyatul Asfihani, M.Si, selaku dosen penguji atas semua saran dan masukan yang diberikan.
4. Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, MT dan Dr. Budi Setiyono, S.Si, MT selaku Sekretaris Program Studi Sarjana Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberikan arahan akademik dan menyusun jadwal.
5. Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si selaku dosen wali yang telah membantu dan mendukung penulis selama menempuh pendidikan di ITS ini.

6. Seluruh Bapak dan Ibu dosen serta para Staff Tata Usaha Departemen Matematika FSAD ITS.
7. Kedua orang tua serta saudara kandung penulis, Mama, Papa, Vashti, dan Nayla serta keluarga atas dukungan dan semangat yang telah diberikan.
8. Teman seperjuangan penulis, Jinandya, Annisa dan Kirana yang senantiasa memberikan semangat dan motivasi untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
9. Teman-teman Lemniscate, HEHEHE, Alhamdulillah Teman dan Kosyans yang memberikan semangat dan motivasi.
10. Devyta Auliana yang selalu menemani dan memberikan semangat kepada penulis.
11. Giras Dewangga yang telah memberikan motivasi, dukungan, dan semangat.
12. Semua pihak yang belum disebutkan yang telah membantu dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari atas segala kekurangan pada Tugas Akhir ini. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat dalam pengembangan ilmu di kemudian hari bagi banyak pihak.

Surabaya, Mei 2020

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT	viii
KATA PENGANTAR.....	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR SIMBOL	xvii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Model Formulasi dari Penyebaran Penyakit Malaria..	5
2.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	7
2.4 Kendali Optimal.....	8
2.5 Prinsip Minimum Pontryagin.....	9
2.6 Metode Runge Kutta Orde Empat.....	10
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	13
3.1 Tahap Penelitian.....	13
3.2 Diagram Alir	14
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN	17
4.1 Deskripsi Model Matematika Penyebaran Penyakit Malaria	17

4.2	Model Matematika Penyebaran Penyakit Malaria dengan Kendali Optimal	19
4.3	Permasalahan Kendali Optimal.....	21
4.4	Penyelesaian Kendali Optimal	24
4.5	Penyelesaian Simulasi Numerik.....	28
4.6	Analisis dan Hasil Simulasi Numerik	36
4.6.1	Solusi Numerik Ketika $R_0 < 1$	37
4.6.2	Solusi Numerik Ketika $R_0 > 1$	40
BAB V PENUTUP		50
5.1	Kesimpulan	51
5.2	Saran.....	52
DAFTAR PUSTAKA		53
LAMPIRAN		55
Lampiran I Source Code Scilab Model tanpa Kendali		55
BIODATA PENULIS.....		69

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Variabel Model Penyebaran Penyakit Malaria.....	6
Tabel 2. 2 Parameter Model Penyebaran Penyakit Malaria	6
Tabel 4. 1 Variabel dan Parameter Model Penyebaran Penyakit Malaria dengan Kendali	21
Tabel 4. 2 Nilai Awal Variabel Model Penyebaran Penyakit Malaria	37
Tabel 4. 3 Nilai Awal Parameter Model Penyebaran Penyakit Malaria	37
Tabel 4. 4 Jumlah populasi manusia terinfeksi malaria di hari ke-100 saat kondisi $R_0 < 1$	49
Tabel 4. 5 Jumlah populasi manusia terinfeksi malaria di hari ke-100 saat kondisi $R_0 > 1$	49

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3. 1	Diagram Alir.....	15
Gambar 4. 1	Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Malaria	18
Gambar 4. 2	Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Malaria dengan Kendali u_1, u_2 dan u_3 .	20
Gambar 4. 3	Grafik perubahan banyaknya Invidu Rentan untuk $R_0 < 1$	39
Gambar 4. 4	Grafik perubahan banyaknya Invidu Terinfeksi untuk $R_0 < 1$	40
Gambar 4. 5	Grafik perubahan perbandingan banyaknya manusia rentan tanpa dan dengan kendali.....	41
Gambar 4. 6	Grafik perubahan perbandingan banyaknya manusia terinfeksi tanpa dan dengan kendali.....	42
Gambar 4. 7	Grafik perubahan perbandingan banyaknya nyamuk rentan tanpa dan dengan kendali.....	43
Gambar 4. 8	Grafik perubahan perbandingan banyaknya nyamuk terinfeksi tanpa dan dengan kendali.....	44
Gambar 4. 9	Grafik tingkat pemberian kendali optimal berupa Pencegahan	45
Gambar 4. 10	Grafik tingkat pemberian kendali optimal.....	46
Gambar 4. 11	Grafik tingkat pemberian kendali optimal Penyemprotan	47
Gambar 4. 12	Grafik tingkat pemberian kendali optimal berupa Pencegahan, Pengobatan dan Penyemprotan.....	48

DAFTAR SIMBOL

S_h	: Jumlah manusia yang rentan terhadap penyakit
I_h	: Jumlah manusia yang terinfeksi terhadap penyakit
S_v	: Jumlah nyamuk yang rentan terhadap penyakit
I_v	: Jumlah nyamuk yang terinfeksi terhadap penyakit
μ_h	: <i>Rate</i> kematian dari manusia
μ_v	: <i>Rate</i> kematian dari nyamuk
Λ_h	: <i>Rate</i> rekrutmen dari manusia
Λ_v	: <i>Rate</i> rekrutmen dari nyamuk
γ_h	: <i>Rate</i> manusia <i>infected</i> menjadi <i>Recovered</i> .
δ_h	: <i>Rate</i> manusia akibat terjangkit Penyakit.
β	: <i>Rate</i> kontak nyamuk dengan Manusia.
p_1	: <i>Probability</i> penyebaran penyakit nyamuk ke manusia.
p_2	: <i>Probability</i> penyebaran penyakit manusia ke nyamuk.
a	: <i>Rate</i> insektisida
b	: <i>Rate</i> manusia <i>recovered</i> karena pengobatan
u_1	: Kendali pencegahan individu berupa penggunaan kelambu, <i>lotion</i> anti nyamuk, dll.
u_2	: Kendali pengobatan terhadap individu yang terinfeksi
u_3	: Kendali penyemprotan insektisida terhadap nyamuk
A_1	: bobot dari manusia terinfeksi
A_2	: bobot dari nyamuk terinfeksi
m_1	: bobot pada kendali pencegahan individu
m_2	: bobot pada kendali pengobatan individu terinfeksi
m_3	: bobot pada kendali penyemprotan insektisida
ρ	: nilai eigen modulus yang terbesar (radius spektral)

BABI

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatar-belakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir ini akan diuraikan di bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Malaria adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh parasit Plasmodium yang hidup dan berkembang biak di dalam sel darah manusia. Penyakit ini ditularkan melalui gigitan nyamuk Anopheles betina[1]. Jika tidak dicegah dan ditangani, penyakit malaria dapat menyebabkan kematian terutama pada manusia yang berisiko tinggi seperti bayi, balita dan wanita hamil. Malaria dapat dicegah dan disembuhkan, namun jika tidak ditangani malaria dapat menyebabkan kematian.

Malaria telah menjadi salah satu masalah kesehatan utama di dunia, termasuk di Indonesia. Pada tahun 2018, diperkirakan ada 228 juta orang kasus malaria diseluruh dunia. Perkiraan jumlah kematian akibat malaria mencapai 40500 orang[1]. Dari total 262 juta penduduk di Indonesia, ada sebanyak 4,9 juta orang yang masih tinggal di daerah endemis tinggi dan pada tahun 2017, sudah tercatat bahwa terdapat 261.617 kasus malaria yang menewaskan setidaknya 100 orang. Papua merupakan salah satu provinsi dengan jumlah penderita malaria terbesar di Indonesia. Pada tahun 2018 ada 432.331 orang yang diduga terkena malaria dan sebanyak 137.256 orang yang dinyatakan positif malaria berdasarkan hasil pemeriksaan darah di Papua[2].

Pemodelan matematika adalah alat yang ampuh untuk merancang program pengendalian malaria dan menganalisis berbagai kesulitan dalam menerapkan pengobatan malaria. Pada penelitian sebelumnya telah dikembangkan model matematika untuk menyelidiki penyebaran dinamika malaria dengan menganalisis model malaria dengan memasukkan pengobatan dan vaksinasi[3]. Model untuk dampak kelambu pada dinamika infeksi malaria diusulkan oleh Augusto et al. [4] yang membahas model malaria yang mempertimbangkan pengobatan massal dan insektisida[5]. Model yang akurat dapat digunakan untuk memprediksi dan mengendalikan wabah penyakit menular secara efektif. Pencegahan pada penyebaran penyakit malaria dapat dikendalikan dengan pemberian obat pada individu terinfeksi sehingga seseorang mempunyai ketahanan tubuh yang lebih baik dan mampu mempertahankan diri terhadap penyakit. Oleh karena itu, untuk mengetahui penyebaran penyakit, diperlukan suatu model matematika yang dapat merepresentasikan permasalahan yang terjadi guna mencegah penyebaran penyakit tersebut.

Dalam penelitian ini penulis menggunakan model matematika yang ditulis oleh Fatmawati, Utami Dyah Purwati, dan Jonner Nainggolan pada tahun 2019 yang berjudul "*Parameter Estimation and Sensitivity of Malaria Model*"[6]. Model dilengkapi dengan tiga variabel kendali yaitu penyemprotan insektida terhadap nyamuk, pengobatan terhadap individu manusia yang terinfeksi, dan penggunaan kelambu untuk mengurangi banyaknya nyamuk yang terinfeksi. Prinsip Minimum Pontryagin diterapkan untuk menentukan syarat perlu optimalitas. Setelah itu akan dilakukan simulasi dari penyelesaian masalah kendali optimal secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta Orde-4 menggunakan *software* Scilab 6.0.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah disajikan, penulis menuliskan beberapa permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana desain kendali optimal pada model penyebaran penyakit malaria dibawah pengaruh tiga variabel kendali dengan prinsip minimum pontryagin?
2. Bagaimana perbandingan hasil simulasi model penyebaran penyakit malaria sebelum dan sesudah diberikan kendali optimal?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis membatasi permasalahan sebagai berikut:

1. Kendali yang digunakan pada model penyebaran penyakit malaria ada tiga yaitu penyemprotan insektisida, pengobatan individu, dan pencegahan individu.
2. Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini berdasarkan jurnal "*Parameter Estimation and Sensitivity of Malaria Model*" [6].
3. Simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan menggunakan *software* Scilab 6.0.

1.4 Tujuan

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah tersebut, tujuan Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi desain kendali optimal pada model penyebaran malaria dibawah pengaruh tiga variabel kendali dengan prinsip minimum pontryagin.
2. Mengetahui perbandingan hasil simulasi pada model penyebaran penyakit malaria sebelum dan sesudah diberikan kendali optimal.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat dari penulisan Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai desain kendali optimal dalam model penyebaran penyakit malaria sehingga dapat

- mengurangi jumlah individu yang terinfeksi penyakit malaria.
2. Menambah wawasan dan sebagai referensi solusi terkait penerapan teori kendali optimal dalam upaya pengendalian penyebaran penyakit malaria.
 3. Memberikan wawasan bagi stakeholder dalam pengendalian penyebaran penyakit malaria.

1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Sistematika penulisan dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. **BAB I : PENDAHULUAN**
Bab ini menjelaskan tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan.
2. **BAB II : TINJAUAN PUSTAKA**
Bab ini menjelaskan tentang definisi dan teori dasar yang mendukung dalam Tugas Akhir ini, antara lain model sistem, teori kendali optimal, prinsip minimum pontryagin dan metode runge kutta orde 4.
3. **BAB III : METODOLOGI**
Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
4. **BAB IV : ANALISIS DAN PEMBAHASAN**
Bab ini membahas tentang analisis pada model penyebaran penyakit malaria, penerapan prinsip minimum pontryagin dan Hamiltonian untuk mencari kendali optimal, mencari solusi numerik dengan metode runge- kutta orde empat dan simulasi model tersebut.
5. **BAB V : PENUTUP**
Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan, serta untuk membantu memahami permasalahan yang akan dibahas.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penulisan Tugas Akhir ini, penulis merujuk pada beberapa penelitian terdahulu yang sesuai dengan topik yang diambil. Salah satu penelitian yang digunakan adalah jurnal yang ditulis oleh Fatmawati, Utami Dyah Purwati, dan Jonner Nainggolan pada tahun 2019 yang berjudul "*Parameter Estimation and Sensitivity Analysis of Malaria Model*". Pada penelitian tersebut dinyatakan bahwa pemodelan matematika adalah alat yang mampu untuk merancang program pengendalian penyebaran penyakit malaria dengan menggunakan metode the least-square fitting atau teknik pemasangan kuadrat terkecil yang tujuannya dapat mengestimasi sebuah parameter. Dengan Jumlah dari reproduksi dasar model diperkirakan 1.2929. Selanjutnya, dilakukan analisis sensitivitas untuk menentukan signifikan sebuah parameter dalam penyebaran penyakit. Dan juga dilakukan simulasi numerik untuk menunjukkan bahwa penyakit malaria dapat diminimalkan[6]. Penelitian tersebut menjadi acuan utama dalam tugas akhir ini, dengan menggunakan model penyebaran penyakit malaria yang tujuannya agar dapat mengendalikan wabah penyakit malaria yang menyebar secara efektif pada populasi nyamuk dan manusia.

2.2 Model Formulasi dari Penyebaran Penyakit Malaria

Model Matematika ini dirumuskan pada penularan malaria dalam bentuk non linier sistem persamaan diferensial biasa. Berikut ini adalah model matematika dari penyebaran penyakit malaria [6]:

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h + \gamma_h I_h - \mu_h S_h \quad (2.1)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h + \delta_h) I_h \quad (2.2)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v S_v \quad (2.3)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v \quad (2.4)$$

Dengan syarat awal, $S_h(0) > 0, I_h(0) \geq 0, S_v(0) > 0, I_v(0) \geq 0$. Total Populasi Manusia dan Nyamuk dapat dinyatakan sebagai $N_h = S_h + I_h$, dan $N_v = S_v + I_v$.

