



TUGAS AKHIR - KM184801

DIMENSI METRIK DAN DIMENSI METRIK SISI GRAF KORONA LINGKUNGAN BANDUL

**RIDA EKA NABILA
06111640000065**

Dosen Pembimbing
Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



TUGAS AKHIR - KM184801

**DIMENSI METRIK DAN DIMENSI METRIK SISI
GRAF KORONA LINGKUNGAN BANDUL**

**RIDA EKA NABILA
06111640000065**

Dosen Pembimbing
Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

“Halaman ini sengaja dikosongkan”



FINAL PROJECT - KM184801

**THE METRIC DIMENSION AND EDGE METRIC
DIMENSION OF BOBBLE NEIGHBOURHOOD
CORONA GRAPH**

**RIDA EKA NABILA
0611164000065**

Supervisor
Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

Department of Mathematics
Faculty of Data Science and Analytics
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2020

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

**LEMBAR PENGESAHAN
TUGAS AKHIR**

**DIMENSI METRIK DAN DIMENSI METRIK SISI GRAF
KORONA LINGKUNGAN BANDUL**

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh
gelar Sarjana Matematika pada bidang studi Analisis Aljabar
Program Studi S-1

Departemen Matematika Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
Rida Eka Nabila
NRP. 0611164000065

Menyetujui,
Dosen Pembimbing I,



Dr. Dra Rinurwati, MSi
NIP. 19640304 198903 2 002

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika FSAD



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DIMENSI METRIK DAN DIMENSI METRIK SISI GRAF KORONA LINGKUNGAN BANDUL

Nama : Rida Eka Nabila
NRP : 06111640000065
Departemen : Matematika
Dosen Pembimbing : Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

ABSTRAK

Misalkan G adalah graf terhubung dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah himpunan bagian dari $V(G)$, simpul u, v , dan w adalah simpul di $V(G)$, dan sisi $e = uw$ adalah sisi di $E(G)$. Jarak antara simpul u dan v dinotasikan dengan $d(u, v)$. Jarak antara simpul v dan sisi $e = uw$, $d_E(e, v)$, adalah $\min\{d(u, v), d(w, v)\}$.

Representasi $r(v|W)$, dari v terhadap W adalah k -tuple $(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Himpunan W disebut himpunan pembeda dari G jika untuk setiap dua simpul berbeda u dan v di $V(G)$, $r(u|W) \neq r(v|W)$. Himpunan pembeda W dengan banyak elemen minimum disebut basis untuk G . Kardinalitas dari basis untuk G , $|W|$, disebut dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $\dim(G)$.

Representasi dari sisi e terhadap W , $r(e|W)$, adalah k -tuple $(d_E(e, w_1), d_E(e, w_2), \dots, d_E(e, w_k))$. Himpunan W disebut himpunan pembeda sisi untuk G jika untuk setiap dua sisi berbeda $e, f \in E(G)$, $r(e|W) \neq r(f|W)$. Himpunan pembeda sisi dengan banyak elemen minimum disebut basis sisi untuk G , dan kardinalitas dari basis sisi tersebut dinamakan dimensi metrik sisi $\text{edim}(G)$ dari graf G .

Graf korona lingkungan dari graf G dan H , dinotasikan dengan $G * H$, merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil graf G dan $|V(G)|$ salinan H , yaitu graf $H_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$, kemudian setiap simpul di H_i dihubungkan dengan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul v_i di G . Graf $G * H$, dengan H adalah graf trivial, disebut graf korona lingkungan bandul.

Dalam Tugas Akhir ini, ditentukan dan dianalisis dimensi metrik dan dimensi metrik sisi dari graf korona lingkungan bandul, dan sebagai G digunakan graf lengkap dan graf siklus.

Kata kunci: Dimensi metrik, Dimensi metrik sisi, Graf korona lingkungan bandul

THE METRIC DIMENSION AND EDGE METRIC DIMENSION OF BOBBLE NEIGHBOURHOOD CORONA GRAPH

Name : Rida Eka Nabila
NRP : 0611164000065
Department : Mathematics
Supervisor : Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

ABSTRACT

Let G be a connected graph with a set of vertices $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ and a set of edges $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Ordered set $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ is a subset of $V(G)$, u, v , and w are vertices of $V(G)$ and edge $e = uw$ is an edge of $E(G)$. The distance between vertices u and v is denoted by $d(u, v)$. The distance between vertex v and edge $e = uw$, $d_E(e, v)$, is $\min\{d(u, v), d(w, v)\}$. The representation $r(v|W)$, of v with respect to W is k -tuple $(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. The set W is called the resolving set of G if for every two different vertices u and v in $V(G)$, $r(u|W) \neq r(v|W)$. The resolving set W with the minimum number of elements is called the basis for G . The cardinality of the base for G , $|W|$, is called the metric dimension of G and is denoted by $\dim(G)$. The edge representation $r_E(e|S)$, of edge e with respect to W is k -tuple $(d_E(e, w_1), d_E(e, w_2), \dots, d_E(e, w_k))$. The set W is called the edge resolving set of G if for every two different edges $e, f \in E(G)$, $r_E(e|W) \neq r_E(f|W)$. The edge resolving set W with the minimum number of elements is called the edge base for G . The cardinality of the edge base for G , $|W|$, is called the edge metric dimension of G and is denoted by $\text{edim}(G)$. Neighbourhood corona

graph of G and H , denoted by $G * H$, is a graph obtained by taking G and $|V(G)|$ copy of H , which is graph $H_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$, then joining each vertex of H_i with adjacent vertices to vertex i on G . $G * H$ graph, with H is a trivial graph, is called a bobble neighbourhood corona graph. In this final project, we determine and analyze the metric dimension and edge metric dimension of a bobble neighbourhood-corona graph, and as G , a complete graph and a cycle graph are used.

Keywords: Metric dimension, edge metric dimension, bobble neighbourhood-corona graph

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini yang berjudul **“DIMENSI METRIK DAN DIMENSI METRIK SISI GRAF KORONA LINGKUNGAN BANDUL”** sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika Departemen Matematika Fakultas Sains dan Analitika Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah mendukung dan membantu selesainya Tugas Akhir ini.

1. Bapak Subchan, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika FSAD ITS.
2. Ibu Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, MT selaku Sekretaris Departemen Matematika FSAD ITS.
3. Ibu Dr. Dra. Rinurwati, M.Si. selaku dosen pembimbing atas bimbingan dan dukungannya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
4. Orang tua penulis dan adik penulis yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan kepada penulis selama kuliah di Departemen Matematika ITS.
5. Renita Dianawati dan Saskia Rizkiana Putri sebagai sahabat penulis yang selalu menemani dan mendukung penulis selama kuliah di Departemen Matematika ITS.
6. Semua pihak yang belum disebutkan yang telah membantu selama pengerjaan Tugas Akhir sampai pada akhir penyusunan Tugas Akhir ini.

Kritik dan saran membangun dari pembaca, sangat diharapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat.

Surabaya, 26 Juni 2020

Penulis

DAFTAR ISI

| | |
|--|------|
| HALAMAN JUDUL | i |
| HALAMAN JUDUL | iii |
| LEMBAR PENGESAHAN | v |
| ABSTRAK | vii |
| ABSTRACT | ix |
| KATA PENGANTAR..... | xi |
| DAFTAR ISI..... | xiii |
| DAFTAR GAMBAR | xv |
| DAFTAR SIMBOL..... | xvii |
| DAFTAR TABEL..... | xix |
| BAB I PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang Masalah | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 2 |
| 1.3 Batasan Masalah..... | 3 |
| 1.4 Tujuan..... | 3 |
| 1.5 Manfaat..... | 3 |
| BAB II TINJAUAN PUSTAKA..... | 5 |
| 2.1 Terminologi Graf..... | 5 |
| 2.2 Jenis-Jenis Graf | 8 |
| 2.3 Macam-Macam Graf Hasil Operasi Korona..... | 9 |
| 2.4 Dimensi Metrik..... | 11 |
| 2.5 Dimensi Metrik Sisi..... | 12 |

| | |
|---|-----------|
| 2.6 Penelitian-Penelitian Terkait | 14 |
| BAB III METODE PENELITIAN | 17 |
| 3.1 Tahapan Penelitian | 17 |
| 3.2 Diagram Alir Tahap I | 19 |
| 3.3 Diagram Alir Tahap II | 20 |
| BAB IV DIMENSI METRIK DAN DIMENSI METRIK SISI GRAF KORONA LINGKUNGAN BANDUL..... | 21 |
| 4.1 Dimensi Metrik Graf Korona Lingkungan Bandul..... | 21 |
| 4.1.1 Dimensi metrik graf $K_n * K_1$ | 21 |
| 4.1.2 Dimensi metrik graf $C_n * K_1$ | 26 |
| 4.2 Dimensi Metrik Sisi Graf Korona Lingkungan Bandul.. | 35 |
| 4.2.1 Dimensi metrik sisi graf $K_n * K_1$ | 35 |
| 4.2.2 Dimensi metrik sisi graf $C_n * K_1$ | 41 |
| BAB V PENUTUP | 59 |
| 5.1 KESIMPULAN | 59 |
| 5.2 SARAN | 59 |
| DAFTAR PUSTAKA..... | 61 |
| BIODATA PENULIS..... | 63 |

DAFTAR GAMBAR

| | |
|---|----|
| Gambar 2.1 Graf K_4 | 6 |
| Gambar 2.2 Graf Isomorfik | 7 |
| Gambar 2.3 Graf Bipartit..... | 7 |
| Gambar 2.4 Graf P_5 | 8 |
| Gambar 2.5 Graf C_5 | 8 |
| Gambar 2.6 Graf K_5 | 9 |
| Gambar 2.7 Graf S_6 | 9 |
| Gambar 2.8 Graf $P_3 \odot K_1$ | 10 |
| Gambar 2.9 Graf $P_3 \diamond K_1$ | 10 |
| Gambar 2.10 Graf $P_3 * K_1$ | 11 |
| Gambar 2.11 Graf C_7 dan elemen basisnya | 12 |
| Gambar 2.12 Graf C_7 dan elemen basis sisinya | 13 |
| Gambar 3.1 Diagram Alir Tahap I | 19 |
| Gambar 3.2 Diagram Alir Tahap II | 20 |
| Gambar 4.1 Graf $K_3 * K_1$ | 22 |
| Gambar 4.2 Graf $K_4 * K_1$ | 23 |
| Gambar 4.3 Graf $C_5 * K_1$ | 27 |
| Gambar 4.4 Graf $C_7 * K_1$ | 29 |
| Gambar 4.5 Graf $C_9 * K_1$ | 31 |
| Gambar 4.6 Graf $C_{11} * K_1$ | 48 |
| Gambar 4.7 Graf $C_{13} * K_1$ | 51 |

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR SIMBOL

| Simbol | Keterangan | Pemakaian pertama kali pada halaman |
|----------------|---|-------------------------------------|
| G | Graf G | 1 |
| K_1 | Graf trivial | 2 |
| $G * H$ | Operasi korona lingkungan dari graf G dan H | 3 |
| C_n | Graf siklus dengan n simpul | 3 |
| K_n | Graf lengkap dengan n simpul | 3 |
| u, v | Simpul pada graf G | 5 |
| $e = uv$ | Sisi yang menghubungkan simpul u dan v . | 5 |
| $\deg(u)$ | Derajat dari simpul u | 5 |
| $d(s, t)$ | Jarak antara simpul s ke simpul t | 6 |
| $V(G)$ | Himpunan simpul pada graf G | 6 |
| $\phi(u)$ | Fungsi bijektif dari simpul u | 6 |
| $G \cong H$ | Graf G isomorfik dengan graf H | 6 |
| n | Ordo atau banyaknya simpul pada graf G | 7 |
| P_n | Graf lintasan dengan n simpul | 7 |
| S_n | Graf bintang dengan n simpul | 8 |
| $G \odot H$ | Operasi korona dari graf G dan H | 8 |
| H_i | Salinan ke- i dari graf K_1 | 8 |
| $ V(G) $ | Kardinalitas dari $V(G)$ | 8 |
| $G \diamond H$ | Operasi korona sisi dari graf G dan H | 9 |
| $E(G)$ | Himpunan sisi pada graf G | 9 |
| W | Himpunan terurut | 10 |
| $r(u W)$ | Representasi u terhadap W | 10 |
| $\dim(G)$ | Dimensi metrik dari graf G . | 10 |

| | | |
|-----------------------------|---|----|
| $W \subseteq V(G)$ | Himpunan W subset atau himpunan bagian dari himpunan simpul pada graf G | 10 |
| $d_G(e, v)$ | Jarak antara sisi e ke simpul v | 11 |
| $\text{edim}(G)$ | Dimensi metrik sisi dari graf G | 12 |
| f_n | Graf kipas dengan n simpul | 13 |
| $V(G) \cup V(H_1)$ | Simpul pada graf G digabung dengan simpul pada graf H_1 | 19 |
| $\bigcup_{i=1}^n V(H_i)$ | Gabungan simpul pada graf H_i dengan i berjalan dari 1 sampai n . | 20 |
| $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ | Bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan $\frac{n}{3}$. | 24 |

DAFTAR TABEL

| | |
|---|----|
| Tabel 4.1 Matriks Jarak Simpul dari Graf $C_7 * K_1$ | 34 |
| Tabel 4.2 Matriks Jarak Sisi dari Graf $C_{11} * K_1$ | 55 |

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori Graf adalah salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari pemodelan permasalahan dalam simpul dan sisi. Simpul menyatakan obyek permasalahan dan sisi menyatakan hubungan antar obyek.

Dimensi metrik merupakan salah satu bidang kajian penelitian dalam Teori Graf, khususnya bidang kajian tentang dimensi graf. Dimensi metrik pada graf pertama kali diperkenalkan secara terpisah oleh Slater pada 1975, dan oleh Harary dan Melter pada 1976 [1]. Slater memperkenalkan konsep bilangan lokasi untuk graf terhubung, sedangkan Harary dan Melter menemukan konsep ini dengan istilah dimensi metrik (Chartrand, 2000:101). Kajian dalam dimensi metrik beragam, salah satunya adalah menentukan nilai dari dimensi metrik.

Konsep dimensi metrik telah diterapkan dan dikembangkan oleh beberapa peneliti. Khuller dkk. [2] menerapkan konsep dimensi metrik pada navigasi robot. Dalam permasalahan optimasi kombinatorik, Sebo dan Tannier [3] menyelesaikan permasalahan tersebut dengan konsep dimensi metrik. Dimensi metrik pada berbagai operasi graf pun telah ditemukan. Khusus dimensi metrik graf korona, Iswadi dkk. telah mendapatkan dimensi metrik graf tersebut pada tahun 2011 [4]. Pada tahun yang sama, Rodriguez dkk. juga berhasil mendapatkan dimensi metrik dari graf perumuman hasil operasi korona [5]. Pada tahun 2017, Rinurwati dkk. telah berhasil mendapatkan dimensi metrik graf korona sisi [6]. Graf korona sisi merupakan pengembangan dari graf korona. Dimensi metrik dari graf G korona sisi graf H

pada [6] adalah untuk H dengan ordo dua atau lebih. Untuk H dengan ordo satu, graf G korona sisi graf H dinamakan graf korona sisi anting dan dimensi metriknya didapatkan oleh Rinurwati dkk. [7]. Selain dimensi metrik, dalam dimensi metrik lokal dari graf korona sisi anting juga diperoleh Rinurwati dkk. dalam [7]. Untuk dimensi metrik lokal ketetanggaan, Rinurwati dkk. menemukan dimensi metrik lokal ketetanggaan pada graf serupa roda dengan penambahan anting [8]. Pengembangan operasi korona selanjutnya dilakukan oleh Gopalapillai [9], operasi tersebut dinamakan operasi korona lingkungan. Gopalapillai dalam penelitiannya menggunakan graf hasil operasi korona lingkungan untuk mendapatkan spektrum graf tersebut.

