



TUGAS AKHIR - KM184801

DESAIN KONTROL ORDE RENDAH PADA GEDUNG BERTINGKAT n DENGAN METODE H_∞

MASLAHATUL UMMAH
0611164000032

Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



TUGAS AKHIR - KM184801

**DESAIN KONTROL ORDE RENDAH PADA GEDUNG
BERTINGKAT n DENGAN METODE H_∞**

**MASLAHATUL UMMAH
NRP 0611164000032**

**Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020**



FINAL PROJECT - KM184801

**LOW-ORDER CONTROL DESIGN ON n -FLOOR STOREY
BUILDING USING H_∞ METHOD**

**MASLAHATUL UMMAH
NRP 0611164000032**

**Supervisor
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020**

LEMBAR PENGESAHAN

DESAIN KONTROL ORDE RENDAH PADA GEDUNG BERTINGKAT n DENGAN METODE H_{∞}

LOW-ORDER CONTROL DESIGN ON n -FLOOR STOREY BUILDING USING H_{∞} METHOD

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

MASLAHATUL UMMAH
NRP. 0611164000032

Menyetujui,

Dosen Pembimbing,



Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.
NIP. 19730930 199702 1 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS



Subchan, Ph.D

DEPARTEMEN MATEMATIKA
NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, 19 Agustus 2020

DESAIN KONTROL ORDE RENDAH PADA GEDUNG BERTINGKAT n DENGAN METODE H_∞

Nama : Maslahatul Ummah
NRP : 06111640000032
Departemen : Matematika
Dosen Pembimbing : Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

Kekokohan desain kontrol pada suatu sistem bangunan bertingkat merupakan hal penting yang harus diperhatikan. Dalam beberapa kasus, terjadinya keruntuhan gedung bertingkat disebabkan oleh adanya beberapa gangguan eksternal yang terjadi secara tiba-tiba. Dalam hal ini, sistem kontrol Robust dengan teknik kontrol H_∞ sangat tepat digunakan dalam perancangan gedung bertingkat, karena didunia nyata sistem kontrol ini rentan terhadap gangguan eksternal. Gedung bertingkat merupakan suatu sistem kompleks yang akan menghasilkan sistem berorde tinggi. Analisis Sistem dengan orde tinggi akan lebih sulit dibandingkan sistem dengan orde rendah. Pada tugas akhir ini, dilakukan desain kontrol orde rendah dengan menggunakan metode H_∞ dan Balanced Truncation. Metode H_∞ digunakan untuk mendapatkan desain kontrol dari sistem awal. Selanjutnya, digunakan metode Balanced Truncation untuk mereduksi sistem kontrol sehingga diharapkan bisa menghasilkan desain kontrol berorde rendah yang masih bisa diterapkan pada sistem awal. Berdasarkan hasil Tugas Akhir ini, diperoleh desain kontrol orde rendah yang dapat diterapkan pada sistem awal selama infinity-norm nya tidak melebihi nilai gammanya.

Kata Kunci : Gedung bertingkat, Kontrol H_∞ , Balanced Truncation, Reduksi Model

**LOW-ORDER CONTROL DESIGN ON n -FLOOR STOREY
BUILDING USING H_∞ METHOD**

Name : Maslahatul Ummah
NRP : 06111640000032
Department : Mathematics
Supervisor : Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

The robustness of the control design in a multilevel system is an important thing that must be considered. In some cases, the collapse of a multi-storey building is caused by some of disruptions that occurred suddently. In this case, the Robust control system with the H_∞ control technique is very appropriate to be used in the design of multi-storey buildings, because in the real world this control system is vulnerable to external interference. Multi-storey building is a complex system that will produce a high order system. Analysis of a high-order system will be more difficult than a low-order system. In this final project, a low order control design is carried out using the H_∞ and Balanced Truncation method. The H_∞ method is used to get the control design from the initial system. Furthermore, the Balanced Truncation method is used to reduce the control system so that it can produce a low-order control design that can still be applied to the initial system. Based on the results of this Final Project, a low order control design is obtained that can be applied to the initial system as long as the infinity does not exceed the value of the gamma.

Keywords : *Balanced Truncation, H_∞ Controller Design, Reduction Model*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat serta karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul :

“DESAIN KONTROL ORDE RENDAH PADA GEDUNG BERTINGKAT n DENGAN METODE H_∞ ”

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dari berbagai pihak. Suatu kebahagiaan dan kewajiban bagi penulis untuk menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung atas terselesainya Tugas Akhir :

1. Alm. Bapak Elfis, Ibu Masnur selaku orangtua penulis, dan saudara-saudara kandung penulis yang telah memberikan doa dan dukungan kepada penulis.
2. Bapak Subchan, Ph.D. selaku kepala Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, dukungan, dan motivasi kepada penulis, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.

4. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp., Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. dan Bapak Muhammad Luthfi Shahab, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan rekomendasi terhadap Tugas Akhir ini.
5. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si., dan Bapak Prof. DR. Mohammad Isa Irawan, MT. selaku dosen wali yang telah memberikan nasihat dan arahan selama penulis menempuh masa perkuliahan di Departemen Matematika ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen, seluruh staf Tata Usaha, dan asisten laboratorium Departemen Matematika ITS.
7. Yovia Galuh Salsabilla dan Zhafira Ardelia Irawan yang saling mendukung satu sama lain dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
8. Mba Helisyah yang selalu menyempatkan waktunya untuk membantu dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
9. Teman-teman HEHEHE (Fatimah Azzahra A, Vivien Maulidya, Jinandya Mentari N, Erlin Dhebora, Annisa Rahmienda M, Aufa Anastasia, Kirana Damayanti P. H, Kirana Putri S. C, Nadhira Azane P, dan Hasna Khalishfi Y) yang telah menemani penulis selama menempuh perkuliahan di Departemen Matematika ITS.
10. Tim SC 2018 (Fira, Hasna, Meyla, Saskia, Bayu, Fityan, Luthfi, Bejo, dan Ulum) yang telah memberikan motivasi dan berbagi pengalaman kepada penulis selama menempuh perkuliahan di Departemen Matematika ITS.
11. Sahabat penulis sejak SMA (Rina, Ika, Shinta, Ananta, Fina, dan Eva) yang selalu memberikan semangat dan doa kepada penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
12. Teman-Teman Alospar yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu yang selalu menghibur penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

13. Teman-teman Lemniscate yang telah berjuang bersama sejak menjadi mahasiswa baru di Departemen Matematika ITS.
14. Seluruh pihak yang telah memberikan saran, dukungan, dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat diharapkan oleh penulis. Penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, 20 Juni 2020

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN.....	V
ABSTRAK	VII
<i>ABSTRACT</i>	IX
KATA PENGANTAR.....	XI
DAFTAR ISI.....	XV
DAFTAR GAMBAR	XVIII
DAFTAR TABEL	XX
DAFTAR SIMBOL.....	XXII
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Sistem LTI Waktu Kontinu.....	6
2.3 Teori Kontrol H_{∞}	7
2.3.1 Kontrol H_{∞} dengan Persamaan Riccati	9
2.4 Representasi Model Gedung Bertingkat n	11
2.5 Reduksi Kontrol H_{∞}	12
2.5.1 Kestabilan Sistem	12
2.5.2 Keterkendalian Sistem	13

2.5.3	Keteramatan Sistem	14
2.5.4	Gramian Keterkendalian dan Gramian Keteramatan	15
2.5.5	Pembentukan Sistem Setimbang.....	15
2.5.6	Reduksi dengan Balanced Truncation	16
BAB III METODE PENELITIAN		19
3.1	Metode Penelitian	19
3.2	Diagram Alur Penelitian	21
BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN		23
4.1	Sistem Model Gedung Bertingkat n	23
4.2	Kontrol H_∞	30
4.3	Reduksi Kontrol dengan Metode Balanced Truncation	32
4.3.1	Pembentukan Kontrol Setimbang	32
4.3.2	Pemotongan Kontrol Setimbang	35
4.3.3	Sistem Awal dengan Kontrol H_∞ Orde Rendah	35
4.4	Simulasi.....	36
4.4.1	Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 2 lantai	36
4.4.2	Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 2 lantai	41
4.4.3	Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 3 lantai	48
4.4.4	Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 3 lantai	54
4.4.5	Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 5 lantai	63

4.4.6 Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 5 lantai	72
4.4.7 Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 6 lantai	73
4.4.8 Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 6 lantai	82
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	103
5.1 Kesimpulan	103
5.2 Saran	104
DAFTAR PUSTAKA	105
BIODATA PENULIS	107

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 <i>Linier Fractional Transformation</i>	8
Gambar 2.2 Struktur Model Bangunan	11
Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian.....	21
Gambar 4.1 Sistem Multi <i>MDS</i> pada gedung bertingkat n	24
Gambar 4.2 Sistem gedung bertingkat pada lantai 1 dan ilustrasi sistem lantai 1 dengan (<i>MDS</i>)	24
Gambar 4.3 Sistem gedung bertingkat pada lantai 2 dan ilustrasi sistem lantai 2 dengan (<i>MDS</i>).....	25
Gambar 4.4 Sistem gedung bertingkat pada lantai 3 dan ilustrasi sistem lantai 3 dengan (<i>MDS</i>).....	26
Gambar 4.5 Sistem gedung bertingkat pada lantai n dan ilustrasi sistem lantai n dengan (<i>MDS</i>)	26
Gambar 4.6 Perpindahan pada lantai 1-2 tanpa kontrol	40
Gambar 4.7 Perpindahan pada lantai 1-2 dengan kontrol .	40
Gambar 4.8 Kecepatan relatif pada lantai 1-2 tanpa kontrol	41
Gambar 4.9 Kecepatan relatif pada lantai 1-2 dengan kontrol	41
Gambar 4.10 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 3 ...	45
Gambar 4.11 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 2 ...	46
Gambar 4.12 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 1 ...	47
Gambar 4.13 Perpindahan pada lantai 1-3 tanpa kontrol ..	53
Gambar 4.14 Perpindahan pada lantai 1-3 dengan kontrol	53
Gambar 4.15 Kecepatan relatif pada lantai 1-3 tanpa kontrol	54
Gambar 4.16 Kecepatan relatif pada lantai 1-3 dengan kontrol	54
Gambar 4.17 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 5 ...	58
Gambar 4.18 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 4 ...	59

Gambar 4.19 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 3 ...	60
Gambar 4.20 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 2 ...	61
Gambar 4.21 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 1 ...	62
Gambar 4.22 Perpindahan pada lantai 1-5 tanpa kontrol ..	70
Gambar 4.23 Perpindahan pada lantai 1-5 dengan kontrol	70
Gambar 4.24 Kecepatan relatif pada lantai 1-5 tanpa kontrol	71
Gambar 4.25 Kecepatan relatif pada lantai 1-5 dengan kontrol	71
Gambar 4.26 Perpindahan pada lantai 1-6 tanpa kontrol ..	80
Gambar 4.27 Perpindahan pada lantai 1-6 dengan kontrol	80
Gambar 4.28 Kecepatan relatif pada lantai 1-6 tanpa kontrol	81
Gambar 4.29 Kecepatan relatif pada lantai 1-6 dengan kontrol	81
Gambar 4.30 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 11 .	86
Gambar 4.31 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 10 .	88
Gambar 4.32 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 9 ...	89
Gambar 4.33 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 8 ...	91
Gambar 4.34 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 7 ...	92
Gambar 4.35 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 6 ...	94
Gambar 4.36 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 5 ...	95
Gambar 4.37 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 4 ...	97
Gambar 4.38 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 3 ...	98
Gambar 4.39 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 2 ...	99
Gambar 4.40 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 1 ...	101

DAFTAR TABEL

Tabel 4. 1 Gedung bertingkat dengan 2 lantai	36
Tabel 4. 2 Nilai eigen sistem awal	38
Tabel 4. 3 Nilai eigen sistem dengan kontrol	39
Tabel 4.4 Nilai eigen sistem kontrol	42
Tabel 4.5 Nilai Singular Hankel Kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p).....	44
Tabel 4.6 Nilai <i>infinity-norm</i> dari sitem dengan kontrol dan sistem dengan kontrol tereduksi.....	48
Tabel 4.7 Gedung bertingkat dengan 3 lantai.....	48
Tabel 4.8 Nilai eigen sistem awal	51
Tabel 4.9 Nilai eigen sistem dengan kontrol	52
Tabel 4.10 Nilai eigen sistem kontrol	55
Tabel 4.11 Nilai Singular Hankel Kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p).....	57
Tabel 4.12 Nilai <i>infinity-norm</i> dari sitem dengan kontrol dan sistem dengan kontrol tereduksi.....	63
Tabel 4.13 Bangunan Kajima Shizuoka 5 lantai	63
Tabel 4.14 Nilai eigen sistem awal	67
Tabel 4.15 Nilai eigen sistem dengan kontrol	69
Tabel 4.16 Nilai eigen sistem kontrol	72
Tabel 4.17 Gedung bertingkat dengan 6 lantai.....	73
Tabel 4.18 Nilai eigen sistem awal	77
Tabel 4.19 Nilai eigen sistem dengan kontrol	79
Tabel 4.20 Nilai eigen sistem kontrol	82
Tabel 4.21 Nilai Singular Hankel Kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p).....	84
Tabel 4.22 Nilai <i>infinity-norm</i> dari sitem dengan kontrol dan sistem dengan kontrol tereduksi.....	101



TUGAS AKHIR - KM184801

**DESAIN KONTROL ORDE RENDAH PADA GEDUNG
BERTINGKAT n DENGAN METODE H_∞**

**MASLAHATUL UMMAH
NRP 0611164000032**

**Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020**



FINAL PROJECT - KM184801

**LOW-ORDER CONTROL DESIGN ON n -FLOOR STOREY
BUILDING USING H_∞ METHOD**

**MASLAHATUL UMMAH
NRP 0611164000032**

**Supervisor
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020**

LEMBAR PENGESAHAN
DESAIN KONTROL ORDE RENDAH PADA GEDUNG
BERTINGKAT n DENGAN METODE H_∞

LOW-ORDER CONTROL DESIGN ON n -FLOOR STOREY
BUILDING USING H_∞ METHOD

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
MASLAHATUL UMMAH
NRP.061 11640000 032

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I,

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.
NIP. 19730930 199702 1 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS

Subchan, Ph.D.
NIP. 19710513 199702 1 001

DESAIN KONTROL ORDE RENDAH PADA GEDUNG BERTINGKAT n DENGAN METODE H_∞

Nama : Maslahatul Ummah
NRP : 06111640000032
Departemen : Matematika
Dosen Pembimbing : Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

Kekokohan desain kontrol pada suatu sistem bangunan bertingkat merupakan hal penting yang harus diperhatikan. Dalam beberapa kasus, terjadinya keruntuhan gedung bertingkat disebabkan oleh adanya beberapa gangguan eksternal yang terjadi secara tiba-tiba. Dalam hal ini, sistem kontrol Robust dengan teknik kontrol H_∞ sangat tepat digunakan dalam perancangan gedung bertingkat, karena didunia nyata sistem kontrol ini rentan terhadap gangguan eksternal. Gedung bertingkat merupakan suatu sistem kompleks yang akan menghasilkan sistem berorde tinggi. Analisis Sistem dengan orde tinggi akan lebih sulit dibandingkan sistem dengan orde rendah. Pada tugas akhir ini, dilakukan desain kontrol orde rendah dengan menggunakan metode H_∞ dan Balanced Truncation. Metode H_∞ digunakan untuk mendapatkan desain kontrol dari sistem awal. Selanjutnya, digunakan metode Balanced Truncation untuk mereduksi sistem kontrol sehingga diharapkan bisa menghasilkan desain kontrol berorde rendah yang masih bisa diterapkan pada sistem awal. Berdasarkan hasil Tugas Akhir ini, diperoleh desain kontrol orde rendah yang dapat diterapkan pada sistem awal selama infinity-norm nya tidak melebihi nilai gammanya.

Kata Kunci : Gedung bertingkat, Kontrol H_∞ , Balanced Truncation, Reduksi Model

**LOW-ORDER CONTROL DESIGN ON n -FLOOR STOREY
BUILDING USING H_∞ METHOD**

Name : Maslahatul Ummah
NRP : 06111640000032
Department : Mathematics
Supervisor : Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

The robustness of the control design in a multilevel system is an important thing that must be considered. In some cases, the collapse of a multi-storey building is caused by some of disruptions that occurred suddenly.. In this case, the Robust control system with the H_∞ control technique is very appropriate to be used in the design of multi-storey buildings, because in the real world this control system is vulnerable to external interference. Multi-storey building is a complex system that will produce a high order system. Analysis of a high-order system will be more difficult than a low-order system. In this final project, a low order control design is carried out using the H_∞ and Balanced Truncation method. The H_∞ method is used to get the control design from the initial system. Furthermore, the Balanced Truncation method is used to reduce the control system so that it can produce a low-order control design that can still be applied to the initial system. Based on the results of this Final Project, a low order control design is obtained that can be applied to the initial system as long as the infinity does not exceed the value of the gamma.

Keywords : *Balanced Truncation, H_∞ Controller Design, Reduction Model*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat serta karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul :

“DESAIN KONTROL ORDE RENDAH PADA GEDUNG BERTINGKAT n DENGAN METODE H_∞ ”

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dari berbagai pihak. Suatu kebahagiaan dan kewajiban bagi penulis untuk menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung atas terselesainya Tugas Akhir :

1. Alm. Bapak Elfis, Ibu Masnur selaku orangtua penulis, dan saudara-saudara kandung penulis yang telah memberikan doa dan dukungan kepada penulis.
2. Bapak Subchan, Ph.D. selaku kepala Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, dukungan, dan motivasi kepada penulis, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.

4. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp., Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. dan Bapak Muhammad Luthfi Shahab, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan rekomendasi terhadap Tugas Akhir ini.
5. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si., dan Bapak Prof. DR. Mohammad Isa Irawan, MT. selaku dosen wali yang telah memberikan nasihat dan arahan selama penulis menempuh masa perkuliahan di Departemen Matematika ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen, seluruh staf Tata Usaha, dan asisten laboratorium Departemen Matematika ITS.
7. Yovia Galuh Salsabilla dan Zhafira Ardelia Irawan yang saling mendukung satu sama lain dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
8. Mba Helisyah yang selalu menyempatkan waktunya untuk membantu dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
9. Teman-teman HEHEHE (Fatimah Azzahra A, Vivien Maulidya, Jinandya Mentari N, Erlin Dhebora, Annisa Rahmienda M, Aufa Anastasia, Kirana Damayanti P. H, Kirana Putri S. C, Nadhira Azane P, dan Hasna Khalishfi Y) yang telah menemani penulis selama menempuh perkuliahan di Departemen Matematika ITS.
10. Tim SC 2018 (Fira, Hasna, Meyla, Saskia, Bayu, Fityan, Luthfi, Bejo, dan Ulum) yang telah memberikan motivasi dan berbagi pengalaman kepada penulis selama menempuh perkuliahan di Departemen Matematika ITS.
11. Sahabat penulis sejak SMA (Rina, Ika, Shinta, Ananta, Fina, dan Eva) yang selalu memberikan semangat dan doa kepada penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
12. Teman-Teman Alospar yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu yang selalu menghibur penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

13. Teman-teman Lemniscate yang telah berjuang bersama sejak menjadi mahasiswa baru di Departemen Matematika ITS.
14. Seluruh pihak yang telah memberikan saran, dukungan, dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat diharapkan oleh penulis. Penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, 20 Juni 2020

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN.....	V
ABSTRAK	VII
<i>ABSTRACT</i>	IX
KATA PENGANTAR.....	XI
DAFTAR ISI.....	XV
DAFTAR GAMBAR	XVII
DAFTAR TABEL	XIX
DAFTAR SIMBOL.....	XXI
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Sistem LTI Waktu Kontinu.....	6
2.3 Teori Kontrol H_∞	7
2.3.1 Kontrol H_∞ dengan Persamaan Riccati	9
2.4 Representasi Model Gedung Bertingkat n	11
2.5 Reduksi Kontrol H_∞	12
2.5.1 Kestabilan Sistem	12
2.5.2 Keterkendalian Sistem	13

2.5.3	Keteramatan Sistem	14
2.5.4	Gramian Keterkendalian dan Gramian Keteramatan	15
2.5.5	Pembentukan Sistem Setimbang	15
2.5.6	Reduksi dengan Balanced Truncation.....	16
BAB III METODE PENELITIAN		19
3.1	Metode Penelitian.....	19
3.2	Diagram Alur Penelitian.....	21
BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN		23
4.1	Sistem Model Gedung Bertingkat n	23
4.2	Kontrol H_∞	30
4.3	Reduksi Kontrol dengan Metode Balanced Truncation	32
4.3.1	Pembentukan Kontrol Setimbang	32
4.3.2	Pemotongan Kontrol Setimbang	35
4.3.3	Sistem Awal dengan Kontrol H_∞ Orde Rendah	35
4.4	Simulasi.....	36
4.4.1	Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 2 lantai	36
4.4.2	Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 2 lantai	41
4.4.3	Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 3 lantai	48
4.4.4	Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 3 lantai	54
4.4.5	Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 5 lantai	63

4.4.6 Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 5 lantai	72
4.4.7 Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 6 lantai	73
4.4.8 Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 6 lantai	82
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	103
5.1 Kesimpulan	103
5.2 Saran	104
DAFTAR PUSTAKA	105
BIODATA PENULIS	107

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 <i>Linier Fractional Transformation</i>	8
Gambar 2.2 Struktur Model Bangunan	11
Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian	21
Gambar 4.1 Sistem Multi <i>MDS</i> pada gedung bertingkat n	24
Gambar 4.2 Sistem gedung bertingkat pada lantai 1 dan ilustrasi sistem lantai 1 dengan (<i>MDS</i>)	24
Gambar 4.3 Sistem gedung bertingkat pada lantai 2 dan ilustrasi sistem lantai 2 dengan (<i>MDS</i>)	25
Gambar 4.4 Sistem gedung bertingkat pada lantai 3 dan ilustrasi sistem lantai 3 dengan (<i>MDS</i>)	26
Gambar 4.5 Sistem gedung bertingkat pada lantai n dan ilustrasi sistem lantai n dengan (<i>MDS</i>)	26
Gambar 4.6 Perpindahan pada lantai 1-2 tanpa kontrol	40
Gambar 4.7 Perpindahan pada lantai 1-2 dengan kontrol .	40

Gambar 4.8 Kecepatan relatif pada lantai 1-2 tanpa kontrol	41
Gambar 4.9 Kecepatan relatif pada lantai 1-2 dengan kontrol	41
Gambar 4.10 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 3 ..	45
Gambar 4.11 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 2 ..	46
Gambar 4.12 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 1 ..	47
Gambar 4.13 Perpindahan pada lantai 1-3 tanpa kontrol .	53
Gambar 4.14 Perpindahan pada lantai 1-3 dengan kontrol	53
Gambar 4.15 Kecepatan relatif pada lantai 1-3 tanpa kontrol	54
Gambar 4.16 Kecepatan relatif pada lantai 1-3 dengan kontrol	54
Gambar 4.17 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 5 ..	58
Gambar 4.18 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 4 ..	59
Gambar 4.19 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 3 ..	60
Gambar 4.20 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 2 ..	61
Gambar 4.21 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 1 ..	62
Gambar 4.22 Perpindahan pada lantai 1-5 tanpa kontrol .	70
Gambar 4.23 Perpindahan pada lantai 1-5 dengan kontrol	70
Gambar 4.24 Kecepatan relatif pada lantai 1-5 tanpa kontrol	71
Gambar 4.25 Kecepatan relatif pada lantai 1-5 dengan kontrol	71
Gambar 4.26 Perpindahan pada lantai 1-6 tanpa kontrol .	80
Gambar 4.27 Perpindahan pada lantai 1-6 dengan kontrol	80
Gambar 4.28 Kecepatan relatif pada lantai 1-6 tanpa kontrol	81
Gambar 4.29 Kecepatan relatif pada lantai 1-6 dengan kontrol	

.....	81
Gambar 4.30 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 11 .	86
Gambar 4.31 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 10.	88
Gambar 4.32 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 9...	89
Gambar 4.33 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 8...	91
Gambar 4.34 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 7 ...	92
Gambar 4.35 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 6...	94
Gambar 4.36 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 5 ...	95
Gambar 4.37 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 4...	97
Gambar 4.38 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 3 ...	98
Gambar 4.39 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 2...	99
Gambar 4.40 Grafik <i>Singular Value</i> \hat{T}_{zw} kontrol orde 1 ...	101

DAFTAR TABEL

Tabel 4. 1 Gedung bertingkat dengan 2 lantai	36
Tabel 4. 2 Nilai eigen sistem awal	38
Tabel 4. 3 Nilai eigen sistem dengan kontrol.....	39
Tabel 4.4 Nilai eigen sistem kontrol	42
Tabel 4.5 Nilai Singular Hankel Kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p).....	44
Tabel 4.6 Nilai <i>infinity-norm</i> dari sitem dengan kontrol dan sistem dengan kontrol tereduksi.....	48
Tabel 4.7 Gedung bertingkat dengan 3 lantai.....	48
Tabel 4.8 Nilai eigen sistem awal	51
Tabel 4.9 Nilai eigen sistem dengan kontrol.....	52
Tabel 4.10 Nilai eigen sistem kontrol	55
Tabel 4.11 Nilai Singular Hankel Kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p).....	57
Tabel 4.12 Nilai <i>infinity-norm</i> dari sitem dengan	

kontrol dan sistem dengan kontrol tereduksi	63
Tabel 4.13 Bangunan Kajima Shizuoka 5 lantai	63
Tabel 4.14 Nilai eigen sistem awal.....	67
Tabel 4.15 Nilai eigen sistem dengan kontrol	69
Tabel 4.16 Nilai eigen sistem kontrol.....	72
Tabel 4.17 Gedung bertingkat dengan 6 lantai.....	73
Tabel 4.18 Nilai eigen sistem awal.....	77
Tabel 4.19 Nilai eigen sistem dengan kontrol	79
Tabel 4.20 Nilai eigen sistem kontrol.....	82
Tabel 4.21 Nilai Singular Hankel Kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p).....	84
Tabel 4.22 Nilai <i>infinity-norm</i> dari sitem dengan kontrol dan sistem dengan kontrol tereduksi	101

DAFTAR SIMBOL

\dot{x}	: Masukan Sistem Awal
z	: Keluaran Sinyal Performansi
y	: Keluaran Sinyal Pengukuran
w	: Masukan gangguan
u	: Masukan Kontrol
A, B, C, D	: Matriks-Matriks dari sistem awal
$G(s)$: Fungsi transfer dari sistem
$\ \cdot \ $: <i>Norm</i>
γ	: Gamma
A_p, B_p, C_p, D_p	: Matriks-Matriks dari Kontrol H_∞
$\hat{x}(t)$: Masukan Kontrol H_∞
$u(t)$: Keluaran Kontrol H_∞
M	: Matriks massa
D	: Matriks peredam
K	: Matriks <i>stiffness</i>
E_0	: Letak gaya yang dikontrol
L	: Matriks simulasi eksternal
$x(t)$: Perpindahan antar bangunan
$\dot{x}(t)$: Kecepatan relatif antar bangunan
$A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl}$: Matriks-Matriks dari sistem <i>close-loop</i>
λ	: Nilai eigen
M_c	: Matriks keterkendalian kontrol H_∞
M_o	: Matriks keteramatan kontrol H_∞
W	: Gramian keterkendalian kontrol H_∞
M	: Gramian keteramatan kontrol H_∞
ϕ	: Matriks yang memenuhi $\phi^T \phi = W$
U	: Matriks <i>Unitary</i>
T	: Matriks transformasi
σ	: Nilai Singular Hankel
$\dot{\hat{x}}_p(t)$: Masukan kontrol H_∞ setimbang
$\dot{\hat{y}}_p(t)$: Keluaran kontrol H_∞ setimbang

$\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, D_p$: Matriks-matriks kontrol H_∞ setimbang
\tilde{W}	: Gramian keterkendalian kontrol H_∞ setimbang
\tilde{M}	: Gramian keteramatan kontrol H_∞ setimbang
Σ	: Gramian kesetimbangan
r	: Besar orde kontrol H_∞ tereduksi
$\dot{\tilde{x}}_{pr}(t)$: Masukkan kontrol H_∞ tereduksi
$\tilde{u}_{pr}(t)$: Keluaran kontrol H_∞ tereduksi
$\tilde{A}_{pr}, \tilde{B}_{pr}, \tilde{C}_{pr}$: Matriks-matriks dari kontrol H_∞ tereduksi
$\hat{A}_r, \hat{B}_r, \hat{C}_r$: Matriks-matriks dari sistem <i>close-loop</i> dengan kontrol H_∞ tereduksi

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam membangun suatu bangunan yang diperuntukkan untuk kapasitas daya guna yang besar merupakan suatu investasi dana yang jumlahnya tidak sedikit. Perencanaan pemodelan sistem pada bangunan bertingkat harus dirancang sesuai dengan kriteria bangunan yang telah ditetapkan. Disamping itu, diperlukan juga desain kontrol sebagai suatu perencanaan, pembuatan sketsa, atau penggambaran bagaimana suatu sistem kontrol dirangkai dan dibentuk sehingga sistem kontrol tersebut dapat berfungsi sesuai yang diharapkan. Sistem kontrol atau kendali adalah suatu kumpulan alat atau komponen yang saling berhubungan untuk mengendalikan atau mengontrol suatu sistem.

Persoalan yang biasanya terjadi pada sistem kontrol adalah merancang suatu pengontrol yang mampu menghasilkan *output* dari *plant* sesuai spesifikasi yang diinginkan. Proses desain pengontrol ini semakin kompleks seiring dengan kompleksitas *plant* serta proses yang akan diatur didalamnya. Perancangan sistem kontrol yang mampu menangani persoalan tersebut adalah kontrol robust. Teknik kontrol robust merupakan suatu metode kontrol yang diterapkan pada *uncertain plant* dengan sinyal gangguan yang tidak diketahui, dinamika yang tidak pasti dan ketidak akuratan parameter *plant*. Salah satu kontrol yang digunakan oleh Robust dalam teknik kontrol adalah kontrol H_∞ . Teknik kontrol ini digunakan dalam bidang teori kontrol untuk mempercepat pengontrol mencapai kestabilan dengan kinerja yang terjamin. Dalam menggunakan kontrol H_∞ , sebuah desain kontrol menandakan masalah kontrol sebagai masalah optimalisasi matematika dan kemudian mendapat pengontrol yang menyelesaikan optimalisasi ini. Teknik H_∞ memiliki keuntungan daripada teknik kontrol klasik dimana pengontrol ini secara mudah diaplikasikan ke dalam masalah yang menyangkut sistem multivariat [1].

Dengan adanya sistem kontrol tersebut dapat membantu perancangan pembangunan gedung bertingkat, sehingga rancangan yang dibuat sesuai dengan desain yang diharapkan. Kekokohan gedung bertingkat juga merupakan suatu hal penting yang harus diperhatikan. Dalam beberapa kasus, keruntuhan gedung bertingkat disebabkan adanya beberapa gangguan eksternal yang terjadi secara tiba-tiba. Salah satu penyebab runtuhnya suatu bangunan yaitu terjadinya gempa bumi. Gempa bumi merupakan guncangan yang terjadi akibat adanya pergerakan lempeng bumi yang dapat menyebabkan kehancuran bangunan dan seisinya. Dalam hal ini, sistem kontrol robust sangat tepat digunakan dalam perancangan gedung bertingkat, karena didunia nyata sistem ini rentan terhadap gangguan eksternal.

Pengontrol dengan teknik tersebut dapat digunakan untuk merancang pengontrol kinerja yang kuat untuk ketidakpastian sistem yang sangat kompleks. Membuat suatu desain kontrol pada sistem kompleks seperti gedung bertingkat akan menghasilkan sistem dinamik berorde tinggi agar sesuai dengan keadaan sebenarnya. Pengontrol dengan sistem dinamik orde tinggi akan menghasilkan sistem yang sulit dipahami, kesulitan dalam perhitungan numerik, dan membutuhkan biaya yang cukup banyak. Oleh karena itu, sistem kontrol tersebut akan direduksi untuk menghasilkan sistem orde yang lebih minimum. Salah satu reduksi orde model yang paling populer adalah metode Balanced Truncation. Diantara metode reduksi lainnya, metode ini merupakan metode reduksi yang paling sederhana. Sistem hasil reduksi metode Balanced Truncation akan menghasilkan sifat yang sama dengan sistem semula yaitu stabil, terkendali dan teramati [2].

Penelitian yang pernah dilakukan mengenai kontrol H_∞ yaitu dengan menerapkan desentralisasi pengontrol pada gedung bertingkat, sehingga pengontrol lokal hanya memiliki akses ke sebagian dari informasi global untuk mengurangi biaya instalasi dan pemeliharaan [3].

Penelitian lainnya mengenai kontrol H_∞ dilakukan untuk mendesain kontrol berorde rendah dengan metode tersebut untuk mengetahui perbandingan kemampuan sistem sebelum kontrolnya direduksi dan setelah direduksi.

Berdasarkan latar belakang tersebut penulis terdorong untuk melakukan penelitian dengan membuat desain kontrol orde rendah pada gedung bertingkat n dengan metode H_∞ , sehingga bisa menjadi bahan model untuk gedung bertingkat lainnya. Reduksi dapat dilakukan pada kontrol H_∞ selama pada saat kontrol tereduksi diterapkan pada sistem awal, *norm-infinity* masih berada di sekitar nilai gamma [4].

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana cara melakukan desain kontrol orde rendah pada gedung bertingkat n dengan metode H_∞ ?
2. Bagaimana simulasi numerik kontrol orde rendah pada gedung bertingkat n dengan metode H_∞ ?

1.3 Batasan Masalah

Dalam Tugas Akhir ini, penulis membatasi permasalahan sebagai berikut:

1. Kontrol H_∞ orde rendah dilakukan pada gedung bertingkat n .
2. Metode reduksi yang digunakan adalah metode Balanced Truncation.
3. Menggunakan aplikasi MATLAB untuk membantu perhitungan.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui langkah-langkah dan mendapatkan desain kontrol orde rendah pada gedung bertingkat n dengan metode H_∞ .
2. Mendapatkan hasil simulasi numerik kontrol orde rendah pada gedung bertingkat n dengan metode H_∞ .

1.5 Manfaat

Adapun manfaat dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui penerapan teori-teori matematika pada masalah riil.
2. Memberikan informasi mengenai penerapan desain kontrol orde rendah pada gedung bertingkat- n metode H_∞ .
3. Sebagai gambaran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.
4. Sebagai bahan literatur bagi mahasiswa yang menempuh jenjang sarjana.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini akan membahas tinjauan pustaka yang mendasari penulisan Tugas Akhir serta metode penunjang yang digunakan dalam penelitian ini, termasuk di dalamnya penelitian yang pernah dilakukan dan landasan teori.

2.1 Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian terdahulu yang membahas tentang desain kontrol H_∞ adalah Penelitian tentang H_∞ kontrol yang dilakukan oleh Guisheng Zhai, Shinichi Muraio, Naoki Koyama, dan Masaharu Yoshida (2003), pada jurnal yang berjudul “*Low order Controller H_∞ Design: An LMI Approach*”. Jurnal penelitian ini menyajikan pendekatan desain pengontrol H_∞ tingkat rendah untuk sistem LTI waktu kontinu dan diskrit dimana terdapat variabel yang tidak memiliki peringkat penuh, dengan menggunakan pendekatan ketimpangan matriks. Sehingga pendekatan yang diusulkan harus lebih praktis mengenai pendekatan ketidaksetaraan matriks [5].

Penelitian mengenai H_∞ kontrol juga dilakukan oleh Helisyah Nur Fadhilah (2019) dalam Tesis nya yang berjudul “Desain Sentralisasi dan Desentralisasi Kontrol H_∞ dengan Pendekatan *Linear Matrix Inequality*”. Penelitian ini membahas tentang sentralisasi dan desentralisasi kontrol pada bangunan gedung bertingkat lima. Hal yang pertama dilakukan yaitu dengan membuat model bangunan bertingkat lima, kemudian mencari pengontrol H_∞ untuk dilakukan sentralisasi dan desentralisasi pada kontrol [3].

Sementara itu, penelitian tentang H_∞ kontrol juga dilakukan oleh Corry Sara Siahaan (2019) dalam penelitian Tugas Akhir nya dengan judul “Desain Kontrol Berorde Rendah dengan Metode H_∞ ”. penelitian Tugas Akhir ini melakukan kajian mengenai desain kontrol H_∞ berorde rendah dengan menggunakan Balanced Truncation untuk dapat mengetahui langkah-langkah dalam melakukan desain kontrol H_∞ berorde rendah pada sistem yang diberikan dan melakukan perbandingan terhadap sistem dengan kontrol yang direduksi dan sebelum direduksi. Ketika orde kontrol H_∞ terlalu rendah, maka kemampuan kontrol tereduksi untuk menahan gangguan semakin berkurang seiring dengan berkurangnya orde kontrol, sehingga untuk mendapatkan perbedaan yang lebih signifikan, digunakan sistem orde yang lebih tinggi lagi [4].