Dimana,

Tabel 2. 1 Variabel Model Penyebaran Penyakit Malaria

Variabel	Keterangan
S_h	Jumlah manusia yang rentan terhadap penyakit
I_h	Jumlah manusia yang terinfeksi terhadap penyakit
N_h	Populasi dari manusia
S_v	Jumlah nyamuk yang rentan terhadap penyakit
I_v	Jumlah nyamuk yang terinfeksi terhadap penyakit
N_v	Populasi dari nyamuk

Tabel 2. 2 Parameter Model Penyebaran Penyakit Malaria

Parameter	Keterangan
μ_h	<i>Rate</i> kematian dari manusia
μ_v	<i>Rate</i> kematian dari nyamuk
Λ_h	<i>Rate</i> rekrutmen dari manusia
Λ_v	<i>Rate</i> rekrutmen dari nyamuk
γ_h	<i>Rate</i> manusia <i>infected</i> menjadi <i>recovered</i>
δ_h	<i>Rate</i> manusia akibat terjangkit penyakit
β	<i>Rate</i> kontak nyamuk dengan manusia
p_1	<i>Probability</i> penyebaran penyakit dari nyamuk ke manusia
p_2	<i>Probability</i> penyebaran penyakit dari manusia ke nyamuk

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi merupakan nilai harapan terjadinya infeksi setiap satuan waktu. Infeksi ini terjadi pada suatu populasi rentang yang dihasilkan oleh satu individu yang sudah terinfeksi, dinotasikan dengan R_0 .

Kondisi yang akan timbul adalah satu diantara 3 kemungkinan berikut [7].

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang dalam populasi.
2. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap dalam populasi.
3. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah dalam populasi.

Dalam tugas akhir ini, untuk menentukan R_0 digunakan metode yang dikenalkan oleh Van Den Driessche dan Watmough (2002), yaitu dengan mengkonstruksi suatu matriks yang berasal dari subpopulasi yang menyebabkan infeksi. Matriks tersebut dikenal dengan *The Generation Matrix*, yang mempunyai dua bagian yaitu F dan V^{-1} yang didefinisikan sebagai

$$C = FV^{-1}$$

Bagian F dan V adalah matriks-matriks yang berukuran $n \times n$ yaitu

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial a_i}(0, b_0) \text{ dan } V = \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial a_i}(0, b_0)$$

dengan $(0, b_0)$ adalah titik tetap tanpa penyakit. Notasi \mathcal{F}_i menyatakan laju infeksi pada kompartemen penyakit ke- i dan \mathcal{V}_i menyatakan laju pergerakan penyakit, kematian dan kesembuhan dari kompartemen ke- i . Menurut Van Den Driessche dan Watmough (2002), diperoleh

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

dengan $\rho(FV^{-1})$ adalah maksimum dari modulus nilai-nilai eigen atau disebut sebagai radius spektral dari $C = FV^{-1}$ [8].

Bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh dengan menggunakan *the next generation matrix*, sehingga diperoleh matriks F dan V sebagai berikut:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & p_1\beta \\ \frac{p_2\beta\Lambda_v\mu_h}{\mu_v\Lambda_h} & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \gamma_h + \delta_h + \mu_h & 0 \\ 0 & \mu_v \end{pmatrix}$$

Berdasarkan pendekatan metode Van Den Driessche dan Watmough (2002) bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \sqrt{\frac{\beta^2}{\mu_v^2} \frac{p_1 p_2 \beta \Lambda_v \mu_h}{\Lambda_h (\gamma_h + \delta_h + \mu_h)}}$$

dimana ρ adalah jari-jari spektral [6].

2.4 Kendali Optimal

Tujuan utama dari optimal kendali adalah menentukan kendali yang akan menyebabkan sistem memenuhi beberapa konstrain fisik dan pada waktu yang sama dapat ditentukan ekstrim minimum yang sesuai dengan fungsi tujuan atau performance index (J) yang diketahui[9]. Formulasi yang dapat diberikan pada permasalahan optimal kendali adalah:

1. Mendeskripsikan secara sistematis suatu model (secara umum dalam bentuk variabel *state*).
2. Menentukan fungsi objektif (*performance index*).
3. Menentukan kendala dan kondisi batas yang harus dipenuhi.

Fungsi objektif (*performance index*) dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.5)$$

dengan kendala

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.6)$$

dan kondisi batas $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, t_0 dan t_f masing-masing adalah waktu awal dan akhir. S, V dan f adalah fungsi skalar. Serta kendali $u^*(t)$ merupakan kendali optimal, jika disubsitusikan ke dalam sistem maka akan diperoleh keadaan yang optimal $x^*(t)$ dan pada saat yang sama juga dapat mengoptimalkan indeks performansi.

2.5 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip ini menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal dalam menyelesaikan masalah kendali optimal dengan metode Prinsip Minimum Pontryagin. Berikut ini adalah garis besar bagaimana prinsip ini dapat diterapkan untuk memperoleh syarat perlu dari masalah optimasi yang dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut [9]:

Langkah 1:

Bentuk fungsi Pontryaginnya (Hamiltonian)

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \lambda'(t)g(x(t), u(t), t) \quad (2.7)$$

Langkah 2:

Meminimumkan H terhadap semua vektor kendali $u(t)$ dengan cara:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0 \quad (2.8)$$

untuk mendapatkan $u^* = u^*(x(t), \lambda(t), t)$.

Langkah 3

Dengan menggunakan hasil yang diperoleh dari langkah 2 akan didapatkan fungsi Hamiltonian (H^*) yang optimal yaitu:

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (2.9)$$

Langkah 4

Mencari persamaan *state* dan *costate*

$$x^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_* \quad \text{dan} \quad \lambda^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_* \quad (2.10)$$

dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir

$$\left[H^* + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{t_f} + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]_{t_f}' \delta x_f = 0 \quad (2.11)$$

Langkah 5

Mensubstitusikan hasil $x^*(t)$, $\lambda^*(t)$ dari langkah 4 ke dalam persamaan $u^*(t)$ pada langkah 2 untuk sehingga didapat hasil kendali optimum

2.6 Metode Runge Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar karena metode ini menawarkan penyelesaian persamaan diferensial dengan pertumbuhan error yang jauh lebih kecil dan tidak memerlukan turunan dari fungsi[10]. Metode Runge Kutta yang umum digunakan untuk mengintegrasikan persamaan diferensial adalah metode Runge Kutta orde empat karena memiliki ketelitian lebih tinggi [11].

Misal diberikan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \quad (2.12)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \quad (2.13)$$

Dengan titik awal $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ maka secara iterasi penyelesaian Runge Kutta orde 4 adalah sebagai berikut [12]:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} (k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x}) \quad (2.14)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y}) \quad (2.15)$$

dimana,

$$k_{1,x} = hf(t_n, x_n, y_n) \quad (2.16)$$

$$k_{1,y} = hg(t_n, x_n, y_n) \quad (2.17)$$

$$k_{2,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (2.18)$$

$$k_{2,y} = hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (2.19)$$

$$k_{3,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (2.20)$$

$$k_{3,y} = hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (2.21)$$

$$k_{4,x} = hf(t_n + h, x_n + k_3, y_n + k_3) \quad (2.22)$$

$$k_{4,y} = hg(t_n + h, x_n + k_3, y_n + k_3) \quad (2.23)$$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} \quad (2.24)$$

dengan h adalah panjang interval, t_0 dan t_f adalah waktu awal dan akhir. Nilai k menunjukkan hubungan beruntun karena k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2 , dan juga k_2 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3 dan seterusnya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah dalam Tugas Akhir. Di samping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Tahap Penelitian

Untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Pada langkah ini dipelajari tentang tahapan-tahapan penelitian tentang penyebaran penyakit malaria, teori kendali optimal dengan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin serta metode Runge-Kutta orde 4. Referensi yang digunakan adalah jurnal ilmiah, buku tugas akhir, thesis atau hasil penelitian lainnya yang berkaitan dengan permasalahan pada proposal Tugas Akhir.

2. Identifikasi Model

Pada langkah ini, dikaji tentang model dari penyebaran penyakit malaria non linier dengan asumsi-asumsi tertentu sehingga dapat dibuat model dua kompartemen terhadap populasi nyamuk dan manusia yang Susceptible dan Infected.

3. Mengkonstruksi Model Matematika

Pada tahap ini, dilakukan konstruksi model penyebaran penyakit malaria dengan pemberian kendali optimal dan menentukan fungsi tujuan serta kondisi batas. Sehingga terdapat tiga variabel kendali antara lain penyemprotan insektisida, pengobatan individu, dan pencegahan individu (berupa pemakaian kelambu, pemakaian *lotion* anti nyamuk, dan lain-lain).

4. Penyelesaian Desain Kendali Optimal

Pada tahap ini dilakukan perancangan masalah kendali optimal dari model penyebaran penyakit malaria yang

membentuk fungsi objektif serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi. Setelah formulasi masalah kendali optimal sudah dilakukan, maka langkah selanjutnya yaitu penyelesaian kendali optimal dari model matematika yang diberikan dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap ini sebagai berikut:

1. Membentuk fungsi Hamiltonian
2. Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi
3. Menentukan kendali optimal
4. Menentukan persamaan *state* dan *costate*

5. Simulasi Numerik dan Analisa Perbandingan

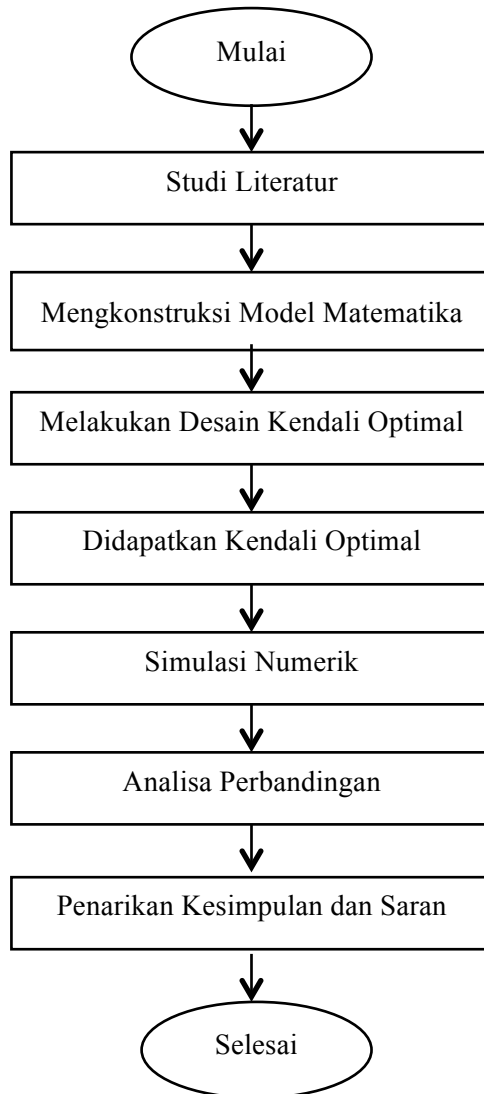
Pada tahap ini dilakukan simulasi secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde Empat dengan menggunakan bantuan *software* SCILAB. Setelah itu di bandingkan untuk melihat perilaku sistem pada grafik yang dihasilkan oleh model penyebaran penyakit malaria sebelum dan setelah diberi kendali.

6. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil simulasi dan perbandingan pada tahap sebelumnya. Serta diberikan saran sebagai perbaikan dan pengembangan untuk penelitian selanjutnya.

3.2 Diagram Alir

Secara umum tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini ditampilkan dalam diagram alir penelitian pada Gambar 3.1.



Gambar 3. 1 Diagram Alir

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

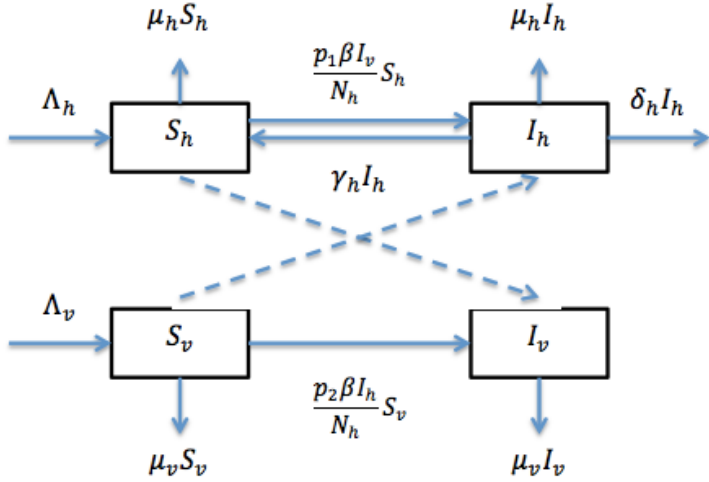
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai deskripsi model penyebaran penyakit malaria dan mencari solusi kendali optimal dari model dengan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dan akan disimulasikan model tersebut secara numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dengan bantuan *software* SCILAB 6.0.

4.1 Deskripsi Model Matematika Penyebaran Penyakit Malaria

Model penyebaran penyakit malaria tanpa kendali dengan ukuran total populasi manusia dan nyamuk pada waktu t masing-masing dilambangkan sebagai $N_h(t)$ dan $N_v(t)$. Populasi manusia dibagi menjadi dua kelas yaitu S_h manusia yang rentan terhadap penyakit dan I_h manusia yang terinfeksi, dan total populasi manusia dinyatakan dengan $N_h = S_h + I_h$, sedangkan laju kelahiran alami manusia dinyatakan dengan Λ_h . Untuk populasi nyamuk juga dibagi menjadi dua kelas yaitu S_v nyamuk yang rentan terhadap penyakit dan I_v nyamuk terinfeksi, dan total populasi nyamuk dinyatakan dengan $N_v = S_v + I_v$, sedangkan laju kelahiran alami nyamuk dinyatakan dengan Λ_v . Rata-rata dari jumlah gigitan satu nyamuk per satuan waktu dinyatakan sebagai β . p_1 merupakan peluang penularan penyakit dari gigitan nyamuk dan p_2 peluang penularan penyakit dari manusia ke nyamuk.

