



TESIS – KM 185401

**SPEKTRUM GRAF KORONA SISI PANGKAT DUA PADA  
MATRIKS KETETANGGAAN, LAPLACIAN, DAN SIGNLESS  
LAPLACIAN**

SYAIFUL RIDZAL ZULKARNAIN  
06111750010011

DOSEN PEMBIMBING  
Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

PROGRAM MAGISTER  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA 2020





TESIS – KM185401

**ON SPECTRA OF SQUARE EDGE-CORONA GRAPHS OF  
ADJACENCY, LAPLACIAN, AND SIGNLESS LAPLACIAN  
MATRICES**

SYAIFUL RIDZAL ZULKARNAIN  
06111750010011

SUPERVISOR  
Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

MASTER PROGRAM  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF SCIENCE AND DATA ANALITYCS  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA 2020



**LEMBAR PENGESAHAN TESIS**

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
**Magister Matematika (M.Mat)**

di

**Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Oleh:

**SYAIFUL RIDZAL ZULKARNAIN**

**NRP: 06111750010011**

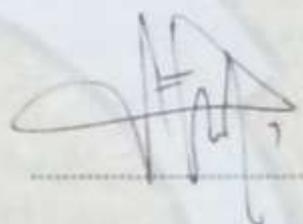
Tanggal Ujian: 3 Agustus 2020

Periode Wisuda: September 2020

Disetujui oleh:

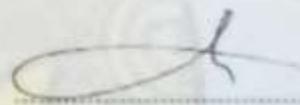
**Pembimbing:**

Dr. Dra. Rinurwati, M.Si  
NIP: 19640304 198903 2 002

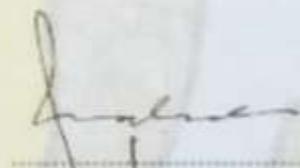


**Penguji:**

1. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.  
NIP: 19611115 198703 1 003



2. Dr. Mahmud Yunus, M.Si.  
NIP : 19620407 198703 1 003



3. Dr. Darmaji, S.Si., M.T.  
NIP : 19691015 199412 1 001



4. Dr. Dwi Ratna S., S.Si., M.T.  
NIP: 19690405 199403 2 003





**SPEKTRUM GRAF KORONA SISI PANGKAT DUA  
PADA MATRIKS KETETANGGAAN, LAPLACIAN, DAN SIGNLESS  
LAPLACIAN**

Nama Mahasiswa : Syaiful Ridzal Zulkarnain  
NRP : 06111750010011  
Pembimbing : Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

**Abstrak**

Diberikan dua graf terhubung  $G$  dan  $H$ . Ordo dan ukuran dari  $G$  dan  $H$  berturut-turut adalah  $u$  dan  $v$ , dan  $m$  dan  $n$ . Graf  $G$  korona sisi pangkat dua  $H$ , dinotasikan dengan  $G \diamond^2 H$  dan didefinisikan sebagai  $G \diamond^2 H := (G \diamond H) \diamond H$ , adalah suatu graf yang didapatkan dari sebuah graf  $G$ ,  $v$  salinan pertama dari  $H$  yaitu  $H_h$ , dengan  $h \in \{1, 2, \dots, v\}$ , dan  $v(1 + 2n + m)$  salinan kedua dari  $H$  yaitu  $H_{hk}$ , dengan  $h \in \{1, 2, \dots, v\}$  dan  $k \in \{1, 2, \dots, 1 + 2n + m\}$ , dan menghubungkan semua titik ujung sisi  $e_h \in E(G)$ , dengan  $e_h = i_h j_h$  dan  $i_h, j_h \in V(G)$  ke semua titik di  $H_h$  kemudian menghubungkan semua titik ujung sisi  $e_k \in E(G \diamond H)$ , ke semua titik di  $H_{hk}$ . Pada Tesis ini diperoleh spektrum graf dari matriks ketetanggaan, matriks Laplacian dan matriks signless-Laplacian dari graf  $G \diamond^2 H$  dan hasil analisisnya.

**Kata kunci:** Korona Sisi Pangkat Dua, Spektrum Graf, Laplacian, Signless-Laplacian.



**ON SPECTRA OF SQUARE EDGE-CORONA GRAPHS  
OF ADJACENCY, LAPLACIAN, AND SIGNLESS LAPLACIAN  
MATRICES**

Name : Syaiful Ridzal Zulkarnain  
NRP : 06111750010011  
Supervisor : Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

**Abstract**

*Given two connected graphs,  $G$  and  $H$ . The Order and size of  $G$  and  $H$ , are  $u$  and  $v$ , and  $m$  and  $n$ , respectively. Graph  $G$  square edge-corona  $H$ , denoted by  $G \diamond^2 H$  and defined as  $G \diamond^2 H := (G \diamond H) \diamond H$ , that is a graph obtained from  $G$ , the first  $v$ -copies of  $H$  that is  $H_h$ , with  $h \in \{1, 2, \dots, v\}$ , and the second  $v(1 + 2n + m)$ -copies of  $H$  that is  $H_{hk}$ , with  $h \in \{1, 2, \dots, v\}$  and  $k \in \{1, 2, \dots, 1 + 2n + m\}$  and joining the terminal vertices of  $e_h \in E(G)$ , with  $e_h = i_h j_h$  and  $i_h, j_h \in V(G)$ , to all vertices of  $H_h$ , and then joining the terminal vertices of  $e_k = r_k s_k$ ,  $e_k \in G \diamond H$ , to all vertices of  $H_{hk}$ . In this thesis obtained the spectrum of the adjacency, Laplacian, and signless-Laplacian matrices of the graph  $G \diamond^2 H$  and the analysis result*

**Keywords :** *Square Edge-Corona, Spectrum Graphs, Adjacency, Laplacian, Signless-Laplacian.*



## KATA PENGANTAR

Maha Suci Allah, dzat yang Maha Kuasa atas segala sesuatu. Sebesar apapun suatu masalah adalah kecil dihadapan-Nya. Segala puji hanya bagi Allah yang atas pertolongan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan laporan Tesis yang berjudul:

### **SPEKTRUM GRAF KORONA SISI PANGKAT DUA PADA MATRIKS KETETANGGAAN, LAPLACIAN, DAN SIGNLESS LAPLACIAN**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Pascasarjana Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Atas bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, maka berbagai kendala dan hambatan selama mengerjakan Tesis terasa ringan untuk dilalui. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu terwujudnya laporan Tesis ini, antara lain kepada:

1. Kedua orang tua penulis, Usman dan Sujiatin. Semoga Allah SWT memuliakan mereka.
2. Istri penulis, Lilla Mustika Sari. Terima kasih atas dukungan yang diberikan kepada penulis baik secara moral maupun material. Semoga Allah SWT memudahkan segala urusannya.
3. Ibu Dr. Dra. Rinurwati, M.Si., sebagai dosen pembimbing yang telah membimbing penulis dalam menyelesaikan Tesis ini.
4. Ibu Dr. Dra. Mardijah, M.T., sebagai dosen wali yang telah memberikan semangat dalam menyelesaikan Tesis ini.
5. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si., Bapak Dr. Darmaji, S.Si., M.T., Ibu Dr. Dwi Ratna S., S.Si., M.T., dan Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp, selaku dosen penguji atas kritik dan saran sehingga penulis dapat memperbaiki tesis ini.
6. Seluruh dosen S2 Matematika ITS, yang telah memberikan ilmu, kemudahan dan motivasi kepada penulis selama perkuliahan.

7. Seluruh staf akademik dan administrasi S2 Matematika ITS yang telah menyediakan fasilitas dan layanan selama penulis mengikuti program pendidikan magister di Departemen Matematika ITS.
8. Teman-teman penulis di S2 Matematika ITS yang telah menemani selama menuntut ilmu.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, semoga Allah SWT mengerahkan rasa ikhlas dan rendah hati kepada semua pihak yang telah membantu penulis, baik secara langsung ataupun tidak langsung, serta kepada penulis sendiri.

Akhirnya penulis menyadari bahwa Tesis ini masih banyak terdapat kekurangan yang disebabkan kelemahan dan keterbatasan penulis. Saran dan kritik demi perbaikan di masa datang akan sangat penulis hargai. Semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua Aamiin.

Surabaya, Agustus 2020

Penulis .

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN JUDUL .....	iii
LEMBAR PENGESAHAN TESIS .....	v
ABSTRAK .....	vii
ABSTRACT .....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR TABEL .....	xvii
DAFTAR LAMBANG .....	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	2
1.3. Batasan Masalah .....	2
1.4. Tujuan Penelitian.....	2
1.5. Manfaat Penelitian.....	3
1.6. Sistematika Penulisan .....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....</b>	<b>5</b>
2.1 Penelitian Terdahulu.....	5
2.2 Graf dan Pengertian Terkait.....	6
2.3 Matriks .....	10
2.4 Spektrum Graf.....	17
2.5 Operasi Korona Pada Graf.....	18
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>21</b>
3.1. Mengidentifikasi Masalah.....	21
3.2. Studi Literatur.....	21
3.3. Mendefinisikan dan Mengidentifikasi Objek Penelitian .....	21
3.4. Mendapatkan Matriks Ketetanggaan Graf Korona Sisi Pangkat Dua. 22	
3.5. Mencari Spektrum Graf.....	22

3.6. Mendapatkan Rumus Umum Nilai Eigen .....	22
3.7. Pengujian Rumus Umum .....	22
3.8. Pembuktian Matematis dari Rumus Umum.....	22
3.9. Penarikan Kesimpulan.....	23
<b>BAB IV SPEKTRUM GRAF KORONA SISI PANGKAT DUA PADA MATRIKS KETETANGGAAN, LAPLACIAN, DAN SIGNLESS- LAPLACIAN .....</b>	<b>25</b>
4.1. Graf Korona Sisi Pangkat Dua .....	25
4.2. Spektrum Ketetanggaan Graf Korona Sisi Pangkat Dua.....	27
4.3. Spektrum Laplacian Graf Korona Sisi Pangkat Dua.....	35
4.4. Spektrum Signless-Laplacian Graf Korona Sisi Pangkat Dua.....	42
4.5. Aplikasi Spektrum Laplacian terhadap Banyak Spanning Tree Pada Graf Korona Sisi Pangkat Dua .....	49
<b>BAB V PENUTUP .....</b>	<b>51</b>
5.1. Kesimpulan .....	51
5.2. Saran .....	52
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>53</b>

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf $G$ .....	6
Gambar 2.2 (a) Graf Trivial (b) Graf Nontrivial .....	7
Gambar 2.3 Graf terhubung $G$ .....	8
Gambar 2.4 Contoh graf lintasan .....	9
Gambar 2.5 Contoh graf siklus .....	9
Gambar 2.6 Contoh graf lengkap .....	9
Gambar 2.7 (a) Graf 2-reguler (b) Graf 3-reguler (c) Graf 4-reguler .....	10
Gambar 2.8 Graf $K_4$ .....	13
Gambar 2.9 Graf $C_4 \circ P_3$ .....	19
Gambar 4.1 (1) Graf $C_3 \diamond P_2$ dan (2) Graf $C_3 \diamond^2 P_2$ .....	26
Gambar 4.2 (a) Graf $G \diamond H$ dan (b) Graf $G \diamond^2 H$ .....	28
Gambar 4.3 (a) Graf $G_1 \diamond G_2$ (b) Graf $G_1 \diamond^2 H$ .....	35
Gambar 4.4 (a) Graf $G \diamond H$ (b) Graf $G \diamond^2 H$ .....	43



## DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Spektrum ketetanggaan graf reguler dan graf korona sisi.....	30
Tabel 4.2 Spektrum Laplacian graf korona sisi .....	37
Tabel 4.3 Spektrum signless-Laplacian graf korona sisi .....	44



## DAFTAR LAMBANG

Lambang	Arti Lambang	Halaman
$G, H, G_1, G_2$	Graf	1
$V(G)$	Himpunan titik dari $G$	1
$v_i \in V(G)$	Titik ke- $i$ dari $G$	1
$E(G)$	Himpunan sisi dari $G$	1
$e_i \in E(G)$	Sisi ke- $i$ dari $G$	1
$ V(G) $	Banyaknya titik dari $G$	1
$ E(G) $	Banyaknya sisi dari $G$	1
$\deg(v)$	Banyaknya sisi pada titik $v$	6
$P_n$	Graf lintasan dengan $n$ titik	9
$C_n$	Graf siklus dengan $n$ titik	9
$K_n$	Graf lengkap dengan $n$ titik	10
$r$ - reguler $G$	Graf dengan derajat setiap titiknya sama dengan $r$	10
$P_{k \times l}$	Matriks $P$ berukuran $k \times l$	10
$p_{ij}$	Elemen matriks pada baris ke- $i$ kolom ke- $j$	10
$I_n$	Matriks identitas berukuran $n \times n$	12
$A(G)$	Matriks ketetanggaan dari $G$	12
$In(G)$	Matriks insiden dari $G$	13
$D(G)$	Matriks derajat dari $G$	13
$L(G)$	Matriks Laplacian dari $G$	13
$ L (G)$	Matriks Signless-Laplacian	13
$\det(M)$	Determinan matriks $M$	14
$\mathbb{Z}$	Himpunan Bilangan Bulat	16
$spect(G)$	Spektrum dari $G$	17
$\lambda$	Nilai eigen	17
$G \odot H$	Graf $G$ korona $H$	18

$G \diamond H$	Graf $G$ korona sisi $H$	19
$G \diamond^2 H$	Graf $G$ korona sisi pangkat dua $H$	25
$A \otimes B$	Matriks hasil kali Kronecker dari matriks $A$ dan matriks $B$	27
$\bar{n}$	Banyaknya titik dari $G \diamond^2 H$	27
$\bar{m}$	Banyaknya sisi dari $G \diamond^2 H$	27
$st(G)$	Banyaknya spanning tree dari $G$	50

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Teori Graf adalah salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari pemodelan permasalahan dalam bentuk graf (struktur yang terdiri dari titik dan sisi). Titik menyatakan obyek permasalahan dan sisi menyatakan hubungan antar dua obyek. Secara terminologi, graf  $G$  adalah pasangan  $(V(G), E(G))$ , dengan  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek yang disebut titik atau simpul, dan  $E(G)$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari dua titik berbeda di  $V(G)$  yang disebut sisi. Banyaknya unsur di  $V(G)$  disebut ordo dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $|V(G)|$ , dan banyaknya unsur di  $E(G)$  disebut ukuran dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $|E(G)|$ .

Teori Graf dalam kegunaannya dapat diterapkan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada dengan tujuan sebagai visualisasi objek agar menjadi mudah untuk dipahami, seperti jaringan komunikasi, transportasi, riset operasi, dan sebagainya. Oleh karena itu, teori graf mengalami perkembangan yang begitu pesat.

Salah satu permasalahan yang sering muncul ketika meneliti suatu graf yaitu terlalu banyaknya titik dan sisi. Salah satu cara untuk mempermudah penyelesaian masalah tersebut adalah dengan mengaitkannya dengan ilmu aljabar, yaitu menyajikannya dalam bentuk matriks ketetanggaan.