Bagian lain dari bidang kajian tentang dimensi graf adalah dimensi metrik sisi. Dimensi metrik sisi suatu graf diperkenalkan oleh Kelenc, Tratnik dan Yero [10]. Dalam menentukan dimensi metrik sisi graf, Kelenc dkk. menggunakan jarak antar dua sisi. Di lain pihak, Nasir, Zafar dan Zahid [11] dalam menentukan dimensi metrik sisi suatu graf G , dilakukan dengan menentukan dimensi metrik graf garis dari G . Jadi, Nasir dkk. menggunakan jarak antar dua titik, sehingga dimensi metrik sisi graf yang dihasilkan, mereka sebut bentuk lain dari dimensi metrik. Dimensi metrik sisi yang diperoleh Nasir dkk. adalah dimensi metrik sisi dari graf n -sunlet dan graf prisma. Lebih lanjut, pada tahun 2019 Filipović, Kartelj dan Kratica mendapatkan dimensi metrik sisi dari graf Petersen yang diperumum [12].

Oleh karena itu, dalam Tugas Akhir ini dilakukan penelitian tentang dimensi metrik dan dimensi metrik sisi dari graf korona lingkungan bandul yaitu graf hasil operasi korona lingkungan dari graf terhubung G dan graf H , dengan H adalah graf trivial K_1 .

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas, maka permasalahan pada Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana menentukan dimensi metrik graf korona lingkungan bandul?

2. Bagaimana menentukan dimensi metrik sisi graf korona lingkungan bandul?

1.3 Batasan Masalah

Ruang lingkup permasalahan dalam Tugas Akhir ini dibatasi pada graf yang digunakan dalam menentukan dimensi metrik maupun dimensi metrik sisi graf korona lingkungan bandul $G * K_1$. Graf G yang digunakan adalah graf lengkap K_n , dan graf siklus C_n , dengan n ganjil.

1.4 Tujuan

Dari rumusan masalah dan batasan masalah yang telah dijelaskan di atas, maka tujuan Tugas Akhir ini adalah:

1. Menentukan dimensi metrik graf korona lingkungan bandul.
2. Menentukan dimensi metrik sisi graf korona lingkungan bandul.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penyusunan Tugas Akhir ini adalah:

1. Memperdalam pengetahuan dan mempertajam analisis mengenai dimensi metrik dan dimensi metrik sisi dari graf hasil operasi.
2. Sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya mengenai dimensi metrik dan dimensi metrik sisi pada graf hasil operasi yang lain.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini disajikan pengertian tentang graf dan terminologi yang terkait serta hasil-hasil peneliti sebelumnya tentang dimensi metrik dan dimensi metrik sisi dari graf. Definisi pada bagian 2.1 dan 2.2 dirujuk dari [14].

2.1 Terminologi Graf

Subbab ini menjelaskan pengertian-pengertian yang berhubungan dengan graf.

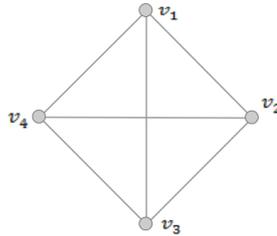
Definisi 2.1.1 *Dua simpul u dan v dari sebuah graf $G = (V, E)$ dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) di G jika terdapat sebuah sisi $e = uv$ di E .*

Definisi 2.1.2 *Jika terdapat sisi $e = uv$ di G dengan u dan v adalah simpul di G , maka dikatakan simpul u **bersisian** (*incident*) dengan sisi e dan juga simpul v bersisian dengan sisi e .*

Definisi 2.1.3 *Ordo* dari sebuah graf G adalah banyaknya simpul di G .

Definisi 2.1.4 *Size* dari sebuah graf G adalah banyaknya sisi di G .

Definisi 2.1.5 *Derajat* dari simpul u di graf terhubung G dinotasikan dengan **deg**(u), adalah banyaknya sisi dari G yang bersisian dengan simpul u .



Gambar 2.1 Graf K_4

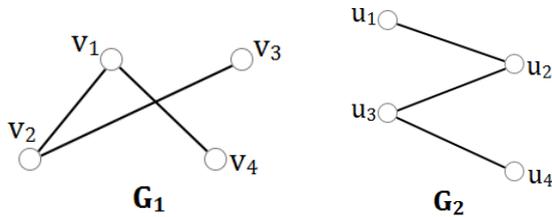
Pada Gambar 2.1, dapat dilihat bahwa simpul v_1 bertetangga dengan simpul v_2, v_3 dan v_4 dan simpul v_1 memiliki derajat tiga. Simpul v_1 bersisian dengan sisi $v_1v_2, v_1v_3,$ dan v_1v_4 .

Definisi 2.1.6 Dalam suatu graf G , sebuah *lintasan* dari simpul v_0 menuju simpul v_n , lintasan $v_0 - v_n$, dengan panjang n adalah susunan berselang-seling antara $n + 1$ simpul dan n sisi yang berawal dari simpul v_0 dan berakhir di simpul v_n .

Definisi 2.1.7 Sebuah graf G disebut *graf terhubung* jika untuk setiap pasang simpul u dan v di G terdapat lintasan dari u ke v (atau dari v ke u).

Definisi 2.1.8 *Jarak* $d(s, t)$ dari simpul s ke simpul t di graf terhubung G adalah panjang dari lintasan terpendek $s - t$ di G .

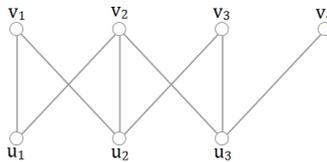
Definisi 2.1.9 Dua graf G dan H dikatakan *isomorfik* jika terdapat fungsi bijektif $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ sedemikian hingga dua simpul u dan v bertetangga di G jika dan hanya jika $\phi(u)$ dan $\phi(v)$ bertetangga di H . Jika graf G dan H isomorfik, maka dinotasikan sebagai $G \cong H$.



Gambar 2.2 Graf Isomorfik

Pada Gambar 2.2, fungsi bijektif $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ didefinisikan seperti berikut: $\phi(v_1) = u_2$, $\phi(v_2) = u_3$, $\phi(v_3) = u_4$ dan $\phi(v_4) = u_1$. Graf G_1 dan G_2 adalah isomorfik karena ϕ mempertahankan ketetanggaan dari G_1 dan G_2 , yaitu setiap dua simpul berbeda dan bertetangga u dan v di G_1 maka kawannya $\phi(u)$ dan $\phi(v)$ berbeda dan bertetangga di G_2 .

Definisi 2.1.10 Sebuah graf G adalah **bipartit** jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan U dan W , sedemikian hingga setiap sisi di G menghubungkan sebuah simpul di U dan sebuah simpul di W .



Gambar 2.3 Graf Bipartit

Pada Gambar 2.3 ditunjukkan graf bipartit dengan himpunan $U = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $W = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan dapat dilihat setiap sisi pada graf tersebut menghubungkan sebuah simpul pada himpunan U dan sebuah simpul pada himpunan W .

2.2 Jenis-Jenis Graf

Subbab ini menjelaskan mengenai graf yang digunakan dalam penelitian Tugas Akhir ini.

Definisi 2.2.1 *Graf lintasan P_n adalah graf dengan ordo n dan size $n-1$, dengan simpul dinotasikan sebagai v_0, v_1, \dots, v_n untuk $n \geq 1$ dan sisi $v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n - 1$.*

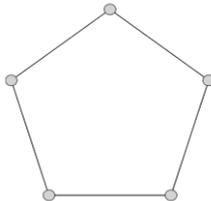
Gambar 2.4 menyajikan graf lintasan berordo 5.



Gambar 2.4 Graf P_5

Definisi 2.2.2 *Graf siklus C_n adalah graf dengan ordo n dan size n , dengan simpul dinotasikan sebagai v_0, v_1, \dots, v_n untuk $n \geq 3$ dan sisi $v_1 v_n$ dan $v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n - 1$.*

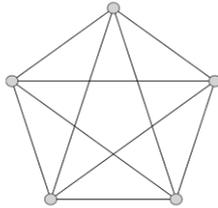
Gambar 2.5 menyajikan graf siklus berordo 5.



Gambar 2.5 Graf C_5

Definisi 2.2.3 *Graf lengkap adalah graf yang setiap simpulnya membentuk sisi dengan semua simpul lainnya. Sebuah graf lengkap dengan n simpul dilambangkan dengan K_n dan mempunyai $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi. Jika $n = 1$ maka K_1 disebut graf trivial.*

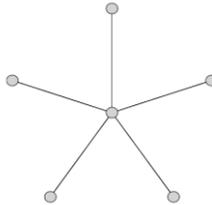
Gambar 2.6 menyajikan graf lengkap berordo 5.



Gambar 2.6 Graf K_5

Definisi 2.2.4 *Graf bintang* adalah graf pohon dengan n simpul, dimana salah satu simpul mempunyai derajat $n - 1$ dan $n - 1$ simpul mempunyai derajat 1. Graf bintang berordo n dinotasikan sebagai S_n , isomorfik dengan graf bipartit lengkap $K_{1,n-1}$.

Gambar 2.7 menyajikan graf bintang berordo 6.



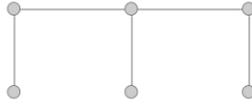
Gambar 2.7 Graf S_6

2.3 Macam-Macam Graf Hasil Operasi Korona

Subbab ini menjelaskan beberapa macam graf hasil operasi korona.

Definisi 2.3.1 [15] *Graf korona* dari graf terhubung G dan graf H , $G \odot H$, didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah graf G dan sebanyak $|V(G)|$ salinan H yaitu $H_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$, kemudian setiap simpul ke- i di G dihubungkan ke semua simpul di H_i .

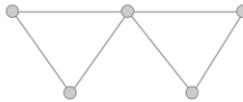
Gambar 2.8 menyatakan graf korona dari graf lintasan P_3 dan graf trivial K_1 .



Gambar 2.8 Graf $P_3 \odot K_1$

Definisi 2.3.2 [16] *Graf korona sisi* $G \diamond H$ dari G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah graf G dan sebanyak $|E(G)|$ salinan H yaitu $H_i, i \in \{1,2,3,\dots,|E(G)|\}$, kemudian menghubungkan kedua simpul ujung dari sisi ke- i di G dengan semua simpul di H_i .

Gambar 2.9 menyatakan graf korona sisi dari graf lintasan P_3 dan graf trivial K_1 .

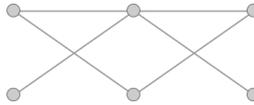


Gambar 2.9 Graf $P_3 \diamond K_1$

Definisi 2.3.3 [9] *Graf korona lingkungan* dari graf G dan H dinotasikan dengan $G * H$, yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah graf G dan sebanyak $|V(G)|$ salinan H yaitu $H_i, i \in \{1,2,3,\dots,|V(G)|\}$, kemudian setiap simpul di H_i dihubungkan dengan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul ke- i di G .

Graf $G * H$, dengan H adalah graf trivial, disebut graf korona lingkungan bandul K_1 dan dinotasikan dengan $G * K_1$.

Gambar 2.10 menyatakan graf korona lingkungan bandul $P_3 * K_1$, yaitu graf korona lingkungan dari graf lintasan P_3 dan graf trivial K_1 .



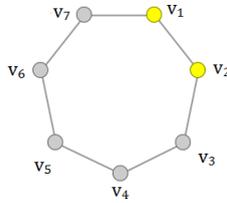
Gambar 2.10 Graf $P_3 * K_1$

2.4 Dimensi Metrik

Subbab ini menjelaskan mengenai definisi dari dimensi metrik beserta contohnya.

Definisi 2.4.1 [1] Misalkan G adalah graf terhubung dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah himpunan bagian dari $V(G)$ dan simpul v adalah simpul di G . Representasi dari v terhadap W yaitu $r(v|W)$ adalah k -tuple $(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$, dengan $d(v, w_i)$ adalah jarak dari simpul v ke simpul w_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Himpunan W disebut himpunan pembeda dari G jika untuk setiap dua simpul berbeda u dan v di $V(G)$, $r(u|W) \neq r(v|W)$. Himpunan pembeda W dengan banyaknya elemen minimum disebut basis untuk G . Kardinalitas dari basis untuk G , $|W|$, disebut **dimensi metrik** dari G dan dinotasikan dengan $\dim(G)$.

Gambar 2.11 menyatakan graf C_7 dengan elemen basis adalah simpul yang diberi warna kuning yaitu v_1 dan v_2 .



Gambar 2.11 Graf C_7 dan elemen basisnya.

Akan ditunjukkan bahwa $\dim(C_7) = 2$.

Misalkan $W = \{v_1, v_2\} \subseteq V(C_7)$. Akan ditunjukkan W adalah himpunan pembeda untuk C_7 . Representasi setiap simpul di C_7 terhadap W adalah:

$$\begin{aligned} r(v_1|W) &= (0,1) \\ r(v_2|W) &= (1,0) \\ r(v_3|W) &= (2,1) \\ r(v_4|W) &= (3,2) \\ r(v_5|W) &= (3,3) \\ r(v_6|W) &= (2,3) \\ r(v_7|W) &= (1,2) \end{aligned}$$

Terlihat bahwa representasi setiap simpul pada C_7 terhadap W berbeda. Jadi, W adalah himpunan pembeda untuk C_7 .

Akan ditunjukkan dua adalah kardinalitas W yang terkecil.

Misalkan $W' = \{v_1\} \subseteq V(C_7)$.

Representasi setiap titik di C_7 terhadap W' adalah:

$$\begin{aligned} r(v_1|W') &= (0) \\ r(v_2|W') &= r(v_7|W') = (1) \\ r(v_3|W') &= r(v_6|W') = (2) \\ r(v_4|W') &= r(v_5|W') = (3) \end{aligned}$$

Jadi W' bukan himpunan pembeda untuk C_7 .

Oleh karena itu dimensi metrik dari C_7 adalah 2.

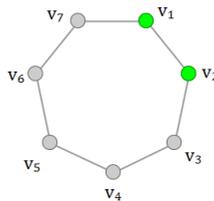
2.5 Dimensi Metrik Sisi

Subbab ini menjelaskan mengenai definisi dari dimensi metrik sisi beserta contohnya.

Definisi 2.5.1 [13] Misalkan G adalah graf terhubung dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah himpunan bagian dari $V(G)$, simpul u, v , dan w adalah simpul di $V(G)$, dan sisi $e = uv$ adalah sisi di $E(G)$. Jarak antara simpul u dan v dinotasikan dengan $d(u, v)$. Jarak antara simpul v dan sisi e , $d_E(e, v)$, adalah $\min\{d(u, v), d(w, v)\}$.

Representasi dari sisi e terhadap W , $r(e|W)$, adalah k -tuple $(d_E(e, w_1), d_E(e, w_2), \dots, d_E(e, w_k))$. Himpunan W disebut himpunan pembeda sisi untuk G jika untuk setiap dua sisi berbeda $e, f \in E(G)$, $r(e|W) \neq r(f|W)$. Himpunan pembeda sisi dengan banyak elemen minimum disebut basis sisi untuk G , dan kardinalitas dari basis sisi dinamakan dimensi metrik sisi $edim(G)$ dari graf G .

Gambar 2.12 menyatakan graf C_7 dengan elemen basis sisi yang diberi warna hijau yaitu v_1, v_2 .



Gambar 2.12 Graf C_7 dan elemen basis sisinya.

Akan ditunjukkan bahwa $edim(C_7) = 2$.

Misalkan $S' = \{v_1\} \subseteq V(C_7)$.

Representasi setiap sisi di C_7 terhadap S' adalah:

$$r(v_1 v_2 | S') = r(v_7 v_1 | S') = (0)$$

$$r(v_2 v_3 | S') = r(v_6 v_7 | S') = (1)$$

$$r(v_3 v_4 | S') = r(v_5 v_6 | S') = (2)$$

$$r(v_4 v_5 | S') = (3)$$

Jadi S' bukan himpunan pembeda sisi untuk C_7 .

Misalkan $S = \{v_1, v_2\} \subseteq V(C_7)$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda sisi untuk C_7 .

Representasi setiap sisi di C_7 terhadap S adalah:

$$r(v_1v_2 | S) = (0,0)$$

$$r(v_2v_3 | S) = (1,0)$$

$$r(v_3v_4 | S) = (2,1)$$

$$r(v_4v_5 | S) = (3,2)$$

$$r(v_5v_6 | S) = (2,3)$$

$$r(v_6v_7 | S) = (1,2)$$

$$r(v_7v_1 | S) = (0,1)$$

Terlihat bahwa representasi setiap sisi di C_7 terhadap S berbeda.

Jadi, S adalah himpunan pembeda sisi untuk C_7 . Kardinalitas S sama dengan dua adalah terkecil, jadi dimensi metrik sisi dari C_7 adalah 2.