Adapun penyebab kematian nyamuk terdiri dari kematian alami yang dinyatakan dengan μ_v . Manusia yang terinfeksi dapat kembali menjadi rentan dengan laju γ_h , namun nyamuk tidak akan pulih dari infeksi. Dengan demikian kelas populasi nyamuk yang pulih dari infeksi diabaikan. Interaksi dalam model diilustrasikan pada dengan diagram kompartemen model penyebaran penyakit malaria:



Gambar 4. 1 Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Malaria

Model penyebaran penyakit malaria tanpa kendali dengan demikian diformulasikan sebagai sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - \frac{p_1\beta I_v}{N_h} S_h + \gamma_h I_h - \mu_h S_h \quad (4.1)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{p_1\beta I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h + \delta_h) I_h \quad (4.2)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - \frac{p_2\beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v S_v \quad (4.3)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{p_2\beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v \quad (4.4)$$

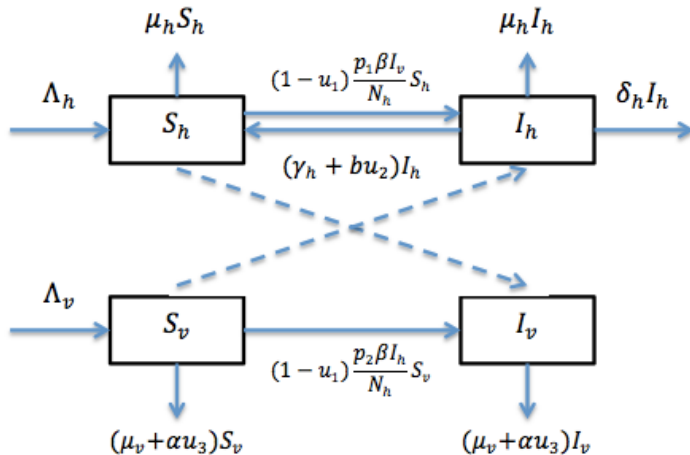
Dengan syarat awal, $S_h(0) > 0, I_h(0) \geq 0, S_v(0) > 0, I_v(0) \geq 0$. Total Populasi Manusia dan Nyamuk dapat dinyatakan sebagai $N_h = S_h + I_h$, dan $N_v = S_v + I_v$.

4.2 Model Matematika Penyebaran Penyakit Malaria dengan Kendali Optimal

Model dikonstruksi dengan menambahkan strategi kendali yang diinginkan. Berikut ini diberikan beberapa asumsi yang digunakan dalam strategi kendali pada model penyebaran penyakit malaria, yaitu:

1. Kendali u_1 merupakan representasi usaha manusia untuk memberantas nyamuk melalui pencegahan individu berupa penggunaan kelambu, *lotion* anti nyamuk, dan lain-lain. Dengan demikian, tingkat reproduksi populasi nyamuk berkurang dengan faktor $1 - u_1$.
2. Kendali u_2 merupakan proporsi pemberian obat malaria. Diasumsikan $u_2 I_h$ adalah pengobatan terhadap individu yang terinfeksi.
3. Kendali u_3 merupakan penyemprotan insektisida pada nyamuk terutama nyamuk yang berparasit Plasmodium. Karena nyamuk berkembang biak lebih cepat pada musim hujan dan iklim yang panas [1], sehingga diperlukan usaha yang lebih dalam penyemprotan insektisida.

Sehubungan dengan asumsi yang mendasari ini, model kendali optimal untuk penyebaran penyakit malaria yang menyimpulkan strategi pencegahan individu, pengobatan individu dan penyemprotan insektisida digambarkan dengan diagram kompartemen model penyebaran penyakit malaria:



Gambar 4. 2 Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Malaria dengan Kendali u_1, u_2 dan u_3

Berdasarkan diagram kompartemen diatas, model matematika penyebaran penyakit malaria dapat disajikan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - (1 - u_1) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h + \gamma_h I_h - \mu_h S_h + b u_2 I_h \quad (4.5)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = (1 - u_1) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h + \delta_h) I_h - b u_2 I_h \quad (4.6)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - (1 - u_1) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v S_v - \alpha u_3 S_v \quad (4.7)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = (1 - u_1) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v - \alpha u_3 I_v \quad (4.8)$$

Dengan syarat awal, $S_h(0) > 0, I_h(0) \geq 0, S_v(0) > 0, I_v(0) \geq 0$. Total Populasi Manusia dan Nyamuk dapat dinyatakan sebagai $N_h = S_h + I_h$, dan $N_v = S_v + I_v$.

Dimana,

Tabel 4. 1 Variabel dan Parameter Model Penyebaran Penyakit Malaria dengan Kendali

Variabel	Keterangan
S_h	Jumlah manusia yang rentan terhadap penyakit
I_h	Jumlah manusia yang terinfeksi terhadap penyakit
N_h	Populasi dari manusia
S_v	Jumlah nyamuk yang rentan terhadap penyakit
I_v	Jumlah nyamuk yang terinfeksi terhadap penyakit
N_v	Populasi dari nyamuk

Parameter	Keterangan
μ_h	Rate kematian dari manusia
μ_v	Rate kematian dari nyamuk
Λ_h	Rate rekrutmen dari manusia
Λ_v	Rate rekrutmen dari nyamuk
γ_h	Rate manusia <i>infected</i> menjadi <i>recovered</i>
δ_h	Rate manusia akibat terjangkit penyakit
β	Rate kontak nyamuk dengan manusia
α	Rate insektisida
b	Rate manusia <i>recovered</i> karena pengobatan
p_1	Probability penyebaran penyakit dari nyamuk ke manusia
p_2	Probability penyebaran penyakit dari manusia ke nyamuk
u_1	Kendali pencegahan individu berupa penggunaan kelambu, <i>lotion</i> anti nyamuk, dll.
u_2	Kendali pengobatan terhadap individu yang terinfeksi
u_3	Kendali penyemprotan insektisida terhadap nyamuk

4.3 Permasalahan Kendali Optimal

Dalam menyelesaikan permasalahan kendali optimal, salah satu metode yang dapat digunakan adalah prinsip minimum ponyryagin. Prinsip minimum ponyryagin merupakan suatu kondisi sehingga dapat diperoleh penyelesaian kendali optimal

yang sesuai dengan tujuan (*performance index*). Penyelesaian kendali optimal model penyebaran penyakit malaria menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dan fungsi objektif untuk model diberikan:

$$J(u_1, u_2, u_3) = \min \int_{t_0}^{t_f} (A_1 I_h + A_2 I_v + (\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \frac{m_3 u_3^2}{2})) dt \quad (4.9)$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} 0 &\leq t \leq t_f \\ 0 &\leq u_1 \leq 1 \\ 0 &\leq u_2 \leq 1 \\ 0 &\leq u_3 \leq 1 \end{aligned}$$

Dimana:

A_1 : bobot dari manusia terinfeksi

A_2 : bobot dari nyamuk terinfeksi

m_1 : bobot pada kendali pencegahan individu

m_2 : bobot pada kendali pengobatan individu terinfeksi

m_3 : bobot pada kendali penyemprotan insektisida

dengan t_0 adalah waktu awal dan t_f adalah waktu akhir yang telah ditetapkan, serta m_i adalah parameter bobot atau koefisien harga yang dikeluarkan pada setiap kendali selama periode hari, dimana $m_i > 0$ untuk setiap $i = 1,2,3$

Tipe permasalahan kendali optimal dari penelitian ini yaitu *fixed-final time* (t_f) dengan kondisi $0 < t < t_f$ dan *free-final state* ($x(t_f)$) pada waktu awal ($x(t_0)$) sudah ditetapkan dan *state* pada waktu akhir ($x(t_f)$) tidak ditetapkan. Sehingga, setiap sistem yang ada menggunakan kondisi batas *state* pada kondisi awal sebagai berikut:

$$S_h(t_0) = S_{h_0}, I_h(t_0) = I_{h_0}, S_v(t_0) = S_{v_0}, I_v(t_0) = I_{v_0}$$

Kondisi batas yang memenuhi pada tipe *fixed-final time* dan *free-final state* yaitu sebagai berikut

$$x(t_0) = x_0, \quad \lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* \Big|_{t_f},$$

dengan $x_0 = \{S_{h_0}, I_{h_0}, S_{v_0}, I_{v_0}\}$,

Fixed-final time artinya waktu akhir penelitian ini *fixed* atau tidak ada variasi waktu sehingga $\delta t_f = 0$ dan *free-final state* artinya state diwaktu akhir tidak ditentukan berarti terdapat variasi state diwaktu akhir sehingga $\delta x_f \neq 0$. Oleh sebab itu, persamaan (2.11) dapat didefinisikan menjadi

$$\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f} \delta x_f = 0$$

Sehingga, pembuat nolnya adalah $\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f}$.

Selanjutnya, sesuai dengan persamaan (2.5) fungsi tujuan pada persamaan (4.9) tidak mengandung persamaan Meyer. Sehingga persamaan Meyer dianggap sama dengan nol dan diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda^*(t_f) &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{*t_f} \\ &= \left(\frac{\delta}{\delta x} 0 \right)_{*t_f} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dengan $\lambda^*(t_f)$ merupakan kondisi transversalitas. Oleh karena itu, diperoleh costate pada waktu wakhir ($\lambda^*(t_f)$) sama dengan nol. Jadi, setiap sistem yang ada di persamaan ini di inialisasikan dengan kondisi batas costate pada waktu akhir sebagai berikut

$$\lambda_{S_h}^*(t_f) = 0, \quad \lambda_{I_h}^*(t_f) = 0, \quad \lambda_{S_v}^*(t_f) = 0, \quad \lambda_{I_v}^*(t_f) = 0$$

4.4 Penyelesaian Kendali Optimal

Permasalahan kendali optimal dapat diselesaikan dengan beberapa langkah sebagai berikut:

1. Membentuk Fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned}
 H = & A_1 I_h + A_2 I_v + \left(\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \frac{1}{2} m_3 u_3^2 \right) + \\
 & \lambda_{S_h} \left(\Lambda_h - (1 - u_1) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h + \gamma_h I_h - \mu_h S_h + b u_2 I_h \right) + \\
 & \lambda_{I_h} \left((1 - u_1) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h + \delta_h) I_h - b u_2 I_h \right) + \\
 & \lambda_{S_v} \left(\Lambda_v - (1 - u_1) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v S_v - \alpha u_3 S_v \right) + \\
 & \lambda_{I_v} \left((1 - u_1) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v - \alpha u_3 I_v \right) \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

2. Menentukan kondisi stasioner (4.10) untuk mendapatkan persamaan kendali optimal. Persamaan (4.10) diturunkan terhadap u_1, u_2, u_3 sehingga diperoleh

a. $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$

$$\begin{aligned}
 m_1 u_1 + (\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h + (\lambda_{S_v} - \lambda_{I_v}) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v &= 0 \\
 m_1 u_1 &= (\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h}) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h + (\lambda_{I_v} - \lambda_{S_v}) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v
 \end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{(\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h}) p_1 \beta I_v S_h + (\lambda_{I_v} - \lambda_{S_v}) p_2 \beta I_h S_v}{m_1 N_h} \quad (4.11)$$

Karena $0 \leq u_1 \leq 1$

$$u_1^* = \begin{cases} 0, & \text{jika } u_1 \leq 1 \\ u_1, & \text{jika } 0 < u_1 < 1 \\ 1, & \text{jika } u_1 \geq 1 \end{cases}$$

Dari beberapa kemungkinan diatas, maka pengontrol yang optimal adalah

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h})p_1\beta I_v S_h + (\lambda_{I_v} - \lambda_{S_v})p_2\beta I_h S_v}{m_1 N_h} \right\}, 1 \right\}$$

b. $\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$

$$\begin{aligned} m_2 u_2 + (\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h})bI_h &= 0 \\ m_2 u_2 &= (\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h})bI_h \\ u_2 &= \frac{(\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h})bI_h}{m_2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Karena $0 \leq u_2 \leq 1$

$$u_2^* = \begin{cases} 0, & \text{jika } u_2 \leq 0 \\ u_2, & \text{jika } 0 < u_2 < 1 \\ 1, & \text{jika } u_2 \geq 1 \end{cases}$$

Dari beberapa kemungkinan diatas, maka pengontrol yang optimal adalah

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h})bI_h}{m_2} \right\}, 1 \right\}$$

c. $\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0$

$$\begin{aligned} m_3 u_3 + \lambda_{S_v}(-\alpha S_v) + \lambda_{I_v}(-I_v) &= 0 \\ m_3 u_3 &= \lambda_{S_v}(\alpha S_v) + \lambda_{I_v}(I_v) \\ u_3 &= \frac{\alpha(\lambda_{S_v}(S_v) + \lambda_{I_v}(I_v))}{m_3} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Karena $0 \leq u_3 \leq 1$

$$u_3^* = \begin{cases} 0, & \text{jika } u_3 \leq 0 \\ u_3, & \text{jika } 0 < u_3 < 1 \\ 1, & \text{jika } u_3 \geq 1 \end{cases}$$

Dari beberapa kemungkinan diatas, maka pengontrol yang optimal adalah

$$u_3^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\alpha(\lambda_{S_v}(S_v) + \lambda_{I_v}(I_v))}{m_3} \right\}, 1 \right\}$$

3. Menentukan H^* yang optimal

Persamaan kendali optimal yang diperoleh pada persamaan u_1^* , u_2^* dan u_3^* disubstitusikan ke dalam persamaan H , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} H^* = & A_1 I_h + A_2 I_v + \left(\frac{1}{2} m_1 (u_1^*)^2 + \frac{1}{2} m_2 (u_2^*)^2 + \frac{1}{2} m_3 (u_3^*)^2 \right) \\ & + \lambda_{S_h} \left(\Lambda_h - (1 - u_1^*) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h + \gamma_h I_h - \mu_h S_h + b u_2^* I_h \right) \\ & + \lambda_{I_h} \left((1 - u_1^*) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h + \delta_h) I_h - b u_2^* I_h \right) \\ & + \lambda_{S_v} \left(\Lambda_v - (1 - u_1^*) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v S_v - \alpha u_3^* S_v \right) \\ & + \lambda_{I_v} \left((1 - u_1^*) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v - \alpha u_3^* I_v \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