Menyajikan graf dalam bentuk matriks ketetanggaan sangat mempermudah untuk mengenali ciri-ciri dari graf tersebut, seperti untuk menentukan derajat dari masing-masing titik yang ada di graf. Selain itu, matriks ketetanggaan diperlukan untuk mencari nilai eigen dari matriks ketetanggaan tersebut.

Spektrum suatu graf merupakan salah satu kajian yang melibatkan tentang teori graf dan ilmu aljabar. Spektrum suatu graf  $G$  adalah matriks berukuran

$2 \times |V(G)|$  yang baris pertamanya berisi nilai eigen dari matriks ketetanggaan dari  $G$  dan baris kedua berisi multiplisitas dari nilai eigen yang bersesuaian.

Penyajian graf secara aljabar khususnya dalam bentuk matriks yang melibatkan matriks ketetanggaan terus berkembang yaitu matriks Laplacian dan Signless-Laplacian. Spektrum dari masing-masing matriks tersebut sudah dapat ditemukan tidak hanya pada graf dasar saja, seperti graf hasil operasi unair (tunggal) yaitu graf komplemen, graf-Q, graf-total, graf subdivisi, dan graf hasil operasi binair yaitu operasi gabungan, operasi korona, operasi korona sisi dan lain sebagainya. Graf operasi binair juga terus mengalami perkembangan, khususnya operasi korona pada graf. Dalam tesis ini didefinisikan suatu operasi korona baru hasil pengembangan operasi korona sisi yang disebut graf korona sisi pangkat dua yang dinotasikan  $G \diamond^2 H$ , dan ditentukan serta dibuktikan spektrum dari matriks ketetanggaan, Laplacian, dan Signless-Laplacian.

## **1.2. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, rumusan masalah untuk penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana spektrum graf hasil operasi korona sisi pangkat dua dari graf reguler?
2. Bagaimana pembuktian matematis dari spektrum graf hasil operasi korona sisi pangkat dua?

## **1.3. Batasan Masalah**

Graf  $G$  pada graf  $G$  korona sisi pangkat dua  $H$  ( $G \diamond^2 H$ ) yang ditentukan spektrumnya adalah graf reguler.

## **1.4. Tujuan Penelitian**

Tujuan penelitian Tesis ini adalah:

1. Mendapatkan spektrum graf hasil operasi korona sisi pangkat dua pada matriks ketetanggaan, Laplacian dan signless Laplacian.

2. Membuktikan hasil spektrum graf hasil operasi korona sisi pangkat dua pada matriks ketetanggaan, Laplacian dan signless Laplacian.

### **1.5. Manfaat Penelitian**

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan kontribusi bagi perkembangan penelitian, bidang Teori Graf.
2. Hasil penelitian yang diperoleh diharapkan dapat menjadi bahan pertimbangan dan acuan untuk penelitian selanjutnya, khususnya dalam penelitian spektrum dari pengembangan graf hasil operasi.

### **1.6. Sistematika Penulisan**

Penulisan Tesis ini disusun dalam lima bab, yaitu:

#### **1. BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang gambaran umum penulisan Tesis yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

#### **2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini berisi definisi dan teori-teori dasar yang digunakan dalam penelitian spektrum graf korona sisi pangkat dua.

#### **3. BAB III METODE PENELITIAN**

Bab ini berisi tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tesis.

#### **4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Bab ini berisi hasil analisis spektrum graf korona sisi pangkat dua dan pembuktiannya.

#### **5. BAB V PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari bab sebelumnya serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.



## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang digunakan untuk membantu dan mendukung penelitian tentang spektrum dari graf hasil operasi korona sisi pangkat dua.

#### 2.1 Penelitian Terdahulu

Terdapat beberapa macam graf hasil operasi korona yang telah diperkenalkan dan diperoleh spektrumnya oleh peneliti-peneliti sebelum penelitian tesis ini.

Penelitian tentang spektrum graf hasil operasi korona dari dua graf sederhana telah dilakukan oleh S. Barik dkk. pada tahun 2011 dengan judul penelitian "*The Spectrum of the Corona of Two Graph*". Dalam penelitian tersebut dijelaskan beberapa karakteristik spektrum dari graf hasil operasi korona dua graf dasar.

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Cam McLeman, dkk. yang dilakukan pada tahun 2012 dengan judul penelitian "*Spectra of Coronae*". Dalam penelitian ini diperoleh bahwa spektrum graf hasil operasi korona dua graf memuat masing-masing spektrum dari dua graf tersebut.

Pada tahun 2016 Chen dan Liao melakukan penelitian yang berjudul "*The normalized Laplacian Spectra of the Corona and Edge Corona of Two Graphs*". Penelitian tersebut menjelaskan tentang karakteristik spektrum graf hasil operasi korona sisi dari dua graf dasar.

Penelitian terbaru yang dilakukan mengenai spektrum graf hasil dari operasi korona dilakukan oleh Meifeng Dai dkk. pada tahun 2019 dengan judul penelitian "*Generalized Adjacency and Laplacian Spectra of the Weighted Corona Graphs*". Dalam penelitian tersebut didapatkan spektrum graf korona berbobot dari matriks ketetanggaan dan Laplacian.

Dalam penelitian tesis ini didefinisikan suatu graf hasil operasi korona baru, dimana operasi korona baru tersebut merupakan pengembangan dari operasi korona

sisi yang disebut operasi korona sisi pangkat dua, ditentukan spektrum dari matriks ketetanggaan, Laplacian, dan Signless-Laplaciannya, serta dibuktikan spektrum dari masing-masing matriks graf tersebut. Untuk itu diperlukan beberapa pengertian yang mendukung tesis ini, seperti dijelaskan berikut:

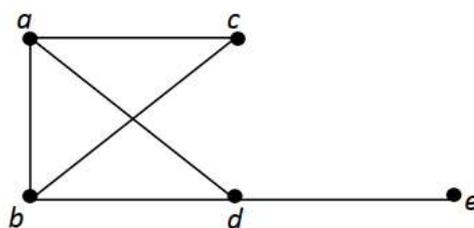
## 2.2 Graf dan Pengertian Terkait

Pada bagian ini dijelaskan tentang konsep atau pengertian dasar yang digunakan pada tesis ini. Konsep atau pengertian tersebut adalah definisi graf, macam-macam graf dan pengertian yang terkait.

Pengertian-pengertian ini dirujuk dari Chartrand dan Lesniak 2016, kecuali disebutkan lain.

**Definisi 2.1** Graf  $G$  adalah suatu pasangan himpunan  $(V(G), E(G))$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik (*vertex*) dan  $E(G)$  adalah himpunan (yang mungkin kosong) pasangan dari titik-titik yang berada di  $V(G)$  yang disebut sisi (*edge*). Banyaknya unsur dari  $V(G)$  disebut ordo dari  $G$  yang dinotasikan dengan  $|V(G)|$ , dan banyaknya unsur di  $E(G)$  disebut ukuran dari  $G$  dan dinotasikan dengan  $|E(G)|$ . Banyaknya sisi pada suatu titik disebut derajat dan dinotasikan dengan  $\deg(v)$ , dengan  $v \in V(G)$ .

**Contoh 2.1** Misalkan graf  $G$  mempunyai himpunan titik  $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$  dan himpunan sisi  $E(G) = \{ab, ac, ad, bc, bd, de\}$ . Graf  $G$  dapat direpresentasikan sebagai berikut:

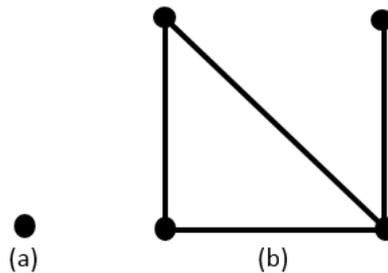


Gambar 2.1 Graf  $G$

Berdasarkan banyaknya titik (ordo) graf, suatu graf dapat dibedakan menjadi dua yaitu graf trivial dan graf nontrivial, dengan definisi sebagai berikut:

**Definisi 2.2** Graf trivial adalah graf berordo satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf nontrivial adalah graf berordo lebih dari satu.

**Contoh 2.2** Berikut diberikan contoh graf trivial dan graf nontrivial:



Gambar 2.2 (a) Graf Trivial (b) Graf Nontrivial

**Definisi 2.3** Jalan  $u - v$  pada graf  $G$  adalah barisan berhingga  $W: u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$  yang berselang-seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik  $u$  dan diakhiri dengan titik  $v$ , dengan  $e_i = u_{i-1}u_i$  untuk  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  adalah sisi pada  $G$ . Titik  $u_0$  disebut titik awal, titik  $u_n$  disebut titik akhir,  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  masing-masing disebut titik internal, dan  $n$  menyatakan panjang dari  $W$ .

Jalan dapat dibagi lagi menjadi menjadi jalan terbuka dan jalan tertutup menurut titik awal dan titik akhir dengan definisi sebagai berikut:

**Definisi 2.4** Jalan  $u - v$  disebut tertutup jika  $u = v$  atau terbuka jika  $u \neq v$ .

Jalan juga dapat dibedakan lagi menurut keberagaman titik dan sisi yang dilewati sesuai dengan definisi berikut:

**Definisi 2.5** Jalan  $u - v$  yang semua sisinya berbeda disebut *trail*  $u - v$ .

**Definisi 2.6** Jalan  $u - v$  yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut lintasan  $u - v$ . Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail*.

Suatu jalan tertutup juga dapat dibedakan lagi menjadi dua yaitu, jalan trivial dan sirkuit, dengan definisi sebagai berikut:

**Definisi 2.7** Titik  $u$  membentuk jalan  $u - u$  disebut jalan trivial.

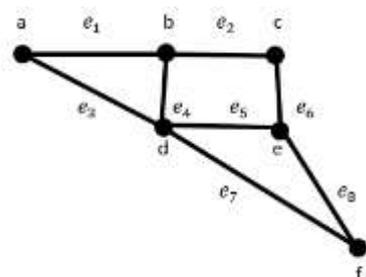
**Definisi 2.8** Jalan tertutup yang nontrivial pada graf  $G$  disebut sirkuit  $G$ .

Suatu sirkuit yang setiap titiknya berbeda disebut sikel, definisinya sebagai berikut:

**Definisi 2.9** Misalkan  $G$  adalah graf himpunan Sirkuit  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n, e_n, v_1$  dengan  $n \geq 3$  dan  $v_i$  berbeda untuk setiap  $i$  disebut dengan sikel (*cycle*).

**Definisi 2.10** Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah titik berbeda di graf  $G$ . Titik  $u$  dan  $v$  dikatakan terhubung jika terdapat lintasan  $u - v$  di  $G$ . Jika ada lintasan  $u - v$  yang hanya memiliki satu sisi maka  $u$  dan  $v$  dikatakan terhubung langsung. Suatu graf  $G$  dikatakan terhubung, jika setiap dua titik berbeda  $u$  dan  $v$  di  $G$  terhubung di  $G$ .

**Contoh 2.3** Diberikan graf terhubung  $G$  dengan  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  dan  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$  seperti Gambar 2.3 berikut:



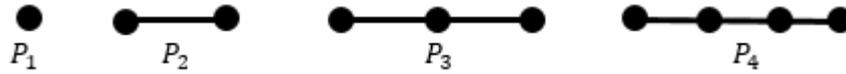
Gambar 2.3 Graf terhubung  $G$

Jalan pada graf  $G$  yaitu  $a, e_3, d, e_4, b, e_2, c, e_6, e, e_5, d, e_7, f$  merupakan suatu trail yang memiliki sirkuit  $d, e_4, b, e_2, c, e_6, e, e_5, d$ .

Berikut ini diberikan definisi dari beberapa graf dasar yang sering digunakan pada penelitian bidang Teori Graf.

**Definisi 2.11** Graf lintasan  $P_n$  adalah graf yang terdiri dari  $n$  titik dan membentuk suatu lintasan.

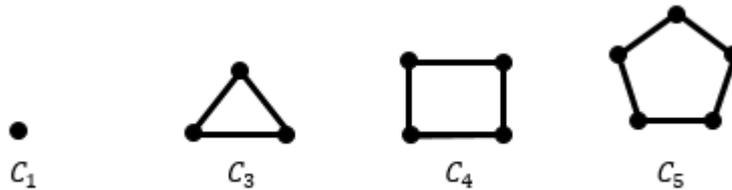
**Contoh 2.4** Berikut diberikan contoh graf lintasan dengan  $n \leq 4$



Gambar 2.4 Contoh graf lintasan

**Definisi 2.12** Graf sikel  $C_n$  adalah graf yang memiliki  $n$  titik dan membentuk suatu sikel.

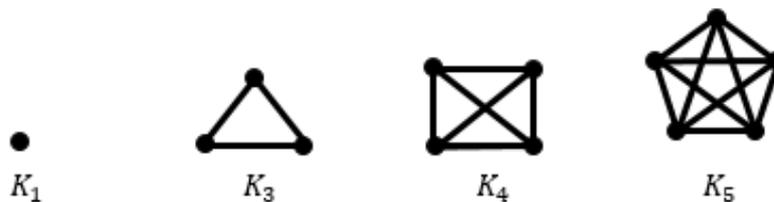
**Contoh 2.5** Contoh graf sikel dengan  $n \leq 5$



Gambar 2.5 Contoh graf sikel

**Definisi 2.13** Graf lengkap adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf lengkap dengan  $n$  titik dinotasikan sebagai  $K_n$ .

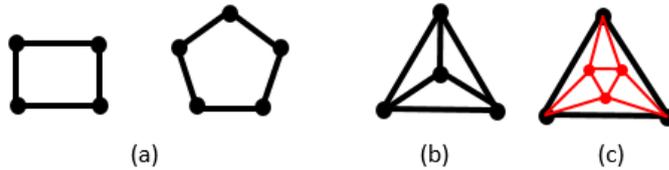
**Contoh 2.6** Berikut diberikan graf lengkap dengan  $n \leq 5$ :



Gambar 2.6 Contoh graf lengkap

**Definisi 2.14.** Diberikan graf terhubung  $G$  dan bilangan bulat positif  $r$ . Graf  $G$  disebut graf  $r$ -reguler jika setiap titiknya mempunyai derajat  $r$ .

**Contoh 2.7** Berikut diberikan contoh (a) graf 2-reguler (b) graf 3-reguler (c) graf 4-reguler,



Gambar 2.7 (a) Graf 2-reguler (b) Graf 3-reguler (c) Graf 4-reguler

**Definisi 2.15** Graf terhubung  $G$  disebut graf bipartit jika himpunan titik  $V(G)$  dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian  $V_1(G)$  dan  $V_2(G)$ , sedemikian sehingga untuk setiap  $e \in E(G)$  menghubungkan titik di  $V_1(G)$  ke sebuah titik di  $V_2(G)$ , dan dinyatakan sebagai  $G(V_1, V_2, E)$ .

### 2.3 Matriks

Pada bagian ini diberikan definisi dari matriks dan beberapa macam matriks yang digunakan dalam tesis ini.

#### 2.3.1. Definisi Matriks

Pada subbab ini diberikan definisi umum tentang matriks dan submatriks yang digunakan dalam tesis ini.