Berdasarkan kajian terdahulu yang telah dilakukan, pada Tugas Akhir ini dibahas tentang desain kontrol orde rendah pada gedung bertingkat n dengan metode H_∞ .

2.2 Sistem LTI Waktu Kontinu

Sistem LTI waktu kontinu yang digunakan sebagai berikut : [5]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{cases} \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) dapat dituliskan kembali dalam bentuk matriks G sebagai berikut:

$$G: \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \bar{z} \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ \bar{w} \\ u \end{bmatrix}$$

Dimana $x \in \mathcal{R}^n$ adalah state, $w \in \mathcal{R}^j$ merupakan input gangguan, $z \in \mathcal{R}^p$ merupakan output terkontrol, $u \in \mathcal{R}^s$ adalah input kontrol, dan $y \in \mathcal{R}^q$ adalah hasil pengukuran. Matriks $A_{n \times n}, B_{1_{n \times j}}, B_{2_{n \times s}}, C_{1_{p \times n}}, C_{2_{q \times n}}, D_{11_{p \times j}}, D_{12_{p \times s}}, D_{21_{q \times j}}$ merupakan matriks konstanta. Dalam tugas akhir ini diasumsikan bahwa $D_{22} = 0$, sehingga dapat dikatakan bahwa sistem merupakan *strictly proper*. Artinya, jika sistem diberikan input sinyal sinusoidal dengan frekuensi yang menaik terus, maka magnitude dari keluaran sistem akan menjadi nol. Diasumsikan pula bahwa (A, B_2, C_2) stabil dan dapat dideteksi.

Sistem (2.1) menggunakan pengontrol output feedback sebagai berikut :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}y \\ u = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}y \end{cases} \quad (2.2)$$

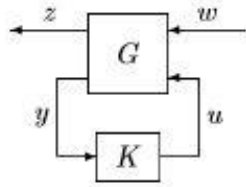
Persamaan (2.2) dapat dituliskan kembali dalam bentuk matriks K sebagai berikut :

$$K : \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix}$$

Dimana $\hat{x} \in R^{\hat{n}}$ merupakan state pengontrol dan $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ merupakan matriks konstanta yang ditentukan.

2.3 Teori Kontrol H_{∞}

Desain kontrol H_{∞} dirancang dengan membentuk *generalized plant* sistem yang diperumum dengan cara menggabungkan semua *plant* (termasuk kontrol, input dan output baik dari sistem ataupun dari luar sistem beserta bobotnya). Berikut pembentukan *generalized plant* yang digambarkan dalam bentuk diagram blok dibawah ini.



Gambar 2.1 Linier Fractional Transformation

Berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh bahwa :

$$u = Ky \quad (2.3)$$

$$y = Gu \quad (2.4)$$

Terdapat dua macam output dan input yang terdapat pada Gambar 2.1, yaitu yang pertama adalah output dari sistem y dan input sistem u . Kedua adalah output dari luar z dan input dari luar w . Fungsi transfer dari sistem yang diperumum sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

dari persamaan (2.5) dapat diuraikan sebagai berikut.

$$z = G_{11}w + G_{12}u \quad (2.6)$$

$$y = G_{21}w + G_{22}u \quad (2.7)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (2.3) ke dalam Persamaan (2.7) diperoleh

$$y = G_{21}w + G_{22}Ky$$

$$y - G_{22}Ky = G_{21}w$$

$$(I - G_{22}K)y = G_{21}w$$

$$y = (I - G_{22}K)^{-1}G_{21}w \quad (2.8)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (2.3) ke dalam Persamaan (2.6) diperoleh sebagai berikut.

$$z = G_{11}w + G_{12}Ky \quad (2.9)$$

substitusi Persamaan (2.8) ke Persamaan (2.9) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} z &= G_{11}w + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}w \\ z &= (G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21})w \end{aligned} \quad (2.10)$$

dari Persamaan (2.10) diperoleh

$$T_{zw} = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (2.11)$$

Berdasarkan persamaan (2.11), dapat diartikan bahwa kontrol H_∞ adalah meminimumkan norm dari fungsi transfer dari w ke z yaitu $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ dengan γ adalah bilangan positif.

2.3.1 Kontrol H_∞ dengan persamaan Riccati

Berikut langkah-langkah untuk mendapatkan pengontrol $K(s)$ stabil sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ sebagai berikut :

- (1) Terdapat matriks X definit positif yang memenuhi persamaan aljabar Riccati

$$A^T X + XA + C_z^T C_z + X(\gamma^{-2} B_w C_w^T - B_u B_u^T) X = 0$$

$$\text{dan } \mathcal{R}\lambda_i[A + (\gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T) X] < 0 \quad \forall i$$

- (2) Terdapat matriks Y definit positif yang memenuhi persamaan aljabar Riccati

$$AY + YA^T + B_w^T B_w + Y(\gamma^{-2} C_z^T C_z - C_y^T C_y) Y = 0$$

$$\text{dan } \mathcal{R}\lambda_i[A + Y(\gamma^{-2} C_z^T C_z - C_y^T C_y)] < 0 \quad \forall i$$

- (3) $\rho(XY) < \gamma^2$

ρ adalah spektral radius ($\rho(A) = \max_i |\lambda(A)|$).

Ketika kondisi di atas terpenuhi, maka didapatkan pengontrol utama H_∞ sebagai berikut :

$$K(s) := \left[\begin{array}{c|c} A + (\gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T) X - ZY C_y^T C_y & ZY C_y^T \\ \hline -B_u^T & 0 \end{array} \right]$$

dimana $Z = (I - \gamma^{-2} YX)^{-1}$. Setelah diperoleh matriks pengontrol K sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, kemudian realisasi *state-space* $K(s)$ dituliskan

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right]$$

dan sistem dinamik dari pengontrol K adalah

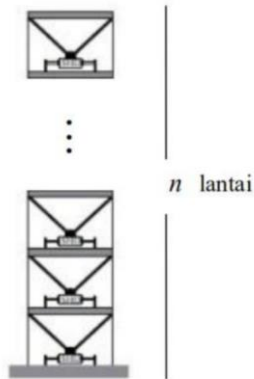
$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}y \\ u(t) &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}y \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan sistem yang telah diterapkan kontrol $K(s)$ yaitu sistem *close-loop*, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} T_{zw} = \mathcal{F}_l(G, K) &= \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 \hat{D} C_2 & B_2 \hat{C} & B_1 + B_2 \hat{D} D_{21} \\ \hline \hat{B} C_2 & \hat{A} & \hat{B} D_{21} \\ C_1 + D_{12} \hat{D} C_2 & D_{12} \hat{C} & D_{12} \hat{D} D_{21} \end{array} \right] \\ &:= \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] \end{aligned}$$

2.4 Representasi Model Gedung Bertingkat n

Sistem gedung bertingkat yang akan digunakan pada penelitian ini adalah sistem dari struktur gedung bertingkat n seperti dibawah ini.



Gambar 2.2 Struktur Model Bangunan

Sistem gedung bertingkat yang digunakan pada tugas akhir ini dapat diilustrasikan pada Gambar 2.2. Kontrol pada sistem gedung bertingkat digunakan untuk mereduksi respons struktural pada bangunan, seperti perpindahan, kecepatan, percepatan, dan gaya di bawah gangguan yang dapat berupa bencana (misal: gempa bumi dan angin kencang). Oleh karena itu, model gedung bertingkat diilustrasikan seperti masalah pada gerakan pegas, sehingga rumus yang berkaitan dengan gedung bertingkat n bisa digunakan Hukum Newton II yaitu $\Sigma F = m \cdot a$, dengan F , m , dan a masing-masing adalah gaya yang diberikan, massa, dan percepatan pada sistem. Berdasarkan penurunan dari Hukum Newton II terhadap gedung bertingkat n maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = E_0u(t) + Lw(t) \quad (2.12)$$

dengan M , D , dan K masing-masing adalah matriks dari massa, peredam, dan *stiffness* dari sistem. x adalah vektor perpindahan yang bergantung pada waktu t , u adalah vektor gaya yang dikontrol yang bergantung pada waktu t , dan w adalah vektor gangguan eksternal (yang dihasilkan dari gempa bumi dan angin kencang) yang bergantung pada waktu t . E_0 dan L , masing-masing merepresentasikan letak dari gaya yang akan dikontrol dan matriks simulasi eksternal. Variabel keadaan dari Persamaan (2.12) bergantung pada keadaan koordinat yang diamati, pada persamaan tersebut juga diasumsikan bahwa matriks M memiliki invers, sehingga Persamaan (2.12) dapat dituliskan kembali sebagai berikut.

$$\ddot{x}(t) + M^{-1}D\dot{x}(t) + M^{-1}Kx(t) = M^{-1}E_0u(t) + M^{-1}Lw(t) \quad (2.13)$$

dengan $x(t)$ merepresentasikan perpindahan pada antar bangunan dan $\dot{x}(t)$ adalah kecepatan relatif antar bangunan.

2.5 Reduksi Kontrol H_∞

Setelah diperoleh sistem kontrol, sistem tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode *Balanced Truncation*. Adapun tahap proses reduksi sebagai berikut.

2.5.1 Kestabilan Sistem

Konsep kestabilan sistem linier waktu kontinu yang digunakan dalam pembahasan ini adalah

Definisi 2.5.1 [7]

Diberikan suatu sistem dimensi- n dengan bentuk sistem linier $\dot{x} = Ax$. Ruang bagian stabil untuk sistem linier (2.2) adalah ruang bagian (real) dari jumlahan langsung dari ruang bagian linier dengan nilai karakteristik dari A yaitu nilai-nilai karakteristik dengan bagian real lebih kecil dari nol. Ruang bagian tak stabil didefinisikan dengan cara serupa, yaitu berkaitan dengan bagian real tak negatif.

Syarat kestabilan dari persamaan differensial $\dot{x} = Ax$ dimana matriks A mempunyai peranan penting khususnya nilai karakteristik dari matriks A yaitu bagian riil dari λ yang dinotasikan oleh $Re\lambda$ diberikan oleh Teorema berikut.

Teorema 2.5.1 [7]

Diberikan persamaan differensial $\dot{x} = Ax$ dengan matriks A berukuran $n \times n$ dan mempunyai nilai karakteristik berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n (k \leq n)$.

- i. Titik setimbang $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re\lambda_i < 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, k$*
- ii. Titik setimbang $\bar{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $Re\lambda_i \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, k$ dan untuk semua λ_i dengan $Re\lambda_i = 0$ multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometrinya.*
- iii. Titik setimbang $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $Re\lambda_i > 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, k$ atau ada λ_i dengan $Re\lambda_i = 0$ multiplisitas aljabar lebih besar dari multiplisitas geometrinya*

Untuk sistem general *plant*, konsep kestabilan yang dipakai diberikan pada teorema berikut.

2.5.2 Keterkendalian sistem

Definisi 2.5.2 [7]

Sistem linier (2.2) dikatakan terkendali jika untuk setiap keadaan sebarang $x(0) = x_0$ ada masukan $y(t)$ yang tidak dibatasi mentransfer keadaan x_0 ke sebarang keadaan akhir $x(t_1) = x_1$ dengan waktu akhir t_1 hingga.

Kemudian diberikan suatu teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu sistem terkendali [7].

Teorema 2.5.2 [7]

Syarat perlu dan cukup sistem (2.2) terkendali:

i. Matriks

$$W(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

Non-singular

ii. Matriks keterkendalian

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Mempunyai rank sama dengan n.

2.5.3 Keteramatan Sistem**Definisi 2.5.3 [7]**

Bila setiap keadaan awal $x(0) = x_0$ secara tunggal dapat diamati dari setiap pengukuran keluaran sistem dan dari waktu $t = 0$ ke $t = t_1$, maka sistem dikatakan teramati.

Kemudian diberikan suatu teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu sistem teramati.

Teorema 2.5.3 [7]

Syarat perlu dan cukup sistem (2.2) teramati:

i. Matriks

$$M(t) := \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$$

non-singular

ii. Matriks keteramatan

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

mempunyai rank sama dengan n.

2.5.4 Gramian Keterkendalian dan Gramian Keteramatan

Pada sistem linier waktu kontinu juga didefinisikan gramian keterkendalian, W , dan gramian keteramatan, M , yaitu:

$$W = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad (2.14)$$

$$M = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau \quad (2.15)$$

Hubungan antara sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem dengan Gramian keterkendalian W dan Gramian keteramatan M dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.5.4 [8]

Sistem (A, B, C, D) yang stabil, terkendali dan teramati. Gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M yang merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov

$$AW + WA^T + BB^T - W = 0$$

$$A^T M + MA + C^T C - M = 0$$

2.5.5 Pembentukan Sistem Setimbang

Definisi 2.5.5 [5]

Sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ disebut sistem setimbang dari sistem (A, B, C, D) yang diasumsikan sistemnya stabil, terkontrol, dan teramati. Jika sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ mempunyai gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} yang merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov.

$$\tilde{A}\tilde{W} + \tilde{W}\tilde{A}^T + \tilde{B}\tilde{B}^T = 0$$

$$\tilde{A}^T\tilde{M} + \tilde{M}\tilde{A} + \tilde{C}^T\tilde{C} = 0$$

Sedemikian hingga memenuhi

$$\tilde{W} = \tilde{M} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

dimana

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

dengan σ_1 menyatakan nilai singular hankel dari sistem (A, B, C, D) yang dapat didefinisikan sebagai

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_i(WM)}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, dengan λ_i adalah nilai eigen dari WM .

Untuk mendapatkan sistem setimbang, diperlukan matriks transformasi T yang nonsingular. Matriks transformasi T adalah matriks yang mentransformasikan sistem awal menjadi sistem setimbang, algoritma untuk mendapatkan matriks transformasi T adalah sebagai berikut:

1. Sistem (A, B, C, D) memenuhi sifat stabil, terkendali dan teramati.
2. Menentukan gramian keterkendalian (W) dan gramian keteramatan (M) dari sistem awal.
3. Menentukan matriks ϕ sedemikian hingga berlaku $W = \phi^T \phi$.
4. Diagonalisasi matriks $\phi M \phi^T$ sedemikian hingga berlaku $\phi M \phi^T = U \Sigma U^T$.
 $U =$ matriks unitary; $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.
5. Diperoleh matriks $T = \phi^T U \Sigma^{-1/2}$.

2.5.6 Reduksi dengan Balanced Truncation

Setelah diperoleh sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$, akan dilakukan pengurangan orde menggunakan metode Balanced Truncation. Sistem tereduksi diperoleh setelah menghilangkan variabel yang sulit dikendalikan dan diamati maupun yang berpengaruh kecil terhadap sistem. Variabel dengan pengaruh kecil adalah variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular hankel yang kecil pula. Nilai singular hankel diperoleh dan disusun berdasarkan penyelesaian persamaan berikut:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}$$

dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ dan $\lambda_i(WM)$ merupakan nilai eigen gramian $W * M$.

Pemotongan variabel keadaan pada sistem setimbang dapat dilakukan dengan menentukan urutan nilai singular hankel dimana

terjadi perubahan yang besar atau memilih nilai singular hankel ke- n dimana $\sigma_r > \sigma_{r+1}$. Sehingga menghasilkan persamaan baru berukuran r yang dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\dot{\tilde{x}}_r = \tilde{A}_r \tilde{x}(t) + \tilde{B}_r \tilde{y}(t)$$

$$\tilde{u}_r = C_r \tilde{x}(t) + D \tilde{y}(t)$$

Selanjutnya sistem tereduksi yang terbentuk akan disebut sistem $(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, D)$. Berdasarkan persamaan baru diatas, terlihat bawa orde sistem tereduksi lebih kecil karena terjadi pemotongan variabel keadaan. Sistem $(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, D)$ ini yang nantinya akan diidentifikasi sehingga menghasilkan variabel keadaan yang tetap bersesuaian dengan sistem awalnya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir ini. Diberikan penjelasan mengenai prosedur dalam proses pelaksanaan setiap langkah yang digunakan dalam penyelesaian Tugas Akhir.

3.1 Metode Penelitian

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir diantaranya sebagai berikut.

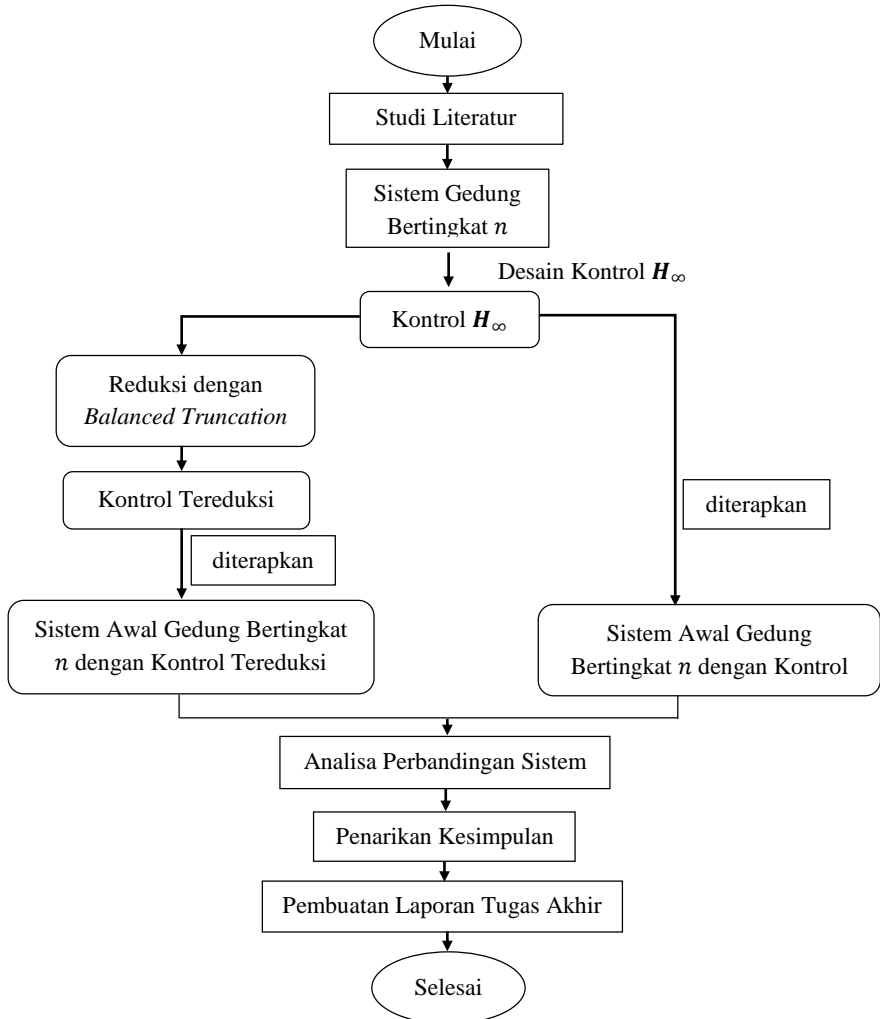
- a. Studi Literatur
Dalam tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan studi literatur dari beberapa jurnal, penelitian, paper, maupun artikel mengenai desain kontrol H_∞ orde rendah pada gedung bertingkat dan metode Balanced Truncation.
- b. Pembentukan Model Matematika
Dalam tahap ini dilakukan penurunan rumus berdasarkan konsep hukum Newton kedua untuk menurunkan persamaan dari pergerakan struktur gedung bertingkat. Pada tahap ini juga akan dilakukan pengumpulan parameter.
- c. Kontrol H_∞
Pada tahap ini akan dicari pengontrol untuk sistem gedung bertingkat n . Semua parameter pada sistem dihimpun menjadi satu kesatuan dan akan dicari pengontrol H_∞
- d. Desain Kontrol Orde Rendah
Untuk menghasilkan orde rendah, kontrol awal akan direduksi dengan Balanced Truncation. Kontrol akan direduksi sampai orde tertentu, dan kemudian diterapkan kembali pada sistem gedung bertingkat n .
- e. Simulasi dan Analisa Sistem
Setelah dilakukan proses pengumpulan data dan pereduksian, dalam tahap ini akan dilakukan implementasi kontrol H_∞ sebelum direduksi dan setelah direduksi ke dalam model

sistem gedung bertingkat n dan dilakukan analisa perbandingan terhadap sistem tersebut.