4. Menyelesaikan persamaan *state* dan *costate* untuk memperoleh sistem yang optimal

a. Persamaan *State*

Persamaan *state* dalam kondisi optimal diperoleh dengan cara menurunkan fungsi Pontryagin H^* yang sudah optimal terhadap λ dapat dinyatakan secara matematis melalui persamaan (2.10) sebagai berikut:

$$x^*(t) = \left(\frac{\partial H^*}{\partial \lambda} \right)$$

Berdasarkan persamaan diatas, x^* merupakan vektor masing-masing komponen yang diperoleh dari penurunan H^* terhadap λ sehingga didapat persamaan *state* untuk setiap populasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
S_h^* &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{S_h}} \\
&= \Lambda_h - (1 - u_1^*) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h + \gamma_h I_h - \mu_h S_h + b u_2^* I_h \\
I_h^* &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{I_h}} \\
&= (1 - u_1^*) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h + \delta_h) I_h - b u_2^* I_h \\
S_v^* &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{S_v}} \\
&= \Lambda_v - (1 - u_1^*) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v S_v - \alpha u_3^* S_v \\
I_v^* &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{I_v}} \\
&= (1 - u_1^*) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v - \alpha u_3^* I_v \tag{4.15}
\end{aligned}$$

b. Persamaan *Costate*

Persamaan *costate* dalam kondisi optimal diperoleh dengan cara menurunkan negatif fungsi pontryagin H^* yang sudah optimal terhadap λ dapat dinyatakan secara matematis melalui persamaan (2.10) sebagai berikut:

$$\lambda^*(t) = - \left(\frac{\partial H^*}{\partial x} \right)$$

Berdasarkan persamaan diatas, λ^* diperoleh dari penurunan H^* terhadap x yang diturunkan terhadap masing-masing komponen vektornya sehingga diperoleh persamaan *costate* untuk setiap populasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_{S_h}^* &= -\frac{\partial H^*}{\partial S_h} = (\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) \frac{(1 - u_1^*) p_1 \beta I_v I_h}{(N_h)^2} \\
&\quad + (\lambda_{I_v} - \lambda_{S_v}) \frac{(1 - u_1^*) p_2 \beta I_h}{(N_h)^2} S_v + \lambda_{S_h} \mu_h \\
\lambda_{I_h}^* &= -\frac{\partial H^*}{\partial I_h} = -A_1 + (\lambda_{S_v} - \lambda_{I_v}) \frac{(1 - u_1^*) p_2 \beta S_h}{(N_h)^2} S_v \\
&\quad + (\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h}) \frac{(1 - u_1^*) p_1 \beta I_v}{(N_h)^2} S_h - \lambda_{S_h} (\gamma_h \\
&\quad + b u_2^*) + \lambda_{I_h} (\mu_h + \gamma_h + \delta_h + b u_2^*) \\
\lambda_{S_v}^* &= -\frac{\partial H^*}{\partial S_v} = (\lambda_{S_v} - \lambda_{I_v}) \frac{(1 - u_1^*) p_2 \beta I_h}{N_h} + \lambda_{S_v} (\mu_v + \alpha u_3^*) \\
\lambda_{I_v}^* &= -\frac{\partial H^*}{\partial I_v} = -A_2 + (\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) \frac{(1 - u_1^*) p_1 \beta S_h}{N_h} + \lambda_{I_v} (\mu_v + \alpha u_3^*)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.5 Penyelesaian Simulasi Numerik

Persamaan *state* dan *costate* yang diperoleh merupakan persamaan non linear sehingga sulit untuk diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, persamaan *state* (4.15) dan *costate* (4.16) akan dilakukan secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan h , h adalah langkah waktu (*step size*).

Persamaan *state* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{S_h}} &= \Lambda_h - (1 - u_1^*) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h + \gamma_h I_h - \mu_h S_h + b u_2^* I_h \\
&= f_1(S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{I_h}} &= (1 - u_1^*) \frac{p_1 \beta I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h + \delta_h) I_h - b u_2^* I_h \\
&= f_2(S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{S_v}} &= \Lambda_v - (1 - u_1^*) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v S_v - \alpha u_3^* S_v \\ &= f_3(S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{I_v}} &= (1 - u_1^*) \frac{p_2 \beta I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v - \alpha u_3^* I_v \\ &= f_4(S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))\end{aligned}$$

Sedangkan persamaan *costate* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial H^*}{\partial S_h} &= (\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) \frac{(1 - u_1^*) p_1 \beta I_v I_h}{(N_h)^2} \\ &\quad + (\lambda_{I_v} - \lambda_{S_v}) \frac{(1 - u_1^*) p_2 \beta I_h}{(N_h)^2} S_v + \lambda_{S_h} \mu_h \\ &= g_1(\lambda_{S_h}(t), \lambda_{I_h}(t), \lambda_{S_v}(t), \lambda_{I_v}(t), S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), \\ &\quad u_1(t), u_2(t), u_3(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial H^*}{\partial I_h} &= -A_1 + (\lambda_{S_v} - \lambda_{I_v}) \frac{(1 - u_1^*) p_2 \beta S_h}{(N_h)^2} S_v \\ &\quad + (\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h}) \frac{(1 - u_1^*) p_1 \beta I_v}{(N_h)^2} S_h - \lambda_{S_h} (\gamma_h + b u_2^*) \\ &\quad + \lambda_{I_h} (\mu_h + \gamma_h + \delta_h + b u_2^*) \\ &= g_2(\lambda_{S_h}(t), \lambda_{I_h}(t), \lambda_{S_v}(t), \lambda_{I_v}(t), S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), \\ &\quad u_1(t), u_2(t), u_3(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial H^*}{\partial S_v} &= (\lambda_{S_v} - \lambda_{I_v}) \frac{(1 - u_1^*) p_2 \beta I_h}{N_h} + \lambda_{S_v} (\mu_v + \alpha u_3^*) \\ &= g_3(\lambda_{S_h}(t), \lambda_{I_h}(t), \lambda_{S_v}(t), \lambda_{I_v}(t), S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), \\ &\quad u_1(t), u_2(t), u_3(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial H^*}{\partial I_v} &= -A_2 + (\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) \frac{(1 - u_1^*) p_1 \beta S_h}{N_h} + \lambda_{I_v} (\mu_v + \alpha u_3^*) \\ &= g_4(\lambda_{S_h}(t), \lambda_{I_h}(t), \lambda_{S_v}(t), \lambda_{I_v}(t), S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), \\ &\quad u_1(t), u_2(t), u_3(t))\end{aligned}$$

Persamaan *state* (4.15) dan *costate* (4.16) yang digunakan adalah persamaan diferensial yang masih mengandung u_1, u_2 dan u_3 . Hal ini dilakukan karena u_1, u_2 dan u_3 mengandung variabel $\lambda_{S_h}, \lambda_{I_h}, \lambda_{S_v}$ dan λ_{I_v} . Persamaan *state* akan diselesaikan dengan metode *forward sweep* karena diketahui nilai awal ($x(t_0)$) sedangkan persamaan *costate* akan diselesaikan dengan metode *backward sweep* karena diketahui nilai akhir ($\lambda^*(t_f)$).

Berikut langkah-langkah untuk menyelesaikan persamaan *state* dan *costate* dengan metode Runge-Kutta orde 4:

a. Langkah 1

Interval waktu $t = [t_0, t_f]$ dibagi sebanyak n subinterval. Sehingga, persamaan *state* dan *costate* dapat ditulis sebagai berikut:

State:

$$S_h^* = (S_{h_1}, \dots, S_{h_{n+1}})$$

$$I_h^* = (I_{h_1}, \dots, I_{h_{n+1}})$$

$$S_v^* = (S_{v_1}, \dots, S_{v_{n+1}})$$

$$I_v^* = (I_{v_1}, \dots, I_{v_{n+1}})$$

Costate:

$$\lambda_{S_h}^* = (\lambda_{S_{h_1}}, \dots, \lambda_{S_{h_{n+1}}})$$

$$\lambda_{I_h}^* = (\lambda_{I_{h_1}}, \dots, \lambda_{I_{h_{n+1}}})$$

$$\lambda_{S_v}^* = (\lambda_{S_{v_1}}, \dots, \lambda_{S_{v_{n+1}}})$$

$$\lambda_{I_v}^* = (\lambda_{I_{v_1}}, \dots, \lambda_{I_{v_{n+1}}})$$

Artinya terdapat $n + 1$ titik disepanjang waktu t , sehingga diperoleh selisih antara setiap titiknya yaitu

$$h = \frac{t_f - t_0}{n}$$

b. Langkah 2

Memberikan inisialisasi nilai awal $n = 100$, $t_0 = 0$, $t_f = 100$.

c. Langkah 3

Menggunakan nilai awal $S_h(0) = S_{h_0}$, $I_h(0) = I_{h_0}$, $S_v(0) = S_{v_0}$, $I_v(0) = I_{v_0}$ dan asumsi nilai awal u_1, u_2 dan u_3 untuk menyelesaikan persamaan state secara forward sweep. Berikut ini rumus Runge-Kutta orde 4:

$$S_{h_{n+1}} = S_{h_n} + \frac{h}{6} (k_{1,S_h} + 2k_{2,S_h} + 2k_{3,S_h} + k_{4,S_h})$$

$$I_{h_{n+1}} = I_{h_n} + \frac{h}{6} (k_{1,I_h} + 2k_{2,I_h} + 2k_{3,I_h} + k_{4,I_h})$$

$$S_{v_{n+1}} = S_{v_n} + \frac{h}{6} (k_{1,S_v} + 2k_{2,S_v} + 2k_{3,S_v} + k_{4,S_v})$$

$$I_{v_{n+1}} = I_{v_n} + \frac{h}{6} (k_{1,I_v} + 2k_{2,I_v} + 2k_{3,I_v} + k_{4,I_v})$$

Dimana

$$k_{1,S_h} = f_1(S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

$$k_{1,I_h} = f_2(S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

$$k_{1,S_v} = f_3(S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

$$k_{1,I_v} = f_4(S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

$$k_{2,S_h} = f_1 \left(S_h(t) + \frac{hk_{1,S_h}}{2}, I_h(t) + \frac{hk_{1,I_h}}{2}, S_v(t) + \frac{hk_{1,S_v}}{2}, I_v(t) + \frac{hk_{1,I_v}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)$$

$$k_{2,I_h} = f_2 \left(S_h(t) + \frac{hk_{1,S_h}}{2}, I_h(t) + \frac{hk_{1,I_h}}{2}, S_v(t) + \frac{hk_{1,S_v}}{2}, I_v(t) + \frac{hk_{1,I_v}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)$$

$$k_{2,S_v} = f_3 \left(S_h(t) + \frac{hk_{1,S_h}}{2}, I_h(t) + \frac{hk_{1,I_h}}{2}, S_v(t) \right. \\ \left. + \frac{hk_{1,S_v}}{2}, I_v(t) + \frac{hk_{1,I_v}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)$$

$$k_{2,I_v} = f_4 \left(S_h(t) + \frac{hk_{1,S_h}}{2}, I_h(t) + \frac{hk_{1,I_h}}{2}, S_v(t) \right. \\ \left. + \frac{hk_{1,S_v}}{2}, I_v(t) + \frac{hk_{1,I_v}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)$$

$$k_{3,S_h} = f_1 \left(S_h(t) + \frac{hk_{2,S_h}}{2}, I_h(t) + \frac{hk_{2,I_h}}{2}, S_v(t) \right. \\ \left. + \frac{hk_{2,S_v}}{2}, I_v(t) + \frac{hk_{2,I_v}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)$$

$$k_{3,I_h} = f_2 \left(S_h(t) + \frac{hk_{2,S_h}}{2}, I_h(t) + \frac{hk_{2,I_h}}{2}, S_v(t) \right. \\ \left. + \frac{hk_{2,S_v}}{2}, I_v(t) + \frac{hk_{2,I_v}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)$$

$$k_{3,S_v} = f_3 \left(S_h(t) + \frac{hk_{2,S_h}}{2}, I_h(t) + \frac{hk_{2,I_h}}{2}, S_v(t) \right. \\ \left. + \frac{hk_{2,S_v}}{2}, I_v(t) + \frac{hk_{2,I_v}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)$$

$$k_{3,I_v} = f_4 \left(S_h(t) + \frac{hk_{2,S_h}}{2}, I_h(t) + \frac{hk_{2,I_h}}{2}, S_v(t) \right. \\ \left. + \frac{hk_{2,S_v}}{2}, I_v(t) + \frac{hk_{2,I_v}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)$$

$$k_{4,S_h} = f_1(S_h(t) + hk_{3,S_h}, I_h(t) + hk_{3,I_h}, S_v(t) \\ + hk_{3,S_v}, I_v(t) + hk_{3,I_v}, u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

$$\begin{aligned}
k_{4,I_h} &= f_2(S_h(t) + hk_{3,S_h}, I_h(t) + hk_{3,I_h}, S_v(t) \\
&\quad + hk_{3,S_v}, I_v(t) + hk_{3,I_v}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \\
k_{4,S_v} &= f_3(S_h(t) + hk_{3,S_h}, I_h(t) + hk_{3,I_h}, S_v(t) \\
&\quad + hk_{3,S_v}, I_v(t) + hk_{3,I_v}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \\
k_{4,I_v} &= f_4(S_h(t) + hk_{3,S_h}, I_h(t) + hk_{3,I_h}, S_v(t) \\
&\quad + hk_{3,S_v}, I_v(t) + hk_{3,I_v}, u_1(t), u_2(t), u_3(t))
\end{aligned}$$

d. Langkah 4

Dimisalkan Dimisalkan $\lambda_i(t_f) = 0$ dan diketahui batas transversal $\lambda_{S_h}(t_f) = \lambda_{I_h}(t_f) = \lambda_{S_v}(t_f) = \lambda_{I_v}(t_f)$, maka digunakan nilai akhir $\lambda_{S_h}(t_f) = \lambda_{I_h}(t_f) = \lambda_{S_v}(t_f) = \lambda_{I_v}(t_f) = 0$ serta hasil dari langkah 3 untuk menyelesaikan persamaan costate secara backward sweep. Berikut rumus Runge-Kutta orde 4 untuk persamaan costate:

$$\begin{aligned}
S_{h_{n-1}} &= S_{h_n} - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_{S_h}} + 2k_{2,\lambda_{S_h}} + 2k_{3,\lambda_{S_h}} + k_{4,\lambda_{S_h}}) \\
I_{h_{n-1}} &= I_{h_n} - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_{I_h}} + 2k_{2,\lambda_{I_h}} + 2k_{3,\lambda_{I_h}} + k_{4,\lambda_{I_h}}) \\
S_{v_{n-1}} &= S_{v_n} - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_{S_v}} + 2k_{2,\lambda_{S_v}} + 2k_{3,\lambda_{S_v}} + k_{4,\lambda_{S_v}}) \\
I_{v_{n-1}} &= I_{v_n} - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_{I_v}} + 2k_{2,\lambda_{I_v}} + 2k_{3,\lambda_{I_v}} + k_{4,\lambda_{I_v}})
\end{aligned}$$