**Definisi 2.15.** Matriks adalah susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan elemen dalam matriks.

Matriks tidak mempunyai nilai tetapi ukuran. Ukuran matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom. Jika matriks  $P$  mempunyai  $k$  baris dan  $l$  kolom, maka matriks  $P$  berukuran  $k \times l$  dan dinotasikan dengan  $P_{k \times l}$ . Jika baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari matriks  $P$  adalah  $p_{ij}$  maka matriks  $P$  dapat ditulis  $[p_{ij}]$ , dengan  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  dan  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

$$P_{k \times l} = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \dots & a_{kl} \end{bmatrix} = [p_{ij}].$$

Jika semua elemen dalam matriks nilainya sama dengan nol maka matriks tersebut dinamakan matriks nol, dinotasikan dengan  $P_{k \times l} = [\mathbf{0}]_{k \times l}$ .

**Definisi 2.16** Diberikan matriks  $P_{k \times l}$ , submatriks dari  $P$  adalah matriks yang elemen baris dan elemen kolomnya adalah subset dari  $P$

**Contoh 2.8** Diberikan matriks  $P_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  submatriks dari  $P$  berukuran

$2 \times 2$  adalah :

$$Q_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, R_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tampak bahwa matriks  $S$  juga merupakan matriks nol, sehingga matriks  $S$  adalah submatriks nol dari  $P$ .

### 2.3.2. Macam-macam Matriks

Adapun macam-macam matriks antara lain:

**Definisi 2.17** Matriks baris adalah suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris, atau berukuran  $1 \times n$ . Matriks baris disebut juga vektor baris. Secara umum dapat ditulis dengan  $[p_{ij}]$  dengan  $i = 1; j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Definisi 2.18** Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri dari satu kolom, atau matriks berukuran  $m \times 1$ . Matriks kolom juga disebut dengan vektor kolom. Secara umum dapat ditulis dengan  $[p_{ij}]$  dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1$ .

**Definisi 2.19** Matriks persegi adalah suatu matriks yang banyak baris dan kolomnya sama, yang dinyatakan dengan  $P_{k \times l}$ , dengan  $k = l$ , dan ditulis dengan  $P_{k \times k} = [p_{ij}]_{k \times k}$ .

$$P_{k \times k} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2k} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & p_{k3} & \dots & p_{kk} \end{bmatrix}.$$

Elemen-elemen  $p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ , dan  $p_{kk}$  disebut dengan elemen diagonal utama, sedangkan elemen  $p_{1k}, p_{2(n-1)}, \dots$ , dan  $p_{k1}$  disebut elemen diagonal sekunder.

Dalam hal ini hanya matriks persegi yang mempunyai elemen diagonal utama dan elemen diagonal sekunder.

**Definisi 2.20** Matriks diagonal merupakan matriks persegi dengan semua elemen-elemen yang bukan elemen diagonal utama adalah nol. Bentuk umumnya adalah  $[p_{ij}]$  dengan  $p_{ij} = 0; i \neq j$ .

**Contoh 2.9** Matriks diagonal dengan ukuran  $3 \times 3$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Definisi 2.21** Matriks skalar adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan  $s$ , dan  $s \neq 0$ . Bentuk umum matriks skalar adalah  $[p_{ij}]$  dengan  $p_{ij} = s$ , untuk  $i = j$  dan  $p_{ij} = 0$ , untuk  $i \neq j$ .

**Contoh 2.10** Matriks  $P$  berikut ini merupakan matriks skalar berukuran  $3 \times 3$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Definisi 2.22** Matriks identitas adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan satu. Bentuk umum matriks identitas adalah  $I = [p_{ij}]$  dengan  $p_{ij} = 1$ , untuk  $i = j$  dan  $p_{ij} = 0$ , untuk  $i \neq j$ .

**Contoh 2.11** Matriks Identitas berukuran  $3 \times 3$ :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Definisi 2.23** Misalkan  $G$  adalah graf berordo  $n$ , matriks ketetanggaan dari  $G$  dinotasikan dengan  $A(G)$  adalah matriks  $n \times n$  dan memenuhi  $A(G) = [a_{ij}]$ ,

dengan  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq n$ ,  $a_{ij} = 1$  jika  $(i, j) \in E(G)$  dan  $a_{ij} = 0$  jika  $(i, j) \notin E(G)$ .

**Definisi 2.24** Diberikan  $G$  graf berordo  $n$ , dan  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ , matriks derajat dari  $G$  dinotasikan dengan  $D(G)$  adalah matriks  $n \times n$  dan memenuhi  $D(G) = [d_{ij}]$ , dengan  $d_{ij} = \deg(i)$  untuk  $i = j$  dan  $d_{ij} = 0$  untuk  $i \neq j$ .

**Definisi 2.25** Diberikan graf  $G$  dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , matriks insiden dari  $G$  dinotasikan dengan  $In(G)$  adalah matriks  $n \times m$  dan memenuhi  $In(G) = [In_{ij}]$ , dengan  $In_{ij} = 0$  jika  $v_i$  bukan titik ujung dari  $e_j$  dan  $In_{ij} = 1$  jika  $v_i$  adalah titik ujung dari  $e_j$ .

**Definisi 2.26** Diberikan graf  $G$ , matriks Laplacian dari  $G$  dinotasikan  $L(G)$  adalah matriks yang memenuhi  $L(G) = D(G) - A(G)$ .

**Definisi 2.27** Diberikan graf  $G$ , matriks Signless-Laplacian dari  $G$  dinotasikan  $|L|(G)$  adalah matriks yang memenuhi  $|L|(G) = A(G) + D(G)$ .

**Contoh 2.12** Berikut contoh matriks ketetanggaan dari graf  $K_4$



Gambar 2.8 Graf  $K_4$

Misalkan diberikan  $G \cong K_4$  seperti pada Gambar 2.8, maka

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, In(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, |L|(G) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

### 2.3.3. Operasi Matriks dan Nilai Eigen

Pada bagian ini diberikan definisi dan teorema tentang nilai eigen.

Pembahasan tentang matriks tidak lepas dengan determinan matriks, berikut pengertian tentang determinan matriks:

**Definisi 2.28** Determinan matriks  $M_{n \times n} = [m_{ij}]$  dinotasikan dengan  $\det(M)$  adalah fungsi yang menghubungkan matriks  $M$  dengan bilangan real.

Determinan dapat dianggap sebagai faktor penskalaan transformasi linear yang berlaku pada matriks.

Untuk matriks  $M_{2 \times 2}$ , determinan matriksnya adalah

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21},$$

sedangkan untuk matriks  $M_{n \times n}$  menggunakan persamaan Laplace untuk mencari determinannya

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} M_{ij}$$

untuk  $i$  tetap, atau

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} M_{ij}$$

untuk  $j$  tetap, dengan  $M_{ij}$  adalah minor dari  $M$ , yaitu determinan matriks berukuran  $(n-1) \times (n-1)$  yang diperoleh dari menghilangkan baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari matriks  $M$ .

**Contoh 2.13** Diberikan matriks  $M = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ , dengan mengambil  $j = 2$ ,

maka

$$\det(M) = (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot (-5) + 1 \cdot 8 + 0 = 18$$

Selain determinan, operasi matriks yang digunakan dalam tesis ini sebagai berikut:

**Definisi 2.29** Diberikan matriks  $M_{m \times n} = [m_{ij}]$ , transpose dari matriks  $M$ , dinotasikan dengan  $M^T = [m_{ij}^T]_{n \times m}$  adalah matriks berukuran  $n \times m$  dengan  $m_{ij}^T = m_{ji}$ .

**Contoh 2.14** Diberikan matriks  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ , maka transpose dari matriks  $M$  adalah:

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Definisi 2.30** Perkalian skalar matriks  $M_{m \times n} = [m_{ij}]_{m \times n}$  dengan skalar  $s$  menghasilkan matriks baru  $sM$  yang berukuran sama dengan  $M$  dan didefinisikan

$$sM = s[m_{ij}] = [s \cdot m_{ij}]$$

sehingga,

$$sM = s \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & m_{m3} & \dots & m_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot m_{11} & s \cdot m_{12} & s \cdot m_{13} & \dots & s \cdot m_{1n} \\ s \cdot m_{21} & s \cdot m_{22} & s \cdot m_{23} & \dots & s \cdot m_{2n} \\ s \cdot m_{31} & s \cdot m_{32} & s \cdot m_{33} & \dots & s \cdot m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s \cdot m_{m1} & s \cdot m_{m2} & s \cdot m_{m3} & \dots & s \cdot m_{mn} \end{bmatrix}$$

**Contoh 2.15** Diberikan matriks  $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , perkalian skalar matriks  $M$

dengan  $k = 5$  adalah

$$kM = 5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 3 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 15 \\ 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Definisi 2.31** Diberikan matriks  $X_{m \times n}$  dan  $Y_{n \times p}$  perkalian matriks  $X \times Y = Z$  adalah matriks berukuran  $m \times p$  yang didefinisikan dengan

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n (x_{ik} \cdot y_{kj})$$

dengan  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  dan  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

**Contoh 2.16** Diberikan matriks  $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , perkalian matriks  $X \times Y$  adalah sebagai berikut

$$X \times Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 17 & 16 \end{bmatrix}$$

**Definisi 2.32** Diberikan Matriks  $M_{m \times n}$  dengan  $M_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$  adalah submatriks baris ke- $i$  dari  $M$ .  $M_1, M_2, \dots, M_m$  dikatakan bebas linear jika  $\sum_{i=1}^m a_i M_i = 0$ , maka  $a_i = 0$ , dengan  $a_i \in \mathbb{Z}$ .

**Definisi 2.33** Rank matriks  $M$  dinotasikan dengan  $rank(M)$  adalah jumlah maksimal submatriks baris dari  $M$  yang bebas linear.

**Contoh 2.17** Diberikan matriks  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  dapat diperhatikan bahwa:

$$M_1 - M_2 - M_3 = [0].$$

Dari Contoh 2.17 dapat ditemukan  $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -1$  sehingga  $\sum_{i=1}^3 a_i M_i = 0$ , oleh karena itu  $M_1, M_2, M_3$  tidak bebas linear. Tetapi  $M_1$  dan  $M_2$  bebas linear begitu juga dengan  $M_1$  dan  $M_3$ , serta  $M_2$  dan  $M_3$ .

Pada tesis ini, determinan diperlukan untuk menentukan nilai eigen dari matriks. Berikut ini adalah definisi dari nilai eigen.

**Definisi 2.34** Diberikan  $M$  adalah matriks  $n \times n$ . Matriks tak nol  $X$  yang  $n \times 1$  sedemikian sehingga  $MX = \lambda X$  dinamakan vektor eigen dari  $M$ , sedangkan skalar  $\lambda$  dinamakan nilai eigen dari  $M$  yang bersesuaian dengan  $X$ .

**Teorema 2.1.** Diberikan matriks  $M$  berukuran  $n \times n$ . Bilangan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $M$  jika dan hanya jika  $\det(\lambda I - M) = 0$ , dengan  $I$  adalah matriks identitas berukuran  $n \times n$ .

**Bukti.** Jika  $M$  adalah matriks berukuran  $n \times n$ , dengan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $M$  maka sesuai Definisi 2.34 berlaku  $\lambda X = MX$  untuk suatu matriks tak nol  $X$ . Oleh karena itu,  $\lambda X - MX = 0$  yang mengakibatkan  $(\lambda I - M)X = 0$ , sehingga  $\det(\lambda I - M) = 0$ .

Jika  $\det(\lambda I - M) = 0$ , dapat mengakibatkan  $(\lambda I - M)X = \mathbf{0}$  untuk suatu matriks tak nol  $X$  sehingga  $\lambda X - MX = 0$  yang mengakibatkan  $\lambda X = MX$ , sesuai Definisi 2.34  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $M$ .  $\square$

## 2.4 Spektrum Graf

Pada bagian ini diberikan beberapa pengertian tentang spektrum graf dan contoh penentuan spektrum suatu graf.

**Definisi 2.35** Misalkan  $G$  adalah graf terhubung berordo  $n$ . Spektrum dari  $A(G)$  dinotasikan dengan  $\text{spect}(A(G))$  adalah matriks berukuran  $2 \times n$ , dengan elemen-elemen pada baris pertamanya adalah nilai eigen dari matriks ketetanggaan  $A(G)$ , dan baris keduanya adalah multiplisitas dari nilai-nilai eigen pada baris pertama.

Diberikan  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\delta$ , dengan  $\delta \leq n$  adalah nilai-nilai eigen berbeda dari matriks ketetanggaan  $A(G)$  dari graf  $G$ , dan misalkan  $l(\lambda_0), l(\lambda_1), \dots, l(\lambda_\delta)$  adalah multiplisitas dari masing-masing nilai eigen, maka matriks.

$$\text{spect}(A(G)) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \dots & \lambda_\delta \\ l(\lambda_0) & \dots & l(\lambda_\delta) \end{bmatrix}$$

adalah spektrum dari  $A(G)$ .

Berikut ini diberikan contoh cara menentukan spektrum dari suatu graf  $G$ .

**Contoh 2.19** Diberikan graf lengkap  $K_3$ , maka matriks ketetanggaan dari graf  $K_3$  adalah:

$$A(K_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari  $A(K_3)$  diperoleh dari persamaan  $\det(\lambda I - A) = 0$  yaitu

$$\det \left( \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Jadi, nilai eigen  $\lambda_1 = 2$  dan  $\lambda_2 = -1$ , dengan  $m(\lambda_1) = 1$  dan  $m(\lambda_2) = -1$  sehingga

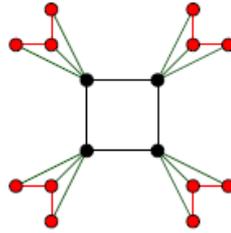
$$\text{Spect}(A(K_3)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ l(\lambda_1) & l(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## 2.5 Operasi Korona Pada Graf

Pada bagian ini diberikan definisi dari beberapa operasi korona yang sudah ada, yaitu korona dan korona sisi.

**Definisi 2.36** Graf korona dari graf  $G$  dan  $H$  dinotasikan dengan  $G \odot H$  diperoleh dengan mengambil sebuah graf  $G$  dan  $|V(G)|$  salinan dari  $H$ , dan dengan menghubungkan setiap titik dari salinan ke- $i$  dari  $H$  ke titik ke- $i$  dari  $G$ , dengan  $1 \leq i \leq |V(G)|$ .

**Contoh 2.20.** Jika diberikan  $G \cong C_4$  dan  $H \cong P_3$  maka graf  $G \odot H$  dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 2.9 Graf  $C_4 \circ P_3$

**Definisi 2.37** Diberikan graf  $G_1$  dengan  $V(G_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$  dan  $E(G_1) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , dan graf  $G_2$ . Graf korona sisi dari  $G_1$  dan  $G_2$  dinotasikan  $G_1 \diamond G_2$  didefinisikan sebagai suatu graf yang diperoleh dengan mengambil  $G_1$  dan salinan  $G_2$  sebanyak  $m$ , kemudian untuk setiap sisi  $e_k = v_{ik}v_{jk}$  dari  $G_1$ ;  $i, j \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ , dengan  $i \neq j$  dan  $k \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ , titik ujung  $v_{ik}$  dan  $v_{jk}$  masing-masing terhubung langsung dengan semua titik di salinan ke- $k$  dari  $G_2$ .