- f. Penarikan Kesimpulan
Pada langkah ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil akhir yang diperoleh.
- g. Pembuatan Laporan Tugas Akhir
Setelah permasalahan pada topik Tugas Akhir ini dapat terjawab, selanjutnya akan dibuat laporan akhir dari pengerjaan Tugas Akhir.

3.1 Diagram Alur Penelitian

Langkah-langkah penelitian pada Tugas Akhir disajikan dalam diagram sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

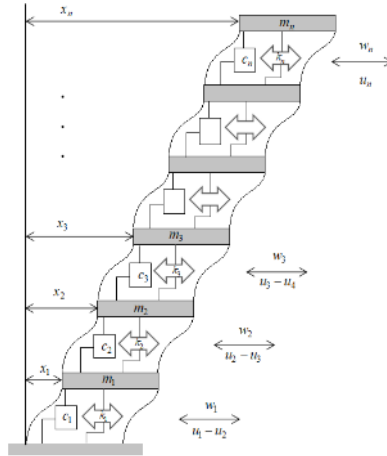
BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

4.1 Sistem Model Gedung Bertingkat n

Representasi model gedung bertingkat yang disajikan pada Persamaan (2.12) dapat dibentuk ke dalam realisasi matriks dengan menggunakan model dari *Mass Damper Spring* (MDS). Sistem model gedung bertingkat n diilustrasikan seperti pada Gambar (4.1), dari gambar tersebut juga diketahui massa-massa pada gedung bertingkat n saling berhubungan, dan di setiap massa (M) nya dipasang peredam (D) dan pegas (K). Setiap lantai pada gedung bertingkat memiliki rangkaian yang sama dengan sistem *Mass Damping Spring* (MDS). Sistem gedung bertingkat yang digunakan pada tugas akhir ini didasari oleh 2D *shear-frame* dengan perubahan tanah searah.

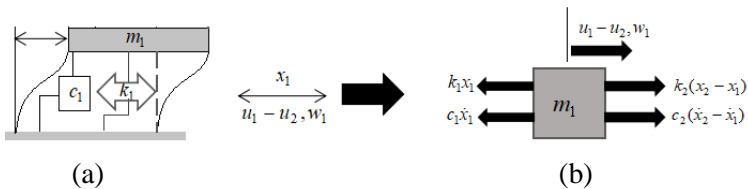
Kontrol u didefinisikan sebagai kontrol kekuatan antara lantai yang berdekatan. Untuk struktur n lantai, gaya kontrol positif didefinisikan untuk memindahkan lantai (massa) di atas perangkat kontrol ke arah kiri, dan memindahkan lantai (massa) dibawah perangkat kontrol ke arah kanan, yang ditunjukkan seperti pada Gambar (4.1). Kontrol gaya pada masing-masing lantai dijabarkan sebagai berikut :

1. Kontrol gaya pada lantai 1 adalah $u_1 - u_2$
2. Kontrol gaya pada lantai 2 adalah $u_2 - u_3$
3. Kontrol gaya pada lantai 3 adalah $u_3 - u_4$
- ⋮
4. Kontrol gaya pada lantai n adalah $u_n - u_{n-1}$.



Gambar 4.1 Sistem Multi MDS pada gedung bertingkat n

Pada lantai 1 dapat digambarkan melalui ilustrasi berikut :



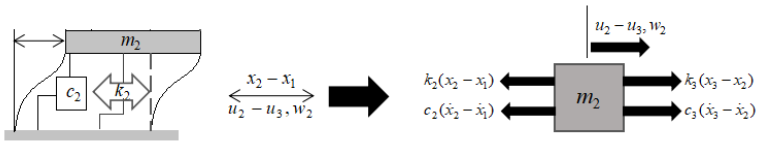
Gambar 4.2 Sistem gedung beringkat pada lantai 1 (a) dan ilustrasi sistem lantai 1 dengan (MDS).

Dengan menggunakan hukum Newton kedua, dapat diturunkan sebuah persamaan dari Gambar (4.2) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= m_1 \ddot{x}_1 \\
 u_1 - u_2 + w_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 &= m_1 \ddot{x}_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1 - u_2 + w_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 &= m_1 \ddot{x}_1 \\
 m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= u_1 - u_2 + w_1
 \end{aligned}$$

Ilustrasi lantai 2 dapat digambarkan melalui gambar berikut :

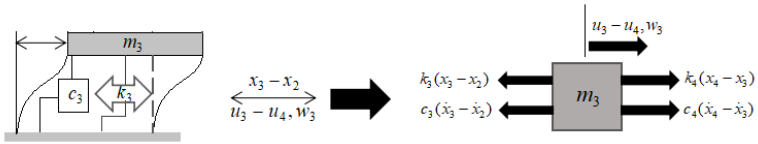


Gambar 4.3 Sistem gedung beringkat pada lantai 2 (a) dan ilustrasi sistem lantai 2 dengan (MDS).

Dengan menggunakan hukum Newton kedua, dapat diturunkan sebuah persamaan dari gambar (4.3) sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 F_2 &= m_2 \ddot{x}_2 \\
 u_2 - u_3 + w_2 + k_3(x_3 - x_2) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= m_2 \ddot{x}_2 \\
 u_2 - u_3 + w_2 + k_3 x_3 - k_3 x_2 + c_3 \dot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 - k_2 x_2 + k_2 x_1 - c_2 \dot{x}_2 + c_2 \dot{x}_1 &= m_2 \ddot{x}_2 \\
 m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 &= u_2 - u_3 + w_2
 \end{aligned}$$

Ilustrasi lantai 3 dapat digambarkan melalui gambar berikut :

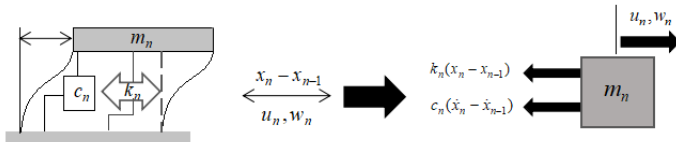


Gambar 4.4 Sistem gedung beringkat pada lantai 3 (a) dan ilustrasi sistem lantai 3 dengan (MDS).

Dengan menggunakan hukum Newton kedua, dapat diturunkan sebuah persamaan dari gambar (4.4) sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 F_3 &= m_3 \ddot{x}_3 \\
 u_3 - u_4 + w_3 + k_4(x_4 - x_3) + c_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - k_3(x_3 - x_2) - \\
 c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= m_3 \ddot{x}_3 \\
 u_3 - u_4 + w_3 + k_4x_4 - k_4x_3 + c_4\dot{x}_4 - c_4\dot{x}_3 - k_3x_3 + \\
 k_3x_2 - c_3\dot{x}_3 + c_3\dot{x}_2 &= m_3 \ddot{x}_3 \\
 m_3 \ddot{x}_3 - c_3\dot{x}_2 + (c_3 + c_4)\dot{x}_3 - c_4\dot{x}_4 - k_3x_2 + (k_3 + k_4)x_3 - \\
 k_4x_4 &= u_3 - u_4 + w_3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Sehingga untuk mendapatkan lantai i , dengan $i = 0, 1, 2 \dots n$ dapat digambarkan melalui ilustrasi berikut :



Gambar 4.5 Sistem gedung beringkat pada lantai n (a) dan ilustrasi sistem lantai n dengan (MDS).

Dengan menggunakan hukum Newton kedua, dapat diturunkan sebuah persamaan dari gambar (4.5) sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 F_i &= m_i \ddot{x}_i \\
 u_i - u_{i+1} + w_i + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) - \\
 k_i(x_i - x_{i-1}) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) &= m_i \ddot{x}_i \\
 u_i - u_{i+1} + w_i + k_{i+1}x_{i+1} - k_{i+1}x_i + c_{i+1}\dot{x}_{i+1} - c_{i+1}\dot{x}_i - \\
 k_ix_i + k_ix_{i-1} - c_i\dot{x}_i + c_i\dot{x}_{i-1} &= m_i \ddot{x}_i \\
 m_i \ddot{x}_i - c_i \dot{x}_{i-1} + (c_i + c_{i+1}) \dot{x}_i - c_{i+1} \dot{x}_{i+1} - k_i x_{i-1} + (k_i + \\
 k_{i+1}) x_i - k_{i+1} x_{i+1} &= u_i - u_{i+1} + w_i
 \end{aligned}$$

Dengan $i = 0, 1, 2 \dots n$,

Berikut bentuk matriks massa, peredam, dan kekakuan pegas sebagai berikut :

$$M_{n \times n} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & m_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$D_{n \times n} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_n & c_n \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$K_{n \times n} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Diketahui matriks E_0 adalah matriks lokasi dari kontrol gaya dan matriks L adalah vektor yang mempresentasikan letak gangguan, yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$E_{0n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{n \times 1} = -M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah simulasi perhitungan, persamaan (2.12) akan diturunkan menjadi persamaan orde satu. Misalkan,

$$x = x_i \quad (4.4)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_i \quad (4.5)$$

dengan x_i adalah pergeseran pada bangunan lantai ke- i dan \dot{x}_i adalah kecepatan pergeseran bangunan pada lantai ke- i .

Diasumsikan matriks M merupakan matriks diagonal yang memiliki invers, maka dengan mensubstitusi Persamaan (4.4) dan (4.5) ke dalam persamaan (2.13), diperoleh :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x} \\ \ddot{x} &= -M^{-1}Kx - M^{-1}D\dot{x} + M^{-1}Lw + M^{-1}E_0\end{aligned}$$

Dari persamaan diatas, dapat dibentuk persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ M^{-1}L \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ M^{-1}E_0 \end{bmatrix} u \quad (4.6)$$

Ukuran matriks yang digunakan pada pemodelan gedung bertingkat ini adalah berukuran $2n \times 2n$ dengan n adalah banyak lantai gedung bertingkat. Persamaan (4.6) dapat dituliskan kembali menjadi persamaan (4.7) sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (4.7)$$

Dengan $x(t) = [x \ \dot{x}]^T \in R^{2n \times 1}$ adalah vektor *state*, $A \in R^{2n \times 2n}$, $B_1 \in R^{2n \times j}$, dan $B_2 \in R^{2n \times s}$ masing-masing adalah sistem, matriks gangguan, dan kontrol. Pada kasus ini n merupakan banyaknya banyak lantai gedung bertingkat, j dan s masing-masing merupakan banyaknya gangguan dan banyak kontrol. Sehingga untuk lebih jelasnya, persamaan (4.6) dapat dituliskan sebagai A , B_1 , dan B_2 seperti dibawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ M^{-1}L \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ M^{-1}E_0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Diasumsikan perpindahan dan kecepatan antar-lantai dapat diukur. Variabel perpindahan dan kecepatan di x , yang relatif terhadap tanah, perpindahan antar lantai dan kecepatan pada setiap lantai kemudian dikelompokkan bersama sebagai berikut :

$$x(t) = [x_1 \ \dot{x}_1 \ (x_2 - x_1) \ (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \ \cdots \ (x_n - x_{n-1}) \ (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})]^T$$

Sedangkan keluaran (*output*) dari sistem gedung bertingkat ini adalah sebagai berikut :

$$y(t) = [\dot{x}_1 \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \quad \cdots \quad (\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n) \quad (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})]^T$$

Dengan $y(t)$ adalah kecepatan antar lantai ke- n dengan lantai ke $n - 1$. Untuk dapat menerapkan kontrol H_∞ pada sistem model gedung bertingkat n , didefinisikan C_2 , C_1 , dan D_{12} sebagai berikut:

$$C_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} I_{2n \times 2n} \\ 0_{n \times 2n} \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0_{2n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

dan diketahui bahwa matriks D_{11} , D_{21} , dan D_{22} adalah matriks 0 dengan ukuran yang bersesuaian.

4.2 Kontrol H_∞

Dalam hal ini diberikan sistem seperti pada persamaan (4.7) dan diberikan pengontrol dinamik H_∞ sebagai berikut :

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p y \\ u = C_p x_p + D_p y \end{cases} \quad (4.9)$$

Persamaan (4.9) dapat diubah ke dalam bentuk *single* matriks K_p sebagai berikut :

$$K_p = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Dalam sistem dengan kontrol H_∞ , diaplikasikan pengontrol pada persamaan (4.9) ke dalam persamaan (2.1) sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2 D_p C_2)x + B_2 C_p x_p + (B_1 + B_2 D_p D_{21})w \\ \dot{x}_p &= B_p C_2 x + A_p x_p + B_p D_{21} w \\ z &= (C_1 + D_{12} D_p C_2)x + D_{12} C_p x_p + (D_{11} + D_{12} D_p D_{21})w \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dalam kasus ini, diperkenalkan sistem dengan kontrol H_∞ sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ C_{c1} & D_{c11} & D_{c12} \\ C_{c2} & D_{c21} & \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A & 0_{n \times n} & B_1 & 0_{n \times n} & B_2 \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times r} & I_n & 0_{n \times m} \\ \hline C_1 & 0_{p \times n} & D_{11} & 0_{p \times n} & D_{12} \\ \hline 0_{n \times r} & I_n & 0_{n \times r} & & \\ \hline C_2 & 0_{q \times n} & D_{21} & & \end{array} \right] \quad (4.12)$$

Notasi pada persamaan (4.12) dan (4.11) akan diaplikasikan ke dalam persamaan (4.10), sehingga diperoleh bentuk sistem dengan kontrol sebagai berikut :

$$\begin{cases} \dot{x}_c = (A_c + B_{c2} G_p C_{c2})x_c + (B_{c1} + B_{c2} G_p D_{c21})w \\ z = (C_{c1} + D_{c12} G_p C_{c2})x_c + (D_{c11} + D_{c12} G_p D_{c21})w \end{cases} \quad (4.13)$$

Persamaan (4.13) dimisalkan sebagai berikut :

$$Acl = A_c + B_{c2} K_p C_{c2}$$

$$Bcl = B_{c1} + B_{c2} K_p D_{c21}$$

$$Ccl = C_{c1} + D_{c12} K_p C_{c2}$$

$$Dcl = D_{c11} + D_{c12} K_p D_{c21}$$

$$\text{dengan } x_c = [x^T x_p^T]^T.$$

4.3 Reduksi Kontrol H_∞ dengan Metode Balanced Truncation

Pada subbab ini dibahas mengenai pembentukan kontrol tereduksi menggunakan metode Balanced Truncation. Prosesnya meliputi mekanisme pembentukan kontrol setimbang dan pemotongan variabel keadaan kontrol setimbang menggunakan metode Balanced Truncation untuk menghasilkan kontrol berorde rendah.