Dimana

$$\begin{aligned}
k_{1,\lambda_{S_h}} &= g_1(\lambda_{S_h}(t), \lambda_{I_h}(t), \lambda_{S_v}(t), \lambda_{I_v}(t), S_h(t), I_h(t), S_v(t), \\
&\quad I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \\
k_{1,\lambda_{I_h}} &= g_2(\lambda_{S_h}(t), \lambda_{I_h}(t), \lambda_{S_v}(t), \lambda_{I_v}(t), S_h(t), I_h(t), S_v(t), \\
&\quad I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \\
k_{1,\lambda_{S_v}} &= g_3(\lambda_{S_h}(t), \lambda_{I_h}(t), \lambda_{S_v}(t), \lambda_{I_v}(t), S_h(t), I_h(t), S_v(t), \\
&\quad I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \\
k_{1,\lambda_{I_v}} &= g_4(\lambda_{S_h}(t), \lambda_{I_h}(t), \lambda_{S_v}(t), \lambda_{I_v}(t), S_h(t), I_h(t), S_v(t), \\
&\quad I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{2,\lambda_{S_h}} \\
&= g_1 \left(\lambda_{S_h}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{S_h}}}{2}, \lambda_{I_h}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{I_h}}}{2}, \lambda_{S_v}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{S_v}}}{2}, \lambda_{I_v}(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{hk_{1,\lambda_{I_v}}}{2}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{2,\lambda_{I_h}} \\
&= g_2 \left(\lambda_{S_h}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{S_h}}}{2}, \lambda_{I_h}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{I_h}}}{2}, \lambda_{S_v}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{S_v}}}{2}, \lambda_{I_v}(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{hk_{1,\lambda_{I_v}}}{2}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{2,\lambda_{S_v}} \\
&= g_3 \left(\lambda_{S_h}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{S_h}}}{2}, \lambda_{I_h}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{I_h}}}{2}, \lambda_{S_v}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{S_v}}}{2}, \lambda_{I_v}(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{hk_{1,\lambda_{I_v}}}{2}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{2,\lambda_{I_v}} \\
&= g_4 \left(\lambda_{S_h}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{S_h}}}{2}, \lambda_{I_h}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{I_h}}}{2}, \lambda_{S_v}(t) - \frac{hk_{1,\lambda_{S_v}}}{2}, \lambda_{I_v}(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{hk_{1,\lambda_{I_v}}}{2}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{3,\lambda_{S_h}} \\
&= g_1 \left(\lambda_{S_h}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{S_h}}}{2}, \lambda_{I_h}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{I_h}}}{2}, \lambda_{S_v}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{S_v}}}{2}, \lambda_{I_v}(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{hk_{2,\lambda_{I_v}}}{2}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{3,\lambda_{I_h}} \\
&= g_2 \left(\lambda_{S_h}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{S_h}}}{2}, \lambda_{I_h}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{I_h}}}{2}, \lambda_{S_v}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{S_v}}}{2}, \lambda_{I_v}(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{hk_{2,\lambda_{I_v}}}{2}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{3,\lambda_{S_v}} \\
&= g_3 \left(\lambda_{S_h}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{S_h}}}{2}, \lambda_{I_h}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{I_h}}}{2}, \lambda_{S_v}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{S_v}}}{2}, \lambda_{I_v}(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{hk_{2,\lambda_{I_v}}}{2}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{3,\lambda_{I_v}} \\
&= g_4 \left(\lambda_{S_h}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{S_h}}}{2}, \lambda_{I_h}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{I_h}}}{2}, \lambda_{S_v}(t) - \frac{hk_{2,\lambda_{S_v}}}{2}, \lambda_{I_v}(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{hk_{2,\lambda_{I_v}}}{2}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{4,\lambda_{S_h}} \\
&= g_1(\lambda_{S_h}(t) - hk_{3,\lambda_{S_h}}, \lambda_{I_h}(t) - hk_{3,\lambda_{I_h}}, \lambda_{S_v}(t) - hk_{3,\lambda_{S_v}}, \lambda_{I_v}(t) \\
&\quad - hk_{3,\lambda_{I_v}}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{4,\lambda_{I_h}} \\
& = g_2(\lambda_{S_h}(t) - hk_{3,\lambda_{S_h}}, \lambda_{I_h}(t) - hk_{3,\lambda_{I_h}}, \lambda_{S_v}(t) - hk_{3,\lambda_{S_v}}, \lambda_{I_v}(t) \\
& \quad - hk_{3,\lambda_{I_v}}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{4,\lambda_{S_v}} \\
& = g_3(\lambda_{S_h}(t) - hk_{3,\lambda_{S_h}}, \lambda_{I_h}(t) - hk_{3,\lambda_{I_h}}, \lambda_{S_v}(t) - hk_{3,\lambda_{S_v}}, \lambda_{I_v}(t) \\
& \quad - hk_{3,\lambda_{I_v}}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{4,\lambda_{I_v}} \\
& = g_4(\lambda_{S_h}(t) - hk_{3,\lambda_{S_h}}, \lambda_{I_h}(t) - hk_{3,\lambda_{I_h}}, \lambda_{S_v}(t) - hk_{3,\lambda_{S_v}}, \lambda_{I_v}(t) \\
& \quad - hk_{3,\lambda_{I_v}}, S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))
\end{aligned}$$

e. Langkah 5

Memperbarui nilai u_1 , u_2 dan u_3 dengan mensubstitusi nilai $S_h, I_h, S_v, I_v, \lambda_{S_h}, \lambda_{I_h}, \lambda_{S_v}$ dan λ_{I_v} yang baru ke dalam karakterisasi kendali optimal. Dalam hal ini nilai u_1 , u_2 dan u_3 diberikan pada persamaan $u_1(t)^*$, $u_2(t)^*$ dan $u_3(t)^*$.

4.6 Analisis dan Hasil Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan memperlihatkan efektivitas penerapan kendali, yaitu dengan pencegahan individu, pengobatan individu, dan penyemprotan nyamuk terhadap penyebaran malaria. Skenario yang dilakukan yaitu:

1. Tanpa kendali ($u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$)
2. Dengan kendali pencegahan individu ($u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 = 0$)
3. Dengan kendali pengobatan individu ($u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$)
4. Dengan kendali penyemprotan nyamuk ($u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0$)
5. Dengan kendali pencegahan individu, pengobatan dan penyemprotan ($u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$)

Simulasi dengan menggunakan *software* Scilab untuk melihat perubahan banyaknya individu populasi pada saat $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Metode yang digunakan pada simulasi ini adalah metode Runge-Kutta orde 4 dan metode Sweep

Maju-Mundur. Adapun *source code* program dapat dilihat pada Lampiran.

4.6.1 Solusi Numerik Ketika $R_0 < 1$

Untuk simulasi numerik saat kondisi $R_0 < 1$, yang artinya setiap individu yang terinfeksi memproduksi kurang dari satu individu baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi.

Tabel 4. 2 Nilai Awal Variabel Model Penyebaran Penyakit Malaria

Populasi	Nilai Awal	Sumber
S_h	2,223,198	[6]
I_h	20,711	[6]
S_v	100,000	[6]
I_v	1000	[6]

Tabel 4. 3 Nilai Awal Parameter Model Penyebaran Penyakit Malaria

Sub Populasi	Nilai Awal	Sumber
Λ_h	94.9269	[6]
Λ_v	474.8190	[6]
μ_h	$\frac{1}{65.36 \times 365}$	[6]
μ_v	0.025	[6]
γ_h	0.0074	[6]
δ_h	0.00044653	[6]
β	0.2	Asumsi
α	0.2	Asumsi

b	0.2	Asumsi
p_1	0.73	[6]
p_2	0.1327	[6]
A_1	150	Asumsi
A_2	150	Asumsi
m_1	150	Asumsi
m_2	180	Asumsi
m_3	120	Asumsi

Dari nilai-nilai parameter yang diberikan dari Tabel 4.3, di dapatkan[6]:

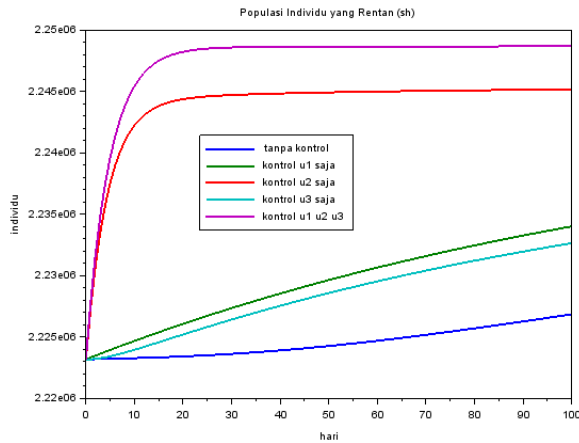
$$\begin{aligned}
 R_0 &= \rho(FV^{-1}) = \sqrt{\frac{\beta^2}{\mu_v^2} \frac{p_1 p_2 \beta \Lambda_v \mu_h}{\Lambda_h (\gamma_h + \delta_h + \mu_h)}} \\
 &= \sqrt{\frac{(0.2)^2}{(0.025)^2} \frac{(0.1327)(0.73)(0.2)(474.8190)(65.36 \times 365)^{-1}}{94.9269(0.0074 + 0.00044653 + (65.36 \times 365)^{-1})}} \\
 &= 0.4059
 \end{aligned}$$

Nilai yang digunakan pada Tabel 4.3 dimana $R_0 \approx 0.4059 < 1$. Kemudian simulasi dilakukan pada kondisi $R_0 < 1$ yang menunjukkan pengaruh tiga variabel kendali yaitu pencegahan individu, pengobatan individu dan penyemprotan insektisida. Sehingga dapat dibuat simulasi perubahan banyaknya individu pada setiap populasi sebelum dan sesudah diberikan kendali.

a. Manusia *Susceptible*

Berdasarkan Gambar 4.3 diketahui bahwa populasi individu yang rentan terus bertambah dan mengalami peningkatan. Hal ini

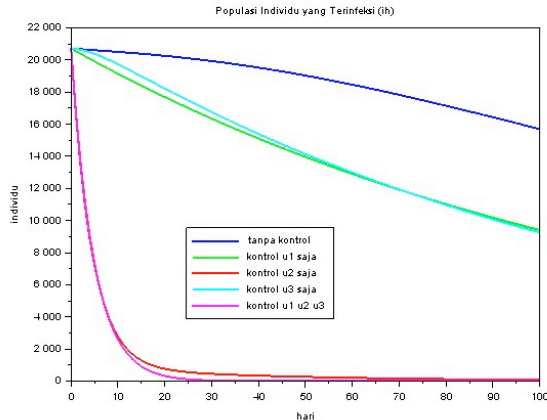
menunjukkan bahwa pada saat $R_0 < 1$ maka semakin lama penyebaran penyakit malaria akan hilang dari populasi.



Gambar 4.3 Grafik perubahan banyaknya Individu Rentan untuk $R_0 < 1$

b. Manusia *Infected*

Berdasarkan Gambar 4.4 diketahui populasi manusia yang terinfeksi mendekati nilai nol atau bahkan bisa menuju nol. Hal ini menunjukkan bahwa manusia yang terinfeksi akan menurun seiring waktu dan penyakit akan menghilang dalam populasi. Sehingga dapat dikatakan bahwa pada saat $R_0 < 1$ maka semakin lama penyebaran penyakit malaria akan hilang dari populasi.



Gambar 4. 4 Grafik perubahan banyaknya Individu Terinfeksi untuk $R_0 < 1$

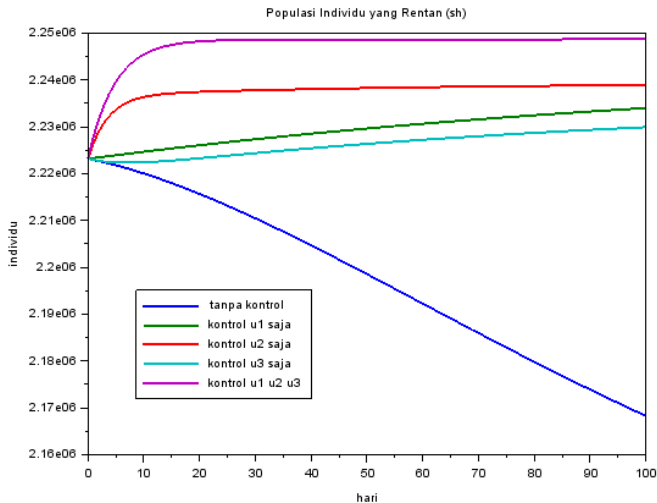
4.6.2 Solusi Numerik Ketika $R_0 > 1$

Untuk simulasi numerik saat kondisi $R_0 > 1$, yang artinya penyakit akan meningkat menjadi wabah dan akan bertahan dalam populasi. Nilai yang digunakan pada Tabel 4.3 dengan memperbesar nilai parameter $\beta = 0.637$ untuk memenuhi syarat $R_0 \approx 1.2929 > 1$. Kemudian simulasi yang dilakukan pada kondisi $R_0 > 1$ adalah menunjukkan pengaruh tiga variabel kendali yaitu pecegahan individu, pengobatan individu dan penyemprotan insektisida. Sehingga dapat dibuat simulasi perubahan banyaknya individu pada setiap populasi sebelum dan sesudah diberikan kendali.

a. Manusia *Susceptible*

Pada Gambar 4.5 menunjukkan bahwa terlihat perbedaan jumlah manusia rentan sebelum dan sesudah diberikan kendali dengan kondisi awal $S_h(0) = 2,223,198$. Tanpa pemberian

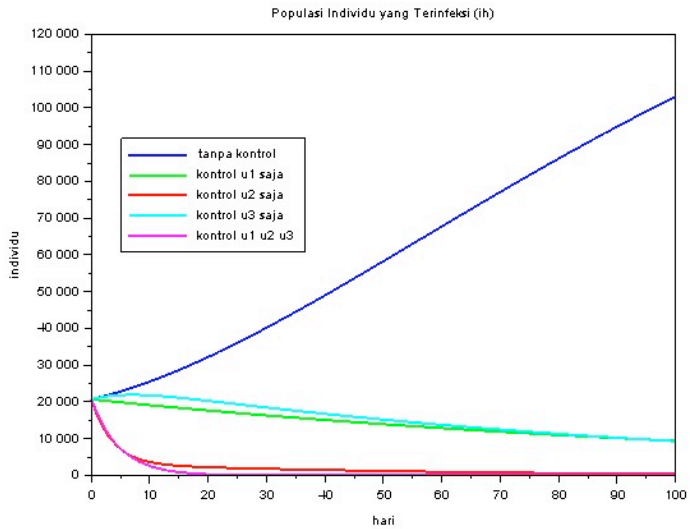
kendali, manusia rentan mengalami penurunan secara drastis setiap harinya. Sedangkan dengan pemberian kendali $u_1(t)$, $u_2(t)$ dan $u_3(t)$ saja dapat menaikkan nilai S_h namun hasilnya tidak optimal. Sehingga hasil yang optimal didapatkan dengan pemberian ketiga kendali sekaligus.