Berikut diberikan lema yang digunakan untuk membuktikan teorema yang dihasilkan dalam tesis ini. Lema tersebut dirujuk dari Youping, 2011.

**Lema 2.1** Diberikan graf terhubung  $G$  berordo  $n$  dan matriks insiden  $In(G)$  dari graf  $G$ , maka  $rank(In(G)) = n - 1$  jika  $G$  merupakan graf bipartit dan  $rank(In(G)) = n$  jika  $G$  bukan graf bipartit.

**Lema 2.2** Diberikan suatu graf terhubung  $G$  dengan radius spektrum  $\rho$ . Bilangan  $\rho$  dan  $-\rho$  adalah nilai eigen dari  $A(G)$  jika dan hanya jika  $G$  merupakan graf bipartit. Oleh karena itu, jika graf  $G$  merupakan graf bipartit dengan himpunan titik  $V = V_1 \cup V_2$ , dengan  $V_1$  dan  $V_2$  adalah bipartisi dari  $V$ , dan  $X = (X_1 \ X_2)^T$  merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda$  dari  $A(G)$  maka  $X = (X_1, -X_2, 0, 0, \dots, 0)^T$  merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $-\lambda$ .

**Lema 2.3** Diberikan graf terhubung  $G$  dan  $H$  dengan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  merupakan nilai-nilai eigen dari  $A(H)$  maka  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  juga merupakan nilai-nilai eigen dari  $G \diamond H$ .

**Lema 2.4** Diberikan graf  $r_1$ -reguler terhubung  $G$  dengan  $\mu_i$  nilai eigen dari  $A(G)$  dan suatu graf  $r_2$ -reguler  $H$ , maka nilai-nilai eigen dari  $A(G \diamond H)$  dapat ditentukan dengan

$$\frac{r_2 + \mu_i \pm \sqrt{(r_2 - \mu_1)^2 + 4(r_1 + \mu_1)n_2}}{2}$$

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Untuk menjawab dua rumusan masalah sehingga tercapai tujuan penyusunan tesis ini maka tahapan penelitian tesis ini disajikan dalam tiga tahapan sebagai berikut:

#### **3.1. Mengidentifikasi Masalah**

Pada tahap ini peneliti merumuskan masalah yang diteliti pada tesis ini. Rumusan masalah yang didapatkan yaitu: bagaimana rumus umum nilai eigen dan multiplisitas pada spektrum graf hasil operasi korona sisi pangkat dua, dan bagaimana membuktikan hasil rumus umum nilai eigen dan multiplisitasnya pada spektrum graf hasil operasi korona sisi pangkat dua.

#### **3.2. Studi Literatur**

Pada tahap ini peneliti mempelajari buku-buku referensi dan hasil penelitian sejenis sebelumnya yang pernah dilakukan peneliti-peneliti sebelumnya, khususnya penelitian tentang graf hasil operasi korona dan penelitian tentang spektrum graf hasil operasi korona. Referensi buku dan jurnal yang digunakan pada penelitian ini bersumber pada jurnal-jurnal internasional yang terkini yaitu berjarak maksimal sepuluh tahun sebelum penelitian tesis ini.

#### **3.3. Mendefinisikan dan Mengidentifikasi Objek Penelitian**

Pada tahap ini peneliti mendefinisikan graf korona sisi pangkat dua dengan mengambil referensi pada definisi graf korona dan graf korona sisi pada jurnal penelitian tentang graf korona dan graf korona sisi. Pada tahap ini juga peneliti mengidentifikasi operasi korona sisi pangkat dua pada graf-graf khusus untuk memilih objek yang diteliti pada tesis ini, yaitu graf reguler.

### **3.4. Mendapatkan Matriks Ketetangaan Graf Korona Sisi Pangkat Dua**

Setelah memilih graf reguler sebagai objek penelitian, peneliti menggambarkan graf korona sisi pangkat dua dari dua graf reguler berbeda. Peneliti lalu membuat matriks ketetangaan, Laplacian, dan Signless-Laplacian dari masing-masing graf korona sisi pangkat dua.

### **3.5. Mencari Spektrum Graf**

Setelah mendapatkan matriks ketetangaan, graf korona sisi pangkat dua, peneliti melakukan penghitungan nilai eigen dan multiplisitasnya dari matriks-matriks tersebut melalui aplikasi MATLAB.

### **3.6. Mendapatkan Rumus Umum Nilai Eigen**

Setelah mendapatkan nilai eigen dari masing-masing matriks ketetangaan, Laplacian, dan Signless-Laplacian, peneliti merumuskan secara umum nilai eigen dan multiplisitas dari masing-masing matriks tersebut bersesuaian dengan derajat titik graf reguler yang digunakan.

### **3.7. Pengujian Rumus Umum**

Setelah didapatkan rumus umum untuk nilai eigen peneliti menguji coba kembali rumus umum yang digunakan untuk menguji spektrum graf korona sisi pangkat dua dari graf reguler yang tidak menjadi sampel dalam pembentukan rumus umum. Jika pengujian gagal maka peneliti menyusun kembali rumus umum untuk nilai eigen matriks ketetangaan, Laplacian, dan Signless-Laplacian.

### **3.8. Pembuktian Matematis dari Rumus Umum**

Setelah mendapatkan hasil peengujian yang berhasil, peneliti membandingkan hasil rumus umum yang didapatkan pada penelitian tesis ini dengan penelitian-penelitian sebelumnya. Peneliti selanjutnya menyusun pembuktian secara matematis dari rumus umum yang diperoleh, dengan mengambil referensi pembuktian dari penelitian-penelitian sebelumnya.

### **3.9. Penarikan Kesimpulan**

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil penelitian pada tahapan-tahapan sebelumnya.

Setelah langkah-langkah di atas diselesaikan, selanjutnya dilakukan penulisan hasil penelitian yang telah dilakukan.



## BAB IV

### SPEKTRUM GRAF KORONA SISI PANGKAT DUA PADA MATRIKS KETETANGGAAN, LAPLACIAN, DAN SIGNLESS-LAPLACIAN

Pada bab ini disajikan hasil penelitian dan pembahasan tentang spektrum dari graf korona sisi pangkat dua yaitu spektrum ketetanggaan, spektrum Laplacian dan spektrum signless-Laplacian. Masing-masing spektrum disajikan dan dibahas dalam satu subbab tersendiri dan diberikan contoh cara memperoleh spektrum graf korona sisi pangkat dua dari  $G$  dan  $H$ ,  $G \diamond^2 H$ , untuk suatu graf  $G$  dan  $H$  tertentu.

#### 4.1. Graf Korona Sisi Pangkat Dua

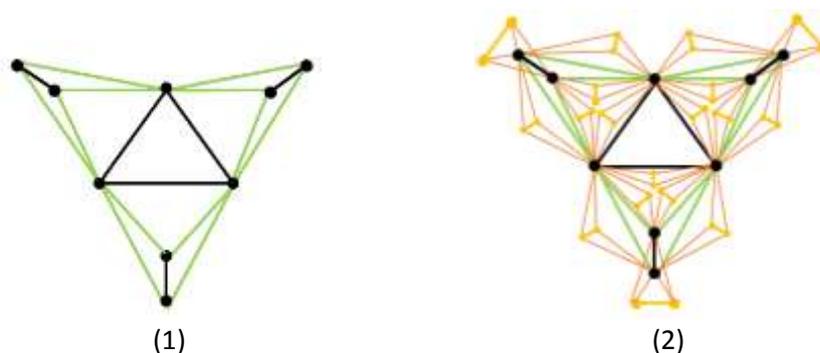
Termotivasi oleh graf korona sisi pada penelitian Barik. S, 2011, dalam tesis ini diperkenalkan graf baru yang merupakan pengembangan dari graf korona sisi yang disebut graf korona sisi pangkat dua definisinya seperti disebutkan dalam Definisi 4.1.

**Definisi 4.1** Misalkan  $G$  dan  $H$  adalah graf terhubung, dengan derajat dan ukuran masing-masing adalah  $n_1$  dan  $m_1$ , dan  $n_2$  dan  $m_2$ . Graf korona sisi pangkat dua dari  $G$  dan  $H$  dinotasikan dengan  $G \diamond^2 H := (G \diamond H) \diamond H$  dan didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah graf  $G$ ,  $m_1$  salinan pertama dari graf  $H$ , yaitu  $H_h$ , dengan  $h \in \{1, 2, \dots, m_1\}$  dan  $m_1(1 + 2n_2 + m_2)$  salinan kedua dari graf  $H$ , yaitu  $H_{hk}$ , dengan  $h \in \{1, 2, \dots, m_1\}$  dan  $k \in \{1, 2, \dots, 1 + 2n_2 + m_2\}$ , dan menghubungkan setiap titik ujung sisi  $e_h = i_h j_h$  dari graf  $G$  ke semua titik dari  $H_h$ , serta menghubungkan setiap titik ujung dari sisi  $e_k = r_k s_k$  dari graf  $G \diamond H$  ke semua titik dari  $H_{hk}$ .

Dari penelitian Hou dan Shiu 2011, diketahui bahwa graf korona sisi  $G \diamond H$  mempunyai  $n_1 + m_1 n_2$  titik dan  $m_1 + 2m_1 n_2 + m_1 m_2$  sisi. Oleh karena itu, dari Definisi 4.1 diperoleh bahwa graf korona sisi pangkat dua dari  $G$  dan  $H$ ,  $G \diamond^2 H$ , mempunyai  $(n_1 + m_1 n_2) + n_2(m_1 + 2m_1 n_2 + m_1 m_2)$  titik dan mempunyai  $(m_1 + 2m_1 n_2 + m_1 m_2)(1 + 2n_2 + m_2)$  sisi.

Berikut ini diberikan contoh graf korona sisi pangkat dua dari graf  $G$  dan  $H$ ,  $G \diamond^2 H$ , dengan  $G$  adalah graf siklus  $C_3$  dan  $H$  adalah graf lintasan  $P_2$  seperti pada Gambar 4.1.

**Contoh 4.1** Graf  $G \cong C_3$  mempunyai titik sebanyak  $n_1 = 3$  dan sisi sebanyak  $m_1 = 3$ , dan graf  $H \cong P_2$  mempunyai titik sebanyak  $n_2 = 2$  dan sisi sebanyak  $m_2 = 1$ . Gambar 4.1 (1) merupakan ilustrasi dari graf korona sisi dari graf  $G$  dan  $H$ , sedangkan ilustrasi graf korona sisi pangkat dua dari  $G$  dan  $H$  seperti pada Gambar 4.1 (2).



Gambar 4.1 (1) Graf  $C_3 \diamond P_2$  dan (2) Graf  $C_3 \diamond^2 P_2$

Dengan pengamatan langsung pada struktur graf dalam Gambar 4.1, diketahui bahwa graf korona sisi  $C_3 \diamond P_2$  mempunyai titik sebanyak sembilan, yang terdiri dari tiga titik dari  $C_3$  dan tiga (banyak sisi dari  $C_3$ ) kali banyaknya titik dari  $P_2$ . Jadi banyaknya titik dari graf korona sisi  $C_3 \diamond P_2$  adalah  $V(C_3 \diamond P_2) = n_1 + m_1 n_2$ . Banyaknya sisi dari graf korona sisi  $C_3 \diamond P_2$  adalah delapan belas terdiri dari tiga (banyak sisi dari  $C_3$ ), banyaknya sisi penghubung dari kedua titik ujung sisi ke- $i$  dari  $C_3$  dengan semua titik di salinan ke- $i$  dari  $P_2$ ;  $i \in \{1,2,3\}$  yaitu dua (banyaknya titik ujung dari sisi  $C_3$ ) kali tiga (banyaknya sisi dari  $C_3$ ) kali dua (banyaknya titik dari  $P_2$ ), dan tiga (banyaknya sisi dari  $C_3$ ) kali (banyaknya sisi dari  $P_2$ ). Jadi banyaknya sisi dari graf korona sisi  $C_3 \diamond P_2$  adalah  $E(C_3 \diamond P_2) = m_1 + 2m_1 n_2 + m_1 m_2$ .

Dalam Gambar 4.1, diketahui bahwa graf korona sisi pangkat dua  $C_3 \diamond^2 P_2$  memiliki empat puluh lima titik yang terdiri dari sembilan titik graf korona sisi  $C_3 \diamond P_2$  dan delapan belas (banyak sisi dari  $C_3 \diamond P_2$ ) kali banyaknya titik dari  $P_2$ . Jadi banyaknya

titik dari graf korona sisi pangkat dua  $C_3 \diamond^2 P_2$  adalah  $|V(C_3 \diamond^2 P_2)| = m_1 + 2m_1n_2 + m_1m_2$ . Banyaknya sisi dari graf korona sisi pangkat dua  $C_3 \diamond^2 P_2$  adalah seratus delapan terdiri dari delapan belas (banyak sisi dari  $C_3 \diamond P_2$ ) banyaknya sisi penghubung dari kedua titik ujung sisi ke- $i$  dari  $C_3 \diamond P_2$  dengan semua titik di salinan kedua ke- $i$  dari  $P_2$ ;  $i \in \{1,2, \dots, 18\}$  yaitu dua (banyaknya titik ujung dari sisi  $C_3 \diamond P_2$ ) kali delapan belas (banyaknya sisi dari  $C_3 \diamond P_2$ ) kali dua (banyaknya titik dari  $P_2$ , dan sembilan (banyaknya sisi dari  $C_3 \diamond P_2$ ) kali dua (banyaknya sisi dari  $P_2$ ). Jadi banyaknya sisi dari graf korona sisi  $C_3 \diamond^2 P_2$  adalah  $|E(C_3 \diamond^2 P_2)| = (m_1 + 2m_1n_2 + m_1m_2)(1 + 2n_2 + m_2)$ .

#### 4.2. Spektrum Ketetanggaan Graf Korona Sisi Pangkat Dua

Pada subbab ini disajikan matriks ketetanggaan dari graf korona sisi pangkat dua dan spektrum ketetanggaan dari graf korona sisi pangkat dua beserta langkah-langkah untuk menemukan spektrum ketetanggaan graf korona sisi pangkat dua.

Jika diberikan suatu graf terhubung  $G$  dengan  $n_1$  titik dan  $m_1$  sisi, dan graf  $H$  dengan  $n_2$  titik dan  $m_2$  sisi. Matriks ketetanggaan  $A(G \diamond^2 H)$  dari graf  $G \diamond^2 H$  disajikan sebagai matriks partisi berikut:

$$A(G \diamond^2 H) = \left[ \begin{array}{c|c} A(G \diamond H) & In(G \diamond H) \otimes \mathbf{j}_{n_2} \\ \hline \left[ In(G \diamond H) \otimes \mathbf{j}_{n_2} \right]^T & I_{\bar{m}} \otimes A(H) \end{array} \right]$$

dengan:  $A(G \diamond H)$  adalah matriks ketetanggaan graf  $G$  korona sisi  $H$

$In(G \diamond H)$  adalah matriks insiden graf  $G$  korona sisi  $H$

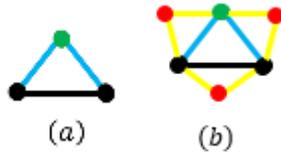
$\mathbf{j}_{n_2}$  adalah matriks baris berukuran  $1 \times n_2$  yang semua elemennya 1

$\bar{m} = m(G \diamond H)$

$I_{\bar{m}}$  adalah matriks identitas berukuran  $\bar{m} \times \bar{m}$

$I_{\bar{m}} \otimes A(H)$  adalah matriks hasil kali kronecker dari  $I_{\bar{m}}$  dan  $A(H)$ .