2.6 Penelitian-Penelitian Terkait

Subbab ini menjabarkan hasil penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti terdahulu yang berkaitan dengan dimensi metrik, dimensi metrik sisi dan operasi korona lingkungan.

Chartrand dkk. adalah peneliti yang pertama kali melakukan penelitian mengenai dimensi metrik pada tahun 2000. Berikut adalah salah satu teorema mengenai dimensi metrik graf yang dihasilkan oleh Chartrand dkk.

Teorema 2.6.1 [1] *Misalkan G adalah graf terhubung dengan ordo $n \geq 2$.*

- (1) $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$.
- (2) $\dim(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G \cong K_n$.
- (3) Untuk $n \geq 3$, $\dim(C_n) = 2$.

Rinurwati dkk. melakukan penelitian mengenai dimensi metrik graf korona sisi dari graf G dan graf trivial K_1 yang disebut

graf korona sisi anting pada tahun 2017. Berikut adalah salah satu teorema yang dihasilkan dalam penelitian tersebut.

Teorema 2.6.2 [7] *Diberikan graf trivial K_1 .*

(1) *Untuk $n \geq 3$, $\dim(P_n \diamond K_1) = 2$.*

(2) *Untuk $n \geq 4$,*

$$\dim(C_n \diamond K_1) = \begin{cases} 2 & , \text{jika } n \text{ genap} \\ 3 & , \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Karena $K_n \diamond K_1 \cong K_{n+1}$, maka $\dim(K_n \diamond K_1) = (n + 1) - 1 = n$ (**Teorema 2.6.1**). Karena $S_n \diamond K_1 \cong f_n$ dan $\dim(f_n) = n$ maka $\dim(S_n \diamond K_1) = n$, dengan f_n adalah graf kipas.

Dimensi metrik sisi dari graf G , $edim(G)$, pertama kali diteliti oleh Peterin dan Yero pada tahun 2018. Berikut adalah teorema mengenai dimensi metrik sisi graf yang dihasilkan oleh Peterin dan Yero, yang sangat membantu dalam menentukan dimensi metrik graf lain terutama graf hasil suatu operasi.

Teorema 2.6.3 [10] *Untuk $n \geq 2$*

(1) *$edim(P_n) = \dim(P_n) = 1$*

(2) *$edim(C_n) = \dim(C_n) = 2$*

(3) *$edim(K_n) = \dim(K_n) = n - 1$*

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Tahapan Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan pada tugas akhir ini adalah dengan mengumpulkan referensi-referensi dari buku dan jurnal yang berkaitan dengan dimensi metrik, dimensi metrik sisi dan operasi korona lingkungan serta melakukan penahapan penelitian dengan langkah-langkah yang diuraikan sebagai berikut :

Tahap I : Menentukan nilai dimensi metrik graf korona lingkungan bandul $G * K_1$ yaitu $K_n * K_1$ dan $C_n * K_1$ dengan langkah-langkah operasional untuk masing-masing graf adalah:

1. Mengkonstruksi graf korona lingkungan bandul $G * K_1$.
2. Menentukan penamaan titik pada graf $G * K_1$.
3. Menentukan jarak antara dua simpul pada $G * K_1$.
4. Mengamati dan mendaftarkan masing-masing representasi simpul yang memiliki representasi berbeda terhadap himpunan pembeda.
5. Menentukan basis pada setiap graf korona lingkungan bandul.
6. Membuktikan secara matematis hasil dugaan pada langkah 5.

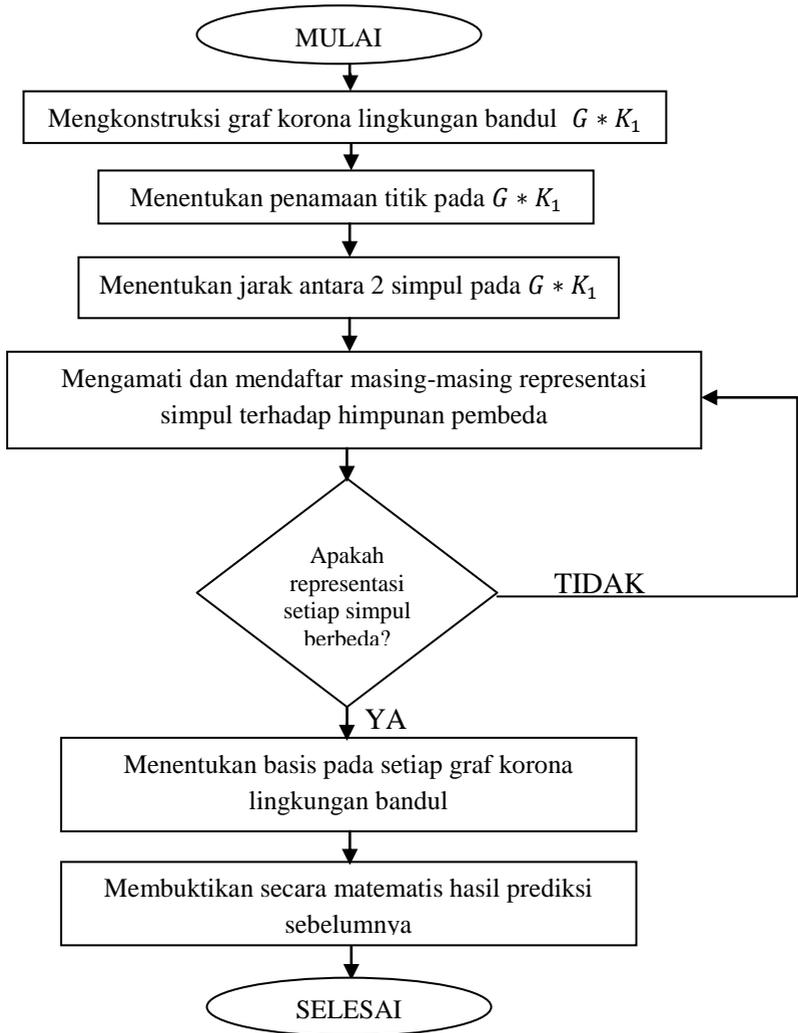
Tahap II : Menentukan nilai dimensi metrik sisi graf korona lingkungan bandul $G * K_1$ yaitu $K_n * K_1$ dan $C_n * K_1$ dengan langkah-langkah operasional untuk masing-masing graf adalah:

1. Mengkonstruksi graf korona lingkungan bandul $G * K_1$.
2. Menentukan penamaan titik pada graf $G * K_1$.
3. Menentukan jarak antara simpul dan sisi pada $G * K_1$.

4. Mengamati dan mendaftarkan masing-masing representasi sisi dan memiliki representasi berbeda terhadap himpunan sisi pembeda.
5. Menentukan basis metrik sisi pada setiap graf korona lingkungan bandul.
6. Membuktikan secara matematis hasil dugaan pada langkah 5.

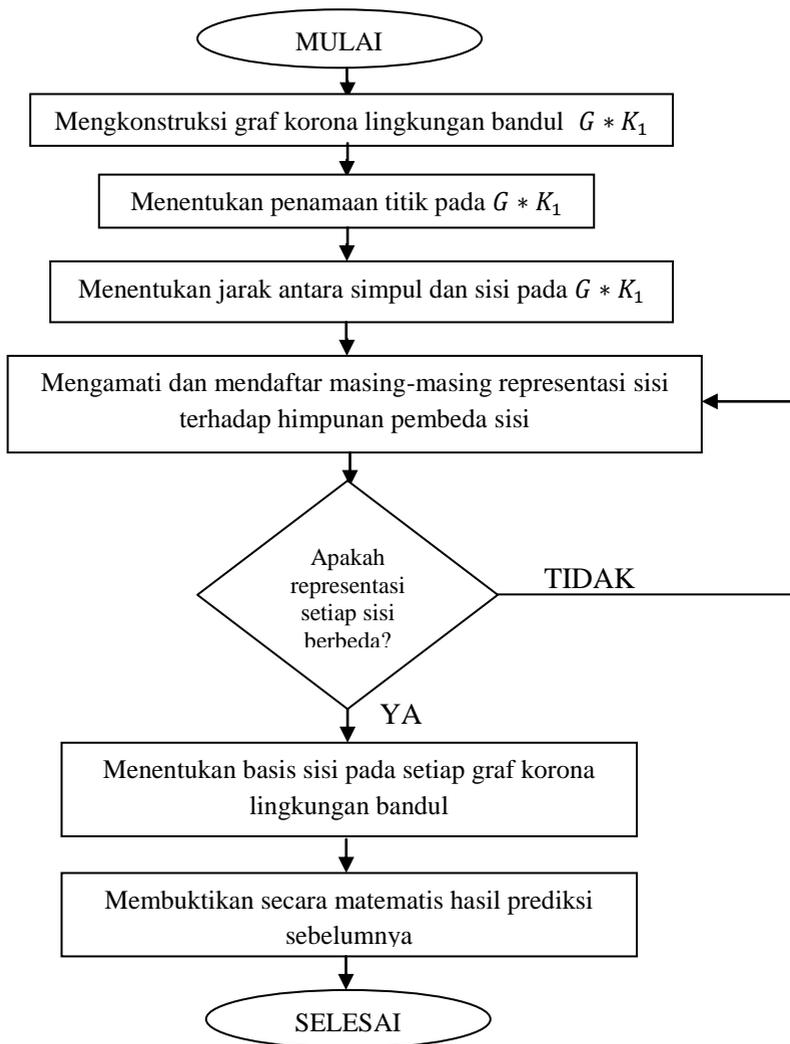
Tahap III : Membuat kesimpulan.

3.2 Diagram Alir Tahap I



Gambar 3.1 Diagram Alir Tahap I

3.3 Diagram Alir Tahap II



Gambar 3.2 Diagram Alir Tahap II

BAB IV

DIMENSI METRIK DAN DIMENSI METRIK SISI GRAF KORONA LINGKUNGAN BANDUL

4.1 Dimensi Metrik Graf Korona Lingkungan Bandul

Subbab ini membahas mengenai dimensi metrik graf korona lingkungan bandul dan pembuktiannya.

4.1.1 Dimensi metrik graf $K_n * K_1$

Diberikan graf lengkap K_n dengan himpunan simpul $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan graf trivial K_1 dengan himpunan $V(K_1) = \{u\}$. Salinan ke- i dari graf K_1 dinotasikan dengan H_i dan himpunan simpul $V(H_i) = \{u_i\}$.

Graf korona lingkungan dari graf K_n dan graf K_1 dinotasikan sebagai $K_n * K_1$. Graf $K_n * K_1$ diperoleh dengan mengambil sebuah graf K_n dan H_1, H_2, \dots, H_n , kemudian untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ menghubungkan u_i dengan semua tetangga v_i .

Graf $K_n * K_1$ memiliki himpunan simpul $V(K_n * K_1) = V(K_n) \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup \dots \cup V(H_n) = V(K_n) \cup \bigcup_{i=1}^n V(H_i) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Dimensi metrik dari graf $K_n * K_1$ dengan $n \geq 3$ ditunjukkan pada Teorema 4.1.1.

Teorema 4.1.1 *Misalkan G adalah graf lengkap K_n dengan ordo $n \geq 3$ dan H adalah graf trivial K_1 . Dimensi metrik dari graf korona lingkungan G dan H adalah $\dim(K_n * K_1) = n - 1$.*

Bukti

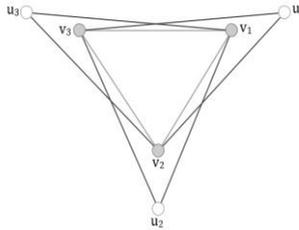
Teorema 4.1.1 dibuktikan dengan induksi matematika sebagai berikut:

(1) Untuk $n = 3$

Dibuktikan Teorema 4.1.1 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\dim(K_3 * K_1) = 3 - 1$.

Diambil sebarang himpunan $D_1 \subseteq V(K_3 * K_1)$, dengan $|D_1| = 2$. Dipilih $D_1 = \{u_1, u_2\}$.

Misalkan $G_1 \cong K_3 * K_1$ dengan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{u_1, u_2, u_3\}$. Ilustrasi graf G_1 seperti pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Graf $K_3 * K_1$

Akan ditunjukkan bahwa D_1 adalah basis untuk G_1 . Representasi simpul-simpul di G_1 terhadap D_1 adalah :

$$\begin{array}{ll} r(v_1|D_1) = (2,1) & r(u_1|D_1) = (0,2) \\ r(v_2|D_1) = (1,2) & r(u_2|D_1) = (2,0) \\ r(v_3|D_1) = (1,1) & r(u_3|D_1) = (2,2) \end{array}$$

Karena representasi setiap simpul di G_1 terhadap D_1 berbeda, maka D_1 merupakan himpunan pembeda untuk G_1 .

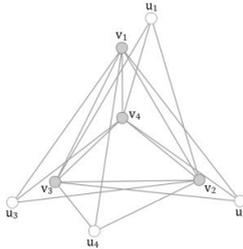
Selanjutnya, karena G_1 bukan graf lintasan maka D_1 adalah basis untuk G_1 . Jadi $\dim(G_1) = \dim(K_3 * K_1) = 2 = 3 - 1$.

(2) Untuk $n = 4$

Dibuktikan Teorema 4.1.1 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\dim(K_4 * K_1) = 4 - 1$.

Diambil sebarang himpunan $D_2 \subseteq V(K_4 * K_1)$, dengan $|D_2| = 3$. Dipilih $D_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$. Misalkan $G_2 \cong K_4 * K_1$

dengan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Ilustrasi graf G_2 seperti pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Graf $K_4 * K_1$

Akan ditunjukkan bahwa D_2 adalah basis untuk G_2 . Representasi simpul-simpul di G_2 terhadap D_2 adalah :

$$\begin{array}{ll} r(v_1|D_2) = (2,1,2) & r(u_1|D_2) = (0,2,2) \\ r(v_2|D_2) = (1,2,1) & r(u_2|D_2) = (2,0,2) \\ r(v_3|D_2) = (1,1,2) & r(u_3|D_2) = (2,2,0) \\ r(v_4|D_2) = (1,1,1) & r(u_4|D_2) = (2,2,2) \end{array}$$

Karena representasi setiap simpul di G_2 terhadap D_2 berbeda, maka D_2 merupakan himpunan pembeda untuk G_2 .

Selanjutnya ditunjukkan bahwa tiga adalah kardinalitas minimum dari D_2 , yaitu dengan menunjukkan bahwa himpunan $B_2 \subseteq V(G_2)$ dengan kardinalitas dua bukan himpunan pembeda untuk G_1 .

Himpunan B_2 diambil sebarang dan dipilih $B_2 = \{u_1, u_2\}$. Representasi simpul-simpul di G_2 terhadap B_2 adalah :

$$\begin{array}{l} r(v_1|B_2) = (2,1) \\ r(v_2|B_2) = (1,2) \\ r(v_3|B_2) = (1,1) \\ r(v_4|B_2) = (1,1) \\ r(u_1|B_2) = (0,2) \\ r(u_2|B_2) = (2,0) \\ r(u_3|B_2) = (2,2) \end{array}$$

$$r(u_4|B_2) = (2,2)$$

Karena terdapat dua pasang simpul dengan representasi sama, yaitu $r(v_3|B_2) = r(v_4|B_2)$ dan $r(u_3|B_2) = r(u_4|B_2)$, maka B_2 bukan himpunan pembeda untuk G_2 . Jadi D_2 dengan kardinalitas tiga adalah basis untuk $K_4 * K_1$, sehingga $\dim(K_4 * K_1) = 3 = 4 - 1$.

(3) Untuk $n = k - 1$

Andaikan Teorema 4.1.1 benar, yaitu benar bahwa $\dim(K_{k-1} * K_1) = k - 2 = (k - 1) - 1$

(4) Untuk $n = k$

Dibuktikan Teorema 4.1.1 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\dim(K_k * K_1) = k - 1$.