4.3.1 Pembentukan Kontrol Setimbang

Untuk mendapatkan kontrol yang setimbang dilakukan dengan cara mentransformasikan matriks T ke dalam kontrol awal. Berikut algoritma pembentukan matriks transformasi T dari kontrol pada persamaan (4.10) :

- Diasumsikan kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p) stabil, terkendali dan teramati
- Tentukan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan dari kontrol.
- Tentukan matriks ϕ sedemikian hingga berlaku $W = \phi^T \phi$
- Konstruksi matriks $\phi M \phi^T$ kemudian diagonalisasi matriks tersebut sehingga berlaku $\phi M \phi^T = U \Sigma^2 U^T$

dimana:

$U =$ matriks *unitary*

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}$ dengan $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_n > 0$

- Didefinisikan matriks non-singular T sebagai

$$T = \phi^T U \Sigma^{-1/2} \quad (4.14)$$

Setelah diperoleh matriks transformasi T sesuai persamaan (4.14), selanjutnya akan dibentuk kontrol setimbang. Secara umum, diberikan $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah matriks non-singular. Didefinisikan:

$$x_p(t) = T\tilde{x}_p(t) \quad (4.15)$$

$$u_p(t) = T\tilde{u}_p(t) \quad (4.16)$$

Berdasarkan definisi di atas, kontrol menjadi

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_p(t) &= T^{-1}\dot{x}_p(t) \\ u_p(t) &= T\tilde{u}_p(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Untuk mendapatkan kontrol masukan yang setimbang, substitusi persamaan (4.9) ke persamaan (4.17) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= T^{-1}(A_p x_p(t) + B_p y_p(t)) \\ &= T^{-1}(A_p T\tilde{x}_p(t) + B_p \tilde{y}_p(t)) \\ &= T^{-1}A_p T\tilde{x}_p(t) + T^{-1}B_p \tilde{y}_p(t) \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan sistem keluaran yang setimbang, substitusi persamaan (4.9) dan (4.15) ke persamaan (4.16) sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} u_p(t) &= C_p x_p(t) + D_p y_p(t) \\ u_p(t) &= C_p T\tilde{x}_p(t) + D_p \tilde{y}_p(t) \end{aligned}$$

Sesuai persamaan di atas, maka persamaan kontrol setimbang dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_p(t) &= \tilde{A}_p \tilde{x}_p(t) + \tilde{B}_p \tilde{y}_p(t) \\ \tilde{u}_p(t) &= \tilde{C}_p \tilde{x}_p(t) + D_p \tilde{y}_p(t) \end{aligned}$$

dengan

$$\tilde{A}_p = T^{-1}A_p T ; \tilde{B} = T^{-1}B_p \quad ; \tilde{C}_p = C_p T \quad (4.18)$$

Selanjutnya sistem setimbang yang terbentuk disebut kontrol $(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, D_p)$. Gramian keterkendalian dari kontrol $(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, D_p)$ dapat diperoleh dengan substitusi persamaan (2.14) ke persamaan (4.18), sehingga didapatkan

$$W = T\tilde{W}T^T$$

dengan

$$\tilde{W} = \int_0^t e^{\tilde{A}_p \tau} \tilde{B}_p \tilde{B}_p^T e^{\tilde{A}_p^T \tau} d\tau$$

Berdasarkan persamaan di atas, gramian keterkendalian kontrol $(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, D_p)$ dapat ditulis ke dalam bentuk

$$\tilde{W} = T^{-1}W(T^{-1})^T$$

Gramian keteramatan dari kontrol $(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, D_p)$ dapat diperoleh dengan substitusi persamaan (2.15) ke persamaan (4.18), sehingga didapatkan

$$M = (T^{-1})^T \tilde{M} T^{-1}$$

dengan

$$\tilde{M} = \int_0^t e^{\tilde{A}_p^T \tau} \tilde{C}_p^T \tilde{C}_p e^{\tilde{A}_p \tau} d\tau$$

Berdasarkan persamaan di atas, gramian keterkendalian kontrol $(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, D_p)$ dapat ditulis ke dalam bentuk

$$\tilde{M} = T^T M T$$

Sesuai dengan persamaan (4.4.11), gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= (\phi^T U \Sigma^{-1/2})^{-1} W ((\phi^T U \Sigma^{-1/2})^{-1})^T \\ \tilde{M} &= (\phi^T U \Sigma^{-1/2})^T M (\phi^T U \Sigma^{-1/2}) \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.4.6) dan (4.4.7) diperoleh

$$\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma \quad (4.19)$$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada persamaan (4.19) menunjukkan bahwa dengan mendefinisikan matriks transformasi $T = \phi^T U \Sigma^{-1/2}$, maka dari kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p) dapat dibentuk suatu kontrol $(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, D_p)$ yang mempunyai gramian keterkendalian, \tilde{W} , dan gramian keteramatan, \tilde{M} , yang sama dan merupakan matriks diagonal Σ . Oleh karena itu, kontrol $(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, D_p)$ disebut sebagai kontrol setimbang dari kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p) . Selanjutnya, Σ disebut sebagai gramian kesetimbang dari kontrol $(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, D_p)$.

4.3.2 Pemotongan Kontrol Setimbang

Setelah diperoleh kontrol $(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, D_p)$, dilakukan pengurangan orde menggunakan metode Balanced Truncation. Kontrol tereduksi didapat setelah menghilangkan variabel yang

sulit dikendalikan dan diamati maupun yang berpengaruh kecil terhadap sistem.

Pemotongan variabel keadaan pada kontrol setimbang dapat dilakukan dengan menentukan urutan nilai singular hankel dimana terjadi perubahan yang besar atau memilih nilai singular hankel ke- r dimana $\sigma_r > \sigma_{r+1}$. Sehingga kontrol menghasilkan persamaan baru berukuran r yang dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\dot{\tilde{x}}_{pr}(t) = \tilde{A}_{pr}\tilde{x}_p(t) + \tilde{B}_{pr}\tilde{y}_p(t) \quad (4.20)$$

$$\tilde{u}_{pr}(t) = \tilde{C}_{pr}\tilde{x}_p(t) + D_p\tilde{y}_p(t) \quad (4.21)$$

Selanjutnya kontrol tereduksi yang terbentuk disebut kontrol tereduksi $(\tilde{A}_{pr}, \tilde{B}_{pr}, \tilde{C}_{pr}, D_p)$. Berdasarkan persamaan (4.20) dan (4.21), terlihat bahwa orde kontrol tereduksi lebih rendah karena terjadi pemotongan variabel keadaan. Kontrol tereduksi $(\tilde{A}_{pr}, \tilde{B}_{pr}, \tilde{C}_{pr}, D_p)$ ini yang nantinya diidentifikasi sehingga masih bisa diterapkan pada sistem awal.

4.3.3 Sistem Awal dengan Kontrol H_∞ Orde Rendah

Setelah didapatkan matriks pengontrol K_r berorde rendah dengan realisasi *state-space* $K_r(s)$ dituliskan

$$K_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{pr} & \tilde{B}_{pr} \\ \hline \tilde{C}_{pr} & D_p \end{array} \right]$$

Sehingga didapatkan sistem yang telah diterapkan pengontrol $K_r(s)$ yaitu sistem *close-loop* orde rendah, sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{zw} &= \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_p C_2 & B_2 \tilde{C}_{pr} & B_1 + B_2 D_p D_{21} \\ \tilde{B}_{pr} C_2 & \tilde{A}_{pr} & \tilde{B}_{pr} D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_p C_2 & D_{12} \tilde{C}_{pr} & D_{11} + D_{12} D_p D_{21} \end{array} \right] \\ &:= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_r & \hat{B}_r \\ \hline \hat{C}_r & \hat{D} \end{array} \right] \end{aligned}$$

4.4 Simulasi

Dalam simulasi ini akan dicari kontrol H_∞ dan reduksi kontrol H_∞ dengan Balanced Truncation yang terdiri dari beberapa lantai.

4.1 Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 2 lantai

Tabel 4.1 Gedung bertingkat dengan 2 lantai

Lantai ke-	Massa (M)	Lantai yang terhubung	Kekakuan (K)
2	1000 Kg	1 – 2	$2 \times 10^5 N/m$
1	1000 Kg	0 – 1	$2 \times 10^5 N/m$

Satuan massa dalam Kg , koefisien peredam dalam Ns/m , dan koefisien kekakuan pegas dalam N/m . Parameter pada Tabel (4.1) akan disubstitusikan ke dalam persamaan (4.1 - 4.3), diperoleh matriks M , D , dan K sebagai berikut :

$$M = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1200 & -600 \\ -600 & 600 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 4000 & -2000 \\ 2000 & 2000 \end{bmatrix}$$

dengan

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = -M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pada lantai 2 ini mempunyai $n = 2$, $j = 1$ dan $s = 2$, persamaan (4.8) dapat dituliskan sebagai A , B_1 , dan B_2 seperti dibawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ M^{-1}E_0 \end{bmatrix}$$

Perpindahan dan kecepatan yang terjadi pada 2 lantai sebagai berikut :

$$x(t) = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad (x_2 - x_1) \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)]^T$$

Output yang dihasilkan :

$$y(t) = [\dot{x}_1 \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)]^T$$

Didefinisikan C_2 , C_1 , dan D_{12} sebagai berikut :

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} I_{4 \times 4} \\ 0_{2 \times 4} \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

Diketahui bahwa matriks D_{11} , D_{21} , dan D_{22} adalah matriks nol dengan ukuran yang bersesuaian.

Setelah dilakukan substitusi paramater diperoleh matriks A , B_1 , dan B_2 sebagai berikut :

$$A = 10^2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ -4 & 2 & -0.012 & 0.006 \\ 2 & -2 & 0.006 & -0.006 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabel dibawah ini merupakan nilai eigen dari sistem awal yang telah dihitung dan diperoleh sebagai berikut:

Tabel 4.2 Nilai eigen sistem awal

Nilai Eigen
$-0.784 + 22.869i$
$-0.784 - 22.869i$
$-0.115 + 8.740i$
$-0.115 - 8.740i$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, sistem awal dapat dikatakan stabil asimtotik, sistem awal tersebut juga bersifat terkendali dan termati karena mempunyai rank *full* pada matriks keterkendalian dan keteramatan, maka dapat disimpulkan sistem awal pada simulasi ini bersifat stabil asimtotik, terkendali, dan teramat. Tujuan utama untuk memberikan kontrol pada bangunan bertingkat adalah mempercepat kestabilan apabila terjadi gangguan seperti gempa bumi dan angin kencang.

Kontrol H_∞ diperoleh dengan bantuan *toolbox* **hinflmi** pada MATLAB, sehingga diperoleh kontrol H_∞ sebagai berikut:

$$A_p = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.7223 & -0.5788 & -0.0211 & 0.0189 \\ 2.7556 & -2.2039 & -0.0646 & -0.0818 \\ 0.1576 & -0.1140 & -0.0212 & -0.0294 \\ -0.7879 & 0.6216 & -0.0452 & -0.0633 \end{bmatrix}$$

$$B_p = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.4102 & 1.4498 \\ -1.9572 & 5.5190 \\ -0.6339 & 0.2854 \\ -1.3650 & -1.5789 \end{bmatrix}$$

$$C_p = 10^6 \times \begin{bmatrix} -0.0004 & -0.0011 & 0.000005 & 0.000001 \\ 0.0006 & -0.0007 & 0.00001 & 0.0000001 \end{bmatrix}$$

$$D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan $K_p = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{bmatrix}$, diperoleh sistem dengan kontrol H_∞ yang memiliki nilai eigen seperti pada Tabel (4.3) sebagai berikut:

Tabel 4.3 Nilai eigen sistem dengan kontrol

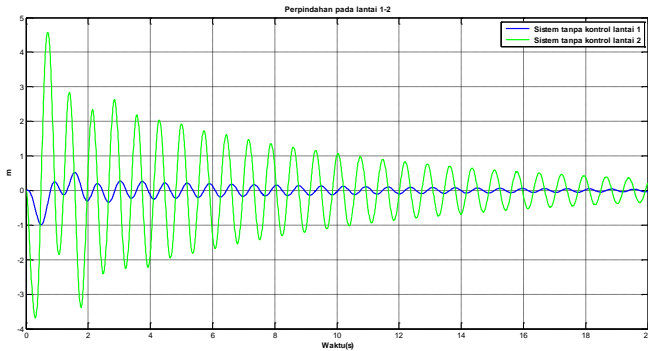
Nilai Eigen
$10^3 \times (-1.4347 + 10^{-16}i)$
$10^3 \times (-0.123 + 10^{-16}i)$
$10^3 \times (-0.0001 + 0.0087i)$
$10^3 \times (-0.0001 - 0.0087i)$
$10^3 \times (-0.0007 + 0.0229i)$
$10^3 \times (-0.0007 - 0.0229i)$
$10^3 \times (-0.0039 + 0.0254i)$
$10^3 \times (-0.0039 - 0.0254i)$

Berdasarkan Tabel (4.3), maka dapat disimpulkan bahwa sistem dengan kontrol H_∞ merupakan sistem yang stabil asimtotik dengan

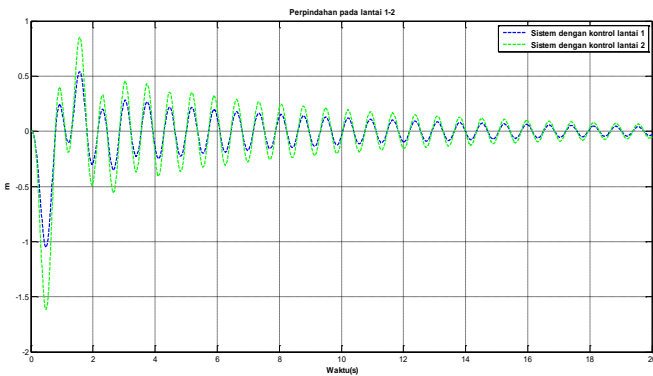
nilai optimal $\gamma = 6.0448$. Dalam simulasi ini diberikan gangguan berupa fungsi sinusodial sebagai berikut :

$$\omega = 10^2 e^{-t} \sin(\pi t)$$

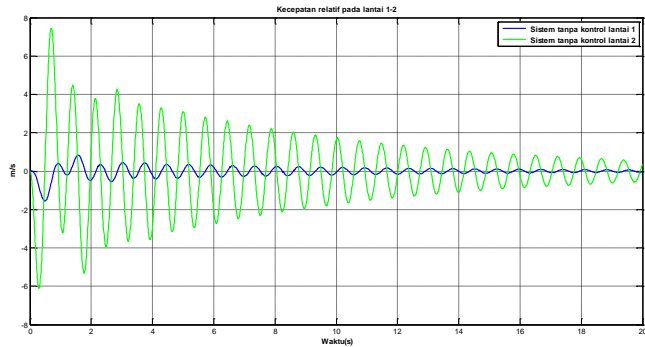
Hasil simulasi pada gambar (4.6) - (4.8) menghasilkan performansi redaman dan kestabilan sistem tanpa kontrol dan sistem dengan kontrol H_∞ (sistem lup tertutup) sebagai berikut :



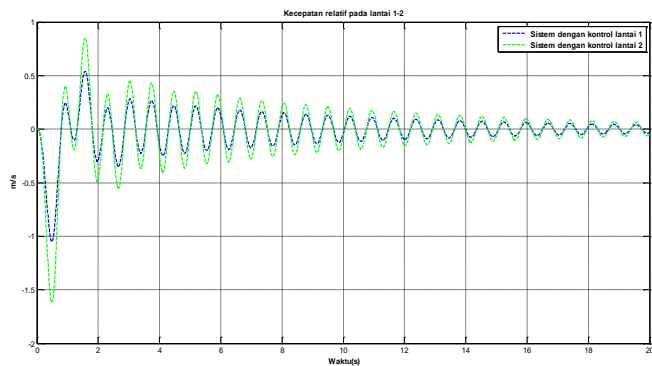
Gambar 4.6 Perpindahan pada lantai 1-2 tanpa kontrol



Gambar 4.7 Perpindahan pada lantai 1-2 dengan kontrol



Gambar 4.8 Kecepatan relatif pada lantai 1-2 tanpa kontrol



Gambar 4.9 Kecepatan relatif pada lantai 1-2 dengan kontrol

Berdasarkan grafik yang dihasilkan, terlihat bahwa sistem dengan kontrol H_∞ memiliki *peak* yang lebih rendah dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol. Sehingga dapat dikatakan bahwa kontrol H_∞ cukup baik dalam mengendalikan lantai 1 dan 2. Hasil tersebut juga menjawab tujuan dari kontrol H_∞ pada gedung bertingkat yaitu untuk mempercepat kestabilan sistem apabila terjadi gangguan pada sistem.

4.4.2 Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 2 lantai

Reduksi kontrol H_∞ dilakukan untuk memperoleh kontrol H_∞ berorde rendah, berdasarkan tabel (4.4) terlihat bahwa sistem kontrol bersifat stabil, sehingga akan diperiksa sifat terkendali, dan teramati dari sistem kontrol tersebut.

Tabel 4.4 Nilai eigen sistem kontrol

Nilai Eigen
$10^3 \times (-1.4347 + 10^{-16}i)$
$10^3 \times (-0.0039 + 0.0254i)$
$10^3 \times (-0.0039 - 0.0254i)$
$10^3 \times (-0.1234 + 10^{-16}i)$

Diperoleh matriks keterkendalian sebagai berikut:

$$M_c = 10^{13} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0.0003 & 0.3253 & -0.4505 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0008 & 0.0011 & 1.1994 & -1.6600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0532 & -0.0734 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0.0003 & -0.3545 & 0.4912 \end{bmatrix}$$

Karena mempunyai *rank* matriks keterkendalian 4, maka kontrol terkendali. Kemudian diperoleh matriks keteramatan sebagai berikut:

$$M_0 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0048 & -0.0039 & -0.0001 & -0.0003 \\ 0.0020 & -0.0016 & 0 & -0.0001 \\ -6.9337 & 5.5409 & 0.1624 & 0.4283 \\ -2.9088 & 2.3246 & 0.0684 & 0.1801 \end{bmatrix}$$

Karena mempunyai *rank* matriks keteramatan 4, maka kontrol teramati.

Dengan terpenuhinya kondisi tersebut, maka bisa diperoleh kontrol setimbang yang dijabarkan sebagai berikut:

$$\tilde{A}_c = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.0004 & -0.0275 & 0.0050 & 0.0103 \\ 0.0274 & -0.0119 & 0.0227 & 0.0645 \\ -0.0047 & 0.0169 & -0.0807 & -0.4337 \\ 0.0028 & -0.0365 & 0.1138 & -1.4730 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_c = \begin{bmatrix} 0.1906 & 0.0540 \\ -1.0006 & -0.0670 \\ 0.8374 & 0.6859 \\ -1.5291 & 2.3111 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_c = \begin{bmatrix} 0.1971 & 0.9962 & -1.0745 & -2.5113 \\ 0.0199 & 0.1151 & -0.1311 & -1.1719 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian diperoleh gramian keterkendalian dan gramian keteramatan dari kontrol setimbang.

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 0.0495 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0423 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0073 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0026 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0.0495 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0423 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0073 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0026 \end{bmatrix}$$

Karena $\tilde{W} = \tilde{M}$, maka kontrol $(\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, \tilde{C}_c, D_c)$ telah memenuhi syarat setimbang.