**Contoh 4.2** Jika diberikan graf  $G = P_2$  dan  $H = P_1$  maka representasi dari matriks  $G \diamond H$  dan  $G \diamond^2 H$  ditunjukkan pada Gambar 4.2 berikut:



Gambar 4.2 (a) Graf  $G \diamond H$  dan (b) Graf  $G \diamond^2 H$

Setelah didapatkan representasi gambar dari  $G \diamond^2 H$  dapat ditentukan matriks ketetanggaan  $A(G \diamond^2 H)$  yaitu

$$A(G \diamond^2 H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat diperhatikan bahwa  $A(G \diamond^2 H)$  adalah suatu matriks blok yang dapat dibentuk sebagai berikut:

$$A(G \diamond^2 H) = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

dengan, 
$$P = A(G \diamond H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = I_n(G \diamond H) \otimes A(H) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = (I_n(G \diamond H) \otimes A(H))^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$S = I_{n(G \diamond H)} \otimes A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan matriks  $A(G \diamond^2 H)$  langkah berikutnya adalah mencari nilai eigen dari matriks tersebut, sebagai berikut:

$$\det \left( \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^6 - 9\lambda^4 - 8\lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + (\sqrt{5} - 1))(\lambda - (\sqrt{5} + 1)) \left( \lambda + \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^2 \left( \lambda - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2 = 0.$$

$$\text{Jadi } \lambda_1 = \sqrt{5} + 1, \lambda_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \lambda_3 = 1 - \sqrt{5}, \lambda_4 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Dari langkah yang dilakukan dapat ditemukan spektrum ketetanggaan dari graf  $G \diamond^2 H$  adalah:

$$\text{spect}(A(G \diamond^2 H)) = \begin{bmatrix} \sqrt{5} + 1 & \frac{\sqrt{5} + 1}{2} & 1 - \sqrt{5} & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dari hasil spektrum di atas dapat diketahui bahwa untuk  $\lambda_1 = \sqrt{5} + 1$  dan  $\lambda_3 = 1 - \sqrt{5}$  merupakan nilai eigen yang merepresentasikan titik-titik baru yang ditambahkan pada graf  $G \diamond H$  yang ditandakan nilai multiplisitas kedua nilai eigen tersebut adalah satu, sedangkan untuk  $\lambda_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$  dan  $\lambda_4 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  merupakan nilai eigen yang merepresentasikan titik-titik awal graf  $G \diamond H$  yang ditandakan dengan multiplisitas kedua nilai eigen tersebut lebih besar dari satu.

Berikut adalah hasil pencarian spektrum ketetangaan dari graf korona sisi pada graf reguler

Tabel 4.1 Spektrum ketetangaan graf reguler dan graf korona sisi

$G_1$	$G_2$	$spect(A(G_1))$	$spect(A(G_2))$	$spect(A(G_1 \diamond G_2))$
$P_2$	$P_2$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_3$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_4$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & \frac{3-\sqrt{33}}{2} & -1 & 0 & \frac{3-\sqrt{33}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_5$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{41}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & -1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{3+\sqrt{41}}{2} \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_6$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$C_3$	$P_2$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & \frac{3-\sqrt{33}}{2} & -1 & \sqrt{3} & \frac{3-\sqrt{33}}{2} \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$C_3$	$C_3$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{21}}{2} & 2-\sqrt{3} & -1 & \frac{1+\sqrt{21}}{2} & 2+\sqrt{3} \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$C_3$	$C_4$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$C_3$	$C_5$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2-2\sqrt{5} & \frac{1-\sqrt{29}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{29}}{2} & 2-2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$C_3$	$C_6$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2-2\sqrt{5} & \frac{1-\sqrt{33}}{2} & -2 & -1 & 1 & \frac{1+\sqrt{33}}{2} & 2+2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Berikut hasil spektrum ketetangaan graf korona sisi pangkat dua dari beberapa graf reguler:

$$spect(A(P_2 \diamond^2 P_2)) = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{13} & -\sqrt{5} & -1 & 1 & \sqrt{5} & 2+\sqrt{13} \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$spect(A(P_2 \diamond^2 C_3)) = \begin{bmatrix} \frac{1-3\sqrt{5}}{2} & -2 & -1 & 2 & \frac{1+3\sqrt{5}}{2} & 8 \\ 4 & 1 & 20 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{spect}(A(P_2 \diamond^2 C_4)) = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{73}}{2} & \frac{1-\sqrt{65}}{2} & -2\sqrt{3} & 1-\sqrt{17} & \frac{3-\sqrt{33}}{2} & -2 & 0 & 2 & \frac{4\sqrt{3}}{2} & \frac{3+\sqrt{33}}{2} & \frac{1+\sqrt{73}}{2} & 1+\sqrt{17} & \frac{1-\sqrt{65}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 13 & 26 & 7 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(A(P_2 \diamond^2 C_5)) = \begin{bmatrix} -4.702 & -4.5938 & -3.7055 & -3.5456 & -1.6180 & 0.6180 & 2 & 4.0874 & 4.6424 & 5.7202 & 6.1637 & 10.4105 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 32 & 32 & 9 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(A(P_2 \diamond^2 C_6)) = \begin{bmatrix} -5.6847 & -5.5440 & -4 & -2 & -1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6.6847 & 7 & 11.5440 \\ 1 & 1 & 6 & 19 & 38 & 38 & 11 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(A(C_3 \diamond^2 P_2)) = \begin{bmatrix} -3.4667 & -3 & -2.2361 & -1.7992 & -1.7072 & -1 & 1 & 2.2361 & 2.4072 & 2.5495 & 4.7165 & 7.3001 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 18 & 9 & 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(A(C_3 \diamond^2 C_3)) = \begin{bmatrix} -4.4764 & -4 & -2.8541 & -2.2100 & -2.1082 & -1 & 2 & 3.8541 & 4.2225 & 4.4661 & 7.2203 & 9.8856 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 1 & 60 & 18 & 6 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(A(C_3 \diamond^2 C_4)) = \begin{bmatrix} -5.8103 & -5.3470 & -3.4641 & -3.1231 & -2.8870 & -2.8505 & -2 & 0 & 2 & 3.4641 & 4.6271 & 5.1231 & 5.2519 & 8.4453 & 11.5704 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 & 39 & 78 & 24 & 3 & 1 & 6 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(A(C_3 \diamond^2 C_5)) = \begin{bmatrix} -7.1719 & -6.7184 & -3.7055 & -3.5456 & -3.4747 & -3.4673 & -1.6180 & 0.6180 & 2 & 4.0874 & 5.0012 & 5.9416 & 6.1637 & 9.7050 & 13.1844 \\ 2 & 1 & 6 & 6 & 2 & 1 & 96 & 96 & 30 & 6 & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(A(C_3 \diamond^2 C_6)) = \begin{bmatrix} -8.5498 & -8.1053 & -4 & -2 & -1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 5.3521 & 6.5498 & 7 & 11 & 14.7533 \\ 2 & 1 & 18 & 57 & 114 & 114 & 36 & 3 & 6 & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil pencarian graf spektrum ketetanggaan graf korona sisi pangkat dua dapat disimpulkan dalam Teorema 4.1 berikut:

**Teorema 4.1** Diberikan suatu graf  $G_1$   $r_1$ -reguler dengan  $n_1$  titik dan  $m_1$  sisi dan graf  $G_2$   $r_2$ -reguler dengan  $n_2$  titik dan  $m_2$  sisi. Jika  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\bar{n}}$  dengan  $\bar{n} = n_1 + m_1 n_2$  adalah nilai-nilai eigen dari  $G_1 \diamond G_2$ , dan  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n_2}$  adalah nilai eigen dari  $G_2$  dengan

$$\beta_i = \frac{r_2 + \mu_i + \sqrt{(r_2 - \mu_i)^2 + 4(r_1 + \mu_i)n_2}}{2}$$

dan

$$\bar{\beta}_i = \frac{r_2 + \mu_i - \sqrt{(r_2 - \mu_i)^2 + 4(r_1 + \mu_i)n_2}}{2}$$

maka spektrum dari  $G \cong G_1 \diamond^2 G_2$  adalah

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc} \eta_{k-1} & \eta_k & \eta_{k+1} & \beta_1 & \bar{\beta}_1 & \beta_2 & \bar{\beta}_2 & \cdots & \beta_{\bar{n}} & \bar{\beta}_{\bar{n}} \\ \frac{l(\eta_k) * \bar{m}}{3} & \frac{l(\eta_{k-1}) * \bar{m}}{3} & \frac{l(\eta_{k-2}) * \bar{m}}{3} & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right]$$

dengan  $\bar{m} = m_1 + 2m_1n_2 + m_1m_2$ ,  $k = \frac{\bar{n}}{2}$ .

**Bukti.** Diberikan  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_2}$  adalah vektor eigen dari  $A(G_2)$  yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n_2}$ . Dapat diperhatikan bahwa  $G_2$  adalah suatu graf  $r_2$ -reguler dan  $Z_j \perp \mathbf{j}$  untuk  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n_2 - 2, n_2 - 1\}$ . Oleh karena itu, untuk  $i \in \{1, 2, 3, \dots, \bar{m} - 1, \bar{m}\}$ , serta  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n_2 - 3, n_2 - 2, n_2 - 1\}$  didapatkan vektor-vektor  $(0, 0, \dots, Z_j, 0, \dots, 0)^T$  berdimensi  $(n_1 + \bar{m}n_2)$  yang merupakan vektor eigen dari  $A(G)$  yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\eta_j$ . Sehingga didapatkan  $\bar{m}(n_2 - 1)$  nilai eigen dan vektor eigen yang saling bersesuaian dari graf  $G$ .

Jika diberikan  $X_1, X_2, \dots, X_{\bar{n}}$  yang merupakan vektor eigen dari  $A(G_1 \diamond G_2)$  yang bersesuaian terhadap nilai-nilai eigen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\bar{n}}$ , dengan  $\bar{n} = n_1 + m_1n_2$ . Dengan demikian dengan menggunakan Lema 2.4 untuk  $i \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$

$$\beta_i = \frac{r_2 + \mu_i + \sqrt{(r_2 - \mu_i)^2 + 4(r_1 + \mu_i)n_2}}{2}$$

dan

$$\bar{\beta}_i = \frac{r_2 + \mu_i - \sqrt{(r_2 - \mu_i)^2 + 4(r_1 + \mu_i)n_2}}{2}$$

Perlu diketahui  $\frac{r_2 + \mu_i + \sqrt{(r_2 - \mu_i)^2 + 4(r_1 + \mu_i)n_2}}{2} = r_2$  jika dan hanya jika  $\mu_i = -r_1$ .

Berdasarkan Lema 2.1,  $r_2$  atau  $-r_2$  nilai eigen dari  $A(G_1 \diamond G_2)$  jika dan hanya jika  $G_1 \diamond G_2$  adalah suatu graf bipartit. Jika  $G_1 \diamond G_2$  adalah graf bipartit dan partisi dari himpunan titik-titiknya adalah  $V_1 \cup V_2$ , dengan menggunakan Lema 2.2 dapat diperoleh bahwa  $(\mathbf{1}, -\mathbf{1}, 0, \dots, 0)^T$  adalah vektor eigen dari  $G$  yang bersesuaian dengan nilai eigen  $-r_1$ .

Jika  $\lambda_i \neq r_2$  dan  $\bar{\lambda}_i \neq r_2$  maka  $\lambda_i$  dan  $\bar{\lambda}_i$  adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor eigen

$$F_i = \left[ X_i \dots \frac{X_i(a) + X_i(t)}{\lambda_i - r_2} \dots \right]^T$$

dan

$$\bar{F}_i = \left[ X_i, \dots, \frac{X_i(a) + X_i(t)}{\bar{\lambda}_i - r_2}, \dots \right]^T$$

Oleh karena itu, perlu diselidiki bahwa karakteristik persamaan

$$\sum_{v \sim u} F_i(v) = \lambda_i F_i(u)$$

dan

$$\sum_{v \sim u} \bar{F}_i(v) = \bar{\lambda}_i \bar{F}_i(u)$$

untuk setiap titik  $u$  di  $G$ .

Untuk setiap titik  $u$  di  $h_k$ -salinan dari  $G_2$ , misalkan  $e_{h_k} = st$ , maka

$$F_i = \left[ X_i, \dots, \frac{X_i(a) + X_i(t)}{\lambda_i - r_2}, \dots \right]^T$$

Oleh karena itu,

$$\sum_{v \sim u} F_i(v) = r_2 F_i(u) + X_i(s) + X_i(t) = \lambda_i F_i(u)$$

untuk setiap titik  $u$  di  $G_1 \diamond G_2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{v \sim u} F_i(v) &= \sum_{v \sim u, v \in V(G_1 \diamond G_2)} F_i(v) + \sum_{v \sim u, v \notin V(G_1 \diamond G_2)} F_i(v) \\ &= \mu_i X_i(u) + \frac{r_1 n_2 X_i(u)}{\lambda_i - r_2} + \frac{n_2}{\lambda_i - r_2} + \sum_{v \sim u, v \notin V(G_1 \diamond G_2)} F_i(v) \\ &= \lambda_i X_i(u) = \lambda_i F_i(u) \end{aligned}$$

didapatkan  $2\bar{n}$  nilai eigen dan vektor eigen yang saling bersesuaian dari  $G$  jika  $G_1 \diamond G_2$  bukan graf bipartisi dan  $2\bar{n} - 1$  nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian jika  $G_1 \diamond G_2$  merupakan graf bipartisi.

Jika diberikan  $Y_1, Y_2, \dots, Y_b$  adalah suatu himpunan maksimal dari solusi tunggal vektor-vektor sistem linear  $R(G_1)Y = 0$ , dengan menggunakan Lema 2.1 didapatkan  $b = \bar{m} - \bar{n}$  jika graf  $G_1 \diamond G_2$  bukan graf bipartit dan didapatkan  $b = \bar{m} - \bar{n} + 1$  jika  $G_1 \diamond G_2$  merupakan graf bipartit. Untuk  $i \in \{1, 2, \dots, b\}$ , misalkan  $H_i = (0, Y_i(e_1)\mathbf{j}, \dots, Y_i(e_m)\mathbf{j})^T$  merupakan vektor eigen dari  $G$  yang bersesuaian dengan nilai eigen  $r_2 = \eta_{n_2}$ , sehingga didapatkan sebanyak  $b$  nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian.