Diambil sebarang himpunan $D \subseteq V(K_k * K_1)$ dengan $|D| = k - 1$. Dipilih $D = \{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$. Selanjutnya, dibuktikan bahwa D adalah basis untuk $K_k * K_1$ sebagai berikut: Representasi dari simpul-simpul di graf $K_k * K_1$ terhadap D adalah:

$$\begin{aligned} r(v_1|D) &= (2,1,1, \dots, 1,1) \\ r(v_2|D) &= (1,2,1, \dots, 1,1) \\ &\vdots \\ r(v_{n-1}|D) &= (1,1, \dots, 1,2) \\ r(v_n|D) &= (1,1, \dots, 1,1) \\ r(u_1|D) &= (0,2,2, \dots, 2,2) \\ r(u_2|D) &= (2,0,2, \dots, 2,2) \\ &\vdots \\ r(u_{n-1}|D) &= (2,2, \dots, 2,0) \\ r(u_n|D) &= (2,2, \dots, 2,2) \end{aligned}$$

Karena representasi semua simpul dari graf $K_k * K_1$ terhadap D berbeda, maka D adalah himpunan pembeda untuk graf $K_k * K_1$.

Selanjutnya, untuk himpunan $B \subseteq V(K_k) \subseteq V(K_k * K_1)$ dengan kardinalitas $k - 1$ bukan himpunan pembeda untuk graf $K_k * K_1$, sebab:

Jika semua elemen B adalah simpul v_i dengan $1 \leq i \leq k$, maka tanpa mengurangi keumuman bukti, dipilih $B = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$. Dalam hal ini, $d(v_k, v_i) = d(u_k, v_i) = 1$ sehingga $r(v_k|B) = r(u_k|B) = (1, 1, \dots, 1, 1)$.

Karena himpunan $B_1 = \{v_i | 1 \leq i \leq k\}$ dengan kardinalitas $k - 2$ adalah himpunan bagian dari B , maka B_1 bukan himpunan pembeda untuk graf $K_k * K_1$.

Lebih lanjut untuk himpunan $C \subseteq V(K_k * K_1)$ dengan kardinalitas $k - 2$ bukan himpunan pembeda, sebab:

- (a) Jika semua elemen C adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq k$, maka tanpa mengurangi keumuman bukti, dipilih $C = \{u_1, u_2, \dots, u_{k-2}\}$. Dalam hal ini, $d(u_{k-1}, u_i) = d(u_k, u_i) = 2$ dan $d(v_{k-1}, u_i) = d(v_k, u_i) = 1; u_i \in C$, sehingga $r(u_{k-1}|C) = r(u_k|C) = (2, 2, \dots, 2, 2)$ dan $r(v_{k-1}|C) = r(v_k|C) = (1, 1, \dots, 1, 1)$.
- (b) Jika elemen-elemen C adalah p simpul v_i dan q simpul u_i , dengan $1 \leq i \leq k$ dan $q = k - p - 2$ maka tanpa mengurangi keumuman bukti dipilih $C = \{v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q\}$. Dalam hal ini, $d(v_k, v_i) = d(v_{k-1}, v_i) = d(v_{k-2}, v_i) = 1, d(v_k, u_i) = d(v_{k-1}, u_i) = d(v_{k-2}, u_i) = 1, d(u_k, v_i) = d(u_{k-1}, v_i) = d(u_{k-2}, v_i) = 1$ dan $d(u_k, u_i) = d(u_{k-1}, u_i) = d(u_{k-2}, u_i) = 2; v_i, u_i \in C$, sehingga $r(v_k|C) = r(v_{k-1}|C) = r(v_{k-2}|C) = (1, 1, \dots, 1, 1)$ dan $r(u_k|C) = r(u_{k-1}|C) = r(u_{k-2}|C) = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{\text{suku ke-}p}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\text{suku ke-}q} \right)$.
- (c) Jika elemen-elemen C adalah q simpul v_i dan p simpul u_i , dengan $1 \leq i \leq k$ dan $q = k - p - 2$ maka tanpa mengurangi keumuman bukti dipilih

$$C = \{v_1, \dots, v_q, u_1, \dots, u_p\}. \text{ Dalam hal ini, } d(v_k, v_i) = d(v_{k-1}, v_i) = d(v_{k-2}, v_i) = 1, d(v_k, u_i) = d(v_{k-1}, u_i) = d(v_{k-2}, u_i) = 1, d(u_k, v_i) = d(u_{k-1}, v_i) = d(u_{k-2}, v_i) = 1 \text{ dan } d(u_k, u_i) = d(u_{k-1}, u_i) = d(u_{k-2}, u_i) = 2; v_i, u_i \in C, \text{ sehingga } r(v_k|C) = r(v_{k-1}|C) = r(v_{k-2}|C) = (1, 1, \dots, 1, 1) \text{ dan } r(u_k|C) = r(u_{k-1}|C) = r(u_{k-2}|C) = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{\text{suku ke-}q}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\text{suku ke-}p} \right).$$

Dari kemungkinan (a) sampai (c) di atas diketahui bahwa untuk himpunan C dengan kardinalitas $k - 2$, terdapat simpul di $K_k * K_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap C , maka C bukan himpunan pembeda untuk graf $K_k * K_1$. Jadi himpunan $D = \{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ adalah basis untuk graf $K_k * K_1$. ■

Selain dimensi metrik graf $K_n * K_1$, subbab ini juga membahas mengenai dimensi metrik graf $C_n * K_1$ beserta pembuktiannya.

4.1.2 Dimensi metrik graf $C_n * K_1$

Diberikan graf siklus C_n dengan himpunan simpul $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan graf trivial K_1 dengan himpunan simpul $V(K_1) = \{u\}$. Salinan ke- i dari graf K_1 dinotasikan dengan H_i dan himpunan simpul $V(H_i) = \{u_i\}$.

Graf korona lingkungan dari graf C_n dan graf K_1 dinotasikan sebagai $C_n * K_1$. Graf $C_n * K_1$ diperoleh dengan mengambil sebuah graf C_n dan H_1, H_2, \dots, H_n , kemudian untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ menghubungkan u_i dengan semua tetangga v_i di G .

Graf $C_n * K_1$ memiliki himpunan simpul $V(C_n * K_1) = V(C_n) \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup \dots \cup V(H_n) = V(C_n) \cup \bigcup_{i=1}^n V(H_i) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Dimensi metrik dari graf $C_n * K_1$ dengan $n \geq 3$ diberikan pada Teorema 4.1.2.

Teorema 4.1.2 *Jika G adalah graf siklus C_n berordo $n \geq 3$ dengan n ganjil dan H adalah graf trivial K_1 , maka dimensi metrik dari graf G korona lingkungan H adalah*

$$\dim(C_n * K_1) = \begin{cases} 2 & , n = 3 \\ 3 & , n = 5 \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & , n \geq 7 \end{cases}$$

Bukti :

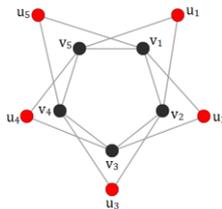
(1) Untuk $n = 3$

Karena graf $C_3 * K_1$ isomorf dengan graf $K_3 * K_1$, maka benar bahwa $\dim(C_3 * K_1) = 2$. (**Teorema 4.1.1**)

(2) Untuk $n = 5$

Akan ditunjukkan bahwa $\dim(C_5 * K_1) = 3$ sebagai berikut:

Diambil himpunan $B_1 \subseteq V(C_5 * K_1)$ dengan $B_1 = \{u_1, u_3, u_5\}$. Misalkan $H_1 \cong C_5 * K_1$ dengan $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. Graf H_1 digambarkan seperti pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Graf $C_5 * K_1$

Akan ditunjukkan bahwa B_1 adalah basis untuk H_1 . Representasi simpul-simpul di H_1 terhadap B_1 adalah :

$$\begin{array}{ll}
r(v_1|B_1) = (2,2,1) & r(u_1|B_1) = (0,2,3) \\
r(v_2|B_1) = (1,1,2) & r(u_2|B_1) = (3,3,2) \\
r(v_3|B_1) = (2,2,2) & r(u_3|B_1) = (2,0,2) \\
r(v_4|B_1) = (2,1,1) & r(u_4|B_1) = (2,3,3) \\
r(v_5|B_1) = (1,2,2) & r(u_5|B_1) = (3,2,0)
\end{array}$$

Karena representasi setiap simpul di H_1 terhadap B_1 berbeda, maka B_1 adalah himpunan pembeda untuk H_1 .

Akan ditunjukkan tiga adalah kardinalitas terkecil dari B_1 , sebagai berikut:

Untuk himpunan D_1 dengan kardinalitas dua bukan himpunan pembeda, sebab:

- Jika semua elemen D_1 adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 5$ dan dipilih himpunan $D_1 = \{u_1, u_2\}$. Dalam hal ini, $d(v_1, u_1) = d(v_3, u_1) = 2$ dan $d(v_1, u_2) = d(v_3, u_2) = 1$, sehingga $r(v_1|D_1) = r(v_3|D_1) = (2,1)$.
- Jika semua elemen D_1 adalah simpul v_i dengan $1 \leq i \leq 5$ dan dipilih himpunan $D_1 = \{v_3, v_5\}$. Dalam hal ini, $d(v_2, v_3) = d(u_2, v_3) = 1$ dan $d(v_2, v_5) = d(u_2, v_5) = 2$, sehingga $r(v_2|D_1) = r(u_2|D_1) = (1,2)$.
- Jika elemen-elemen D_1 adalah satu simpul v_i dan simpul lainnya adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 5$ dan dipilih himpunan $D_1 = \{v_4, u_1\}$. Dalam hal ini, $d(v_3, v_4) = d(u_3, v_4) = 1$ dan $d(v_3, u_1) = d(u_3, u_1) = 2$, sehingga $r(v_3|D_1) = r(u_3|D_1) = (1,2)$.

Dari kemungkinan a sampai c di atas diketahui bahwa untuk himpunan D_1 dengan kardinalitas dua, terdapat simpul di $C_5 * K_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap D_1 , maka D_1 bukan himpunan pembeda untuk graf $C_5 * K_1$. Jadi himpunan $B_1 = \{u_1, u_3, u_5\}$ adalah basis untuk graf $C_5 * K_1$.

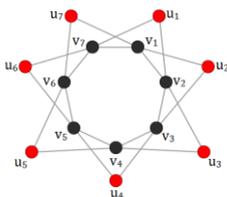
(3) Untuk $n \geq 7$

Teorema 4.1.2 dibuktikan dengan induksi matematika sebagai berikut:

(a) Untuk $n = 7$

Dibuktikan Teorema 4.1.2 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\dim(C_7 * K_1) = \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = 3$.

Diambil himpunan $B_2 \subseteq C_7 * K_1$, dengan $B_2 = \{u_1, u_4, u_7\}$. Misalkan $H_2 \cong C_7 * K_1$ dengan $V(H_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$. Graf H_2 digambarkan seperti pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Graf $C_7 * K_1$

Akan ditunjukkan bahwa B_2 adalah basis untuk H_2 . Representasi simpul-simpul di H_2 terhadap B_2 adalah :

$$\begin{array}{ll}
 r(v_1|B_2) = (2,3,1) & r(u_1|B_2) = (0,3,3) \\
 r(v_2|B_2) = (1,2,2) & r(u_2|B_2) = (3,2,2) \\
 r(v_3|B_2) = (2,1,3) & r(u_3|B_2) = (2,3,3) \\
 r(v_4|B_2) = (3,2,3) & r(u_4|B_2) = (3,0,3) \\
 r(v_5|B_2) = (3,1,2) & r(u_5|B_2) = (3,3,2) \\
 r(v_6|B_2) = (2,2,1) & r(u_6|B_2) = (2,2,3) \\
 r(v_7|B_2) = (1,3,2) & r(u_7|B_2) = (3,3,0)
 \end{array}$$

Karena representasi setiap simpul di H_2 terhadap B_2 berbeda, maka B_2 merupakan himpunan pembeda untuk H_2 .

Akan ditunjukkan tiga adalah kardinalitas terkecil dari B_2 , sebagai berikut:

Untuk himpunan D_2 dengan kardinalitas dua bukan himpunan pembeda, sebab:

- a. Jika semua elemen D_2 adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 7$ dan dipilih himpunan $D_2 = \{u_5, u_7\}$. Dalam hal ini, $d(v_2, u_5) = d(u_2, u_5) = 3$ dan $d(v_2, u_7) = d(u_2, u_7) = 2$, sehingga $r(v_2|D_2) = r(u_2|D_2) = (3,2)$.
- b. Jika semua elemen D_2 adalah simpul v_i dengan $1 \leq i \leq 7$ dan dipilih himpunan $D_2 = \{v_2, v_6\}$. Dalam hal ini, $d(v_1, v_2) = d(u_1, v_2) = 1$ dan $d(v_1, v_6) = d(u_1, v_6) = 2$, sehingga $r(v_1|D_2) = r(u_1|D_2) = (1,2)$.
- c. Jika elemen-elemen D_2 adalah satu simpul v_i dan simpul lainnya adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 7$ dan dipilih himpunan $D_2 = \{v_1, u_4\}$. Dalam hal ini, $d(v_7, v_1) = d(u_7, v_1) = 1$ dan $d(v_7, u_4) = d(u_7, u_4) = 3$, sehingga $r(v_7|D_2) = r(u_7|D_2) = (1,3)$.

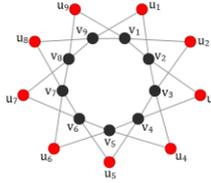
Dari kemungkinan a sampai c di atas diketahui bahwa untuk himpunan D_2 dengan kardinalitas dua, terdapat simpul di $C_7 * K_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap D_2 , maka D_2 bukan himpunan pembeda untuk graf $C_7 * K_1$. Jadi himpunan $B_2 = \{u_1, u_4, u_7\}$ adalah basis untuk graf $C_7 * K_1$.

(b) Untuk $n = 9$

Dibuktikan Teorema 4.1.2 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\dim(C_9 * K_1) = \left\lceil \frac{9}{3} \right\rceil = 3$.

Diambil himpunan $B_3 \subseteq C_9 * K_1$, dengan $B_3 = \{u_1, u_4, u_7\}$. Misalkan $H_3 \cong C_9 * K_1$ dengan $V(H_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$.

Graf H_3 digambarkan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Graf $C_9 * K_1$

Akan ditunjukkan bahwa B_3 adalah basis untuk H_3 . Representasi simpul-simpul di H_3 terhadap B_3 adalah :

$$\begin{array}{ll}
 r(v_1|B_3) = (2,3,3) & r(u_1|B_3) = (0,3,3) \\
 r(v_2|B_3) = (1,2,4) & r(u_2|B_3) = (3,2,4) \\
 r(v_3|B_3) = (2,1,4) & r(u_3|B_3) = (2,3,4) \\
 r(v_4|B_3) = (3,2,3) & r(u_4|B_3) = (3,0,3) \\
 r(v_5|B_3) = (4,1,2) & r(u_5|B_3) = (4,3,2) \\
 r(v_6|B_3) = (4,2,1) & r(u_6|B_3) = (4,2,3) \\
 r(v_7|B_3) = (3,3,2) & r(u_7|B_3) = (3,3,0) \\
 r(v_8|B_3) = (2,4,1) & r(u_8|B_3) = (2,4,3) \\
 r(v_9|B_3) = (1,4,2) & r(u_9|B_3) = (3,4,2)
 \end{array}$$

Karena representasi setiap simpul di H_3 terhadap B_3 berbeda, maka B_3 merupakan himpunan pembeda untuk H_3 .

Akan ditunjukkan tiga adalah kardinalitas terkecil dari B_3 , sebagai berikut:

Untuk himpunan D_3 dengan kardinalitas dua bukan himpunan pembeda, sebab:

- Jika semua elemen D_3 adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 9$ dan dipilih himpunan $D_3 = \{u_3, u_5\}$. Dalam hal ini, $d(v_1, u_3) = d(u_1, u_3) = 2$ dan $d(v_1, u_5) = d(u_1, u_5) = 4$, sehingga $r(v_1|D_3) = r(u_1|D_3) = (2,4)$.
- Jika semua elemen D_3 adalah simpul v_i dengan $1 \leq i \leq 9$ dan dipilih himpunan $D_3 = \{v_3, v_9\}$. Dalam hal ini,

$d(v_1, v_3) = d(u_1, v_3) = 2$ dan $d(v_1, v_9) = d(u_1, v_9) = 1$,
 sehingga $r(v_1|D_3) = r(u_1|D_3) = (2,1)$.

- c. Jika elemen-elemen D_3 adalah satu simpul v_i dan simpul lainnya adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 9$ dan dipilih himpunan $D_3 = \{v_6, u_8\}$. Dalam hal ini, $d(v_1, v_6) = d(u_1, v_6) = 4$ dan $d(v_1, u_8) = d(u_1, u_8) = 2$, sehingga $r(v_1|D_3) = r(u_1|D_3) = (4,2)$.