Dengan didapatkannya kontrol setimbang, maka selanjutnya dilakukan pemotongan variabel agar kontrol tereduksi. Pemotongan setimbang dapat dilihat dari loncatan nilai singular hankel yang paling besar. Hasil perhitungan nilai singular hankel pada kontrol ditunjukkan pada Tabel 4.5 berikut:

Tabel 4.5 Nilai Singular Hankel Kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p)

i	σ_i
1	0.0494
2	0.04232
3	0.00725
4	0.00260

Berikut Kontrol tereduksi yang terbagi berdasarkan besar orde kontrol tereduksi.

a. Reduksi Kontrol Orde 3

Diperoleh kontrol $(\tilde{A}_{c3}, \tilde{B}_{c3}, \tilde{C}_{c3}, D_c)$ tereduksi orde 3 yang ditampilkan pada matriks berikut:

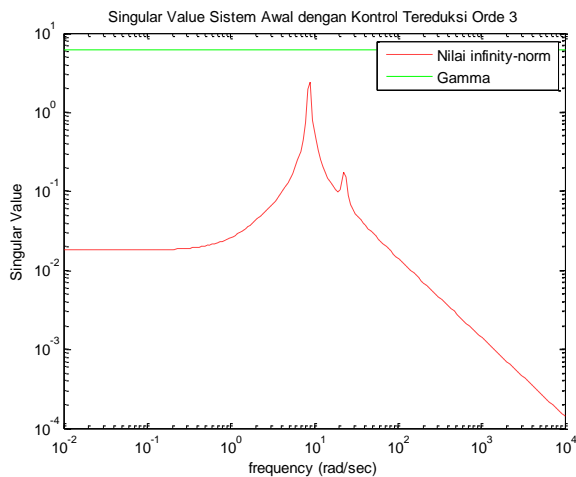
$$\tilde{A}_{c3} = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.0004 & -0.0275 & 0.0050 \\ 0.0274 & -0.0119 & 0.0227 \\ -0.0047 & 0.0169 & -0.0807 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c3} = \begin{bmatrix} 0.1906 & 0.0540 \\ -1.0006 & -0.0670 \\ 0.8374 & 0.6859 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c3} = \begin{bmatrix} 0.1971 & 0.9962 & -1.0745 \\ 0.0199 & 0.1151 & -0.1311 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 3 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 3 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.10). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 3 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.10 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 3

b. Reduksi Kontrol Orde 2

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c2}, \tilde{B}_{c2}, \tilde{C}_{c2}, D_c$) tereduksi orde 2 yang ditampilkan pada matriks berikut:

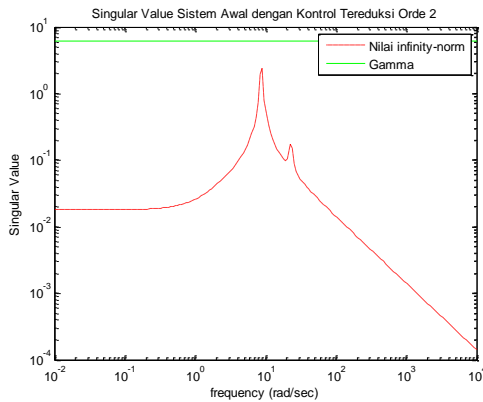
$$\tilde{A}_{c2} = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.0004 & -0.0275 \\ 0.0274 & -0.0119 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c2} = \begin{bmatrix} 0.1906 & 0.0540 \\ -1.0006 & -0.0670 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c2} = \begin{bmatrix} 0.1971 & 0.9962 \\ 0.0199 & 0.1151 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 2 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 2 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.11). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 2 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.11 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 2

c. Reduksi Kontrol Orde 1

Diperoleh kontrol (\tilde{A}_{c1} , \tilde{B}_{c1} , \tilde{C}_{c1} , D_c) tereduksi orde 1 yang ditampilkan pada matriks berikut:

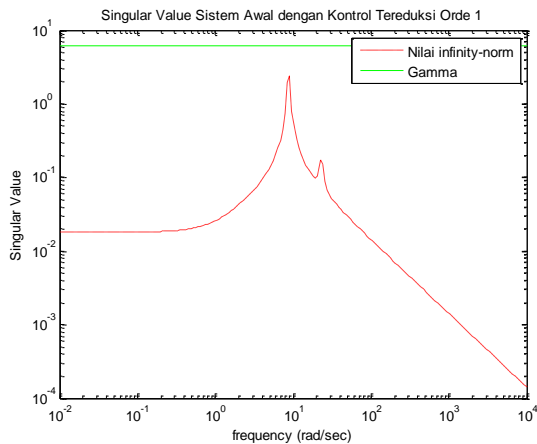
$$\tilde{A}_{c1} = 10^3 \times [-0.0004]$$

$$\tilde{B}_{c1} = [0.1906 \quad 0.0540]$$

$$\tilde{C}_{c1} = \begin{bmatrix} 0.1971 \\ 0.0199 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 1 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 1 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.12). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 1 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.12 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 1

Dari simulasi yang telah dilakukan diperoleh *infinity-norm* dari sistem dengan kontrol dan sistem kontrol tereduksi berdasarkan tabel (4.6) sebagai berikut:

Tabel 4.6 Nilai *infinity-norm* dari sistem dengan kontrol dan sistem dengan kontrol tereduksi

Jenis Sistem	<i>infinity-norm</i>
Sistem dengan Kontrol	6.0448521476
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 3	6.044908612
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 2	6.044904955
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 1	6.044872698

4.4.3 Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 3 lantai

Tabel 4.7 Gedung bertingkat dengan 3 lantai

Lantai ke-	Massa (M)	Lantai yang terhubung	Kekakuan (K)
3	6000 Kg	2 – 3	$1,8 \times 10^6 N/m$
2	6000 Kg	1 – 2	$1,6 \times 10^6 N/m$
1	6000 Kg	0 – 1	$1,6 \times 10^6 N/m$

Satuan massa dalam Kg , koefisien peredam dalam Ns/m , dan koefisien kekakuan pegas dalam N/m . Parameter pada Tabel (4.7) akan disubstitusikan ke dalam persamaan (4.1 - 4.3), diperoleh matriks M , D , dan K sebagai berikut :

$$M = \begin{bmatrix} 6000 & 0 & 0 \\ 0 & 6000 & 0 \\ 0 & 0 & 6000 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 12400 & -5160 & 0 \\ -5160 & 9750 & -4590 \\ 0 & -4590 & 4590 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3400000 & -1600000 & 0 \\ -1600000 & 3200000 & -1600000 \\ 0 & -1600000 & 1600000 \end{bmatrix}$$

dengan

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = -M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pada lantai 3 ini mempunyai $n = 3$, $j = 1$ dan $s = 3$, persamaan (4.8) dapat dituliskan sebagai A , B_1 , dan B_2 seperti dibawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ M^{-1}L \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ M^{-1}E_0 \end{bmatrix} u$$

Perpindahan dan kecepatan yang terjadi pada 3 lantai sebagai berikut :

$$x(t) = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad (x_2 - x_1) \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (x_3 - x_2) \quad (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)]^T$$

Output yang dihasilkan :

$$y(t) = [\dot{x}_1 \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)]^T$$

Didefinisikan C_2 , C_1 , dan D_{12} sebagai berikut :

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} I_{6 \times 6} \\ 0_{3 \times 6} \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan, dapat diketahui bahwa matriks D_{11} , D_{21} , dan D_{22} adalah matriks nol dengan ukuran yang bersesuaian.

Setelah dilakukan substitusi parameter diperoleh matriks A , B_1 , dan B_2 sebagai berikut :

$$A = 10^2 x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ -5.6667 & -2.6667 & 0 & -0.0207 & 0.0086 & 0 \\ 2.6667 & 5.3333 & 2.6667 & 0.0086 & -0.0163 & 0.0077 \\ 0 & 2.6667 & -2.6667 & 0 & 0.0077 & -0.0077 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = 10^{-3} x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1667 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0.1667 & -0.1667 \\ 0 & 0 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

Tabel dibawah ini merupakan nilai eigen dari sistem awal yang telah dihitung dan diperoleh sebagai berikut:

Tabel 4.8 Nilai eigen sistem awal

Nilai Eigen
$-1.4105 + 29.597i$
$-1.4105 - 29.5967i$
$-0.7171 + 20.7839i$
$-0.7171 - 20.7839i$
$-0.1008 + 7.4949i$
$-0.1008 - 7.4949i$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, sistem awal dapat dikatakan stabil asimtotik, sistem awal tersebut juga bersifat terkendali dan teramat karena mempunyai rank *full* pada matriks keterkendalian dan keteramatan, maka dapat disimpulkan sistem awal pada simulasi ini bersifat stabil asimtotik, terkendali, dan teramat. Tujuan utama untuk memberikan kontrol pada bangunan bertingkat adalah mempercepat kestabilan apabila terjadi gangguan seperti gempa bumi dan angin kencang.

Kontrol H_∞ diperoleh dengan bantuan *toolbox* **hinflmi** pada MATLAB, sehingga diperoleh kontrol H_∞ sebagai berikut:

$$A_p = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.5188 & 0.2635 & 0.2032 & -0.0188 & -0.1257 & 0.0479 \\ 0.6359 & -0.9024 & -0.0799 & -0.0323 & -0.0089 & 0.0036 \\ 2.3251 & 0.8749 & -1.5234 & 0.0280 & 0.0746 & -0.0451 \\ -3.5499 & 8.6182 & -0.6034 & -0.0030 & -0.0089 & 0.0055 \\ 1.6159 & -3.1486 & 0.0567 & -0.0048 & -0.0141 & 0.0098 \\ -0.2234 & 0.4627 & -0.0225 & 0.0296 & 0.0780 & -0.0552 \end{bmatrix}$$

$$B_p = 10^5 \times \begin{bmatrix} -1.3694 & 0.6736 & 0.3411 \\ -0.1041 & -1.1472 & 0.2285 \\ 1.5070 & -1.8782 & -3.8612 \\ -0.1524 & 8.3946 & -58612 \\ -0.2815 & -3.3802 & 1.5661 \\ 1.5786 & 0.4828 & -0.2445 \end{bmatrix}$$

$$C_p = 10^6 \times \begin{bmatrix} -0.0274 & 0.0591 & 0.1143 & 0.0018 & -0.0036 & 0.0003 \\ 0.0586 & -0.0287 & 0.10462 & 0.0027 & 0.0028 & -0.0005 \\ -0.0446 & -0.0788 & 0.0584 & -0.0025 & 0.0012 & -0.0004 \end{bmatrix}$$

$$D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan $K_p = \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & D_p \end{array} \right]$, diperoleh sistem dengan kontrol H_∞ yang memiliki nilai eigen seperti pada Tabel (4.9) sebagai berikut:

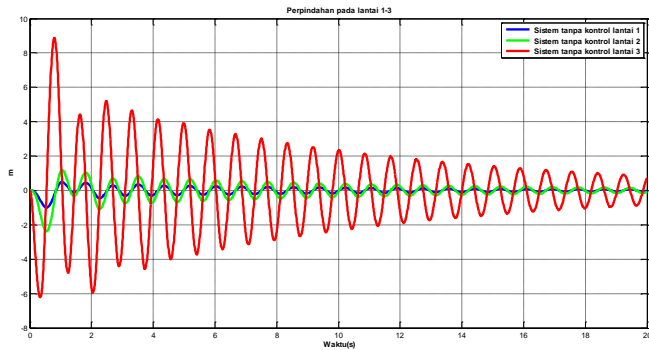
Tabel 4.9 Nilai eigen sistem dengan kontrol

Nilai Eigen
$10^3 \times (-1.7398 + 10^{-16}i)$
$10^3 \times (-0.6631 + 10^{-16}i)$
$10^3 \times (-0.5140 + 10^{-16}i)$
$10^3 \times (-0.0697 + 10^{-16}i)$
$10^3 \times (-0.014 + 0.029i)$
$10^3 \times (-0.014 - 0.029i)$
$10^3 \times (-0.0007 + 0.0208)$
$10^3 \times (-0.0007 - 0.0208)$
$10^3 \times (-0.0001 + 0.0075)$
$10^3 \times (-0.0001 - 0.0075)$
$10^3 \times (-0.0151 + 0.0142i)$
$10^3 \times (-0.0151 - 0.0142i)$

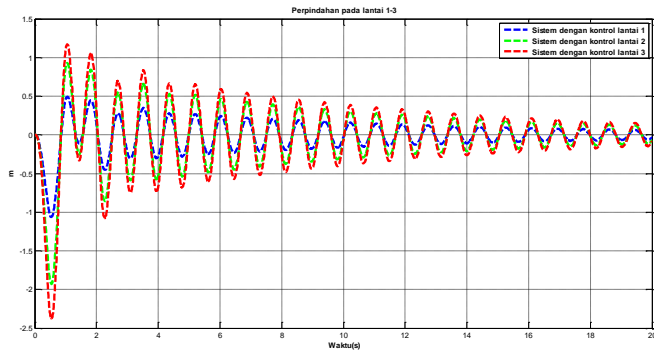
Berdasarkan Tabel (4.9), maka dapat disimpulkan bahwa sistem dengan kontrol H_∞ merupakan sistem yang stabil asimtotik dengan nilai optimal $\gamma = 8.2313$. Dalam simulasi ini diberikan gangguan berupa fungsi sinusoidal sebagai berikut :

$$\omega = 10^2 e^{-t} \sin(\pi t)$$

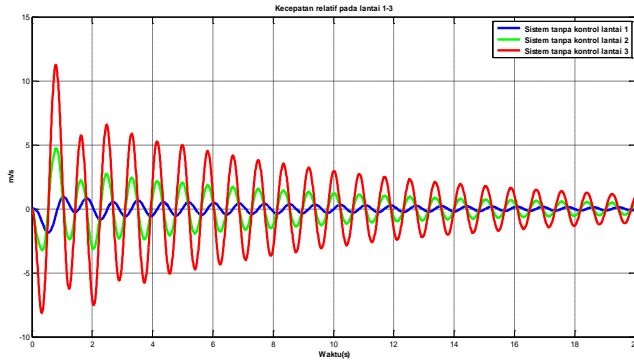
Hasil simulasi pada gambar (4.13) - (4.16) menghasilkan performansi redaman dan kestabilan sistem tanpa kontrol dan sistem dengan kontrol H_∞ (sistem lup tertutup).



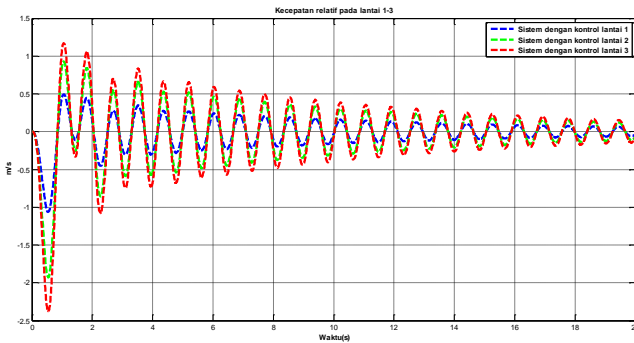
Gambar 4.13 Perpindahan pada lantai 1-3 tanpa kontrol



Gambar 4.14 Perpindahan pada lantai 1-3 dengan kontrol



Gambar 4.15 Kecepatan relatif pada lantai 1-3 tanpa kontrol



Gambar 4.16 Kecepatan relatif pada lantai 1-3 dengan kontrol

Berdasarkan grafik yang dihasilkan, terlihat bahwa sistem dengan kontrol H_∞ memiliki *peak* yang lebih rendah dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol. Sehingga dapat dikatakan bahwa kontrol H_∞ cukup baik dalam mengendalikan lantai 1, 2, dan 3. Hasil tersebut juga menjawab tujuan dari kontrol H_∞ pada gedung bertingkat yaitu untuk mempercepat kestabilan sistem apabila terjadi gangguan pada sistem.

4.4.4 Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 3 lantai

Reduksi kontrol H_∞ dilakukan untuk memperoleh kontrol H_∞ berorde rendah, berdasarkan pada tabel (4.10) diperoleh sistem kontrol bersifat stabil, sistem kontrol juga bersifat teramat dan terkendali karena mempunyai rank *full* pada matriks keterkendalian dan keteramatan.

Tabel 4.10 Nilai eigen sistem kontrol

Nilai Eigen
$10^3 \times (-1.7398 + 10^{-16}i)$
$10^3 \times (-0.6631 + 10^{-16}i)$
$10^3 \times (-0.5140 + 10^{-16}i)$
$10^3 \times (-0.0151 + 0.0142i)$
$10^3 \times (-0.0151 - 0.0142i)$

Dengan terpenuhinya kondisi tersebut, maka bisa diperoleh kontrol setimbang yang dijabarkan sebagai berikut:

$$\tilde{A}_c = 10^3 x \begin{bmatrix} -0.0026 & -0.0405 & -0.0167 & 0.0309 & 0.0039 & 0.0043 \\ 0.0402 & -0.0404 & 0.0381 & 0.1743 & 0.0192 & 0.0224 \\ 0.0158 & -0.0344 & -0.0364 & 0.2257 & 0.0246 & 0.0285 \\ 0.0197 & -0.0952 & -0.0906 & -1.7376 & -0.3563 & -0.4813 \\ 0.0039 & -0.0200 & -0.0229 & -0.2729 & -0.7353 & -0.1170 \\ 0.0002 & -0.0001 & 0.0008 & 0.0112 & 0.6444 & -0.4646 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_c = \begin{bmatrix} -0.1307 & 0.0058 & 0.0081 \\ 0.4000 & 0.0082 & 0.0664 \\ 0.2648 & 0.0271 & 0.1095 \\ 0.5032 & -0.2954 & -0.6702 \\ 0.0932 & -0.2888 & 0.0697 \\ 0.0069 & 0.1259 & -0.0617 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_c = \begin{bmatrix} -0.0893 & -0.2666 & -0.1883 & 0.6424 & 0.2813 & 0.0419 \\ -0.0958 & -0.3049 & -0.2172 & 0.5079 & -0.1176 & 0.1078 \\ -0.0051 & -0.0207 & -0.0147 & 0.3449 & -0.0637 & 0.0795 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian diperoleh gramian keterkendalian dan gramian keteramatan dari kontrol setimbang.

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 0.0033 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0011 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00006 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00002 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0.0033 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0011 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00006 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00002 \end{bmatrix}$$

Karena $\tilde{W} = \tilde{M}$, maka kontrol $(\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, \tilde{C}_c, D_c)$ telah memenuhi syarat setimbang.