Gambar 4. 5 Grafik perubahan perbandingan banyaknya manusia rentan tanpa dan dengan kendali

b. Manusia *Infected*

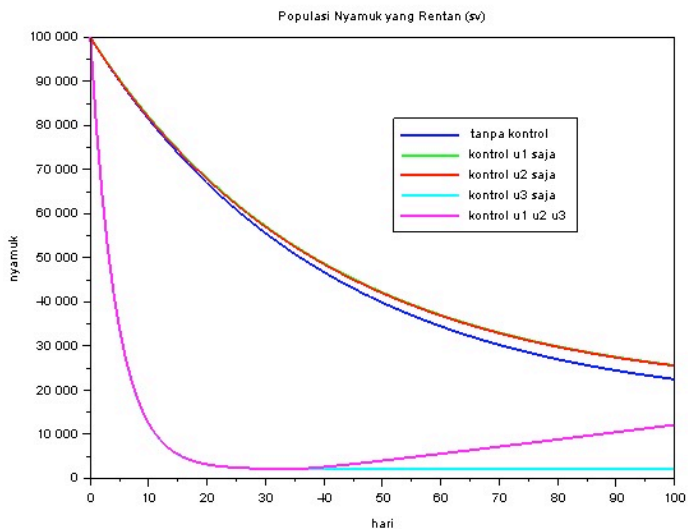
Pada Gambar 4.6 menunjukkan bahwa terlihat perbedaan jumlah manusia rentan sebelum dan sesudah diberikan kendali dengan kondisi awal $I_h(0) = 20,711$. Sama halnya dengan banyaknya individu yang rentan, dengan kendali u_2 (pengobatan) saja individu terinfeksi jumlahnya hampir sama dengan pemberian ketiga kendali sekaligus. Pemberian kendali u_1 (pencegahan) dan u_3 (penyemprotan) juga dapat menurunkan jumlah individu rentan namun hasilnya tidak lebih optimal.



Gambar 4.6 Grafik perubahan perbandingan banyaknya manusia terinfeksi tanpa dan dengan kendali

c. Nyamuk *Susceptible*

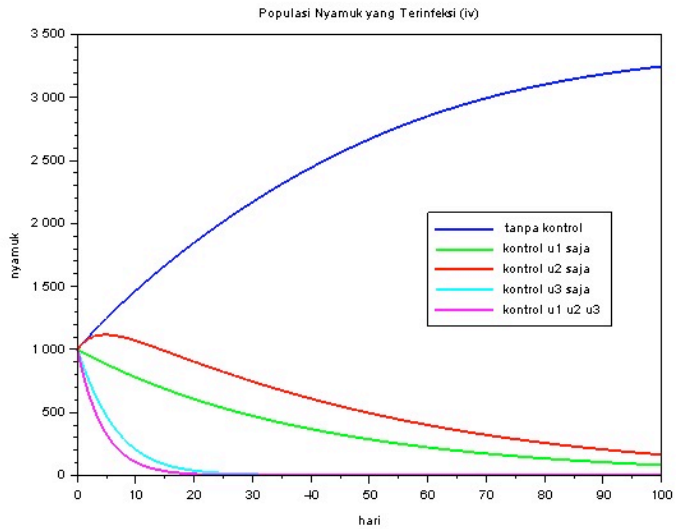
Pada Gambar 4.7 menunjukkan bahwa terlihat perbedaan jumlah nyamuk rentan sebelum dan sesudah diberikan kendali dengan kondisi awal $S_v(0) = 100,000$. Dengan pemberian kendali u_1 (pencegahan) dan u_2 (pengobatan) saja dapat menurunkan populasi nyamuk yang rentan namun hasilnya tidak optimal. Penurunan jumlah nyamuk rentan paling optimal saat diberi kendali u_3 (penyemprotan) pada saat $t = 33$ karena penyemprotan maksimal terjadi di daerah itu (lihat Gambar 4.10).



Gambar 4. 7 Grafik perubahan perbandingan banyaknya nyamuk rentan tanpa dan dengan kendali

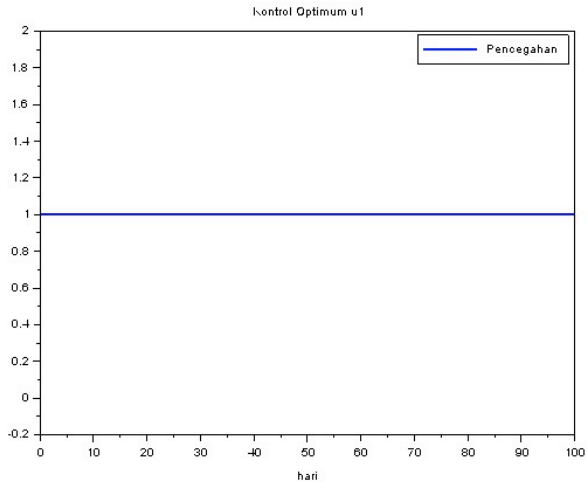
d. Nyamuk *Infected*

Pada Gambar 4.8 menunjukkan bahwa terlihat perbedaan jumlah nyamuk terinfeksi sebelum dan sesudah diberikan kendali dengan kondisi awal $I_v(0) = 1000$. Tanpa pemberian kendali nyamuk terinfeksi mencapai 3246 kasus. Dengan pemberian u_2 mengalami kenaikan sampai $t = 5$ dengan jumlah populasi nyamuk terinfeksi sebanyak 1117 ekor dan setelahnya mengalami penurunan sampai $t = 100$ dengan jumlah populasi nyamuk terinfeksi sebanyak 165 ekor. Penurunan jumlah nyamuk terinfeksi paling optimal terjadi saat diberi kendali u_3 terjadi penurunan sampai $t = 100$ dengan jumlah nyamuk terinfeksi sebanyak 3 ekor.



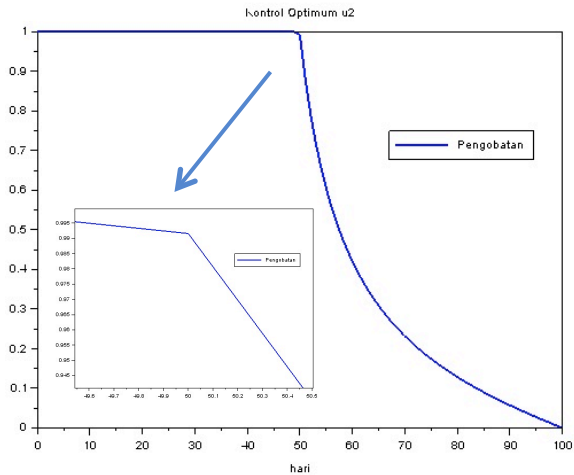
Gambar 4.8 Grafik perubahan perbandingan banyaknya nyamuk terinfeksi tanpa dan dengan kendali

Grafik tingkat pemberian kendali optimal berupa kendali u_1 (pencegahan individu), u_2 (pengobatan manusia) dan u_3 (penyemprotan insektisida) dapat dilihat pada Gambar 4.9, Gambar 4.10 dan Gambar 4.11



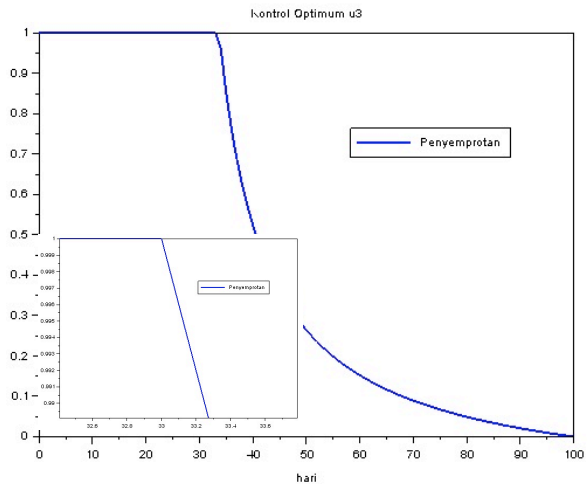
Gambar 4.9 Grafik tingkat pemberian kendali optimal berupa Pencegahan

Berdasarkan Gambar 4.9 ditunjukkan bahwa pemberian kendali u_1 (pencegahan individu) optimal berada pada nilai 1. Hal ini menunjukkan bahwa pencegahan individu dilakukan setiap harinya sampai waktu $t = 100$ hari, sehingga dapat mempengaruhi secara maksimal.



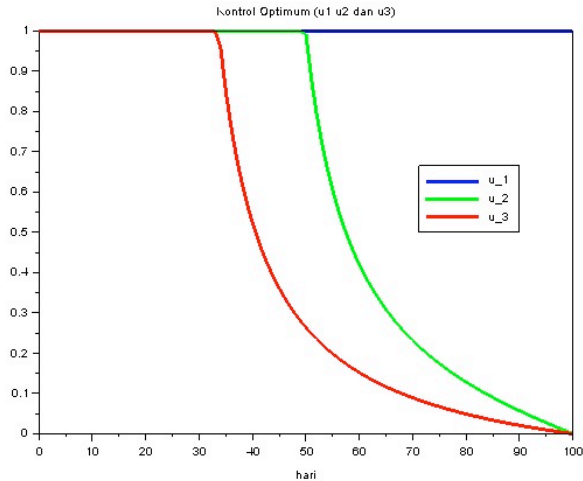
Gambar 4. 10 Grafik tingkat pemberian kendali optimal

Berdasarkan Gambar 4.10 ditunjukkan bahwa pemberian kendali u_2 (pengobatan individu) optimal berada pada nilai 1. Hal ini menunjukkan bahwa pengobatan individu dilakukan secara maksimal hanya dilakukan sampai waktu $t = 50$ hari, setelah itu pengobatan individu dapat dikurangi setiap harinya.



Gambar 4. 11 Grafik tingkat pemberian kendali optimal Penyemprotan

Berdasarkan Gambar 4.11 ditunjukkan bahwa pemberian kendali u_3 (penyemprotan insektisida) optimal berada pada nilai 1. Hal ini menunjukkan bahwa penyemprotan dilakukan secara maksimal hanya dilakukan sampai waktu $t = 33$ hari, setelah itu penyemprotan dapat dikurangi setiap harinya.



Gambar 4. 12 Grafik tingkat pemberian kendali optimal berupa Pencegahan, Pengobatan dan Penyemprotan

Berdasarkan Gambar 4.12 ditunjukkan perbandingan pemberian tiga kendali optimal yaitu u_1 (pencegahan individu), u_2 (pengobatan manusia) dan u_3 (penyemprotan insektisida) sampai waktu $t = 100$ hari. Hal ini menunjukkan bahwa pemberian pencegahan individu dilakukan setiap harinya, sedangkan pengobatan manusia dilakukan hanya diselang waktu $[0,50]$ hari, dan penyemprotan insektisida dilakukan hanya diselang waktu $[0,35]$ hari. Sehingga pemberian kendali dapat mempengaruhi secara maksimal.

Berdasarkan hasil simulasi, didapatkan angka jumlah populasi manusia terinfeksi penyakit malaria di hari ke-100 saat kondisi $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$ seperti pada Tabel 4.4 dan Tabel 4.5.

Tabel 4.4 Jumlah populasi manusia terinfeksi malaria di hari ke-100 saat kondisi $R_0 < 1$

$R_0 < 1$	Populasi Manusia Terinfeksi	Presentase Reduksi
Tanpa kendali	15,695	
Dengan kendali u_1	9411	40.03%
Dengan kendali u_2	78	99.5%
Dengan kendali u_3	9257	41.01%
Dengan kendali u_1, u_2 dan u_3	0	100%

Tabel 4.5 Jumlah populasi manusia terinfeksi malaria di hari ke-100 saat kondisi $R_0 > 1$

$R_0 > 1$	Populasi Manusia Terinfeksi	Presentase Reduksi
Tanpa kendali	103,092	
Dengan kendali u_1	9413	90.86%
Dengan kendali u_2	437	99.5%
Dengan kendali u_3	9309	90.97%
Dengan kendali u_1, u_2 dan u_3	0	100%

Maka dari itu, dapat disimpulkan bahwa dengan pemberian kendali u_2 saja sudah cukup untuk menurunkan jumlah individu yang terinfeksi dengan penurunan terbesar sebanyak 102,655 individu dengan presentase reduksi sebesar 99.5%. Sehingga, untuk kasus ini pengobatan terhadap individu yang terinfeksi adalah paling efektif untuk mengurangi kasus malaria.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB V PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari Tugas Akhir dan saran yang dapat dijadikan sebagai rekomendasi untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan dalam Tugas Akhir ini dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Kendali optimal yang diperoleh pada upaya meminimalkan individu yang terinfeksi dengan menerapkan teori kendali menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin, maka diperoleh pengendali optimal berupa u_1 kendali yang mempresentasikan pencegahan individu, u_2 kendali yang mempresentasikan pengobatan individu manusia yang terinfeksi, dan u_3 kendali yang mempresentasikan penyemprotan insektisida terhadap nyamuk dimana akan optimal jika nilai

$$u_1(t) = \frac{(\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h})p_1\beta I_v S_h + (\lambda_{I_v} - \lambda_{S_v})p_2\beta I_h S_v}{m_1 N_h}$$

$$u_2(t) = \frac{(\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h})bI_h}{m_2}$$

$$u_3(t) = \frac{\alpha(\lambda_{S_v}(S_v) + \lambda_{I_v}(I_v))}{m_3}$$

2. Berdasarkan hasil simulasi, dengan adanya pemberian kendali pengobatan saja sudah cukup untuk menurunkan jumlah individu yang terinfeksi parasit *Plasmodium* dengan penurunan terbesar sebanyak 102,655 individu dengan presentase reduksi sebesar 99.5% selama 100 hari. Sehingga dengan pemberian kendali optimal berupa pengobatan, selain dapat meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi malaria secara efektif, pengeluaran biaya yang dibutuhkan juga dapat diminimumkan.