Dari kemungkinan a sampai c di atas diketahui bahwa untuk himpunan D_3 dengan kardinalitas dua, terdapat simpul di $C_9 * K_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap D_3 , maka D_3 bukan himpunan pembeda untuk graf $C_9 * K_1$. Jadi himpunan $B_3 = \{u_1, u_4, u_7\}$ adalah basis untuk graf $C_9 * K_1$.

- (c) Untuk $n = k - 1$

Andaikan Teorema 4.1.2 benar, yaitu benar bahwa $\dim(C_{k-1} * K_1) = \left\lfloor \frac{k-1}{3} \right\rfloor$.

- (d) Untuk $n = k$

Dibuktikan Teorema 4.1.2 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\dim(C_k * K_1) = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$.

Diambil himpunan $Z \subseteq V(C_k * K_1)$ dengan $|Z| = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$.

Dipilih

$$Z \subseteq \left\{ u_i \in H_i \mid i = 3t + 1, t \in I = \left\{ 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor - 1 \right\} \right\} = \{u_1, u_4, u_7, \dots, u_p\} \text{ dengan } p = \begin{cases} k & , k = 3t + 1 \\ k - 1 & , k = 3t + 2 \\ k - 2 & , k = 3t. \end{cases}$$

Selanjutnya, dibuktikan bahwa Z adalah basis untuk $C_k * K_1$.

Dengan pengamatan langsung pada graf $C_k * K_1$, akan ditunjukkan bahwa $\dim(C_k * K_1) = \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$, untuk $k \geq 7$, dengan langkah – langkah sebagai berikut:

I. Membuat matriks jarak dari graf $C_k * K_1$ (matriks yang elemen-elemennya adalah jarak antara dua simpul berbeda di $C_k * K_1$). Elemen-elemen dari setiap baris matriks yang terbentuk, secara urut dari kiri ke kanan menyatakan koordinat ke-1, ke-2, ... , ke- k dari representasi simpul $v \in C_k * K_1$.

II. Mengamati nilai yang tunggal pada :

1) Satu kolom pertama matriks jarak dari $C_k * K_1$, maka diperoleh beberapa representasi simpul dengan tunggal dari satu koordinat pertama. Misalkan simpul-simpul dengan representasinya yang tunggal ini dihimpun dalam himpunan A .

2) Dua kolom pertama matriks jarak dari $C_k * K_1$, maka diperoleh beberapa representasi simpul dengan tunggal dari satu koordinat pertama. Misalkan simpul-simpul dengan representasinya yang tunggal ini dihimpun dalam himpunan B .

Demikian seterusnya dengan cara yang sama, pengamatan dilanjutkan sampai dengan $\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ kolom pertama matriks jarak. Misalkan simpul-simpul dengan representasi tunggal yang diperoleh ini dihimpun dalam himpunan M .

Dengan $\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ – pengamatan di atas diperoleh himpunan $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil} = V(C_k * K_1)$ dengan semua representasi simpulnya terhadap Z berbeda. Jadi Z adalah himpunan pembeda dari $C_k * K_1$. Bilangan $\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ adalah kardinalitas minimal dari Z .

Sebab, himpunan $D_4 \subseteq Z$ dengan kardinalitas kurang dari $\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor - 1$ bukan himpunan pembeda dari $C_k * K_1$. Sebab, misalkan tanpa mengurangi keumuman bukti diambil $D_4 = \{u_1, u_4, u_7, \dots, u_{p-1}\}$ dan $p = k$, maka representasi $r(u_{k-1}|D_4) = r(v_{k-1}|D_4)$. Jadi, Z adalah basis untuk $C_k * K_1$. ■

Sebagai contoh pengamatan langsung proses penentuan basis untuk $C_k * K_1$ di atas diambil $k = 7$. Elemen-elemen matriks jarak simpul dari $C_7 * K_1$ seperti pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Matriks Jarak Simpul dari Graf $C_7 * K_1$

| $d(a, b)$ | u_1 | u_4 | u_7 |
|-----------|-------|-------|-------|
| u_1 | 0 | 3 | 3 |
| u_2 | 3 | 2 | 2 |
| u_3 | 2 | 3 | 3 |
| u_4 | 3 | 0 | 3 |
| u_5 | 3 | 3 | 2 |
| u_6 | 2 | 2 | 3 |
| u_7 | 3 | 3 | 0 |
| v_1 | 2 | 3 | 1 |
| v_2 | 1 | 2 | 2 |
| v_3 | 2 | 1 | 3 |
| v_4 | 3 | 2 | 3 |
| v_5 | 3 | 1 | 2 |
| v_6 | 2 | 2 | 1 |
| v_7 | 1 | 3 | 2 |

Keterangan Tabel 4.1 :

$Z := \{u_1, u_4, u_7\}$

$d(a, b) :=$ jarak dari simpul $a \in C_k * K_1$ dengan simpul $b \in Z$.

$r(u_1|Z) := (0,3,3)$ yaitu baris pertama Tabel 1.

Hasil pengamatan dari :

- 1) Satu kolom pertama matriks jarak dari $C_7 * K_1$:
Diperoleh representasi u_1 sebagai representasi simpul tunggal dari pengamatan satu koordinat pertama. $A_1 = \{u_1\}$.
- 2) Dua kolom pertama matriks jarak dari $C_7 * K_1$:
Diperoleh representasi u_1, u_2, v_2, v_3, v_5 dan v_7 sebagai representasi simpul tunggal dari pengamatan dua koordinat pertama. $A_2 = \{u_1, u_2, v_2, v_3, v_5, v_7\}$.
- 3) Tiga kolom pertama matriks jarak dari $C_7 * K_1$:
Diperoleh representasi semua simpul $C_7 * K_1$ sebagai representasi simpul tunggal dari pengamatan tiga koordinat pertama. $A_3 = M = V(C_7 * K_1)$.

4.2 Dimensi Metrik Sisi Graf Korona Lingkungan Bandul

Subbab ini membahas mengenai dimensi metrik sisi graf korona lingkungan bandul dan pembuktiannya.

4.2.1 Dimensi metrik sisi graf $K_n * K_1$

Diberikan graf lengkap K_n dengan himpunan simpul $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan graf trivial K_1 dengan himpunan $V(K_1) = \{u\}$. Salinan ke- i dari graf K_1 dinotasikan dengan H_i dan himpunan simpul $V(H_i) = \{u_i\}$.

Graf korona lingkungan dari graf K_n dan graf K_1 dinotasikan sebagai $K_n * K_1$. Graf $K_n * K_1$ diperoleh dengan mengambil sebuah graf K_n dan H_1, H_2, \dots, H_n , kemudian untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ menghubungkan u_i dengan semua tetangga v_i .

Graf $K_n * K_1$ memiliki himpunan simpul $V(K_n * K_1) = V(K_n) \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup \dots \cup V(H_n) = V(K_n) \cup \bigcup_{i=1}^n V(H_i) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan himpunan sisi $E(K_n * K_1) = \{v_a v_b | a, b = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_b u_c | b, c = 1, 2, \dots, n \text{ dan } b \neq c\}$.

Dimensi metrik sisi dari graf $K_n * K_1$ dengan $n \geq 3$ ditunjukkan pada Teorema 4.2.1.

Teorema 4.2.1 *Jika G adalah graf lengkap K_n berordo $n \geq 3$ dan H adalah graf trivial K_1 , maka dimensi metrik sisi dari graf hasil korona lingkungan G dan H adalah $\text{edim}(K_n * K_1) = 2(n - 1)$*

Bukti:

Teorema 4.2.1 dibuktikan dengan induksi matematika sebagai berikut:

(1) Untuk $n = 3$

Dibuktikan Teorema 4.2.1 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\text{edim}(K_3 * K_1) = 2(3 - 1)$.

Diambil sebarang himpunan $S_1 \subseteq V(K_3 * K_1)$, dengan $|S_1| = 4$. Dipilih $S_1 = \{v_1, v_2, u_1, u_2\}$. Misalkan $G_1 \cong K_3 * K_1$ dengan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $(G_1) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\} \cup \{v_1u_2, v_1u_3, v_2u_1, v_2u_3, v_3u_1, v_3u_2\}$. Graf G_1 diilustrasikan seperti pada Gambar 4.1.

Akan ditunjukkan bahwa S_1 adalah basis sisi untuk G_1 . Representasi sisi-sisi di G_1 terhadap S_1 adalah :

$$\begin{array}{ll} r(v_1v_2|S_1) = (0,0,1,1) & r(v_2u_1|S_1) = (1,0,0,2) \\ r(v_1v_3|S_1) = (0,1,1,1) & r(v_2u_3|S_1) = (1,0,1,2) \\ r(v_2v_3|S_1) = (1,0,1,1) & r(v_3u_1|S_1) = (1,1,0,1) \\ r(v_1u_2|S_1) = (0,1,2,0) & r(v_3u_2|S_1) = (1,1,1,0) \\ r(v_1u_3|S_1) = (0,1,2,2) & \end{array}$$

Karena representasi setiap sisi di G_1 terhadap S_1 berbeda, maka S_1 merupakan himpunan pembeda sisi untuk G_1 .

Selanjutnya, ditunjukkan kardinalitas minimum dari S_1 adalah 4, yaitu dengan menunjukkan himpunan $T_1 \subseteq V(G_1)$ dengan $|T_1| = 3$ bukan himpunan pembeda sisi untuk G_1 .

Himpunan T_1 diambil sebarang dan dipilih $T_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$. Representasi sisi-sisi di G_1 terhadap T_1 adalah:

$$\begin{aligned} r(v_1v_2|T_1) &= (0,0,1) \\ r(v_1v_3|T_1) &= (0,1,0) \\ r(v_2v_3|T_1) &= (1,0,0) \\ r(v_1u_2|T_1) &= (0,1,1) \\ r(v_1u_3|T_1) &= (0,1,1) \\ r(v_2u_1|T_1) &= (1,0,1) \\ r(v_2u_3|T_1) &= (1,0,1) \\ r(v_3u_1|T_1) &= (1,1,0) \\ r(v_3u_2|T_1) &= (1,1,0) \end{aligned}$$

Karena terdapat sisi yang memiliki representasi yang sama, yaitu $r(v_1u_2|T_1) = r(v_1u_3|T_1)$, $r(v_2u_1|T_1) = r(v_2u_3|T_1)$ dan $r(v_3u_1|T_1) = r(v_3u_2|T_1)$, maka T_1 bukan himpunan pembeda sisi untuk G_1 .

Jadi, S_1 dengan kardinalitas empat adalah basis sisi untuk $K_3 * K_1$ sehingga dimensi metrik sisi graf $K_3 * K_1$, $\text{edim}(K_3 * K_1) = 4 = 2(3 - 1)$.

(2) Untuk $n = 4$

Dibuktikan Teorema 4.2.1 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\text{edim}(K_4 * K_1) = 2(4 - 1)$.

Diambil sebarang himpunan $S_2 \subseteq V(K_4 * K_1)$, dengan $|S_2| = 6$. Dipilih $S_2 = \{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\}$.

Misalkan $G_2 \cong K_4 * K_1$ dengan $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G_2) = \{v_a v_b | 1 \leq a, b \leq 4 \text{ dan } a \neq b\} \cup \{v_b u_c | 1 \leq b, c \leq 4 \text{ dan } b \neq c\}$.

Graf G_2 diilustrasikan pada Gambar 4.2.

Akan ditunjukkan bahwa S_2 adalah basis untuk G_2 . Representasi sisi-sisi di G_2 terhadap S_2 adalah :

$$\begin{aligned}
 r(v_1 v_2 | S_2) &= (0,0,1,1,1,1) \\
 r(v_1 v_3 | S_2) &= (0,1,0,1,1,1) \\
 r(v_1 v_4 | S_2) &= (0,1,1,1,1,1) \\
 r(v_2 v_3 | S_2) &= (1,0,0,1,1,1) \\
 r(v_2 v_4 | S_2) &= (1,0,1,1,1,1) \\
 r(v_3 v_4 | S_2) &= (1,1,0,1,1,1) \\
 r(v_1 u_2 | S_2) &= (0,1,1,2,0,1) \\
 r(v_1 u_3 | S_2) &= (0,1,1,2,1,0) \\
 r(v_1 u_4 | S_2) &= (0,1,1,2,1,1) \\
 r(v_2 u_1 | S_2) &= (1,0,1,0,2,1) \\
 r(v_2 u_3 | S_2) &= (1,0,1,1,2,0) \\
 r(v_2 u_4 | S_2) &= (1,0,1,1,2,1) \\
 r(v_3 u_1 | S_2) &= (1,1,0,0,1,2) \\
 r(v_3 u_2 | S_2) &= (1,1,0,1,0,2) \\
 r(v_3 u_4 | S_2) &= (1,1,0,1,1,2) \\
 r(v_4 u_1 | S_2) &= (1,1,1,0,1,1) \\
 r(v_4 u_2 | S_2) &= (1,1,1,1,0,1) \\
 r(v_4 u_3 | S_2) &= (1,1,1,1,1,0)
 \end{aligned}$$

Karena representasi setiap sisi di G_2 terhadap S_2 berbeda, maka S_2 merupakan himpunan pembeda sisi untuk G_2 .

Selanjutnya, ditunjukkan kardinalitas minimum dari S_2 adalah enam, yaitu dengan menunjukkan himpunan $T_2 \subseteq V(G_2)$ dengan kardinalitas lima bukan himpunan pembeda sisi untuk G_2 .

Himpunan T_2 diambil sebarang dan dipilih $T_2 = \{v_4, u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Representasi sisi-sisi di G_2 terhadap T_2 adalah:

$$\begin{aligned}
 r(v_1 v_2 | T_2) &= (1,1,1,1,1) \\
 r(v_1 v_3 | T_2) &= (1,1,1,1,1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r(v_1 v_4 | T_2) &= (0, 1, 1, 1, 2) \\
r(v_2 v_3 | T_2) &= (1, 1, 1, 1, 1) \\
r(v_2 v_4 | T_2) &= (0, 1, 1, 1, 1) \\
r(v_3 v_4 | T_2) &= (0, 1, 1, 1, 1) \\
r(v_1 u_2 | T_2) &= (1, 2, 0, 1, 1) \\
r(v_1 u_3 | T_2) &= (1, 2, 1, 0, 1) \\
r(v_1 u_4 | T_2) &= (1, 2, 1, 1, 0) \\
r(v_2 u_1 | T_2) &= (1, 0, 2, 1, 1) \\
r(v_2 u_3 | T_2) &= (1, 1, 2, 0, 1) \\
r(v_2 u_4 | T_2) &= (1, 1, 2, 1, 0) \\
r(v_3 u_1 | T_2) &= (1, 0, 1, 2, 1) \\
r(v_3 u_2 | T_2) &= (1, 1, 0, 2, 1) \\
r(v_3 u_4 | T_2) &= (1, 1, 1, 2, 0) \\
r(v_4 u_1 | T_2) &= (0, 0, 1, 1, 2) \\
r(v_4 u_2 | T_2) &= (0, 1, 0, 1, 2) \\
r(v_4 u_3 | T_2) &= (0, 1, 1, 0, 2)
\end{aligned}$$

Karena terdapat sisi yang memiliki representasi yang sama, yaitu $r(v_2 v_4 | T_2) = r(v_3 v_4 | T_2)$ dan $r(v_1 v_2 | T_2) = r(v_1 v_3 | T_2) = r(v_2 v_3 | T_2)$ maka T_2 bukan himpunan pembeda sisi untuk G_2 .

Jadi, S_2 dengan kardinalitas enam adalah basis untuk $K_4 * K_1$ sehingga $\text{edim}(K_4 * K_1) = 6 = 2(4 - 1)$.

(3) Untuk $n = k - 1$

Andaikan Teorema 4.2.1 benar, yaitu benar bahwa $\text{edim}(K_{k-1} * K_1) = 2k - 4 = 2(k - 2) = 2((k - 1) - 1)$

(4) Untuk $n = k$

Dibuktikan Teorema 4.2.1 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\text{edim}(K_k * K_1) = 2(k - 1)$.

Diambil sebarang himpunan $S \subseteq V(K_k * K_1)$ dengan $|S| = 2k - 2$.

Dipilih $S = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$.