Dari pembuktian telah didapatkan sebanyak  $n_1 + m_1 n_2 + n_2(m_1 + 2m_1 n_2 + m_1 m_2)$  nilai eigen dan vektor eigen yang saling bersesuaian.  $\square$

Dari pembuktian Teorema 4.2 dapat disimpulkan bahwa nilai eigen dari matriks ketetanggaan graf  $G_1 \diamond^2 G_2$  yang merepresentasikan titik baru atau titik-titik yang berasal dari salinan graf  $G_2$  pada graf  $G_1 \diamond^2 G_2$  memiliki multiplisitas sama dengan satu sedangkan nilai eigen dengan multiplisitas lebih dari satu adalah representasi dari titik-titik awal atau titik yang berasal dari graf  $G_1$  pada graf  $G_1 \diamond^2 G_2$ .

### 4.3. Spektrum Laplacian Graf Korona Sisi Pangkat Dua

Pada subbab ini disajikan hasil penelitian tentang bentuk matriks Laplacian dari graf korona sisi pangkat dua dan spektrum Laplacian graf korona sisi pangkat dua serta pembahasan tentang bukti mengenai spektrum Laplacian graf korona sisi pangkat dua

Jika diberikan  $L(G_1 \diamond G_2)$  matriks Laplacian dari  $G_1 \diamond G_2$  dan  $L(G_2)$  merupakan matriks laplacian dari  $G_2$  secara berurutan, dan misalkan  $In(G_1 \diamond G_2)$  merupakan matriks insiden titik-sisi dari  $G_1 \diamond G_2$ , maka matriks Laplacian dari  $G = G_1 \diamond^2 G_2$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$L(G) = \left[ \begin{array}{c|c} L(G_1 \diamond G_2) + r_1 n_2 I_{\bar{n}} & -In(G_1 \diamond G_2) \otimes \mathbf{j}_{n_2} \\ \hline -(In(G_1 \diamond G_2) \otimes \mathbf{j}_{n_2})^T & I_{\bar{m}} \otimes (2I_{n_2} + L(G_2)) \end{array} \right]$$

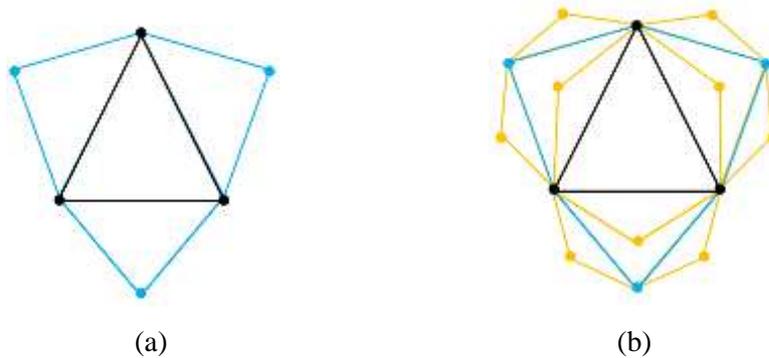
dengan :  $L(G_1 \diamond G_2)$  adalah matriks Laplacian dari  $G_1 \diamond G_2$

$In(G_1 \diamond G_2)$  adalah matriks insiden dari  $G_1 \diamond G_2$

$\mathbf{j}_{n_2}$  adalah matriks baris berukuran  $1 \times n_2$  yang semua elemennya 1

$I_{\bar{m}} \otimes (2I_{n_2} + L(G_2))$  matriks hasil kali Kronecker dari  $I_{\bar{m}}$  dan  $2I_{n_2} + L(G_2)$

**Contoh 4.3** Diberikan graf  $G_1 \cong C_3$  dan graf  $G_2 \cong C_1$ , representasi gambar dari graf  $G_1 \diamond G_2$  dan graf  $G_1 \diamond^2 G_2$  dapat dilihat pada Gambar 4.3 berikut:



Gambar 4.3 (a) Graf  $G_1 \diamond G_2$  (b) Graf  $G_1 \diamond^2 G_2$

Matriks ketetangaan dari graf  $G_1 \diamond^2 G_2$  adalah sebagai berikut:

$$A(G_1 \diamond^2 G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sedangkan untuk matriks Laplacian dari graf  $G_1 \diamond^2 G_2$  adalah sebagai berikut:

$$L(G_1 \diamond^2 G_2) = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 8 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

setelah didapatkan matriks  $L(G_1 \diamond^2 G_2)$ , langkah selanjutnya adalah mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$\det(\lambda I - L(G_1 \diamond^2 G_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda^3 - 14\lambda^2 + 56\lambda - 60)(\lambda^4 - 17\lambda^3 + 86\lambda^2 - 150\lambda + 81)^2(\lambda - 2)^3 = 0,$$

sehingga didapatkan spektrum Laplaciannya sebagai berikut:

$$\text{spect}(L(G_1 \diamond^2 G_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1.04 & 1.72 & 1.74 & 2 & 4.46 & 4.68 & 7.82 & 9.54 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dari hasil pencarian spektrum Laplacian diatas untuk nilai eigen yang multiplisitasnya lebih dari satu merupakan nilai eigen dari matriks  $L(G_1 \diamond G_2)$ , sehingga nilai-nilai eigen tersebut merupakan representasi dari titik titik graf  $G_1 \diamond G_2$  yang ada pada graf  $G_1 \diamond^2 G_2$ , sedangkan untuk nilai eigen yang multiplisitasnya sama dengan satu merupakan representasi dari titik titik  $G_2$  yang ada pada graf  $G_1 \diamond^2 G_2$ .

Berikut hasil pencarian dari spektrum Laplacian dari graf korona sisi pada beberapa graf reguler:

Tabel 4.2 Spektrum Laplacian graf korona sisi

$G_1$	$G_2$	$\text{spect}(L(G_1))$	$\text{spect}(L(G_2))$	$\text{spect}(L(G_1 \diamond G_2))$
$P_2$	$P_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_3$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_4$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_5$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.3820 & 3.6180 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3.3820 & 5.6180 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_6$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$C_3$	$P_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.6277 & 4 & 6 & 7.3723 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$C_3$	$C_3$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.5949 & 5 & 8 & 9.4051 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$C_3$	$C_4$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.5756 & 4 & 6 & 10 & 11.4244 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$C_3$	$C_5$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.3820 & 3.6180 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.5628 & 3.3820 & 5.6180 & 12 & 13.4372 \\ 1 & 2 & 6 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$C_3$	$C_6$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.5538 & 3 & 5 & 6 & 14 & 15.4462 \\ 1 & 2 & 6 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Berikut hasil spektrum Laplacian graf korona sisi pangkat dua pada beberapa sampel graf reguler:

$$\text{spect}(L(P_2 \diamond^2 P_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1.5279 & 2 & 4 & 8 & 10.4721 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(L(P_2 \diamond^2 C_3)) = \begin{bmatrix} 0 & 1,4223 & 2 & 5 & 14 & 17.5777 \\ 1 & 4 & 5 & 20 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(L(P_2 \diamond^2 C_4))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1.1511 & 1.3509 & 1.4383 & 1.6077 & 2 & 4 & 6 & 18.7412 & 20.8489 & 22.3923 & 25.8205 & 26.6491 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 7 & 26 & 13 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(L(P_2 \diamond^2 C_5))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.9698 & 1.2997 & 1.4487 & 1.5061 & 2 & 3.3820 & 5.6180 & 23.0034 & 24.4122 & 26.1120 & 36.5478 & 37.7003 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 9 & 32 & 32 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(L(P_2 \diamond^2 C_6))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.8527 & 1.2614 & 1.3490 & 1.4561 & 1.5778 & 2 & 3 & 5 & 6 & 27.1275 & 28.1473 & 29.6510 & 30.4222 & 49.4164 & 50.7386 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 11 & 38 & 38 & 19 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(L(C_3 \diamond^2 P_2))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.6910 & 1.5279 & 1.5478 & 1.5591 & 2 & 4 & 8.7682 & 9.0453 & 10.4721 & 17.6840 & 19.7047 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 9 & 18 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(L(C_3 \diamond^2 C_3))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.5036 & 1.4223 & 1.4374 & 1.4437 & 2 & 5 & 14.9778 & 15.2641 & 17.5777 & 31.5848 & 33.7886 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 2 & 18 & 60 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(L(C_3 \diamond^2 C_4))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.4635 & 1.1511 & 1.3965 & 1.4480 & 1.6077 & 2 & 4 & 6 & 19.1067 & 19.3159 & 20.8489 & 22.3923 & 49.4453 & 51.824 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 1 & 3 & 24 & 78 & 39 & 1 & 2 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(L(C_3 \diamond^2 C_5))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.4376 & 0.9698 & 1.3637 & 1.4555 & 1.5061 & 2 & 3.3820 & 5.6180 & 23.1833 & 23.3491 & 24.4122 & 26.1120 & 71.3612 & 73.8496 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 1 & 6 & 30 & 96 & 96 & 1 & 2 & 6 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(L(C_3 \diamond^2 C_6))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.4195 & 0.8527 & 1.3396 & 1.3490 & 1.4611 & 1.5778 & 2 & 3 & 5 & 6 & 27.2345 & 27.3721 & 28.1473 & 29.651 & 30.4222 & 97.3044 & 99.8689 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 6 & 1 & 3 & 36 & 114 & 114 & 57 & 1 & 2 & 6 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dari hasil spektrum Laplacian untuk beberapa graf reguler yang sudah ditemukan dapat disimpulkan dalam Teorema 4.2 berikut:

**Teorema 4.2** Diberikan suatu graf  $r_1$ -reguler  $G_1$  dengan  $r_1 \geq 2$  dan graf  $r_2$ -reguler  $G_2$  dengan  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\bar{n}}$  adalah nilai eigen dari  $L(G_1 \diamond G_2)$  dan  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_2}$  adalah nilai eigen dari  $L(G_2)$ , jika

$$\beta_i = \frac{r_1 n_2 + \theta_i + 2 + \sqrt{(r_1 n_2 + \theta_i + 2)^2 - 4(n_2 + 2)\theta_i}}{2}$$

dan

$$\bar{\beta}_i = \frac{r_1 n_2 + \theta_i + 2 - \sqrt{(r_1 n_2 + \theta_i + 2)^2 - 4(n_2 + 2)\theta_i}}{2}$$

untuk setiap  $\theta_i$ , maka spektrum matriks Laplacian dari  $G \cong G_1 \diamond^2 G_2$  adalah

$$\text{spect}(L(G)) = \begin{bmatrix} \tau_1 + 2 & \tau_2 + 2 & \dots & \tau_{n_2} + 2 & \beta_1 & \bar{\beta}_1 & \dots & \beta_{\bar{n}} & \bar{\beta}_{\bar{n}} \\ \bar{m} - \bar{n} & \bar{m} & \dots & \bar{m} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Bukti.** Misalkan  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_2}$  merupakan vektor eigen dari  $L(G_2)$  yang bersesuaian dengan nilai eigen  $0 = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_2}$ . Jika  $Z_j \perp \mathbf{j}$  untuk  $j \in \{1, 2, \dots, n_2\}$  maka untuk  $i \in \{1, 2, \dots, \bar{m}\}$  dan  $j \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ , terdapat vektor-vektor  $(0, 0, \dots, 0, Z_j, 0, \dots, 0)^T$  berdimensi  $(\bar{n} + \bar{m}n_2)$  yang merupakan vektor eigen dari  $L(G)$  yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\tau_j + 2$ , sehingga didapatkan  $\bar{m}(n_2 - 1)$  nilai eigen dan vektor eigen dari  $L(G)$  yang saling bersesuaian.

Misalkan  $X_1, X_2, \dots, X_{\bar{n}}$  merupakan vektor eigen orthogonal dari  $L(G_1 \diamond G_2)$  yang bersesuaian terhadap nilai eigen  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\bar{n}}$ , secara berurutan. Untuk  $i \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$  dapat diperhatikan bahwa

$$\beta_i, \bar{\beta}_i = \frac{r_1 n_2 + \theta_i + 2 \pm \sqrt{(r_1 n_2 + \theta_i + 2)^2 - 4(n_2 + 2)\theta_i}}{2} = \frac{r_1 n_2 + \theta_i + 2 \pm \sqrt{(r_1 n_2 + \theta_i - 2)^2 - 4n_2(2r_1 - \theta_i)}}{2}$$

karena  $r_1 \geq 2, n_2 \geq 1, \beta_i \neq 2$ . Ingat bahwa  $\theta_i \leq 2r_1$  dan persamaan di atas terpenuhi jika dan hanya jika  $G_1 \diamond G_2$  adalah graf bipartisi. Perhatikan jika  $\bar{\beta}_i = 2$  maka  $\theta_i = 2r_1$ , dengan kata lain,  $\bar{\beta}_i = 2$  muncul hanya jika  $G_1 \diamond G_2$  merupakan graf bipartisi dan  $i = \bar{n}$ . Jika  $G_1 \diamond G_2$  merupakan graf bipartisi dan bipartisi dari

himpunan titiknya adalah  $V_1 \cup V_2$ , maka  $(1, -1, 0, \dots, 0)^T$  merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $(\bar{n} + 2)r_1 = \beta_{\bar{n}}$  dari  $L(G)$ .

Perhatikan bahwa jika  $\beta_i$  dan  $\bar{\beta}_i$  tidak sama dengan 2, maka  $\beta_i$  dan  $\bar{\beta}_i$  merupakan nilai eigen dari  $L(G)$  dan

$$F_i = \left[ X_i, \dots, \frac{X_i(s) + X_i(t)}{2 - \beta_i}, \dots \right]^T$$

dan

$$\bar{F}_i = \left[ X_i, \dots, \frac{X_i(s) + X_i(t)}{2 - \bar{\beta}_i}, \dots \right]^T$$

merupakan vektor eigen dari  $\beta_i$  dan  $\bar{\beta}_i$  secara berurutan, sedemikian sehingga perlu diperiksa bahwa persamaan karakteristik

$$d_G(u)F_i(u) - \sum_{v \sim u} F_i(v) = \beta_i F_i(u)$$

serta

$$d_G(u)F_i(u) - \sum_{v \sim u} F_i(v) = \bar{\beta}_i F_i(u)$$

berlaku untuk setiap titik  $u$  di  $G$ .