Dengan didapatkannya kontrol setimbang, maka selanjutnya dilakukan pemotongan variabel agar kontrol tereduksi. Pemotongan setimbang dapat dilihat dari loncatan nilai singular hankel yang paling besar. Hasil perhitungan nilai singular hankel pada kontrol ditunjukkan pada Tabel (4.11) sebagai berikut:

Tabel 4.11 Nilai Singular Hankel Kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p)

i	σ_i
1	0.0033
2	0.0020
3	0.0011
4	0.0002
5	0.00006
6	0.00002

Berikut Kontrol tereduksi yang terbagi berdasarkan besar orde kontrol tereduksi.

a. Reduksi Kontrol Orde 5

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c5}, \tilde{B}_{c5}, \tilde{C}_{c5}, D_c$) tereduksi orde 5 yang ditampilkan pada matriks berikut:

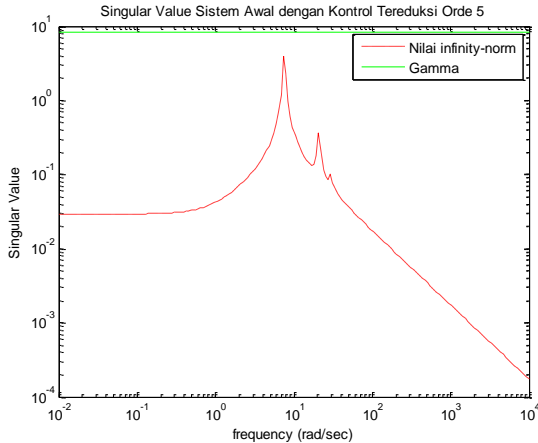
$$\tilde{A}_{c5} = 10^3 x \begin{bmatrix} -0.0026 & -0.0405 & -0.0167 & 0.0309 & 0.0039 \\ 0.0402 & -0.0404 & 0.0381 & 0.1743 & 0.0192 \\ 0.0158 & -0.0344 & -0.0364 & 0.2257 & 0.0246 \\ 0.0197 & -0.0952 & -0.0906 & -1.7376 & -0.3563 \\ 0.0039 & -0.0200 & -0.0229 & -0.2729 & -0.7353 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c5} = \begin{bmatrix} -0.1307 & 0.0058 & 0.0081 \\ 0.4000 & 0.0082 & 0.0664 \\ 0.2648 & 0.0271 & 0.1095 \\ 0.5032 & -0.2954 & -0.6702 \\ 0.0932 & -0.2888 & 0.0697 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c5} = \begin{bmatrix} -0.0893 & -0.2666 & -0.1883 & 0.6424 & 0.2813 \\ -0.0958 & -0.3049 & -0.2172 & 0.5079 & -0.1176 \\ -0.0051 & -0.0207 & -0.0147 & 0.3449 & -0.0637 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 5 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 5 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.17). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 5 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.17 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 5

b. Reduksi Kontrol Orde 4

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c4}, \tilde{B}_{c4}, \tilde{C}_{c4}, D_c$) tereduksi orde 4 yang ditampilkan pada matriks berikut:

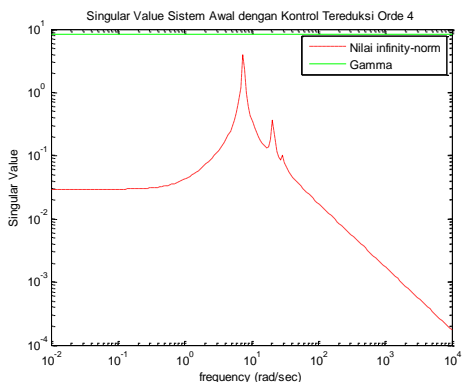
$$\tilde{A}_{c4} = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.0026 & -0.0405 & -0.0167 & 0.0309 \\ 0.0402 & -0.0404 & 0.0381 & 0.1743 \\ 0.0158 & -0.0344 & -0.0364 & 0.2257 \\ 0.0197 & -0.0952 & -0.0906 & -1.7376 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c4} = \begin{bmatrix} -0.1307 & 0.0058 & 0.0081 \\ 0.4000 & 0.0082 & 0.0664 \\ 0.2648 & 0.0271 & 0.1095 \\ 0.05032 & -0.2954 & -0.6702 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c4} = \begin{bmatrix} -0.0893 & -0.2666 & -0.1883 & 0.6424 \\ -0.0958 & -0.3049 & -0.2172 & 0.5079 \\ -0.0051 & -0.0207 & -0.0147 & 0.3449 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 4 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 4 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.18). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 4 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.18 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 4

c. Reduksi Kontrol Orde 3

Diperoleh kontrol (\tilde{A}_{c3} , \tilde{B}_{c3} , \tilde{C}_{c3} , D_c) tereduksi orde 3 yang ditampilkan pada matriks berikut:

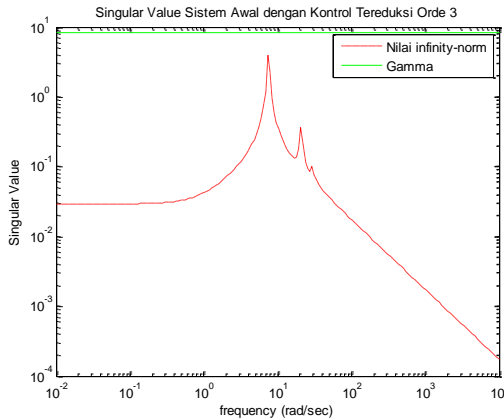
$$\tilde{A}_{c3} = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.0026 & -0.0405 & -0.0167 \\ 0.0402 & -0.0404 & 0.0381 \\ 0.0158 & -0.0344 & -0.0364 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c3} = \begin{bmatrix} -0.1307 & 0.0058 & 0.0081 \\ 0.4000 & 0.0082 & 0.0664 \\ 0.2648 & 0.0271 & 0.1095 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c3} = \begin{bmatrix} -0.0893 & -0.2666 & -0.1883 \\ -0.0958 & -0.3049 & -0.2172 \\ -0.0051 & -0.0207 & -0.0147 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 3 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 3 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.19). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 3 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.19 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 3

d. Reduksi Kontrol Orde 2

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c2}, \tilde{B}_{c2}, \tilde{C}_{c2}, D_c$) tereduksi orde 2 yang ditampilkan pada matriks berikut:

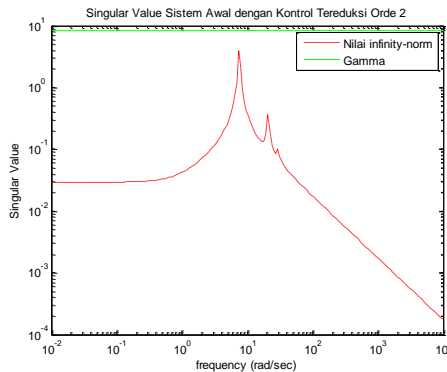
$$\tilde{A}_{c2} = 10^3 x \begin{bmatrix} -0.0026 & -0.0405 \\ 0.0402 & -0.0404 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c2} = \begin{bmatrix} -0.1307 & 0.0058 & 0.0081 \\ 0.4000 & 0.0082 & 0.0664 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c2} = \begin{bmatrix} -0.0893 & -0.2666 \\ -0.0958 & -0.3049 \\ -0.0051 & -0.0207 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 2 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 2 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.20). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 2 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.20 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 2

e. Reduksi Kontrol Orde 1

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c1}, \tilde{B}_{c1}, \tilde{C}_{c1}, D_c$) tereduksi orde 1 yang ditampilkan pada matriks berikut:

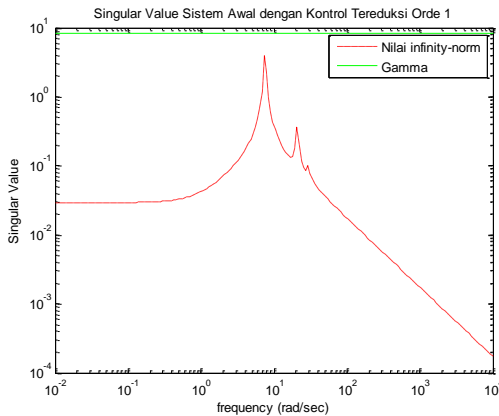
$$\tilde{A}_{c1} = 10^3 x [-0.0026]$$

$$\tilde{B}_{c1} = [-0.1307 \quad 0.0058 \quad 0.0081]$$

$$\tilde{C}_{c1} = \begin{bmatrix} -0.0893 \\ -0.0958 \\ -0.0051 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 1 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 1 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.21). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 1 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.21 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 1

Dari simulasi yang telah dilakukan diperoleh *infinity-norm* dari sistem dengan kontrol dan sistem kontrol tereduksi berdasarkan tabel (4.12) sebagai berikut:

Tabel 4.12 Nilai *infinity-norm* dari sistem dengan kontrol dan sistem dengan kontrol tereduksi

Jenis Sistem	<i>infinity-norm</i>
Sistem dengan Kontrol	8.2313136086
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 5	8.231313609
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 4	8.2313136106
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 3	8.2313141327
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 2	8.2313143385
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 1	8.2313137806

4.4.5 Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 5 lantai

Tabel 4.13 Bangunan Kajima Shizuoka 5 lantai

Lantai ke-	Massa (M)	Lantai yang terhubung	Kekakuan (K)
5	$266.1 \times 10^3 \text{ Kg}$	4 – 5	$84 \times 10^6 \text{ N/m}$
4	$204.8 \times 10^3 \text{ Kg}$	3 – 4	$89 \times 10^6 \text{ N/m}$
3	$207.0 \times 10^3 \text{ Kg}$	2 – 3	$99 \times 10^6 \text{ N/m}$
2	$209.2 \times 10^3 \text{ Kg}$	1 – 2	$113 \times 10^6 \text{ N/m}$
1	$215.2 \times 10^3 \text{ Kg}$	0 – 1	$147 \times 10^6 \text{ N/m}$

Satuan massa dalam Kg , koefisien peredam dalam Ns/m , dan koefisien kekakuan pegas dalam N/m . Parameter pada Tabel (4.13) akan disubstitusikan ke dalam persamaan (4.1 - 4.3), diperoleh matriks M , D , dan K sebagai berikut :

$$M = 10^3 \times \begin{bmatrix} 215.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 209.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 207.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 204.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 266.1 \end{bmatrix}$$

$$D = 10^3 \times \begin{bmatrix} 650.4 & -231.1 & 0 & 0 & 0 \\ -231.1 & 433.6 & -202.5 & 0 & 0 \\ 0 & -202.5 & 384.5 & -182.0 & 0 \\ 0 & 0 & -182.0 & 353.8 & -171.8 \\ 0 & 0 & 0 & -171.8 & 171.8 \end{bmatrix}$$

$$K = 10^6 \times \begin{bmatrix} 260 & -113 & 0 & 0 & 0 \\ -113 & 212 & -99 & 0 & 0 \\ 0 & -99 & 188 & -89 & 0 \\ 0 & 0 & -89 & 173 & -84 \\ 0 & 0 & 0 & -84 & 84 \end{bmatrix}$$

dengan

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = -M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pada rantai 5 ini mempunyai $n = 5$, $j = 1$ dan $s = 5$, persamaan (4.8) dapat dituliskan sebagai A , B_1 , dan B_2 seperti dibawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & I_{5 \times 5} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} \\ M^{-1}E_0 \end{bmatrix}$$

Perpindahan dan kecepatan yang terjadi pada 5 lantai sebagai berikut :

$$x(t) = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad (x_2 - x_1) \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad \cdots \quad (x_5 - x_4) \quad (\dot{x}_5 - \dot{x}_4)]^T$$

Output yang dihasilkan :

$$y(t) = [\dot{x}_1 \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \quad (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) \quad (\dot{x}_5 - \dot{x}_4)]^T$$

Didefinisikan C_2 , C_1 , dan D_{12} sebagai berikut :

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} I_{10 \times 10} \\ 0_{5 \times 10} \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0_{10 \times 5} \\ 0_{5 \times 5} \end{bmatrix}$$

Diketahui bahwa matriks D_{11} , D_{21} , dan D_{22} adalah matriks nol dengan ukuran yang bersesuaian.

Setelah dilakukan substitusi paramater diperoleh matriks A , B_1 , dan B_2 sebagai berikut :

$$A = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 \\ -1.2082 & 0.5251 & 0 & 0 & 0 & -0.0030 & 0.0011 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5402 & -1.0134 & 0.4732 & 0 & 0 & 0.0011 & -0.0021 & 0.0010 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4783 & -0.9082 & 0.4300 & 0 & 0 & 0.0010 & -0.0021 & 0.0009 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4346 & -0.8447 & 0.4102 & 0 & 0 & 0.0009 & -0.0017 & 0.0008 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3157 & -0.3157 & 0 & 0 & 0 & 0.0006 & -0.0006 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4647 & -0.4647 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4780 & -0.4780 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4831 & -0.4831 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4883 & -0.4883 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3758 \end{bmatrix}$$

Tabel dibawah ini merupakan nilai eigen dari sistem awal yang telah dihitung dan diperoleh sebagai berikut:

Tabel 4.14 Nilai eigen sistem awal

Nilai Eigen
$-1.9427 + 42.51i$
$-1.9427 - 42.51i$
$-1.4337 + 36.40i$
$-1.4337 - 36.40i$
$-0.8857 + 28.22i$
$-0.8857 - 28.22i$
$-0.3556 + 17.74i$
$-0.3556 - 17.74i$
$-0.0451 + 6.33i$
$-0.0451 - 6.33i$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, sistem awal dapat dikatakan stabil asimtotik, sistem awal tersebut juga bersifat terkendali dan teramat karena mempunyai rank *full* pada matriks keterkendalian dan keteramatan, maka dapat disimpulkan sistem awal pada simulasi ini bersifat stabil asimtotik, terkendali, dan teramat. Tujuan utama untuk memberikan kontrol pada bangunan bertingkat adalah mempercepat kestabilan apabila terjadi gangguan seperti gempa bumi dan angin kencang.

Kontrol H_∞ diperoleh dengan bantuan *toolbox* **hinfmi** pada MATLAB, sehingga diperoleh kontrol H_∞ sebagai berikut:

$$A_p = 10^7 \times \begin{bmatrix} -0.0031 & -0.0033 & -0.0023 & -0.0007 & 0.0021 & 0.0332 & 0.0080 & -0.0035 & 0.0255 & 0.0059 \\ -0.0019 & -0.0031 & -0.0015 & -0.0009 & 0.0017 & 0.0390 & 0.0093 & -0.045 & 0.0301 & 0.0070 \\ -0.0012 & -0.0012 & -0.0013 & -0.0006 & 0.0009 & 0.0188 & 0.0045 & -0.0021 & 0.0145 & 0.0034 \\ -0.0061 & -0.0026 & -0.0018 & -0.0012 & 0.0016 & 0.0352 & 0.0085 & -0.0039 & 0.0271 & 0.0063 \\ 0.0061 & 0.0033 & 0.0016 & -0.0012 & -0.0028 & 0.1355 & 0.0310 & -0.0188 & 0.1062 & 0.0254 \\ 0.1578 & 0.1760 & 0.1013 & 0.0406 & -0.1130 & -0.0806 & -0.0390 & -0.0410 & -0.0363 & 0.0024 \\ 0.0841 & 0.0928 & 0.0550 & 0.0225 & -0.0604 & -0.0278 & -0.0173 & -0.0240 & -0.0074 & 0.0042 \\ 0.0961 & 0.1089 & 0.0609 & 0.0251 & -0.0695 & -0.0063 & -0.0140 & -0.0310 & 0.0115 & 0.0095 \\ 0.0746 & 0.0857 & 0.0485 & 0.0209 & -0.0546 & -0.0503 & -0.0215 & -0.0184 & -0.0264 & -0.0009 \\ -0.0070 & -0.0069 & -0.0034 & -0.0009 & 0.0046 & -0.0595 & -0.0129 & 0.0101 & -0.0476 & -0.0118 \end{bmatrix}$$

$$B_p = 10^7 \times \begin{bmatrix} -0.7783 & 0.0328 & 0.0031 & 0.0044 & 0.0074 \\ -0.9159 & 0.0320 & 0.0017 & 0.0035 & 0.0063 \\ -0.4423 & 0.0155 & 0.0014 & 0.0013 & 0.0035 \\ -0.8252 & 0.0315 & 0.0017 & 0.0027 & 0.0061 \\ -3.2083 & 0.0376 & -0.0025 & -0.0089 & -0.0065 \\ 1.4793 & -1.1586 & -0.1114 & -0.2531 & -0.3793 \\ 0.4275 & -0.6149 & -0.0598 & -0.1337 & -0.2031 \\ -0.1133 & -0.6959 & -0.0659 & -0.1564 & -0.2325 \\ 0.9826 & -0.5657 & -0.0519 & -0.1215 & -0.1841 \\ -1.4238 & 0.0241 & 0.0037 & 0.0114 & 0.0141 \end{bmatrix}$$

$$C_p = 10^4 \times \begin{bmatrix} -0.6013 & 0.5365 & -0.9592 & 1.3483 & 1.8003 & 0.0097 & -0.0113 & 0.0267 & 0.1078 & 0.0005 \\ 1.2152 & -0.5576 & 0.1921 & 0.9922 & 2.2134 & -0.0407 & -0.0732 & 0.0576 & -0.0449 & -0.0046 \\ -0.9184 & -0.7316 & 1.4268 & -0.3200 & 2.2032 & -0.0155 & 0.0484 & -0.0832 & -0.0326 & -0.0112 \\ 0.3218 & 1.5144 & 0.4604 & -1.6957 & 1.9195 & 0.0453 & 0.0107 & 0.0399 & 0.0443 & 0.0037 \\ 0.0052 & -0.9163 & -1.6356 & -2.0812 & 1.3068 & -0.0005 & -0.0429 & -0.0240 & -0.0101 & -0.0142 \end{bmatrix}$$

$$D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan $K_p = \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & D_p \end{array} \right]$, diperoleh sistem dengan kontrol H_∞ yang memiliki nilai eigen seperti pada Tabel (4.15) sebagai berikut:

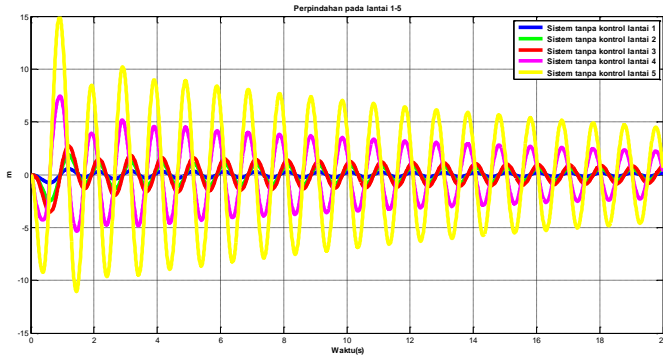
Tabel 4.15 Nilai eigen sistem dengan kontrol

Nilai Eigen
$10^6 \times (-1.0979 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.6716 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.0166 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.0067 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.0033 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.0003 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.00012 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.000002 + 0.00004i)$
$10^6 \times (-0.000002 - 0.00004i)$
$10^6 \times (-0.000001 + 0.00003i)$
$10^6 \times (-0.000001 - 0.00003i)$
$10^6 \times (-0.0000009 + 0.00002i)$
$10^6 \times (-0.0000009 - 0.00002i)$
$10^6 \times (-0.00001 + 0.00002i)$
$10^6 \times (-0.00001 - 0.00002i)$
$10^6 \times (-0.0000004 + 0.00001i)$
$10^6 \times (-0.0000004 - 0.00001i)$
$10^6 \times (-0.0000001)$
$10^6 \times (-0.0000004 - 0.00001i)$
$10^6 \times (-0.000001 + 10^{-16}i)$