Selanjutnya, dibuktikan bahwa S adalah basis sisi untuk $K_k * K_1$ sebagai berikut:

Terdapat 5 kasus, yaitu:

1. Jika sisi $e_1 = v_i v_j$; $e_1 \in E(K_k * K_1)$; $v_i, v_j \in V(K_k * K_1)$, dan $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ dengan $i \neq j$, maka $d_G(e_1, v_i) = d_G(e_1, v_j) = 0$ dan jarak antara e_1 ke simpul lainnya di S adalah 1.
2. Jika sisi $e_2 = v_i u_j$; $e_2 \in E(K_k * K_1)$; $v_i, u_i, u_j \in V(K_k * K_1)$, dan $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ dengan $i \neq j$, maka $d_G(e_2, v_i) = d_G(e_2, u_j) = 0$, $d_G(e_2, u_i) = 2$ dan jarak antara e_2 ke simpul lainnya di S adalah 1.
3. Jika sisi $e_3 = v_i v_k$; $e_3 \in E(K_k * K_1)$; $v_i, v_k \in V(K_k * K_1)$, dan $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, maka $d_G(e_3, v_i) = 0$ dan jarak antara e_3 ke simpul lainnya di S adalah 1.
4. Jika sisi $e_4 = v_i u_k$; $e_4 \in E(K_k * K_1)$; $v_i, u_k \in V(K_k * K_1)$, dan $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, maka $d_G(e_4, v_i) = 0$, $d_G(e_4, u_i) = 2$ dan jarak antara e_4 ke simpul lainnya di S adalah 1.
5. Jika sisi $e_5 = v_k u_i$; $e_5 \in E(K_k * K_1)$; $v_k, u_i \in V(K_k * K_1)$, dan $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, maka $d_G(e_5, u_i) = 0$ dan jarak antara e_5 ke simpul lainnya di S adalah 1.

Dari 5 kasus di atas jelas bahwa tidak ada sisi yang mempunyai representasi sama terhadap S , maka S adalah himpunan pembeda sisi untuk graf $K_k * K_1$.

Di lain pihak, misalkan T adalah himpunan simpul yang memiliki kardinalitas $2k-3$, maka T bukan himpunan pembeda sisi untuk graf $K_k * K_1$, sebab:

- (a) Jika elemen T adalah $k-1$ simpul v_i dan $k-2$ simpul u_i ; $1 \leq i \leq k$, maka tanpa mengurangi keumuman bukti

dipilih $T = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-2}\}$. Misalkan sisi $g = v_{k-1}v_k$ dan $h = v_{k-1}u_k$; $g, h \in E(K_k * K_1)$.

Dalam hal ini $d_G(g, u_i) = d_G(h, u_i) = 1$, $d_G(g, v_{k-1}) = d_G(h, v_{k-1}) = 0$ dan $d_G(g, v_j) = d_G(h, v_j) = 1$; $1 \leq j \leq k-2$, dengan $v_j, v_{k-1}, u_i \in T$ sehingga $r(g|T) = r(h|T) = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$.

- (b) Jika elemen T adalah $k-2$ simpul v_i dan $k-1$ simpul u_i ; $1 \leq i \leq k$, maka tanpa mengurangi keumuman bukti dipilih $T = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-2}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$. Misalkan terdapat sisi $e = v_1v_{k-1}$ dan $s = v_1v_k$; $e, s \in E(K_k * K_1)$. Dalam hal ini $d_G(e, u_i) = d_G(s, u_i) = 1$, $d_G(e, v_1) = d_G(s, v_1) = 0$ dan $d_G(e, v_j) = d_G(s, v_j) = 1$; $2 \leq j \leq k-2$ dimana $v_1, v_j, u_i \in T$, sehingga $r(e|T) = r(s|T) = (0, 1, 1, \dots, 1)$.

Dari kemungkinan (a) dan (b) di atas diketahui bahwa untuk himpunan T dengan kardinalitas $2k-3$, terdapat sisi di $K_k * K_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap T , maka T bukan himpunan pembeda sisi untuk graf $K_k * K_1$. Oleh sebab itu, himpunan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ adalah himpunan pembeda sisi minimum untuk graf $K_k * K_1$. ■

Selain dimensi metrik sisi graf $K_n * K_1$, subbab ini juga membahas mengenai dimensi metrik sisi graf $C_n * K_1$ beserta pembuktiannya.

4.2.2 Dimensi metrik sisi graf $C_n * K_1$

Diberikan graf siklus C_n dengan himpunan simpul $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan graf trivial K_1 dengan himpunan simpul $V(K_1) = \{u\}$. Salinan ke- i dari graf K_1 dinotasikan dengan H_i dan himpunan simpul $V(H_i) = \{u_i\}$.

Graf korona lingkungan dari graf C_n dan graf K_1 dinotasikan sebagai $C_n * K_1$. Graf $C_n * K_1$ diperoleh dengan mengambil sebuah graf C_n dan H_1, H_2, \dots, H_n , kemudian untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ menghubungkan u_i dengan semua tetangga v_i di G . Graf $C_n * K_1$ memiliki himpunan simpul $(C_n * K_1) = V(C_n) \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup \dots \cup V(H_n) = V(C_n) \cup \bigcup_{i=1}^n V(H_i) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Dimensi metrik dari graf $C_n * K_1$ dengan $n \geq 3$ diberikan pada Teorema 4.2.2.

Teorema 4.2.2 *Jika G adalah graf siklus C_n berordo $n \geq 3$ dengan n ganjil dan H adalah graf trivial K_1 , maka dimensi metrik sisi dari graf hasil operasi korona lingkungan G dan H adalah*

$$\text{edim}(C_n * K_1) = \begin{cases} 4 & , n = 3, 5, 7, 9 \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & , n \geq 11 \end{cases}$$

Bukti:

(1) Untuk $n = 3$

Karena graf $C_3 * K_1$ isomorf dengan graf $K_3 * K_1$, maka benar bahwa $\text{edim}(C_3 * K_1) = 4$. (**Teorema 4.2.1**)

(2) Untuk $n = 5$

Akan ditunjukkan bahwa $\text{edim}(C_5 * K_1) = 4$ sebagai berikut:

Diambil himpunan $S_1 \subseteq C_5 * K_1$, dengan $S_1 = \{v_1, v_4, u_1, u_4\}$.

Misalkan $H_1 \cong C_5 * K_1$ dengan $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $E(H_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\} \cup \{v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3, v_4u_4, v_5u_5\}$.

Ilustrasi graf H_1 ditunjukkan pada Gambar 4.3.

Akan ditunjukkan bahwa S_1 adalah basis sisi untuk H_1 . Representasi sisi-sisi di H_1 terhadap S_1 adalah:

$$\begin{array}{ll}
r(v_1 v_2 | S_1) = (0,2,1,2) & r(v_3 u_4 | S_1) = (2,1,2,0) \\
r(v_1 u_2 | S_1) = (0,2,2,2) & r(v_4 v_5 | S_1) = (1,0,1,1) \\
r(v_1 u_5 | S_1) = (0,1,2,2) & r(v_4 u_3 | S_1) = (2,0,2,2) \\
r(v_2 v_3 | S_1) = (1,1,1,1) & r(v_4 u_5 | S_1) = (1,0,2,2) \\
r(v_2 u_1 | S_1) = (1,2,0,2) & r(v_5 v_1 | S_1) = (0,1,1,1) \\
r(v_2 u_3 | S_1) = (1,1,1,2) & r(v_5 u_1 | S_1) = (1,1,0,1) \\
r(v_3 v_4 | S_1) = (2,0,2,1) & r(v_5 u_4 | S_1) = (1,1,1,0) \\
r(v_3 u_2 | S_1) = (1,1,2,1) &
\end{array}$$

Karena representasi setiap sisi di H_1 terhadap S_1 berbeda, maka S_1 adalah himpunan pembeda untuk H_1 .

Selanjutnya, akan ditunjukkan kardinalitas terkecil dari S_1 adalah 4. Himpunan W_1 dengan kardinalitas tiga bukan himpunan pembeda, karena:

- Jika semua elemen W_1 adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 5$ dan dipilih himpunan $W_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_1 v_2, u_i) = d_G(v_2 v_3, u_i) = 1$ dengan $u_i \in W_1$, sehingga $r(v_1 v_2 | W_1) = r(v_2 v_3 | W_1) = (1,1,1)$.
- Jika semua elemen W_1 adalah simpul v_i dengan $1 \leq i \leq 5$ dan dipilih himpunan $W_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$.
Dalam hal ini, $d_G(v_1 v_2, v_1) = d_G(v_1 u_2, v_1) = 0$ dan $d_G(v_1 v_2, v_3) = d_G(v_1 u_2, v_3) = d_G(v_1 v_2, v_5) = d_G(v_1 u_2, v_5) = 1$, sehingga $r(v_1 v_2 | W_1) = r(v_1 u_2 | W_1) = (0,1,1)$.
- Jika elemen-elemen W_1 adalah satu simpul v_i dan dua simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 5$ dan dipilih himpunan $W_1 = \{v_4, u_2, u_4\}$.
Dalam hal ini, $d_G(v_4 u_3, v_4) = d_G(v_4 u_5, v_4) = 0$ dan $d_G(v_4 u_3, u_2) = d_G(v_4 u_5, u_2) = d_G(v_4 u_3, u_4) = d_G(v_4 u_5, u_4) = 2$, sehingga $r(v_4 u_3 | W_1) = r(v_4 u_5 | W_1) = (0,2,2)$.
- Jika elemen-elemen W_1 adalah dua simpul v_i dan satu simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 5$ dan dipilih himpunan $W_1 = \{v_1, v_2, u_5\}$.
Dalam hal ini, $d_G(v_2 v_3, v_1) = d_G(v_2 u_1, v_1) = 1$, $d_G(v_2 v_3, v_2) = d_G(v_2 u_1, v_2) = 1$ dan $d_G(v_2 v_3, u_5) =$

$$d_G(v_2u_1, u_5) = 2 \text{ , sehingga } r(v_2v_3|W_1) = r(v_2u_1|W_1) = (1,1,2).$$

Dari kemungkinan a sampai d di atas jelas bahwa untuk himpunan W_1 dengan kardinalitas tiga, didapatkan sisi di $C_5 * K_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap W_1 , sehingga W_1 bukan himpunan pembeda sisi untuk graf $C_5 * K_1$. Jadi himpunan $S_1 = \{v_1, v_4, u_1, u_4\}$ adalah basis sisi untuk graf $C_5 * K_1$.

(3) Untuk $n = 7$

Akan ditunjukkan bahwa $\text{edim}(C_7 * K_1) = 4$ sebagai berikut:

Diambil himpunan $S_2 \subseteq C_7 * K_1$ dengan $S_2 = \{v_6, u_1, u_4, u_7\}$.

Misalkan $H_2 \cong C_7 * K_1$ dengan

$$V(H_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$$

$$\text{dan } E(H_2) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1\} \cup$$

$$\{v_1u_2, v_1u_7, v_2u_1, v_2u_3, v_3u_2, v_3u_4, v_4u_3, v_4u_5, v_5u_4, v_5u_6, v_6u_5, v_6u_7, v_7u_1, v_7u_6\}.$$

Ilustrasi graf H_2 ditunjukkan pada Gambar 4.4.

Akan ditunjukkan bahwa S_2 adalah basis sisi untuk H_2 .

Representasi sisi-sisi di H_2 terhadap S_2 adalah:

$$r(v_1v_2|S_2) = (2,1,2,1)$$

$$r(v_1u_2|S_2) = (2,2,2,1)$$

$$r(v_1u_7|S_2) = (1,2,3,0)$$

$$r(v_2v_3|S_2) = (3,1,1,2)$$

$$r(v_2u_1|S_2) = (2,0,2,2)$$

$$r(v_2u_3|S_2) = (3,1,2,2)$$

$$r(v_3v_4|S_2) = (2,2,1,3)$$

$$r(v_3u_2|S_2) = (3,2,1,2)$$

$$r(v_3u_4|S_2) = (2,2,0,3)$$

$$r(v_4v_5|S_2) = (1,3,1,2)$$

$$r(v_4u_3|S_2) = (2,2,2,3)$$

$$r(v_4u_5|S_2) = (1,3,2,2)$$

$$r(v_5v_6|S_2) = (0,2,1,1)$$

$$r(v_5u_4|S_2) = (1,3,0,2)$$

$$r(v_5u_6|S_2) = (1,2,1,2)$$

$$r(v_6v_7|S_2) = (0,1,2,1)$$

$$r(v_6u_5|S_2) = (0,2,2,1)$$

$$r(v_6u_7|S_2) = (0,2,2,0)$$

$$r(v_7v_1|S_2) = (1,1,3,1)$$

$$r(v_7u_1|S_2) = (1,0,3,2)$$

$$r(v_7u_6|S_2) = (1,1,2,2)$$

Karena representasi setiap sisi di H_2 terhadap S_2 berbeda, maka S_2 adalah himpunan pembeda untuk H_2 .

Selanjutnya, akan ditunjukkan kardinalitas terkecil dari S_2 adalah 4. Himpunan W_2 dengan kardinalitas tiga bukan himpunan pembeda, karena:

- a. Jika semua elemen W_2 adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 7$ dan dipilih himpunan $W_2 = \{u_1, u_3, u_5\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_1u_7, u_i) = d_G(v_3u_2, u_i) = 2$ dengan $u_i \in W_1$, sehingga $r(v_1u_7|W_2) = r(v_3u_2|W_2) = (2,2,2)$.
- b. Jika semua elemen W_2 adalah simpul v_i dengan $1 \leq i \leq 7$ dan dipilih himpunan $W_2 = \{v_1, v_4, v_7\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_1v_2, v_1) = d_G(v_1u_2, v_1) = d_G(v_1v_2, v_4) = d_G(v_1u_2, v_4) = 2$ dan $d_G(v_1v_2, v_7) = d_G(v_1u_2, v_7) = 1$, sehingga $r(v_1v_2|W_2) = r(v_1u_2|W_2) = (0,2,1)$.
- c. Jika elemen-elemen W_2 adalah satu simpul v_i dan dua simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 7$ dan dipilih himpunan $W_2 = \{v_2, u_4, u_6\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_1v_2, v_2) = d_G(v_1u_2, v_2) = 1$ dan $d_G(v_1v_2, u_4) = d_G(v_1u_2, u_4) = d_G(v_1v_2, u_6) = d_G(v_1u_2, u_6) = 2$, sehingga $r(v_1v_2|W_2) = r(v_1u_2|W_2) = (1,2,2)$.
- d. Jika elemen-elemen W_2 adalah dua simpul v_i dan satu simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 7$ dan dipilih himpunan $W_2 = \{v_3, v_6, u_7\}$.
Dalam hal ini, $d_G(v_1v_2, v_3) = d_G(v_1u_2, v_3) = 1$, $d_G(v_1v_2, v_6) = d_G(v_1u_2, v_6) = 2$ dan $d_G(v_1v_2, u_7) = d_G(v_1u_2, u_7) = 1$, sehingga $r(v_1v_2|W_2) = r(v_1u_2|W_2) = (1,2,1)$.

Dari kemungkinan a sampai d di atas jelas bahwa untuk himpunan W_2 dengan kardinalitas tiga, didapatkan sisi di $C_7 * K_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap W_2 , sehingga W_2 bukan himpunan pembeda sisi untuk graf $C_7 * K_1$. Jadi himpunan $S_2 = \{v_6, u_1, u_4, u_7\}$ adalah basis sisi untuk graf $C_7 * K_1$.

(4) Untuk $n = 9$

Akan ditunjukkan bahwa $\text{edim}(C_9 * K_1) = 4$ sebagai berikut:

Diambil himpunan $S_3 \subseteq C_9 * K_1$ dengan $S_3 = \{u_1, u_4, u_5, u_7\}$.

Misalkan $H_3 \cong C_9 * K_1$ dengan

$$V(H_3) =$$

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \cup$$

$$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\} \text{ dan}$$

$$E(H_2) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_1\} \cup$$

$$\{v_1u_2, v_1u_9, v_2u_1, v_2u_3, v_3u_2, v_3u_4, v_4u_3, v_4u_5, v_5u_4, v_5u_6,$$

$$v_6u_5, v_6u_7, v_7u_6, v_7u_8, v_8u_7, v_8u_9, v_9u_1, v_9u_8\}. \text{ Ilustrasi graf } H_3$$

ditunjukkan pada Gambar 4.5.