Untuk setiap titik  $u$  di  $k$ -salinan dari  $G_2$ , misalkan sisi  $e_k = st$ , maka

$$d_G(u) = d_{G_2}(u) + 2$$

dan

$$F_i(u) = \frac{X_i(s) + X_i(t)}{2 - \beta_i}$$

Oleh karena itu, dapat ditentukan

$$d_G(u)F_i(u) - \sum_{v \sim u} F_i(v) = d_{G_2}(u) + 2F_i(u) - d_{G_2}(u) \frac{X_i(s) + X_i(t)}{2 - \beta_i} - (X_i(s) + X_i(t)) = \beta_i F_i(u)$$

Untuk setiap titik  $u$  di  $G_1 \diamond G_2$ , diperoleh

$$r_i X_i(u) - \sum_{\substack{v \sim u \\ v \in V(G_1 \diamond G_2)}} X_i(v) = \theta_i X_i(u)$$

Oleh karena itu, dapat ditemukan

$$\begin{aligned} & d_G(u)F_i(u) - \sum_{v \sim u} F_i(v) \\ &= (r_1 + r_1 n_2)F_i(u) - \sum_{\substack{v \sim u \\ v \in V(G_1 \diamond G_2)}} F_i(v) + \sum_{\substack{v \sim u \\ v \notin V(G_1 \diamond G_2)}} F_i(v) \\ &= (r_1 + r_1 n_2)X_i(u) - \sum_{\substack{v \sim u \\ v \in V(G_1 \diamond G_2)}} X_i(v) - \sum_{\substack{v \sim u \\ v \notin V(G_1 \diamond G_2)}} \frac{n_2}{2 - \beta_i} (X_i(u) + X_i(v)) \\ &= \frac{(r_1 + r_1 n_2)(2 - \beta_i) - 2n_2 r_1 + n_2 \theta_i}{2 - \beta_i} X_i(u) + (\theta_i - r_1) X_i(u) \\ &= \beta_i X_i(u) = \beta_i F_i(u) \end{aligned}$$

Oleh karena itu didapatkan  $2\bar{n}$  nilai eigen dan vektor eigen yang saling bersesuaian dari  $L(G)$  jika  $G_1 \diamond G_2$  bukan merupakan graf bipartisi, dan  $2\bar{n} - 1$  nilai eigen dan vektor eigen yang saling berkorespondensi dari  $L(G)$  jika  $G_1 \diamond G_2$  merupakan graf bipartisi.

Misalkan  $Y_1, Y_2, \dots, Y_b$  merupakan himpunan maksimal dari vektor penyelesaian tunggal dari sistem linear  $R(G_1 \diamond G_2)Y = 0$ . Maka  $b = \bar{m} - \bar{n}$  jika  $G_1 \diamond G_2$  bukan graf bipartisi dan  $b = \bar{m} - \bar{n} + 1$  jika  $G_1 \diamond G_2$  merupakan graf bipartisi. Untuk  $i \in \{1, 2, \dots, b\}$ , misalkan  $H_i = (0, Y_i(e_1)\mathbf{j}, \dots, Y_i(e_{\bar{m}})\mathbf{j})^T$ , dapat diketahui bahwa  $H_i$  merupakan suatu vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $(r_1 + 2)$  dari

$L(G)$ . Didapatkan nilai eigen dan vektor eigen yang saling bersesuaian sebanyak  $b$  dari  $L(G)$ .

Oleh karena itu didapatkan sejumlah  $\bar{n} + \bar{m}n_2$  nilai eigen dan vektor eigen yang saling bersesuaian dari  $L(G)$ , dan vektor-vektor eigen tersebut bebas linear. Jadi teorema terbukti.  $\square$

Dari pembuktian Teorema 4.2 dapat disimpulkan bahwa nilai eigen yang multiplisitasnya sama dengan satu merupakan nilai eigen yang merepresentasikan titik-titik graf  $G_2$  yang ada pada graf  $G_1 \diamond^2 G_2$  sedangkan untuk nilai eigen yang multiplisitasnya lebih besar dari satu merepresentasikan titik-titik graf  $G_1 \diamond G_2$  yang ada pada graf  $G_1 \diamond^2 G_2$ .

#### 4.4. Spektrum Signless-Laplacian Graf Korona Sisi Pangkat Dua

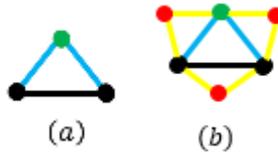
Pada subbab ini akan disajikan tentang hasil penelitian matriks signless-Laplacian dari graf korona sisi pangkat dua dan spektrum signless-Laplacian graf korona sisi pangkat dua serta pembahasan dari spektrum signless-Laplacian graf korona sisi pangkat dua.

Misalkan  $|L|(G_1 \diamond G_2)$  dan  $|L|(G_2)$  merupakan matriks signless-Laplacian dari  $G_1 \diamond G_2$  dan  $G_2$  secara berurutan, dan misalkan  $In(G_1 \diamond G_2)$  merupakan matriks keterhubungan titik-sisi dari  $G_1 \diamond G_2$ , maka matriks signless-Laplacian dari  $G \cong G_1 \diamond^2 G_2$  dapat ditulis sebagai berikut

$$|L|(G) = \left[ \begin{array}{c|c} |L|(G_1 \diamond G_2) + r_1 n_2 I_{\bar{n}} & In(G_1 \diamond G_2) \otimes \mathbf{j}_{n_2} \\ \hline (In(G_1 \diamond G_2) \otimes \mathbf{j}_{n_2})^T & I_{\bar{m}} \otimes (2I_{n_2} + L(G_2)) \end{array} \right]$$

dengan  $\bar{n} = n_1 + m_1 n_2$  dan  $\bar{m} = m_1 + 2m_1 n_2 + m_1 m_2$ .

**Contoh 4.4** Jika diberikan graf  $G = P_2$  dan  $H = P_1$  maka representasi dari matriks  $G \diamond H$  dan  $G \diamond^2 H$  ditunjukkan pada Gambar 4.4 berikut:



Gambar 4.4 (a) Graf  $G \diamond H$  (b) Graf  $G \diamond^2 H$

Setelah didapatkan representasi gambar dari  $G \diamond^2 H$  dapat ditentukan matriks ketetanggaan  $A(G \diamond^2 H)$  yaitu

$$A(G \diamond^2 H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan matriks  $A(G \diamond^2 H)$  langkah selanjutnya adalah mencari matriks signless-Laplacian dari graf tersebut, sebagai berikut:

$$|L|(G \diamond^2 H) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan matriks  $A(G \diamond^2 H)$  langkah berikutnya adalah mencari nilai eigen dari matriks tersebut, sebagai berikut:

$$\det \left( \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 4 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^6 - 18\lambda^5 + 123\lambda^4 - 410\lambda^3 + 705\lambda^2 - 600\lambda + 200 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 8\lambda + 8)(\lambda^2 - 5\lambda + 5)^2 = 0.$$

$$\text{Jadi } \lambda_1 = 4 - 2\sqrt{2}, \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \lambda_3 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \text{ dan } \lambda_4 = 4 + 2\sqrt{2}$$

Dari langkah yang dilakukan dapat ditemukan spektrum signless-Laplacian dari graf  $G \diamond^2 H$  adalah:

$$\text{spect}(|L|(G \diamond^2 H)) = \begin{bmatrix} 4 - 2\sqrt{2} & \frac{5 - \sqrt{5}}{2} & \frac{5 + \sqrt{5}}{2} & 4 + 2\sqrt{2} \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari pencarian spektrum signless Laplacian dapat diketahui bahwa nilai eigen yang multiplisitasnya lebih besar dari satu merupakan nilai eigen pada matriks signless Laplacian graf  $G_1 \diamond G_2$  sehingga nilai eigen tersebut merupakan representasi titik-titik graf  $G \diamond H$  yang ada pada graf  $G \diamond^2 H$ , sedangkan nilai eigen yang multiplisitasnya sama dengan satu merupakan representasi titik-titik  $H$  yang ada pada graf  $G \diamond^2 H$ .

Berikut adalah hasil pencarian spektrum signless-Laplacian pada beberapa graf reguler:

Tabel 4.3 Spektrum signless-Laplacian graf korona sisi

$G_1$	$G_2$	$\text{spect}( L (G_1))$	$\text{spect}( L (G_2))$	$\text{spect}( L (G_1 \diamond G_2))$
$P_2$	$P_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_3$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_4$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3.1716 & 4 & 8.8284 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_5$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3820 & 2.6180 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.3820 & 3.2984 & 4.6180 & 5 & 9.7016 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$P_2$	$C_6$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3.3944 & 5 & 6 & 10.6056 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$C_3$	$P_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2.5359 & 3 & 6 & 9.4641 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$C_3$	$C_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4.6972 & 8.3028 & 12 \\ 6 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$C_3$	$C_4$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$C_3$	$C_5$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3820 & 2.6180 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.3820 & 4 & 4.6180 & 5.1459 & 11.8541 & 16 \\ 6 & 1 & 6 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Berikut hasil spektrum signless-Laplacian untuk graf korona sisi pangkat dua pada graf reguler:

$$\text{spect}(|L|(P_2 \diamond^2 P_2)) = \begin{bmatrix} 2 & 2.7085 & 3.1716 & 4 & 8.8284 & 13.2915 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(|L|(P_2 \diamond^2 C_3)) = \begin{bmatrix} 3 & 4.4560 & 5.0919 & 6 & 15.9083 & 21.5440 \\ 20 & 1 & 4 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{spect}(|L|(P_2 \diamond^2 C_4)) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4.3937 & 4.9377 & 5.1511 & 5.2135 & 5.3668 & 6 & 18.6332 & 21.0623 & 21.4684 & 24.8489 & 28.9245 \\ 13 & 26 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{spect}(|L|(P_2 \diamond^2 C_5)) \\ &= \begin{bmatrix} 2.3820 & 4.3440 & 4.6180 & 4.8330 & 5.1621 & 5.2797 & 5.3027 & 6 & 23.0793 & 25.7851 & 26.2375 & 35.8379 & 39.1389 \\ 32 & 1 & 32 & 2 & 1 & 1 & 2 & 9 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{spect}(|L|(P_2 \diamond^2 C_6)) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4.3050 & 4.7623 & 5 & 5.1597 & 5.1752 & 5.3209 & 5.4170 & 6 & 26.5830 & 27.8248 & 30.2377 & 30.5943 & 48.8403 & 51.7798 \\ 19 & 38 & 1 & 2 & 38 & 1 & 2 & 1 & 1 & 11 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{spect}(|L|(C_3 \diamond^2 P_2)) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2.7685 & 2.8492 & 3.1716 & 3.2889 & 3.3408 & 4 & 8.8284 & 10.1680 & 10.7504 & 18.0596 & 21.7745 \\ 18 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 9 & 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{spect}(|L|(C_3 \diamond^2 C_3)) \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4.5162 & 4.6171 & 5.0917 & 5.2147 & 5.2541 & 6 & 15.9083 & 18.4212 & 19.0452 & 32.0836 & 35.8479 \\ 60 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 & 18 & 6 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{spect}(|L|(C_3 \diamond^2 C_4)) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4.4316 & 4.5684 & 4.9377 & 5.2606 & 5.2805 & 5.3668 & 6 & 18.6332 & 21.0623 & 22.6754 & 23.1793 & 49.9918 & 53.6125 \\ 39 & 78 & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 & 3 & 24 & 3 & 6 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{spect}(|L|(C_3 \diamond^2 C_5)) \\ &= \begin{bmatrix} 2.3820 & 4.3710 & 4.5339 & 4.6180 & 4.8330 & 5.2578 & 5.3027 & 5.3214 & 6 & 23.0793 & 25.7851 & 26.8315 & 27.2473 & 71.9610 & 75.4761 \\ 96 & 1 & 2 & 96 & 6 & 2 & 6 & 1 & 30 & 6 & 6 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hasil spektrum signless-Laplacian yang ditemukan untuk graf reguler dan graf korona sisi pangkat dua pada graf reguler dapat disimpulkan pada Teorema 4.3 berikut:

**Teorema 4.3** Misalkan suatu graf  $G_1$   $r_1$ -reguler dengan  $r_1 \geq 2$  dan graf  $G_2$   $r_2$ -reguler dengan  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\bar{n}}$  adalah nilai eigen dari  $|L|(G_1 \diamond G_2)$  dan  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n_2}$  adalah nilai eigen dari  $|L|(G_2)$ , jika

$$\beta_i = \frac{r_1 n_2 + \rho_i + 2(r_2 + 1) + \sqrt{(r_1 n_2 + \rho_i - 2(r_2 + 1))^2 + 4(n_2 + 2)\theta_i}}{2}$$

dan

$$\bar{\beta}_i = \frac{r_1 n_2 + \rho_i + 2(r_2 + 1) - \sqrt{(r_1 n_2 + \rho_i - 2(r_2 + 1))^2 + 4(n_2 + 2)\theta_i}}{2}$$

untuk setiap  $\theta_i$ , maka spektrum Laplacian dari graf  $G \cong G_1 \diamond^2 G_2$  adalah

$$\text{spec}(|L|(G)) = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_1 + 2 & 2\varepsilon_2 + 2 & \dots & 2\varepsilon_{n_2} + 2 & \beta_1 & \bar{\beta}_1 & \dots & \beta_{\bar{n}} & \bar{\beta}_{\bar{n}} \\ \bar{m} - \bar{n} & \bar{m} & \dots & \bar{m} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Bukti.** Misalkan  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_2}$  merupakan vektor eigen dari  $|L|(G_2)$  yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen  $0 = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n_2}$ . Dapat diperhatikan bahwa  $Z_j \perp \mathbf{j}$  untuk  $j \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ . Sedemikian sehingga untuk  $i \in \{1, 2, \dots, \bar{m}\}$  dan  $j \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ , terdapat vektor-vektor  $(0, 0, \dots, 0, Z_j, 0, \dots, 0)^T$  berdimensi  $(\bar{n} + \bar{m}n_2)$  dengan urutan ke- $(i + 1)$  adalah  $Z_j$  yang merupakan vektor eigen dari  $|L|(G)$  yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\varepsilon_j + 2$ . Oleh karena itu didapatkan  $\bar{m}(n_2 - 1)$  nilai eigen dan vektor eigen dari  $|L|(G)$  yang saling bersesuaian.

Misalkan  $X_1, X_2, \dots, X_{\bar{n}}$  merupakan vektor eigen orthogonal dari  $|L|(G_1 \diamond G_2)$  yang bersesuaian terhadap nilai eigen  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\bar{n}}$ , secara berurutan. Untuk  $i \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$  dapat diperhatikan

$$\beta_i = \frac{r_1 n_2 + \rho_i + 2(r_2 + 1) + \sqrt{(r_1 n_2 + \rho_i - 2(r_2 + 1))^2 + 4(n_2 + 2)\theta_i}}{2}$$

dan

$$\bar{\beta}_i = \frac{r_1 n_2 + \rho_i + 2(r_2 + 1) - \sqrt{(r_1 n_2 + \rho_i - 2(r_2 + 1))^2 + 4(n_2 + 2)\theta_i}}{2}$$

karena  $r_1 \geq 2, n_2 \geq 1, \beta_i \neq 2$ . Dapat diperhatikan bahwa  $\rho_i \leq 2r_1$  dan persamaan di atas terpenuhi jika dan hanya jika  $G_1 \diamond G_2$  adalah graf bipartisi. Jika  $\bar{\beta}_i = 2$  maka  $\rho_i = 2r_1$ , dengan kata lain  $\bar{\beta}_i = 2$  muncul hanya jika  $G_1 \diamond G_2$  merupakan graf bipartisi dan  $i = \bar{n}$ . Jika  $G_1 \diamond G_2$  merupakan graf bipartisi dan bipartisi dari himpunan titiknya adalah  $V_1 \cup V_2$ , maka  $(1, -1, 0, \dots, 0)^T$  merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $(\bar{n} + 2)r_1 = \beta_{\bar{n}}$  dari  $|L|(G)$ .