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya adalah:

1. Mengembangkan model penyebaran penyakit malaria dengan menggunakan metode lain dalam penyelesaian kendali optimalnya.
2. Mengembangkan desain kendali dengan menggunakan model yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] WHO (2019) *Malaria* <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/malaria> [Accessed on January 27th, 2020]
- [2] Kementerian Kesehatan RI. (2018). *Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan Republik Indonesia* (Jakarta).
- [3] Okosun K O, Oufiki R, Marcus N. (2011). *Optimal Control Analysis of a Malaria Disease Transmission Model that Includes Treatment and Vaccination with Waning Immunity Biosystem*, **106** 136
- [4] Agosto B F, Del Valle S Y, Blayneh K W, Ngonghala, N C, Goncalves M J, Li N, Zhao R, Gong H. (2013). The impact of bed-net use on malaria prevalence *J. Theor. Biol.* **320** 58
- [5] Fatmawati, Tasman H. (2013). A malaria model with controls on mass treatment and insecticide *Applied Mathematical Sciences* 7 3379
- [6] Fatmawati, Purwati, U.D and Nainggolan, J. (2019). "Parameter Estimation and Sensitivity Analysis of Malaria Model", Journal of ICoMPAC 2019, Surabaya, Indonesia.
- [7] Giesecke, J. (1994). *Modern Infectious Disease Epidemiology*. Oxford University Press, New York.
- [8] Van Den Driessche P, Watmough J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission *Math. Biosci.* **180** 29
- [9] Naidu, S. D. (2002). *Optimal Control System*. New York
- [10] Triatmodjo, B. (2002). *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

- [11] Lenhart, S. & Workman, J. T. (2007). *Optimal Control Applied to Biological Models*. London, New York: Taylor & Francis Group, LLC.
- [12] Munir, R. (2003). *Metode Numerik*. Bandung: Informatika
- [13] Subiono, 2016. *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya. Subiono.
- [14] Bevina D H, Febyan V, Radhiya A, Tengku N, Dipo A. (2019). *Optimal Control in a Malaria Model: Intervention of Fumigation and Bed Nets*. Department of Mathematics, Universitas Indonesia, Depok, Indonesia

LAMPIRAN

Lampiran II. Source Code Scilab Model tanpa Kendali

```
function [sh, ih, sv, iv]=takkontrol(Ah, Av, t0,
tf, n)
mh=1/(65.36*365); //miu h
d=0.00044653; //delta
gh=0.0074;
mv=0.0250;
bmax=0.637;
//bmax=0.2;
p1=0.73;
p2=0.1327;
sh0=2223198;
ih0=20711;
sv0=100000;
iv0=1000;
h = (tf-t0)/n;
sh = zeros(1,n+1);
ih = zeros(1,n+1);
sv = zeros(1,n+1);
iv = zeros(1,n+1);
sh(1) = sh0;
ih(1) = ih0;
sv(1) = sv0;
iv(1) = iv0;

for i = 1:n
    n11=Ah-
    (p1*bmax*iv(i)/(sh(i)+ih(i)))*sh(i)+gh*ih(i)-
    mh*sh(i);
    n12=Ah-
    (p1*bmax*(iv(i)+n11*h/2)/((sh(i)+n11*h/2)+(ih(i)
    +n11*h/2)))*(sh(i)+n11*h/2)+gh*(ih(i)+n11*h/2)-
    mh*(sh(i)+n11*h/2);
    n13=Ah-
    (p1*bmax*(iv(i)+n12*h/2)/((sh(i)+n12*h/2)+(ih(i)
```

```

+n12*h/2)) * (sh(i)+n12*h/2) + gh*(ih(i)+n12*h/2) -
mh*(sh(i)+n12*h/2);
  n14=Av-
(p1*bmax*(iv(i)+n13*h)/((sh(i)+n13*h)+(ih(i)+n13
*h)))* (sh(i)+n13*h) + gh*(ih(i)+n13*h) -
mh*(sh(i)+n13*h);
  n1 = (n11+2*n12+2*n13+n14)/6;

  n21=(p1*bmax*iv(i)/(sh(i)+ih(i)))*sh(i) -
(mh+gh+d)*ih(i);

n22=(p1*bmax*(iv(i)+n21*h/2)/((sh(i)+n21*h/2)+(i
h(i)+n21*h/2)))* (sh(i)+n21*h/2) -
(mh+gh+d)*(ih(i)+n21*h/2);

n23=(p1*bmax*(iv(i)+n22*h/2)/((sh(i)+n22*h/2)+(i
h(i)+n22*h/2)))* (sh(i)+n22*h/2) -
(mh+gh+d)*(ih(i)+n22*h/2);

n24=(p1*bmax*(iv(i)+n23*h)/((sh(i)+n23*h)+(ih(i)
+n23*h)))* (sh(i)+n23*h) - (mh+gh+d)*(ih(i)+n23*h);
  n2 = (n21+2*n22+2*n23+n24)/6;

  n31=Av-(p2*bmax*ih(i)/(sh(i)+ih(i)))*sv(i) -
mv*sv(i);
  n32=Av-
(p2*bmax*(ih(i)+n31*h/2)/((sh(i)+n31*h/2)+(ih(i)
+n31*h/2)))* (sv(i)+n31*h/2) - mv*(sv(i)+n31*h/2);
  n33=Av-
(p2*bmax*(ih(i)+n32*h/2)/((sh(i)+n32*h/2)+(ih(i)
+n32*h/2)))* (sv(i)+n32*h/2) - mv*(sv(i)+n32*h/2);
  n34=Av-
(p2*bmax*(ih(i)+n33*h)/((sh(i)+n33*h)+(ih(i)+n33
*h)))* (sv(i)+n33*h) - mv*(sv(i)+n33*h);
  n3 = (n31+2*n32+2*n33+n34)/6;

  n41=(p2*bmax*ih(i)/(sh(i)+ih(i)))*sv(i) -
mv*iv(i);

n42=(p2*bmax*(ih(i)+n41*h/2)/((sh(i)+n41*h/2)+(i

```

```

h(i+n41*h/2)))*(sv(i+n41*h/2)-
mv*(iv(i)+n41*h/2);

n43=(p2*bmax*(ih(i)+n42*h/2)/((sh(i)+n42*h/2)+(i
h(i)+n42*h/2)))*(sv(i)+n42*h/2)-
mv*(iv(i)+n42*h/2);

n44=(p2*bmax*(ih(i)+n43*h)/((sh(i)+n43*h/2)+(ih(
i)+n43*h/2)))*(sv(i)+n43*h)-mv*(iv(i)+n43*h);
n4 = (n41+2*n42+2*n43+n44)/6;

sh(i+1) = sh(i) + h*n1;
ih(i+1) = ih(i) + h*n2;
sv(i+1) = sv(i) + h*n3;
iv(i+1) = iv(i) + h*n4;
end
endfunction

```

Source Code Scilab Model dengan Kendali

```

function [sh, ih, sv, iv, l1, l2, l3, l4, u1,
u2, u3, J]=kontrol(Ah, Av, ulmax, u2max, u3max,
m1, m2, m3, t0, tf, n)
mh=1/(65.36*365); //miu h
d=0.00044653; //delta
gh=0.0074; //gamma h
mv=0.0250; //miu v
bmax=0.637; //beta
//bmax=0.2;
b=0.2;
a=0.2; //alfa
p1=0.73;
p2=0.1327;
A1=150;
A2=150;
tol = 0.000001;
error1 = tol + 1;
error2 = tol + 1;
error3 = tol + 1;

```

```

sh0=2223198;
ih0=20711;
sv0=100000;
iv0=1000;
h = (tf-t0)/n;
sh = zeros(1,n+1);
ih = zeros(1,n+1);
sv = zeros(1,n+1);
iv = zeros(1,n+1);
l1 = zeros(1,n+1);
l2 = zeros(1,n+1);
l3 = zeros(1,n+1);
l4 = zeros(1,n+1);
sh(1) = sh0;
ih(1) = ih0;
sv(1) = sv0;
iv(1) = iv0;

u1 = zeros(1,n+1)+0.5;
u2 = zeros(1,n+1)+0.5;
u3 = zeros(1,n+1)+0.5;

while(error1 > tol & error2 > tol & error3 >
tol)
    oldu1 = u1;
    oldu2 = u2;
    oldu3 = u3;

for i = 1:n

    n11=Ah-(1-
u1(i))*(p1*bmax*iv(i)/(sh(i)+ih(i)))*sh(i)+(gh+b
*u2(i))*ih(i)-mh*sh(i);
    n12=Ah-(1-
u1(i))*(p1*bmax*(iv(i)+n11*h/2)/((sh(i)+n11*h/2)
+(ih(i)+n11*h/2)))*(sh(i)+n11*h/2)+(gh+b*u2(i))*
(ih(i)+n11*h/2)-mh*(sh(i)+n11*h/2);
    n13=Ah-(1-
u1(i))*(p1*bmax*(iv(i)+n12*h/2)/((sh(i)+n12*h/2)

```

```

+ (ih(i)+n12*h/2)) * (sh(i)+n12*h/2) + (gh+b*u2(i)) *
(ih(i)+n12*h/2) - mh * (sh(i)+n12*h/2);
n14=Ah- (1-
ul(i)) * (p1*bmax*(iv(i)+n13*h) / ((sh(i)+n13*h) + (ih
(i)+n13*h))) * (sh(i)+n13*h) + (gh+b*u2(i)) * (ih(i)+n
13*h) - mh * (sh(i)+n13*h);
n1 = (n11+2*n12+2*n13+n14) / 6;

n21=(1-
ul(i)) * (p1*bmax*iv(i) / (sh(i)+ih(i))) * sh(i) -
(mh+gh+d+(b*u2(i))) * ih(i);
n22=(1-
ul(i)) * (p1*bmax*(iv(i)+n21*h/2) / ((sh(i)+n21*h/2)
+(ih(i)+n21*h/2))) * (sh(i)+n21*h/2) -
(mh+gh+d+(b*u2(i))) * (ih(i)+n21*h/2);
n23=(1-
ul(i)) * (p1*bmax*(iv(i)+n22*h/2) / ((sh(i)+n22*h/2)
+(ih(i)+n22*h/2))) * (sh(i)+n22*h/2) -
(mh+gh+d+(b*u2(i))) * (ih(i)+n22*h/2);
n24=(1-
ul(i)) * (p1*bmax*(iv(i)+n23*h) / ((sh(i)+n23*h) + (ih
(i)+n23*h))) * (sh(i)+n23*h) -
(mh+gh+d+(b*u2(i))) * (ih(i)+n23*h);
n2 = (n21+2*n22+2*n23+n24) / 6;

n31=Av- (1-
ul(i)) * (p2*bmax*ih(i) / (sh(i)+ih(i))) * sv(i) -
(mv+(a*u3(i))) * sv(i);
n32=Av- (1-
ul(i)) * (p2*bmax*(ih(i)+n31*h/2) / ((sh(i)+n31*h/2)
+(ih(i)+n31*h/2))) * (sv(i)+n31*h/2) -
(mv+(a*u3(i))) * (sv(i)+n31*h/2);
n33=Av- (1-
ul(i)) * (p2*bmax*(ih(i)+n32*h/2) / ((sh(i)+n32*h/2)
+(ih(i)+n32*h/2))) * (sv(i)+n32*h/2) -
(mv+(a*u3(i))) * (sv(i)+n32*h/2);
n34=Av- (1-
ul(i)) * (p2*bmax*(ih(i)+n33*h) / ((sh(i)+n33*h) + (ih
(i)+n33*h))) * (sv(i)+n33*h) -
(mv+(a*u3(i))) * (sv(i)+n33*h);

```

```

n3 = (n31+2*n32+2*n33+n34)/6;

n41=(1-
u1(i) * (p2*bmax*ih(i) / (sh(i)+ih(i))) * sv(i) -
(mv+(a*u3(i))) * iv(i);
n42=(1-
u1(i) * (p2*bmax* (ih(i)+n41*h/2) / ((sh(i)+n41*h/2)
+ (ih(i)+n41*h/2))) * (sv(i)+n41*h/2) -
(mv+(a*u3(i))) * (iv(i)+n41*h/2);
n43=(1-
u1(i) * (p2*bmax* (ih(i)+n42*h/2) / ((sh(i)+n42*h/2)
+ (ih(i)+n42*h/2))) * (sv(i)+n42*h/2) -
(mv+(a*u3(i))) * (iv(i)+n42*h/2);
n44=(1-
u1(i) * (p2*bmax* (ih(i)+n43*h) / ((sh(i)+n43*h) + (ih
(i)+n43*h))) * (sv(i)+n43*h) -
(mv+(a*u3(i))) * (iv(i)+n43*h);
n4 = (n41+2*n42+2*n43+n44)/6;

sh(i+1) = sh(i) + h*n1;
ih(i+1) = ih(i) + h*n2;
sv(i+1) = sv(i) + h*n3;
iv(i+1) = iv(i) + h*n4;
end

for i = 1:n
j = (n+1)-i;

n11=(l4(j+1) -
l3(j+1) * (p2*bmax*ih(j+1) * sv(j+1) * (1-
u1(j+1))) / ((ih(j+1)+sh(j+1))^2) + (l1(j+1) -
l2(j+1) * ((p1*bmax*iv(j+1) * sh(j+1) * (1-
u1(j+1))) / (ih(j+1)+sh(j+1)))) * (1-
(sh(j+1) / (ih(j+1)+sh(j+1)))) + l1(j+1) * mh;
n12=((l4(j+1)+n11*h/2) -
(l3(j+1)+n11*h/2)) * (p2*bmax*ih(j+1) * (sv(j+1) * (1-
u1(j+1))) / (ih(j+1)+sh(j+1))^2) + ((l1(j+1)+n11*h/2)
) -
(l2(j+1)+n11*h/2) * ((p1*bmax*iv(j+1) * sh(j+1) * (1-
u1(j+1))) / (ih(j+1)+sh(j+1))) * (1-