Akan ditunjukkan bahwa S_3 adalah basis sisi untuk H_3 .

Representasi sisi-sisi di H_3 terhadap S_3 adalah:

$$r(v_1v_2|S_3) = (1,2,3,3)$$

$$r(v_1u_2|S_3) = (2,2,3,3)$$

$$r(v_1u_9|S_3) = (2,3,4,2)$$

$$r(v_2v_3|S_3) = (1,1,2,4)$$

$$r(v_2u_1|S_3) = (0,2,3,3)$$

$$r(v_2u_3|S_3) = (1,2,2,4)$$

$$r(v_3v_4|S_3) = (2,1,1,3)$$

$$r(v_3u_2|S_3) = (2,1,2,4)$$

$$r(v_3u_4|S_3) = (2,0,2,3)$$

$$r(v_4v_5|S_3) = (3,1,1,2)$$

$$r(v_4u_3|S_3) = (2,2,1,3)$$

$$r(v_4u_5|S_3) = (3,2,0,2)$$

$$r(v_5v_6|S_3) = (4,1,1,1)$$

$$r(v_5u_4|S_3) = (3,0,2,2)$$

$$r(v_5u_6|S_3) = (4,1,2,2)$$

$$r(v_6v_7|S_3) = (3,2,1,1)$$

$$r(v_6u_5|S_3) = (4,2,0,1)$$

$$r(v_6u_7|S_3) = (3,2,1,0)$$

$$r(v_7v_8|S_3) = (2,3,2,1)$$

$$r(v_7u_6|S_3) = (3,2,2,2)$$

$$r(v_7u_8|S_3) = (2,3,2,2)$$

$$r(v_8v_9|S_3) = (1,4,3,1)$$

$$r(v_8u_7|S_3) = (2,3,2,0)$$

$$r(v_8u_9|S_3) = (2,4,3,1)$$

$$r(v_9v_1|S_3) = (1,3,4,2)$$

$$r(v_9u_1|S_3) = (0,3,4,2)$$

$$r(v_9u_8|S_3) = (1,4,3,2)$$

Karena representasi setiap sisi di H_3 terhadap S_3 berbeda, maka S_3 adalah himpunan pembeda untuk H_3 .

Selanjutnya, akan ditunjukkan kardinalitas terkecil dari S_3 adalah 4. Himpunan W_3 dengan kardinalitas tiga bukan himpunan pembeda, karena:

- a. Jika semua elemen W_3 adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 9$ dan dipilih himpunan $W_3 = \{u_2, u_6, u_8\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_3v_4, u_2) = d_G(v_3u_4, u_2) = 1$, $d_G(v_3v_4, u_6) = d_G(v_3u_4, u_6) = 2$ dan $d_G(v_3v_4, u_8) = d_G(v_3u_4, u_8) = 4$, sehingga $r(v_3v_4|W_3) = r(v_3u_4|W_3) = (1,2,4)$.
- b. Jika semua elemen W_3 adalah simpul v_i dengan $1 \leq i \leq 9$ dan dipilih himpunan $W_3 = \{v_3, v_5, v_7\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_1v_2, v_3) = d_G(v_1u_2, v_3) = 1$ dan $d_G(v_1v_2, v_5) = d_G(v_1u_2, v_5) = d_G(v_1v_2, v_7) = d_G(v_1u_2, v_7) = 3$, sehingga $r(v_1v_2|W_3) = r(v_1u_2|W_3) = (1,3,3)$.
- c. Jika elemen-elemen W_3 adalah satu simpul v_i dan dua simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 9$ dan dipilih himpunan $W_3 = \{v_9, u_3, u_7\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_1v_2, v_9) = d_G(v_2u_1, v_9) = d_G(v_1v_2, u_3) = d_G(v_2u_1, u_3) = 1$ dan $d_G(v_1v_2, u_7) = d_G(v_2u_1, u_7) = 3$, sehingga $r(v_1v_2|W_3) = r(v_2u_1|W_3) = (1,1,3)$.
- d. Jika elemen-elemen W_3 adalah dua simpul v_i dan satu simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 9$ dan dipilih himpunan $W_3 = \{v_1, v_8, u_9\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_1v_2, v_1) = d_G(v_1u_2, v_1) = 0$, $d_G(v_1v_2, v_8) = d_G(v_1u_2, v_8) = 2$ dan $d_G(v_1v_2, u_9) = d_G(v_1u_2, u_9) = 1$, sehingga $r(v_1v_2|W_3) = r(v_1u_2|W_3) = (0,2,1)$.

Dari kemungkinan a sampai d di atas jelas bahwa untuk himpunan W_3 dengan kardinalitas tiga, didapatkan sisi di $C_9 * K_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap W_3 , sehingga W_3 bukan himpunan pembeda sisi untuk graf $C_9 * K_1$. Jadi himpunan $S_3 = \{u_1, u_4, u_5, u_7\}$ adalah basis sisi untuk graf $C_9 * K_1$.

(5) Untuk $n \geq 11$

Teorema 4.2.2 dibuktikan dengan induksi matematika sebagai berikut:

(a) Untuk $n = 11$

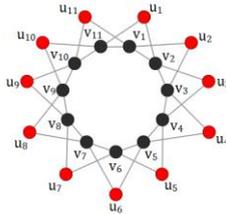
Dibuktikan Teorema 4.2.2 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\text{edim}(C_{11} * K_1) = \left\lfloor \frac{11}{3} \right\rfloor = 4$.

Diambil himpunan $S_4 \subseteq C_{11} * K_1$ dengan $S_4 = \{u_1, u_4, u_7, u_{10}\}$.

Misalkan $H_4 \cong C_{11} * K_1$ dengan $V(H_4) =$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\} \cup$
 $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}\}$ dan $E(H_4) =$
 $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_{10},$
 $v_{10}v_{11}, v_{11}v_1\} \cup \{v_1u_2, v_1u_{10}, v_2u_1, v_2u_3, v_3u_2, v_3u_4,$
 $v_4u_3, v_4u_5, v_5u_4, v_5u_6, v_6u_5, v_6u_7, v_7u_6, v_7u_8, v_8u_7,$
 $v_8u_9, v_9u_8, v_9u_{10}, v_{10}u_9, v_{10}u_{11}, v_{11}u_{10}, v_{11}u_1\}$.

Ilustrasi graf H_4 ditunjukkan pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Graf $C_{11} * K_1$

Akan ditunjukkan bahwa S_4 adalah basis sisi untuk H_4 .

Representasi sisi-sisi di H_4 terhadap S_4 adalah:

$$\begin{array}{ll} r(v_1v_2|S_4) = (1,2,5,2) & r(v_2v_3|S_4) = (1,1,4,3) \\ r(v_1u_2|S_4) = (2,2,5,2) & r(v_2u_1|S_4) = (0,2,5,2) \\ r(v_1u_{11}|S_4) = (2,3,4,2) & r(v_2u_3|S_4) = (1,2,4,3) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
r(v_3v_4|S_4) = (2,1,3,4) & r(v_7u_8|S_4) = (4,3,2,2) \\
r(v_3u_2|S_4) = (2,1,3,3) & r(v_8v_9|S_4) = (3,4,1,1) \\
r(v_3u_4|S_4) = (2,0,3,4) & r(v_8u_7|S_4) = (4,3,0,2) \\
r(v_4v_5|S_4) = (3,1,2,5) & r(v_8u_9|S_4) = (3,4,1,2) \\
r(v_4u_3|S_4) = (2,2,3,4) & r(v_9v_{10}|S_4) = (2,5,2,1) \\
r(v_4u_5|S_4) = (3,2,2,5) & r(v_9u_8|S_4) = (3,4,2,1) \\
r(v_5v_6|S_4) = (4,1,1,4) & r(v_9u_{10}|S_4) = (2,5,2,0) \\
r(v_5u_4|S_4) = (3,0,2,5) & r(v_{10}v_{11}|S_4) = (1,4,3,1) \\
r(v_5u_6|S_4) = (4,1,2,4) & r(v_{10}u_9|S_4) = (2,5,2,2) \\
r(v_6v_7|S_4) = (5,2,1,3) & r(v_{10}u_{11}|S_4) = (2,4,3,2) \\
r(v_6u_5|S_4) = (4,2,1,4) & r(v_{11}v_1|S_4) = (1,3,4,1) \\
r(v_6u_7|S_4) = (5,3,0,3) & r(v_{11}u_1|S_4) = (1,4,3,0) \\
r(v_7v_8|S_4) = (4,3,1,2) & r(v_{11}u_{10}|S_4) = (0,3,4,1) \\
r(v_7u_6|S_4) = (5,2,2,3) &
\end{array}$$

Karena representasi setiap sisi di H_4 terhadap S_4 berbeda, maka S_4 adalah himpunan pembeda untuk H_4 .

Selanjutnya, akan ditunjukkan kardinalitas terkecil dari S_4 adalah 4. Himpunan W_4 dengan kardinalitas tiga bukan himpunan pembeda, karena:

- a. Jika semua elemen W_4 adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 11$ dan dipilih himpunan $W_4 = \{u_1, u_4, u_6\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_3v_4, u_1) = d_G(v_3u_2, u_1) = d_G(v_3v_4, u_6) = d_G(v_3u_2, u_6) = 2$ dan $d_G(v_3v_4, u_4) = d_G(v_3u_2, u_4) = 4$, sehingga $r(v_3v_4|W_4) = r(v_3u_2|W_4) = (2,1,2)$.
- b. Jika semua elemen W_4 adalah simpul v_i dengan $1 \leq i \leq 11$ dan dipilih himpunan $W_4 = \{v_2, v_8, v_{11}\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_6u_7, v_2) = d_G(v_7u_6, v_2) = 4$, $d_G(v_6u_7, v_8) = d_G(v_7u_6, v_8) = 1$ dan $d_G(v_6u_7, v_{11}) = d_G(v_7u_6, v_{11}) = 5$, sehingga $r(v_6u_7|W_4) = r(v_7u_6|W_4) = (4,1,5)$.
- c. Jika elemen-elemen W_4 adalah satu simpul v_i dan dua simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 11$ dan dipilih himpunan $W_4 = \{v_9, u_8, u_9\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_1v_2, v_9) = d_G(v_1u_2, v_9) =$

$$d_G(v_1v_2, u_9) = d_G(v_1u_2, u_9) = 3 \quad \text{dan} \quad d_G(v_1v_2, u_8) = d_G(v_1u_2, u_8) = 4, \quad \text{sehingga} \quad r(v_1v_2|W_4) = r(v_2u_1|W_4) = (3,4,3).$$

- d. Jika elemen-elemen W_4 adalah dua simpul v_i dan satu simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 11$ dan dipilih himpunan $W_4 = \{v_5, v_8, u_1\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_2v_3, v_5) = d_G(v_2u_3, v_5) = 2$, $d_G(v_2v_3, v_8) = d_G(v_2u_3, v_8) = 5$ dan $d_G(v_2v_3, u_1) = d_G(v_2u_3, u_1) = 1$, sehingga $r(v_2v_3|W_4) = r(v_2u_3|W_4) = (2,5,1)$.

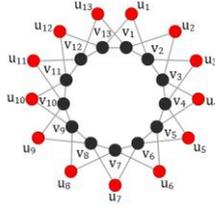
Dari kemungkinan a sampai d di atas jelas bahwa untuk himpunan W_4 dengan kardinalitas tiga, didapatkan sisi di $C_{11} * K_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap W_4 , sehingga W_4 bukan himpunan pembeda sisi untuk graf $C_{11} * K_1$. Jadi himpunan $S_4 = \{u_1, u_4, u_7, u_{10}\}$ adalah basis sisi untuk graf $C_{11} * K_1$.

(b) Untuk $n = 13$

Dibuktikan Teorema 4.2.2 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\text{edim}(C_{13} * K_1) = \left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor = 5$.

Diambil himpunan $S_5 \subseteq C_{13} * K_1$ dengan $S_5 = \{u_1, u_4, u_7, u_{10}, u_{13}\}$. Misalkan $H_5 \cong C_{13} * K_1$ dengan $V(H_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}$ dan $E(H_5) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_{10}, v_{10}v_{11}, v_{11}v_{12}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_1\} \cup \{v_1u_2, v_1u_{13}, v_2u_1, v_2u_3, v_3u_2, v_3u_4, v_4u_3, v_4u_5, v_5u_4, v_5u_6, v_6u_5, v_6u_7, v_7u_6, v_7u_8, v_8u_7, v_8u_9, v_9u_8, v_9u_{10}, v_{10}u_9, v_{10}u_{11}, v_{11}u_{10}, v_{11}u_{12}, v_{12}u_{11}, v_{12}u_{13}, v_{13}u_{11}, v_{13}u_{12}\}$.

Ilustrasi graf H_5 ditunjukkan pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Graf $C_{13} * K_1$

Akan ditunjukkan bahwa S_5 adalah basis sisi untuk H_5 .
Representasi sisi-sisi di H_5 terhadap S_5 adalah:

$$\begin{array}{ll}
 r(v_1 v_2 | S_5) = (1, 2, 5, 4, 1) & r(v_7 u_8 | S_5) = (6, 3, 2, 2, 5) \\
 r(v_1 u_2 | S_5) = (2, 2, 5, 4, 1) & r(v_8 v_9 | S_5) = (5, 4, 1, 1, 4) \\
 r(v_1 u_{13} | S_5) = (2, 3, 6, 3, 0) & r(v_8 u_7 | S_5) = (5, 3, 0, 2, 5) \\
 r(v_2 v_3 | S_5) = (1, 1, 4, 5, 2) & r(v_8 u_9 | S_5) = (5, 4, 1, 2, 4) \\
 r(v_2 u_1 | S_5) = (0, 2, 5, 4, 2) & r(v_9 v_{10} | S_5) = (4, 5, 2, 1, 3) \\
 r(v_2 u_3 | S_5) = (1, 2, 4, 5, 2) & r(v_9 u_8 | S_5) = (5, 4, 2, 1, 4) \\
 r(v_3 v_4 | S_5) = (2, 1, 3, 6, 3) & r(v_9 u_{10} | S_5) = (4, 5, 2, 0, 3) \\
 r(v_3 u_2 | S_5) = (2, 1, 4, 5, 2) & r(v_{10} v_{11} | S_5) = (3, 6, 3, 1, 2) \\
 r(v_3 u_4 | S_5) = (2, 0, 3, 6, 3) & r(v_{10} u_9 | S_5) = (4, 5, 2, 2, 3) \\
 r(v_4 v_5 | S_5) = (3, 1, 2, 5, 4) & r(v_{10} u_{11} | S_5) = (3, 6, 3, 2, 2) \\
 r(v_4 u_3 | S_5) = (2, 2, 3, 6, 3) & r(v_{11} v_{12} | S_5) = (2, 5, 4, 1, 1) \\
 r(v_4 u_5 | S_5) = (3, 2, 2, 5, 4) & r(v_{11} u_{10} | S_5) = (3, 6, 3, 0, 2) \\
 r(v_5 v_6 | S_5) = (4, 1, 1, 4, 5) & r(v_{11} u_{12} | S_5) = (2, 5, 4, 1, 2) \\
 r(v_5 u_4 | S_5) = (3, 0, 2, 5, 4) & r(v_{12} v_{13} | S_5) = (1, 4, 5, 2, 1) \\
 r(v_5 u_6 | S_5) = (4, 1, 2, 4, 5) & r(v_{12} u_{11} | S_5) = (2, 5, 4, 2, 1) \\
 r(v_6 v_7 | S_5) = (5, 2, 1, 3, 6) & r(v_{12} u_{13} | S_5) = (2, 4, 5, 2, 1) \\
 r(v_6 u_5 | S_5) = (4, 2, 1, 4, 5) & r(v_{13} v_1 | S_5) = (1, 3, 6, 3, 1) \\
 r(v_6 u_7 | S_5) = (5, 2, 0, 3, 6) & r(v_{13} u_{11} | S_5) = (0, 3, 6, 3, 2) \\
 r(v_7 v_8 | S_5) = (6, 3, 1, 2, 5) & r(v_{13} u_{12} | S_5) = (1, 4, 5, 2, 2) \\
 r(v_7 u_6 | S_5) = (5, 2, 2, 3, 6) &
 \end{array}$$

Karena representasi setiap sisi di H_5 terhadap S_5 berbeda, maka S_5 adalah himpunan pembeda untuk H_5 .