Perhatikan bahwa jika  $\beta_i$  dan  $\bar{\beta}_i$  tidak sama dengan 2, maka  $\beta_i$  dan  $\bar{\beta}_i$  merupakan nilai eigen dari  $|L|(G)$  dan

$$F_i = \left[ X_i, \dots, \frac{X_i(s) + X(t)}{2 - \beta_i}, \dots \right]^T$$

dan

$$\bar{F}_i = \left[ X_i, \dots, \frac{X_i(s) + X(t)}{2 - \bar{\beta}_i}, \dots \right]^T$$

merupakan vektor eigen dari  $\beta_i$  dan  $\bar{\beta}_i$  secara berurutan, jadi perlu diperiksa bahwa persamaan karakteristik

$$d_G(u)F_i(u) - \sum_{v \sim u} F_i(v) = \beta_i F_i(u)$$

serta

$$d_G(u)F_i(u) - \sum_{v \sim u} F_i(v) = \bar{\beta}_i F_i(u)$$

berlaku untuk setiap titik  $u$  di  $G$ .

Untuk setiap titik  $u$  di  $k$ -salinan dari  $G_2$ , misalkan sisi  $e_k = st$ , maka

$$d_G(u) = d_{G_2}(u) + 2$$

dan

$$F_i(u) = \frac{X_i(s) + X_i(t)}{2 - \beta_i}$$

Oleh karena itu dapat diperoleh

$$\begin{aligned} d_G(u)F_i(u) - \sum_{v \sim u} F_i(v) &= d_{G_2}(u) + 2F_i(u) - d_{G_2}(u) \frac{X_i(s) + X_i(t)}{2 - \beta_i} - (X_i(s) + X_i(t)) \\ &= \beta_i F_i(u) \end{aligned}$$

Untuk setiap titik  $u$  di  $G_1 \diamond G_2$ , perhatikan bahwa

$$r_i X_i(u) - \sum_{\substack{v \sim u \\ v \in V(G_1 \diamond G_2)}} X_i(v) = \theta_i X_i(u)$$

Jadi dapat ditemukan

$$\begin{aligned} d_G(u)F_i(u) - \sum_{v \sim u} F_i(v) &= (r_1 + r_1 n_2)F_i(u) - \sum_{\substack{v \sim u \\ v \in V(G_1 \diamond G_2)}} F_i(v) + \sum_{\substack{v \sim u \\ v \notin V(G_1 \diamond G_2)}} F_i(v) \\ &= (r_1 + r_1 n_2)X_i(u) - \sum_{\substack{v \sim u \\ v \in V(G_1 \diamond G_2)}} X_i(v) - \sum_{\substack{v \sim u \\ v \notin V(G_1 \diamond G_2)}} \frac{n_2}{2 - \beta_i} (X_i(u) + X_i(v)) \\ &= \frac{(r_1 + r_1 n_2)(2 - \beta_i) - 2n_2 r_1 + n_2 \theta_i}{2 - \beta_i} X_i(u) + (\theta_i - r_1)X_i(u) \\ &= \beta_i X_i(u) = \beta_i F_i(u) \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas didapatkan  $2\bar{n}$  nilai eigen dan vektor eigen yang saling bersesuaian dari  $|L|(G)$  jika  $G_1 \diamond G_2$  bukan merupakan graf bipartisi, dan  $2\bar{n} - 1$  nilai eigen dan vektor eigen yang saling bersesuaian dari  $|L|(G)$  jika  $G_1 \diamond G_2$  merupakan graf bipartisi.

Misalkan  $Y_1, Y_2, \dots, Y_b$  merupakan himpunan maksimal dari vektor penyelesaian tunggal dari sistem linear  $R(G_1 \diamond G_2)Y = 0$ . Maka  $b = \bar{m} - \bar{n}$  jika  $G_1 \diamond G_2$  bukan graf bipartisi dan  $b = \bar{m} - \bar{n} + 1$  jika  $G_1 \diamond G_2$  merupakan graf bipartisi. Untuk  $i \in \{1, 2, \dots, b\}$ , dan misalkan  $H_i = (0, Y_i(e_1)\mathbf{j}, \dots, Y_i(e_{\bar{m}})\mathbf{j})^T$ , dapat diketahui bahwa  $H_i$  merupakan suatu vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $(r_1 + 2)$  dari  $L(G)$ . Jadi didapatkan nilai eigen dan vektor eigen yang saling bersesuaian sebanyak  $b$  dari  $L(G)$ .

Dari pembuktian didapatkan sejumlah  $\bar{n} + \bar{m}n_2$  nilai eigen dan vektor eigen yang saling bersesuaian dari  $|L|(G)$ , dan vektor-vektor eigen tersebut bebas linear, sehingga teorema telah terbukti.  $\square$

Dari pembuktian Teorema 4.3 dapat disimpulkan bahwa nilai eigen yang multiplisitasnya lebih besar dari satu merupakan representasi dari titik-titik graf  $G_1 \diamond G_2$  yang ada pada graf  $G_1 \diamond^2 G_2$  sedangkan nilai eigen yang multiplisitasnya sama dengan satu merupakan representasi dari titik-titik graf salinan kedua dari  $G_2$  yang ada pada graf  $G_1 \diamond^2 G_2$ .

#### 4.5. Aplikasi Spektrum Laplacian Terhadap Banyak Spanning Tree Pada Graf Korona Sisi Pangkat Dua

Pada subbab ini disajikan suatu aplikasi dari hasil yang telah disajikan sebelumnya, khususnya adalah aplikasi dari Teorema 4.2.

Spektrum suatu graf dapat digunakan untuk mencari banyaknya spanning-tree dari graf tersebut. Seperti yang dikemukakan oleh Youping, 2011 pada lema berikut:

**Lema 4.1** Jika diberikan suatu graf terhubung  $G$  dengan  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  dan nilai-nilai eigen Laplacian adalah  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ , maka banyaknya spanning tree dari  $G$  yang dinotasikan dengan  $st(G)$  adalah

$$st(G) = \frac{\theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \dots \cdot \theta_n}{n}.$$

Dari Teorema 4.2 dan Lema 4.1 didapatkan proposisi sebagai berikut:

**Proposisi 4.1** Untuk suatu graf  $r_1$ -reguler  $G_1$  dan graf  $r_2$ -reguler  $G_2$  dengan  $st(G_1 \diamond G_2)$  adalah banyaknya spanning tree dari  $G_1$  dan  $st(G_2)$  adalah banyaknya

spanning tree dari  $G_2$  dan  $L(G_2) = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_{n_2} \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{n_2} \end{bmatrix}$ , maka banyaknya spanning tree dari  $G_1 \diamond^2 G_2$  adalah

$$st(G_1 \diamond^2 G_2) = 2^{\bar{m}-\bar{n}+1}(n_2 + 2)^{\bar{n}-1} st(G_1 \diamond G_2) \prod_{i=2}^{n_2} (\tau_i + 2)^{\bar{m}}.$$

**Bukti.** Dapat diperhatikan dari Teorema 4.2 hasil dari  $\beta_i \bar{B}_i = (n_2 + 2)\theta_i$  untuk  $i \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$  dan  $\beta_1 = r_1 n_2 + 2$ ,  $\bar{\beta}_1 = 0$ , sehingga

$$\begin{aligned} st(G_1 \diamond^2 G_2) &= \frac{2^{\bar{m}-\bar{n}}(r_1 n_2 + 2)(n_2 + 2)^{\bar{n}-1} \prod_{i=2}^{n_2} (r_1 + 2)^{\bar{m}} \prod_{j=2}^{\bar{n}} \theta_j}{\bar{n} + \bar{m}n_2} \\ &= \frac{\bar{n}2^{\bar{m}-\bar{n}}(r_1 n_2 + 2)(n_2 + 2)^{\bar{n}-1} st(G_1 \diamond G_2) \prod_{i=2}^{n_2} (r_1 + 2)^{\bar{m}}}{\bar{n} + \bar{m}n_2} \\ &= 2^{\bar{m}-\bar{n}+1}(n_2 + 2)^{\bar{n}-1} st(G_1 \diamond G_2) \prod_{i=2}^{n_2} (\tau_i + 2)^{\bar{m}} \end{aligned}$$

Persamaan terakhir akibat dari  $\bar{n} + \bar{m}n_2 = \frac{n(2+r_1 n_2)}{2}$ . □

## BAB V

### PENUTUP

Pada bab ini, berisi kesimpulan dari semua kegiatan penelitian dan saran untuk pengembangan dalam penelitian Tesis inidan saran untuk penelitian selanjutnya.

#### 5.1. Kesimpulan

Berdasarkan analisis hasil penelitian dan penghitungan yang disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa

1. Terbukti bahwa jika diberikan suatu graf  $G_1$   $r_1$ -reguler dengan  $n_1$  titik dan  $m_1$  sisi dan graf  $G_2$   $r_2$ -reguler dengan  $n_2$  titik dan  $m_2$  sisi. Jika  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\bar{n}}$  dengan  $\bar{n} = n_1 + m_1 n_2$  adalah nilai-nilai eigen dari  $G_1 \diamond G_2$ , dan  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n_2}$  adalah nilai eigen dari  $G_2$  dengan

$$\beta_i = \frac{r_2 + \mu_i + \sqrt{(r_2 - \mu_i)^2 + 4(r_1 + \mu_i)n_2}}{2}$$

dan

$$\bar{\beta}_i = \frac{r_2 + \mu_i - \sqrt{(r_2 - \mu_i)^2 + 4(r_1 + \mu_i)n_2}}{2}$$

maka spektrum dari  $G \cong G_1 \diamond^2 G_2$  adalah

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc} \eta_{k-1} & \eta_k & \eta_{k+1} & \beta_1 & \bar{\beta}_1 & \beta_2 & \bar{\beta}_2 & \cdots & \beta_{\bar{n}} & \bar{\beta}_{\bar{n}} \\ \frac{l(\eta_k)*\bar{m}}{3} & \frac{l(\eta_{k-1})*\bar{m}}{3} & \frac{l(\eta_{k-2})*\bar{m}}{3} & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right]$$

dengan  $\bar{m} = m_1 + 2m_1 n_2 + m_1 m_2$ ,  $k = \frac{\bar{n}}{2}$ .

2. Terbukti bahwa jika diberikan suatu graf  $r_1$ -regular  $G_1$  dengan  $r_1 \geq 2$  dan graf  $r_2$ -reguler  $G_2$  dengan  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\bar{n}}$  adalah nilai eigen dari  $L(G_1 \diamond G_2)$  dan  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_2}$  adalah nilai eigen dari  $L(G_2)$ , jika

$$\beta_i, \bar{\beta}_i = \frac{r_1 n_2 + \theta_i + 2 \pm \sqrt{(r_1 n_2 + \theta_i + 2)^2 - 4(n_2 + 2)\theta_i}}{2}$$

untuk setiap  $\theta_i$ , maka spektrum matriks Laplacian dari  $G \cong G_1 \diamond^2 G_2$  adalah

$$\text{spect}(L(G)) = \begin{bmatrix} \tau_1 + 2 & \tau_2 + 2 & \dots & \tau_{n_2} + 2 & \beta_1 & \overline{\beta_1} & \dots & \beta_{\overline{n}} & \overline{\beta_{\overline{n}}} \\ \overline{m} - \overline{n} & \overline{m} & \dots & \overline{m} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Terbukti bahwa jika diberikan suatu graf  $G_1$   $r_1$ -reguler dengan  $r_1 \geq 2$  dan graf  $G_2$   $r_2$ -reguler dengan  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\overline{n}}$  adalah nilai eigen dari  $|L|(G_1 \diamond G_2)$  dan  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n_2}$  adalah nilai eigen dari  $|L|(G_2)$ , dan

$$\beta_i, \overline{\beta}_i = \frac{r_1 n_2 + \rho_i + 2(r_2 + 1) \pm \sqrt{(r_1 n_2 + \rho_i - 2(r_2 + 1))^2 + 4(n_2 + 2)\theta_i}}{2}$$

untuk setiap  $\theta_i$ . Maka spektrum Laplacian dari graf  $G \cong G_1 \diamond^2 G_2$  adalah

$$\text{spect}(|L|(G)) = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_1 + 2 & 2\varepsilon_2 + 2 & \dots & 2\varepsilon_{n_2} + 2 & \beta_1 & \overline{\beta_1} & \dots & \beta_{\overline{n}} & \overline{\beta_{\overline{n}}} \\ \overline{m} - \overline{n} & \overline{m} & \dots & \overline{m} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5.2. Saran

Pada penelitian Tesis ini hanya membahas tentang teori matematis dari spektrum graf korona sisi pangkat dua. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan menyertakan aplikasi dari spektrum graf korona sisi pangkat dua pada banyaknya spanning tree yang dapat dibentuk, atau melakukan pengembangan lebih umum yaitu spektrum graf korona sisi pangkat  $n$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Alhevaz, A., Baghipur, M., (2018). "On spectrum of the graphs obtained by operations", *Asian-European Journal of Mathematics*, Vol. 10, hal. 57-66.
- Briggs, N., (2015), "Algebraic Graph Theory". *Cambridge: Cambridge University Press*.
- Barik, S., Pati, S. dan Sarma, B.K., (2011), "The Spectrum of the Corona of Two Graphs". *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 2011 hal. 47-56.
- Chartrand G., Lesniak L., (2016). "Graphs and Digraphs Second Edition", *California: a Division of Wadsworth, Inc.*
- Chen, H., Liao, L., (2016). "The Normalized Laplacian Spectra of the Corona and Edge Corona of two Graphs". *Linear and Multilinear Algebra*, Vol. 2016 hal. 1-18.
- Dai, M., Shen, J., (2019), "Generalized Adjacency and Laplacian Spectra of the Weighted Corona Graphs". *ELSEVIER*.
- Fauziah, D.A. 2019. "The Rainbow Vertex Connection Number of Edge Corona Product Graphs". *IOPScience*, Vol. 243, hal. 1-7
- Hou Y., Shiu, dan Wai C., (2011), "The Spectrum of The Edge Corona of Two Graphs", *IOPScience*, Vol. 2, hal. 1-10
- Indulal, G., (2011), "The Spectrum of Neighborhood Corona of Graphs", *Kragujevac Journal of Mathematics*, Vol. 35, hal. 493-500.
- Paul S., (2018), "The Spectra of a New Join of Graphs", *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. 10, No. 06



## BIODATA PENULIS



Penulis bernama **Syaiful Ridzal Zulkarnain**, lahir di Probolinggo, 7 Juni 1993, merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di SDN **Sumberkedawung II**, Probolinggo pada periode tahun 1999-2005, **SMP Taruna Dra. Zulaeha**, Probolinggo pada periode tahun 2005-2008, dan **SMA Taruna Dra. Zulaeha**, Probolinggo pada periode tahun 2008-2011. Setelah lulus dari SMA pada tahun 2011 penulis melanjutkan studi program Sarjana (S-1) di **Jurusan Matematika Universitas Negeri Malang**. Penulis menyelesaikan Skripsi pada bidang “**Aljabar**” dan lulus pada tahun 2015. Kemudian penulis melanjutkan studi program Pascasarjana

Magister S-2 Jurusan Matematika di ITS pada tahun 2017 dengan Tesis pada bidang “**Aljabar Graf**” dan lulus pada tahun 2020.

Alamat email penulis adalah : [syaiful.ridzal@gmail.com](mailto:syaiful.ridzal@gmail.com).