```

```

(sh(j+1)/(ih(j+1)+sh(j+1)))+(l1(j+1)+n11*h/2)*m
h;
n13=((l4(j+1)+n12*h/2)-
(l3(j+1)+n12*h/2))*(p2*bmax*ih(j+1)*(sv(j+1)*(1-
ul(j+1)))/(ih(j+1)+sh(j+1))^2)+((l1(j+1)+n12*h/2)
)-
(l2(j+1)+n12*h/2))*((p1*bmax*iv(j+1)*sh(j+1)*(1-
ul(j+1)))/(ih(j+1)+sh(j+1)))* (1-
(sh(j+1)/(ih(j+1)+sh(j+1)))+(l1(j+1)+n12*h/2)*m
h;
n14=((l4(j+1)+n13*h)-
(l3(j+1)+n13*h))*(p2*bmax*ih(j+1)*(sv(j+1)*(1-
ul(j+1)))/(ih(j+1)+sh(j+1))^2)+((l1(j+1)+n13*h)-
(l2(j+1)+n13*h))*((p1*bmax*iv(j+1)*sh(j+1)*(1-
ul(j+1)))/(ih(j+1)+sh(j+1)))* (1-
(sh(j+1)/(ih(j+1)+sh(j+1)))+(l1(j+1)+n13*h)*mh;
n1 = (n11+2*n12+2*n13+n14)/6;

n21=-A1-(l3(j+1)-l4(j+1))*((p2*bmax*sv(j+1)*(1-
ul(j+1)))/(ih(j+1)+sh(j+1)))*((ih(j+1)/(ih(j+1)+
sh(j+1)))-1)+(l2(j+1)-
l1(j+1))*(p1*bmax*iv(j+1)*sh(j+1)*(1-
ul(j+1)))/((ih(j+1)+sh(j+1))^2)-
(gh+(b*u2(j+1)))*l1(j+1)+(gh+d+mh+(b*u2(j+1)))*l
2(j+1);
n22=-A1-((l3(j+1)+n21*h/2)-
(l4(j+1)+n21*h/2))*((p2*bmax*sv(j+1)*(1-
ul(j+1)))/(ih(j+1)+sh(j+1)))*((ih(j+1)/(ih(j+1)+
sh(j+1)))-1)+((l2(j+1)+n21*h/2)-
(l1(j+1)+n21*h/2))*(p1*bmax*iv(j+1)*sh(j+1)*(1-
ul(j+1)))/((ih(j+1)+sh(j+1))^2)-
(gh+(b*u2(j+1)))* (l1(j+1)+n21*h/2)+(gh+d+mh+(b*u
2(j+1)))* (l2(j+1)+n21*h/2);
n23=-A1-((l3(j+1)+n22*h/2)-
(l4(j+1)+n22*h/2))*((p2*bmax*sv(j+1)*(1-
ul(j+1)))/(ih(j+1)+sh(j+1)))*((ih(j+1)/(ih(j+1)+
sh(j+1)))-1)+((l2(j+1)+n22*h/2)-
(l1(j+1)+n22*h/2))*(p1*bmax*iv(j+1)*sh(j+1)*(1-
ul(j+1)))/((ih(j+1)+sh(j+1))^2)-

```


$$\begin{aligned}
& (gh + (b * u_2(j+1))) * (l_1(j+1) + n_{21} * h/2) + (gh + d + mh + (b * u_2(j+1))) * (l_2(j+1) + n_{21} * h/2); \\
& n_{24} = -A_1 - ((l_3(j+1) + n_{23} * h) - \\
& (l_4(j+1) + n_{23} * h)) * ((p_2 * b_{max} * s_v(j+1)) * (1 - \\
& u_1(j+1))) / ((i_h(j+1) + s_h(j+1))) * ((i_h(j+1) / (i_h(j+1) + \\
& s_h(j+1))) - 1) + ((l_2(j+1) + n_{23}) - \\
& (l_1(j+1) + n_{23} * h)) * (p_1 * b_{max} * i_v(j+1) * s_h(j+1)) * (1 - \\
& u_1(j+1))) / ((i_h(j+1) + s_h(j+1))^2) - \\
& (gh + (b * u_2(j+1))) * (l_1(j+1) + n_{23} * h) + (gh + d + mh + (b * u_2(j+1))) * (l_2(j+1) + n_{21} * h/2); \\
& n_2 = (n_{21} + 2 * n_{22} + 2 * n_{23} + n_{24}) / 6;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n_{31} = (l_3(j+1) - l_4(j+1)) * (p_2 * b_{max} * i_h(j+1)) * (1 - \\
& u_1(j+1)) / (i_h(j+1) + s_h(j+1)) + ((a * u_3(j+1)) + m_v) * l_3(j+1); \\
& n_{32} = ((l_3(j+1) + n_{31} * h/2) - \\
& (l_4(j+1) + n_{31} * h/2)) * (p_2 * b_{max} * i_h(j+1)) * (1 - \\
& u_1(j+1)) / (i_h(j+1) + s_h(j+1)) + ((a * u_3(j+1)) + m_v) * (l_3(j+1) + n_{31} * h/2); \\
& n_{33} = ((l_3(j+1) + n_{32} * h/2) - \\
& (l_4(j+1) + n_{32} * h/2)) * (p_2 * b_{max} * i_h(j+1)) * (1 - \\
& u_1(j+1)) / (i_h(j+1) + s_h(j+1)) + ((a * u_3(j+1)) + m_v) * (l_3(j+1) + n_{32} * h/2); \\
& n_{34} = ((l_3(j+1) + n_{33} * h) - \\
& (l_4(j+1) + n_{33} * h)) * (p_2 * b_{max} * i_h(j+1)) * (1 - \\
& u_1(j+1)) / (i_h(j+1) + s_h(j+1)) + ((a * u_3(j+1)) + m_v) * (l_3(j+1) + n_{33} * h); \\
& n_3 = (n_{31} + 2 * n_{32} + 2 * n_{33} + n_{34}) / 6;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n_{41} = -A_2 + (l_1(j+1) - l_2(j+1)) * (p_1 * b_{max} * s_h(j+1)) * (1 - \\
& u_1(j+1)) / (i_h(j+1) + s_h(j+1)) + l_4(j+1) * ((a * u_3(j+1)) + \\
& m_v); \\
& n_{42} = -A_2 + ((l_1(j+1) + n_{41} * h/2) - \\
& (l_2(j+1) + n_{41} * h/2)) * (p_1 * b_{max} * s_h(j+1)) * (1 - \\
& u_1(j+1)) / (i_h(j+1) + s_h(j+1)) + (l_4(j+1) + n_{41} * h/2) * ((a * u_3(j+1)) + m_v); \\
& n_{43} = -A_2 + ((l_1(j+1) + n_{42} * h/2) - \\
& (l_2(j+1) + n_{42} * h/2)) * (p_1 * b_{max} * s_h(j+1)) * (1 - \\
& u_1(j+1)) / (i_h(j+1) + s_h(j+1)) + (l_4(j+1) + n_{42} * h/2) * ((a * u_3(j+1)) + m_v);
\end{aligned}$$

```

n44=-A2+((l1(j+1)+n43*h)-
(l2(j+1)+n43*h))*(p1*bmax*sh(j+1))*(1-
u1(j+1))/(ih(j+1)+sh(j+1))+(l4(j+1)+n43*h)*((a*u
3(j+1))+mv);
n4 = (n41+2*n42+2*n43+n44)/6;

l1(j) = l1(j+1) - h*n1;
l2(j) = l2(j+1) - h*n2;
l3(j) = l3(j+1) - h*n3;
l4(j) = l4(j+1) - h*n4;
end

temp1 = ((l2-l1)*p1*bmax.*iv.*sh+((l4-
l3)*p2*bmax.*ih.*sv))/(m1.*(sh+ih));
uu1 = min(max(0,temp1),u1max);
temp2 = (1/m2).*b.*ih.*(l2-l1);
uu2 = min(max(0,temp2),u2max);
temp3 = (a/m3).*((l3.*sv)+(l4.*iv));
uu3 = min(max(0,temp3),u3max);

u1 = 0.5*(uu1+oldu1);
u2 = 0.5*(uu2+oldu2);
u3 = 0.5*(uu3+oldu3);

error1 = sum(abs(oldu1-u1));
error2 = sum(abs(oldu2-u2));
error3 = sum(abs(oldu3-u3));
[error1, error2, error3];
end

f = A1*ih + A2*iv + (m1*u1.^2)/2 + (m2*u2.^2)/2
+ (m3*u3.^2)/2;
J = sum(f*h);
endfunction

```

Source Code Scilab Grafik Solusi Numerik

```

//Solusi Numerik
Ah=94.9269;

```

```

Av=474.8190;
ulmax=1;
u2max=1;
u3max=1;
m1=150;
m2=180;
m3=120;
u3max0=0;
u2max0=0;
ulmax0=0;
t0 = 0;
tf = 100;
n = 100;

[sh,ih,sv,iv] =
takkontrol(Ah,Av,t0,tf,n); //tanpa kontrol
[shc,ihc,svc,ivc,l1,l2,l3,l4,u1,u2,u3,J] =
kontrol(Ah,Av,ulmax,u2max,u3max,m1,m2,m3,t0,tf,n)
; //kontrol dengan u1 u2 u3
[shc1,ihc1,svc1,ivc1] =
kontrol(Ah,Av,ulmax,u2max0,u3max0,m1,m2,m3,t0,tf
,n) //hanya u1
[shc2,ihc2,svc2,ivc2] =
kontrol(Ah,Av,ulmax0,u2max,u3max0,m1,m2,m3,t0,tf
,n) //hanya u2
[shc3,ihc3,svc3,ivc3] =
kontrol(Ah,Av,ulmax0,u2max0,u3max,m1,m2,m3,t0,tf
,n) //hanya u3
[t] = linspace(0,tf,n+1);

//Populasi Individu yang Rentan (sh);
plot(t,sh,t,shc1,t,shc2,t,shc3,t,shc,'-
','LineWidth',2);
xlabel('Populasi Individu yang Rentan
(sh)','hari','individu');
legend('tanpa kontrol','kontrol u1
saja','kontrol u2 saja','kontrol u3
saja','kontrol u1 u2 u3',5);
figure();

```

```

//Populasi Individu yang Terinfeksi (ih);
plot(t,ih,t,ihc1,t,ihc2,t,ihc3,t,ihc,'-
','LineWidth',2);
xtitle('Populasi Individu yang Terinfeksi
(ih)', 'hari', 'individu');
legend('tanpa kontrol', 'kontrol u1
saja', 'kontrol u2 saja', 'kontrol u3
saja', 'kontrol u1 u2 u3', 5);
figure();

//Populasi Nyamuk yang Rentan (sv);
plot(t,sv,t,svcl,t,svc2,t,svc3,t,svc,'-
','LineWidth',2);
xtitle('Populasi Nyamuk yang Rentan
(sv)', 'hari', 'nyamuk');
legend('tanpa kontrol', 'kontrol u1
saja', 'kontrol u2 saja', 'kontrol u3
saja', 'kontrol u1 u2 u3', 5);
figure();

//Populasi Nyamuk yang Terinfeksi (iv);
plot(t,iv,t,ivc1,t,ivc2,t,ivc3,t,ivc,'-
','LineWidth',2);
xtitle('Populasi Nyamuk yang Terinfeksi
(iv)', 'hari', 'nyamuk');
legend('tanpa kontrol', 'kontrol u1
saja', 'kontrol u2 saja', 'kontrol u3
saja', 'kontrol u1 u2 u3', 5);
figure();

//kontrol laju Penyemprotan saja
plot(t,u1,'-', 'LineWidth', 2);
xtitle('Kontrol Optimum u1', 'hari');
legend('Penyemprotan');
figure();

//kontrol laju Pengobatan saja
plot(t,u2,'-', 'LineWidth', 2);
xtitle('Kontrol Optimum u2', 'hari');
legend('Pengobatan', 5);

```

```

figure();

//kontrol laju Pencegahan saja
plot(t,u3,'-','LineWidth',2);
xlabel('Kontrol Optimum u3','hari');
legend('Pencegahan',5);
figure();

//kontrol laju Penyemprotan Pengobatan dan
Pencegahan
plot(t,u1,t,u2,t,u3,'-','LineWidth',3);
xlabel('Kontrol Optimum (u1 u2 dan u3)','hari');
legend('u_1','u_2','u_3',5);
figure();

//kontrol laju Penyemprotan dan Pengobatan
plot(t,u1,t,u2,'-','LineWidth',2);
xlabel('Kontrol Optimum (u1 dan u2)','hari');
legend('u_1','u_2',5);
figure();

//kontrol laju Penyemprotan dan Pencegahan
plot(t,u1,t,u3,'-','LineWidth',2);
xlabel('Kontrol Optimum (u1 dan u3)','hari');
legend('u_1','u_3',5);
figure();

//kontrol laju Pengobatan dan Pencegahan
plot(t,u2,t,u3,'-','LineWidth',2);
xlabel('Kontrol Optimum (u2 dan u3)','hari');
legend('u_2','u_3',5);
figure();

//adjoin;
subplot(221);
plot(t,l1,'-','LineWidth',2);
xlabel('Fungsi Adjoin (l1)','hari');
subplot(222);
plot(t,l2,'-','LineWidth',2);
xlabel('Fungsi Adjoin (l2)','hari');

```

```
subplot(223);  
plot(t,l3,'-','LineWidth',2);  
xtitle('Fungsi Adjoin (13)','hari');  
subplot(224);  
plot(t,l4,'-','LineWidth',2);  
xtitle('Fungsi Adjoin (14)','hari');
```

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BIODATA PENULIS



Nadhira Azane Putri atau biasa di panggil Zane, lahir di Jakarta, 27 Juni 1998. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Ar-Rahman Motik, SD Ar-Rahman Motik, SMP Negeri 115 Jakarta dan SMA Negeri 26 Jakarta. Pada saat ini penulis menempuh Pendidikan S1 di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya Departemen Matematika.

Selama kuliah, penulis aktif mengikuti kegiatan dan organisasi, diantaranya berpartisipasi di ITS MUN CLUB sebagai Deputy Collaboration Event (2017), Himpunan Mahasiswa Matematika ITS (HIMATIKA ITS) sebagai Staff Media dan Informasi (2017) dan Sekretaris Media dan Informasi (2018) dan bergabung di UKM Softball ITS sebagai Staff Internal Affair (2018). Penulis juga mengikuti acara-acara kepanitiaan, diantaranya ikut serta dalam Basic Media School (BMS) yang diadakan oleh MEDFO HIMATIKA ITS dan Olimpiade Matematika ITS (OMITS) sebagai Penanggung Jawab Regional Jakarta dan Divisi Sponsorship (2018). Selain itu, penulis juga aktif di kampus dengan menjadi peserta Global Project Based Learning (GPBL) mewakili Departemen Matematika ITS yang berkolaborasi dengan Shibaura Institute of Technology Jepang (SIT) yang diselenggarakan di ITS Surabaya (2019).

Demikian biodata penulis, jika ada kritik, saran dan informasi lebih lanjut berkaitan dengan Tugas Akhir ini dapat menghubungi melalui email: nadhiraazane@gmail.com