Selanjutnya, akan ditunjukkan kardinalitas terkecil dari S_5 adalah 5. Himpunan W_5 dengan kardinalitas empat bukan himpunan pembeda, karena:

- a. Jika semua elemen W_5 adalah simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 13$ dan dipilih himpunan $W_5 = \{u_1, u_4, u_8, u_{12}\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_5v_6, u_1) = d_G(v_5u_6, u_1) = 4$, $d_G(v_5v_6, u_4) = d_G(v_5u_6, u_4) = 1$, $d_G(v_5v_6, u_8) = d_G(v_5u_6, u_8) = 2$ dan $d_G(v_5v_6, u_{12}) = d_G(v_5u_6, u_{12}) = 6$, sehingga $r(v_5v_6|W_5) = r(v_5u_6|W_5) = (4,1,2,6)$.
- b. Jika semua elemen W_5 adalah simpul v_i dengan $1 \leq i \leq 13$ dan dipilih himpunan $W_5 = \{v_3, v_5, v_9, v_{11}\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_7u_8, v_3) = d_G(v_8u_7, v_3) = 4$, $d_G(v_7u_8, v_5) = d_G(v_8u_7, v_5) = 2$, $d_G(v_7u_8, v_9) = d_G(v_8u_7, v_9) = 1$ dan $d_G(v_7u_8, v_{11}) = d_G(v_8u_7, v_{11}) = 3$, sehingga $r(v_7u_8|W_5) = r(v_8u_7|W_5) = (4,2,1,3)$.
- c. Jika elemen-elemen W_5 adalah satu simpul v_i dan tiga simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 13$ dan dipilih himpunan $W_5 = \{v_9, u_5, u_6, u_8\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_9v_{10}, v_9) = d_G(v_9u_{10}, v_9) = 0$, $d_G(v_9v_{10}, u_5) = d_G(v_9u_{10}, u_5) = 4$, $d_G(v_9v_{10}, u_6) = d_G(v_9u_{10}, u_6) = 3$ dan $d_G(v_9v_{10}, u_8) = d_G(v_9u_{10}, u_8) = 1$, sehingga $r(v_9v_{10}|W_5) = r(v_9u_{10}|W_5) = (0,4,3,1)$.
- d. Jika elemen-elemen W_5 adalah tiga simpul v_i dan satu simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 13$ dan dipilih himpunan $W_5 = \{v_2, v_7, v_{11}, u_8\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_5u_6, v_2) = d_G(v_6u_5, v_2) = 3$, $d_G(v_5u_6, v_7) = d_G(v_6u_5, v_7) = 1$, $d_G(v_5u_6, v_{11}) = d_G(v_6u_5, v_{11}) = 5$ dan $d_G(v_5u_6, u_8) = d_G(v_6u_5, u_8) = 2$, sehingga $r(v_5u_6|W_5) = r(v_6u_5|W_5) = (3,1,5,2)$.
- e. Jika elemen-elemen W_5 adalah dua simpul v_i dan dua simpul u_i dengan $1 \leq i \leq 13$ dan dipilih himpunan $W_5 = \{v_4, v_{12}, u_5, u_6\}$. Dalam hal ini, $d_G(v_{10}u_{11}, v_4) = d_G(v_{11}u_{10}, v_4) = 6$, $d_G(v_{10}u_{11}, v_{12}) = d_G(v_{11}u_{10}, v_{12}) =$

$$1, \quad d_G(v_{10}u_{11}, u_5) = d_G(v_{11}u_{10}, u_5) = 5 \quad \text{dan} \\ d_G(v_{10}u_{11}, u_6) = d_G(v_{11}u_{10}, u_6) = 4, \quad \text{sehingga} \\ r(v_{10}u_{11}|W_5) = r(v_{11}u_{10}|W_5) = (6,1,5,4).$$

Dari kemungkinan a sampai e di atas jelas bahwa untuk himpunan W_5 dengan kardinalitas empat, didapatkan sisi di $C_{13} * K_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap W_5 , sehingga W_5 bukan himpunan pembeda sisi untuk graf $C_{13} * K_1$. Jadi himpunan $S_5 = \{u_1, u_4, u_7, u_{10}, u_{13}\}$ adalah basis sisi untuk graf $C_{13} * K_1$.

(c) Untuk $n = k - 1$

Andaikan Teorema 4.2.2 benar, yaitu benar bahwa $\text{edim}(C_{k-1} * K_1) = \left\lfloor \frac{k-1}{3} \right\rfloor$.

(d) Untuk $n = k$

Dibuktikan Teorema 4.2.2 benar, yaitu dibuktikan benar bahwa $\text{edim}(C_k * K_1) = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$.

Diambil himpunan $L \subseteq V(C_k * K_1)$ dengan $|L| = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$.

Dipilih $L \subseteq \{u_i \in H_i | i = 3t + 1, t \in I = \{0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor - 1\}\} = \{u_1, u_4, u_7, \dots, u_p\}$ dengan $p = \begin{cases} k & , k = 3t + 1 \\ k - 1 & , k = 3t + 2 \\ k - 2 & , k = 3t. \end{cases}$

Selanjutnya, dibuktikan bahwa L adalah basis sisi untuk $C_k * K_1$. Dengan pengamatan langsung pada graf $C_k * K_1$, akan ditunjukkan bahwa $\text{edim}(C_k * K_1) = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$, untuk $k \geq 11$, dengan langkah – langkah sebagai berikut:

- I. Membuat matriks jarak dari graf $C_k * K_1$ (matriks yang elemen-elemennya adalah jarak antara sisi dan simpul di $C_k * K_1$). Elemen-elemen dari setiap baris matriks yang terbentuk, secara urut dari kiri ke kanan menyatakan

koordinat ke-1, ke-2, ... , ke- k dari representasi sisi $e \in C_k * K_1$.

II. Mengamati nilai yang tunggal pada :

- 1) Satu kolom pertama matriks jarak dari $C_k * K_1$, maka diperoleh beberapa representasi sisi dengan tunggal dari satu koordinat pertama. Misalkan sisi-sisi dengan representasinya yang tunggal ini dihimpun dalam himpunan F_1 .
- 2) Dua kolom pertama matriks jarak dari $C_k * K_1$, maka diperoleh beberapa representasi sisi dengan tunggal dari satu koordinat pertama. Misalkan sisi-sisi dengan representasinya yang tunggal ini dihimpun dalam himpunan F_2 .

Demikian seterusnya dengan cara yang sama, pengamatan dilanjutkan sampai dengan $\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$ kolom pertama matriks jarak. Misalkan simpul-simpul dengan representasi tunggal yang diperoleh ini dihimpun dalam himpunan T .

Dengan $\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$ – pengamatan di atas diperoleh himpunan $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor} = E(C_k * K_1)$ dengan semua representasi sisinya terhadap L berbeda. Jadi L adalah himpunan pembeda dari $C_k * K_1$. Bilangan $\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$ adalah kardinalitas minimal dari L . Sebab, himpunan $W_6 \subseteq L$ dengan kardinalitas kurang dari $\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor - 1$ bukan himpunan pembeda dari $C_k * K_1$. Sebab, misalkan tanpa mengurangi keumuman bukti diambil $W_6 = \{u_1, u_4, u_7, \dots, u_{p-1}\}$ dan $p = k$, maka representasi $r(v_{k-1}v_k|W_6) = r(v_k u_{k-1}|W_6)$. Jadi, L adalah basis sisi untuk $C_k * K_1$. ■

Sebagai contoh pengamatan langsung proses penentuan basis untuk $C_k * K_1$ di atas diambil $k = 11$. Elemen- elemen matriks jarak sisi dari $C_{11} * K_1$ seperti pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Matriks Jarak Sisi dari Graf $C_{11} * K_1$.

| $d_G(e, b)$ | u_1 | u_4 | u_7 | u_{10} |
|-------------|-------|-------|-------|----------|
| v_1v_2 | 1 | 2 | 5 | 2 |
| v_1u_2 | 2 | 2 | 5 | 2 |
| v_1u_{11} | 2 | 3 | 4 | 2 |
| v_2v_3 | 1 | 1 | 4 | 3 |
| v_2u_1 | 0 | 2 | 5 | 2 |
| v_2u_3 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| v_3v_4 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| v_3u_2 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| v_3u_4 | 2 | 0 | 3 | 4 |
| v_4v_5 | 3 | 1 | 2 | 5 |
| v_4u_3 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| v_4u_5 | 3 | 2 | 2 | 5 |
| v_5v_6 | 4 | 1 | 1 | 4 |
| v_5u_4 | 3 | 0 | 2 | 5 |
| v_5u_6 | 4 | 1 | 2 | 4 |
| v_6v_7 | 5 | 2 | 1 | 3 |
| v_6u_5 | 4 | 2 | 1 | 4 |
| v_6u_7 | 5 | 3 | 0 | 3 |
| v_7v_8 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| v_7u_6 | 5 | 2 | 2 | 3 |
| v_7u_8 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| v_8v_9 | 3 | 4 | 1 | 1 |
| v_8u_7 | 4 | 3 | 0 | 2 |
| v_8u_9 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| v_9v_{10} | 2 | 5 | 2 | 1 |
| v_9u_8 | 3 | 4 | 2 | 1 |

| | | | | |
|----------------|---|---|---|---|
| v_9u_{10} | 2 | 5 | 2 | 0 |
| $v_{10}v_{11}$ | 1 | 4 | 3 | 1 |
| $v_{10}u_9$ | 2 | 5 | 2 | 2 |
| $v_{10}u_{11}$ | 2 | 4 | 3 | 2 |
| $v_{11}v_1$ | 1 | 3 | 4 | 1 |
| $v_{11}u_1$ | 1 | 4 | 3 | 0 |
| $v_{11}u_{10}$ | 0 | 3 | 4 | 1 |

Keterangan Tabel 4.2 :

$$L := \{u_1, u_4, u_7, u_{10}\}$$

$d_G(e, b) :=$ jarak dari sisi $a \in C_k * K_1$ dengan simpul $b \in Z$.

$r(v_1v_2|L) := (1,2,5,2)$ yaitu baris pertama Tabel 2.

Hasil pengamatan dari :

- 1) Satu kolom pertama matriks jarak dari $C_{11} * K_1$:
Tidak diperoleh representasi sebagai representasi simpul tunggal dari pengamatan satu koordinat pertama. $F_1 = \{\}$.
- 2) Dua kolom pertama matriks jarak dari $C_{11} * K_1$:
Diperoleh representasi $v_1v_2, v_1u_{11}, v_2v_3, v_2u_1, v_2u_3, v_3u_4, v_4v_5, v_4u_5, v_5u_4, v_6u_5, v_6u_7, v_{10}u_{11}, v_{11}v_1, v_{11}u_1$ dan $v_{11}u_{10}$ sebagai representasi sisi tunggal dari pengamatan dua koordinat pertama. $F_2 = \{v_1v_2, v_1u_{11}, v_2v_3, v_2u_1, v_2u_3, v_3u_4, v_4v_5, v_5u_4, v_6u_5, v_6u_7, v_{10}u_{11}, v_{11}v_1, v_{11}u_1, v_{11}u_{10}\}$.
- 3) Tiga kolom pertama matriks jarak dari $C_{11} * K_1$:
Diperoleh representasi $v_1v_2, v_1u_2, v_1u_{11}, v_2v_3, v_2u_1, v_2u_3, v_3u_4, v_4v_5, v_4u_5, v_4u_3, v_5v_6, v_5u_4, v_5u_6, v_6v_7, v_6u_5, v_6u_7, v_7v_8, v_7u_6, v_7u_8, v_8u_7, v_9u_8, v_{10}u_{11}, v_{11}v_1, v_{11}u_1$ dan $v_{11}u_{10}$ sebagai representasi sisi tunggal dari pengamatan tiga koordinat pertama. $F_3 = \{v_1v_2, v_1u_2, v_1u_{11}, v_2v_3, v_2u_1, v_2u_3, v_3u_4, v_4v_5, v_4u_5, v_4u_3, v_5v_6,$

$$\{v_5u_4, v_5u_6, v_6v_7, v_6u_5, v_6u_7, v_7v_8, v_7u_6, v_7u_8, \\ v_8u_7, v_9u_8, v_{10}u_{11}, v_{11}v_1, v_{11}u_1, v_{11}u_{10}\}.$$

- 4) Empat kolom pertama matriks jarak dari $C_{11} * K_1$:
 Diperoleh representasi semua sisi $C_{11} * K_1$ sebagai representasi sisi tunggal dari pengamatan empat koordinat pertama. $F_4 = T = E(C_{11} * K_1)$.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB V

PENUTUP

5.1 KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, maka telah dihasilkan dimensi metrik dan dimensi metrik sisi graf korona lingkungan bandul yaitu:

1. Untuk $n \geq 3$, $\dim(K_n * K_1) = n - 1$.
2. Untuk $n \geq 3$ dan n ganjil,

$$\dim(C_n * K_1) = \begin{cases} 2 & , n = 3 \\ 3 & , n = 5 \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor & , n \geq 7. \end{cases}$$

3. Untuk $n \geq 3$, $\text{edim}(K_n * K_1) = 2(n - 1)$.
4. Untuk $n \geq 3$ dan n ganjil,

$$\text{edim}(C_n * K_1) = \begin{cases} 4 & , n = 3, 5, 7, 9 \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor & , n \geq 11 \end{cases}$$

5.2 SARAN

Penelitian mengenai dimensi metrik dan dimensi metrik sisi graf korona lingkungan dapat dilanjutkan untuk graf selain graf teratur, misalnya graf bipartit.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A. dan Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105, 99–113.
- [2] Khuller, S., Raghavachari, B., dan Rosenfeld, A. (1996). Landmarks in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 70, 217-229.
- [3] Sebő, A., dan Tannier, E. (2004). On metric generators of graphs. *Mathematics of Operations Research*, 29, 383-393.
- [4] Iswadi, H., Baskoro, E. T., dan Simanjuntak, R. (2011). On the metric dimension of corona pro-duct of graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 52, 155-170.
- [5] Yero, I. G., Kuziak, D., dan Rodríguez-Velázquez, J. A. (2011). On the metric dimension of corona product graphs. *Computers & Mathematics with Applications*, 61, 2793-2798.
- [6] Rinurwati, Suprajitno, H., dan Slamin. (2017). On metric dimension of edge-corona graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 102, 965-978.
- [7] Rinurwati, Slamin dan Suprajitno, H. (2017). On (local) metric dimension of graphs with m -pendant points. *Proceeding on International Conference on Mathematics: Education, Theory and Application*, 855, 01235-1–01235-8.
- [8] Rinurwati, Suprajitno, H., dan Slamin. (2017). On local adjacency metric dimension of some wheel related graphs

- with pendant points. *Proceedings of AIP Conference*, 1867, 00265-1–00265-6.
- [9] Gopalapillai, I. (2011). The spectrum of neighbourhood corona of graphs. *Kragujevac journal of mathematics*, 35, 493-500.
- [10] Kelenc, A., Tratnik, N., dan Yero, I. G. (2018). Uniquely identifying the edges of a graph: the edge metric dimension. *Discrete Applied Mathematics*, 251, 204-220.
- [11] Nasir, R., Zafar, S., dan Zahid, Z. (2018). Edge metric dimension of graphs. *Ars Combin*, 147, 143-156.
- [12] Filipović, V., Kartelj, A., dan Kratica, J. (2019). Edge Metric Dimension of Some Generalized Petersen Graphs. *Results in Mathematics*, 74, 182.
- [13] Peterin, I., dan Yero, I.G. (2018). Edge metric dimension of some graph operations. *Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society*.
<https://doi.org/10.1007/s40840-019-00816-7>.
- [14] Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. (2015). *Graphs & Digraphs*, 6th ed. New York: Chapman and Hall/CRC.
- [15] Frucht, R., dan Harary, F. (1970). On the corona of two graphs. *Aeq. Math*, 4 : 322-325.
- [16] Hou, Y., dan Shiu, W. C. (2010). The spectrum of the edge corona of two graphs. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 20 : 586-594.

BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Malang, 25 Juni 1998, merupakan anak pertama dari 2 bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu di SDIT Al-Istiqomah Tangerang, SMP Al-Izzah Batu dan SMAN 2 Tangerang. Setelah lulus dari SMA, Penulis mengikuti SBMPTN dan diterima di Departemen Matematika FSAD ITS pada tahun 2016.