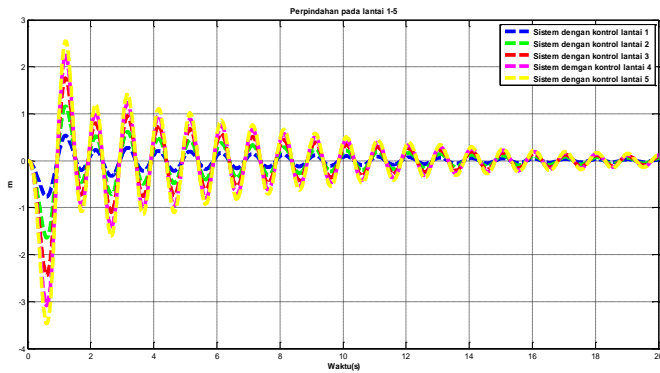
Berdasarkan Tabel (4.4.5.3), maka dapat disimpulkan bahwa sistem dengan kontrol H_∞ merupakan sistem yang stabil asimtotik dengan nilai optimal $\gamma = 12.853$. Dalam simulasi ini diberikan gangguan berupa fungsi sinusoidal sebagai berikut :

$$\omega = 10^2 e^{-t} \sin(\pi t)$$

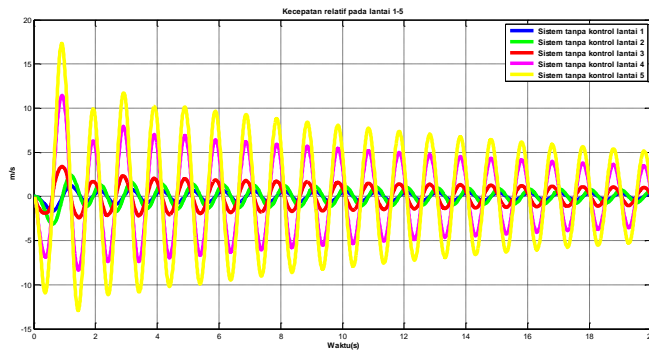
Hasil simulasi pada gambar (4.22) - (4.25) menghasilkan performansi redaman dan kestabilan sistem tanpa kontrol dan sistem dengan kontrol H_∞ (sistem lup tertutup) sebagai berikut :



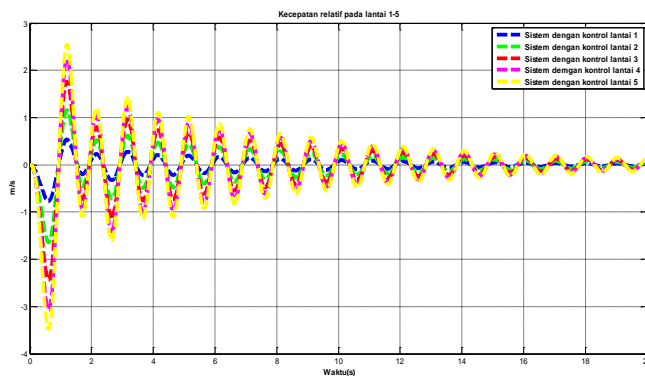
Gambar 4.22 Perpindahan pada lantai 1-5 tanpa kontrol



Gambar 4.23 Perpindahan pada lantai 1-5 dengan kontrol



Gambar 4.24 Kecepatan relatif pada lantai 1-5 tanpa kontrol



Gambar 4.25 Kecepatan relatif pada lantai 1-5 dengan kontrol

Berdasarkan grafik yang dihasilkan, terlihat bahwa sistem dengan kontrol H_∞ memiliki *peak* yang lebih rendah dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol. Sehingga dapat dikatakan bahwa kontrol H_∞ cukup baik dalam mengendalikan lantai 1, 2, 3, 4, dan 5. Hasil tersebut juga menjawab tujuan dari kontrol H_∞ pada gedung bertingkat yaitu untuk mempercepat kestabilan sistem apabila terjadi gangguan pada sistem.

4.4.6 Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 5 lantai

Reduksi kontrol H_∞ dilakukan untuk memperoleh kontrol H_∞ berorde rendah, berdasarkan tabel (4.16) terlihat bahwa sistem kontrol bersifat stabil, tetapi setelah diperiksa sifat terkendali, dan teramati dari sistem kontrol tersebut, sistem kontrol tersebut tidak dapat direduksi karena tidak memiliki rank yang *full* pada matriks terkendali dan teramatinya.

Tabel 4.16 Nilai eigen sistem kontrol

Nilai Eigen
$10^6 \times (-1.0979 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.6736 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.0166 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.0067 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.0035 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.0003 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.00012 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.000002 + 10^{-16}i)$
$10^6 \times (-0.00002 + 2x10^{-5}i)$
$10^6 \times (-0.00002 + 2x10^{-5}i)$

4.4.7 Simulasi desain kontrol H_∞ dengan data 6 lantai

Tabel 4.17 Gedung bertingkat dengan 6 lantai

Lantai ke-	Massa (M)	Lantai yang terhubung	Kekakuan (K)
6	$289.5 \times 10^3 \text{ Kg}$	5 – 6	$81 \times 10^4 \text{ N/m}$
5	$266.1 \times 10^3 \text{ Kg}$	4 – 5	$84 \times 10^4 \text{ N/m}$
4	$204.8 \times 10^3 \text{ Kg}$	3 – 4	$89 \times 10^4 \text{ N/m}$
3	$207.0 \times 10^3 \text{ Kg}$	2 – 3	$99 \times 10^4 \text{ N/m}$
2	$209.2 \times 10^3 \text{ Kg}$	1 – 2	$113 \times 10^4 \text{ N/m}$
1	$215.2 \times 10^3 \text{ Kg}$	0 – 1	$147 \times 10^4 \text{ N/m}$

Satuan massa dalam Kg , koefisien peredam dalam Ns/m , dan koefisien kekakuan pegas dalam N/m . Parameter pada Tabel (4.17) akan disubstitusikan ke dalam persamaan (4.1 - 4.3), diperoleh matriks M , D , dan K sebagai berikut :

$$M = 10^3 \times \begin{bmatrix} 215.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 209.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 207.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 204.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 266.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 289.5 \end{bmatrix}$$

$$D = 10^3 \times \begin{bmatrix} 650.4 & -231.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -231.1 & 433.6 & -202.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -202.5 & 384.5 & -182.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -182.0 & 353.8 & -171.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -171.8 & 340.8 & 169 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 169 & 169 \end{bmatrix}$$

$$K = 10^4 \times \begin{bmatrix} 260 & -113 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -113 & 212 & -99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -99 & 188 & -89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -89 & 173 & -84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -84 & 165 & 81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 81 \end{bmatrix}$$

dengan

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = -M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pada rantai 6 ini mempunyai $n = 6$, $j = 1$ dan $s = 6$, persamaan (4.8) dapat dituliskan sebagai A , B_1 , dan B_2 seperti dibawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & I_{6 \times 6} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} \\ M^{-1}E_0 \end{bmatrix}$$

Perpindahan dan kecepatan yang terjadi pada 6 lantai sebagai berikut :

$$x(t) = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad (x_2 - x_1) \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad \cdots \quad (x_6 - x_5) \quad (\dot{x}_6 - \dot{x}_5)]^T$$

Output yang dihasilkan :

$$y(t) = [x_1 \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \quad (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) \quad (\dot{x}_5 - \dot{x}_4) \quad (\dot{x}_6 - \dot{x}_5)]^T$$

Didefinisikan C_2 , C_1 , dan D_{12} sebagai berikut :

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} I_{12 \times 12} \\ 0_{6 \times 12} \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0_{12 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} \end{bmatrix}$$

Diketahui bahwa matriks D_{11} , D_{21} , dan D_{22} adalah matriks nol dengan ukuran yang bersesuaian.

Setelah dilakukan substitusi paramater diperoleh matriks A , B_1 , dan B_2 sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12.082 & 5.251 & 4.732 & 0 & 0 & 0 & -3.022 & 1.074 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.402 & -10.134 & 4.732 & 0 & 0 & 0 & 1.105 & -2.073 & 0.968 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.783 & -9.082 & 4.299 & 0 & 0 & 0 & 0.978 & -1.857 & 0.879 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.346 & -8.447 & 4.102 & 0 & 0 & 0 & 0.889 & -1.727 & 0.839 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.157 & -6.201 & 3.044 & 0 & 0 & 0 & 0.646 & -1.281 & 0.635 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.798 & -2.798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.584 & -0.584 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.465 & -0.465 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.478 & -0.478 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.483 & -0.483 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.488 & -0.488 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.376 & -0.376 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.345 \end{bmatrix}$$

Tabel dibawah ini merupakan nilai eigen dari sistem awal yang telah dihitung dan diperoleh sebagai berikut:

Tabel 4.18 Nilai eigen sistem awal

Nilai Eigen
$-1.9404 + 3.765i$
$-1.9404 - 3.765i$
$-1.459 + 3.384i$
$-1.459 - 3.384i$
$-0.998 + 2.860i$
$-0.998 - 2.860i$
$-0.602 + 2.264i$
$-0.602 - 2.264i$
$-0.244 + 1.457i$
$-0.244 - 1.457i$
$-0.028 + 0.502i$
$-0.028 - 0.502i$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, sistem awal dapat dikatakan stabil asimtotik, sistem awal tersebut juga bersifat terkendali dan termati karena mempunyai rank *full* pada matriks keterkendalian dan keteramatan, maka dapat disimpulkan sistem awal pada simulasi ini bersifat stabil asimtotik , terkendali, dan termati. Tujuan utama untuk memberikan kontrol pada bangunan bertingkat adalah mempercepat kestabilan apabila terjadi gangguan seperti gempa bumi dan angin kencang.

Kontrol H_{∞} diperoleh dengan bantuan *toolbox* **hinflmi** pada MATLAB, sehingga diperoleh kontrol H_{∞} sebagai berikut:

$$A_p = \begin{bmatrix} -6.209 & 3.085 & -2.379 & 3.386 & -1.886 & -0.394 & 2.402 & -8.319 & 5.081 & 2.303 & 2.981 & -1.324 \\ 2.929 & -10.11 & 0.803 & -1.062 & -4.457 & 2.634 & 1.243 & 3.674 & -14.17 & -2.231 & 0.573 & -1.812 \\ -3.419 & 0.539 & -2.600 & 1.611 & -1.147 & 4.406 & 8.190 & -3.459 & -4.379 & 0.190 & -0.809 & 0.827 \\ 1.977 & 0.922 & 1.156 & -3.407 & 4.092 & 2.338 & 1.322 & -4.721 & -8.694 & 5.175 & 2.012 & 1.814 \\ -6.427 & -2.769 & -0.287 & 1.422 & -5.271 & -4.214 & 2.937 & -2.699 & -8.486 & 2.688 & 1.050 & 3.704 \\ 3.037 & 2.178 & -1.563 & 0.128 & 0.856 & -1.725 & 1.023 & -2.850 & 2.286 & -2.692 & -1.233 & -3.678 \\ -2.466 & -2.153 & -0.325 & 0.359 & -1.449 & 1.423 & -2.027 & 2.082 & -0.587 & 2.859 & -0.917 & 2.169 \\ 3.064 & -2.759 & 0.375 & -0.534 & -0.619 & -2.764 & 2.015 & -6.508 & 1.066 & -1.522 & -3.100 & -0.619 \\ 0.466 & -3.966 & -0.528 & 0.809 & -3.003 & 1.716 & -0.113 & 1.505 & -2.331 & -0.373 & 1.870 & -2.136 \\ -4.693 & -1.263 & 1.188 & -0.609 & 0.374 & -3.292 & 3.742 & -2.629 & -0.510 & -6.104 & 4.276 & 4.478 \\ -2.550 & -0.149 & 0.188 & 0.288 & -0.776 & -0.749 & -1.246 & -3.815 & 2.331 & 3.409 & -7.090 & 1.645 \\ 7.938 & 2.641 & -4.757 & 3.397 & -1.253 & 10.01 & -6.878 & 1.891 & 13.16 & -10.70 & -3.523 & -12.91 \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0.929 & 4.065 & 1.302 & 3.469 & -4.925 & 3.468 \\ 1.569 & 0.716 & 0.384 & -8.506 & 2.970 & 2.773 \\ 2.104 & -0.747 & -1.518 & -0.183 & -4.287 & 1.626 \\ 5.836 & 0.264 & 1.481 & 0.645 & 3.123 & -3.955 \\ 10.47 & -0.904 & -1.082 & -3.709 & -8.347 & -0.222 \\ -1.892 & -4.692 & 1.142 & 3.247 & 3.081 & 3.045 \\ 0.181 & -3.143 & -2.947 & -2.817 & -2.721 & -1.057 \\ 0.846 & -7.824 & -0.965 & -2.727 & 2.001 & 0.659 \\ 0.529 & 2.505 & 1.398 & -3.697 & 0.425 & 3.855 \\ 1.285 & -4.330 & 7.692 & -2.147 & -5.774 & -3.351 \\ -0.680 & -4.302 & -8.068 & -0.524 & -3.169 & -1.860 \\ -21.02 & -0.703 & 0.219 & 2.918 & 8.540 & 14.14 \end{bmatrix}$$

$$C_p = 10^{-9} \times \begin{bmatrix} 0.001 & 0.004 & 0.006 & 0.012 & 0.022 & -0.017 & -0.004 & 0.012 & 0.015 & 0.002 & -0.008 & -0.326 \\ 0 & 0.018 & -0.012 & -0.005 & 0.023 & -0.005 & 0.006 & -0.004 & -0.016 & 0.012 & -0.001 & -0.409 \\ 0.001 & -0.022 & -0.007 & -0.011 & 0.008 & 0.010 & 0.005 & -0.002 & 0.016 & 0.003 & -0.001 & -0.430 \\ 0.019 & 0.001 & 0.015 & -0.012 & -0.021 & 0.012 & -0.012 & 0.003 & -0.015 & -0.004 & -0.002 & -0.413 \\ -0.022 & 0.002 & 0.008 & 0.001 & -0.039 & 0.007 & 0 & -0.019 & 0 & -0.013 & -0.001 & -0.345 \\ -0.005 & -0.001 & -0.019 & 0.023 & -0.036 & 0.011 & 0.008 & 0.006 & -0.008 & -0.017 & -0.001 & -0.196 \end{bmatrix}$$

$$D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan $K_p = \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & D_p \end{array} \right]$, diperoleh sistem dengan kontrol H_∞ yang memiliki nilai eigen seperti pada Tabel (4.19) sebagai berikut:

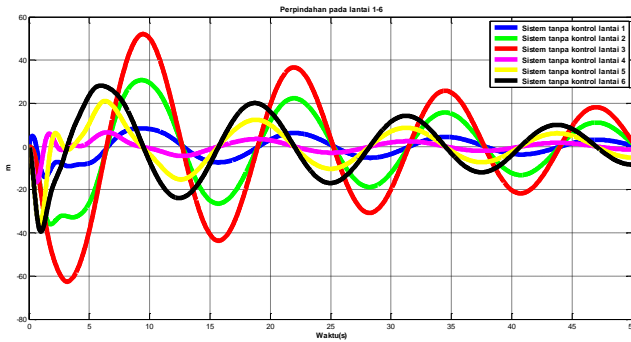
Tabel 4.19 Nilai eigen sistem dengan kontrol

Nilai eigen
$-5.679 + 10.442i$
$-5.679 - 10.442i$
$-11.667 + 3.345i$
$-11.667 + 3.345i$
$-11.725 + 10^{-16}i$
$-5.958 + 4.749i$
$-5.958 - 4.749i$
$-1.94 + 3.765$
$-1.94 - 3.765$
$-0.028 + 0.502i$
$-0.028 - 0.502i$
$-0.244 + 1.457i$
$-0.244 - 1.457i$
$-1.459 + 3.384i$
$-1.459 - 3.384i$
$-0.602 + 2.264i$
$-0.602 - 2.264i$
$-1.408 + 2.918i$
$-1.408 - 2.918i$
$-0.999 + 2.86i$
$-0.999 - 2.86i$
$-1.129 + 2.483i$
$-1.129 - 2.483i$

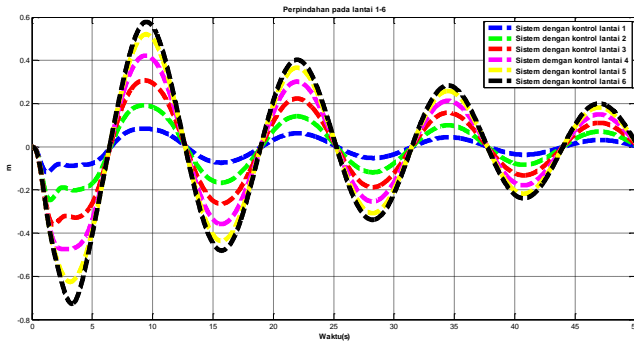
Berdasarkan Tabel (4.19), maka dapat disimpulkan bahwa sistem dengan kontrol H_∞ merupakan sistem yang stabil asimtotik dengan nilai optimal $\gamma = 0.850668$ Dalam simulasi ini diberikan gangguan berupa fungsi sinusoidal sebagai berikut :

$$\omega = 10^2 e^{-t} \sin(\pi t)$$

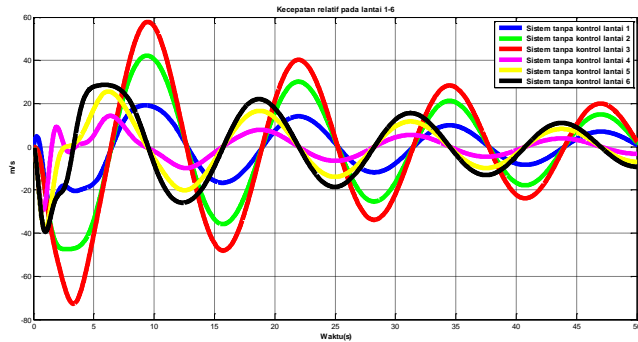
Hasil simulasi pada gambar (4.26) - (4.29) menghasilkan performansi redaman dan kestabilan sistem tanpa kontrol dan sistem dengan kontrol H_∞ (sistem lup tertutup) sebagai berikut :



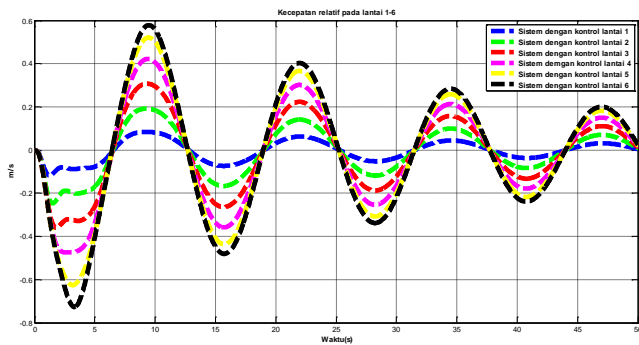
Gambar 4.26 Perpindahan pada lantai 1-6 tanpa kontrol



Gambar 4.27 Perpindahan pada lantai 1-6 dengan kontrol



Gambar 4.28 Kecepatan relatif pada lantai 1-6 tanpa kontrol



Gambar 4.29 Kecepatan relatif pada lantai 1-6 dengan kontrol

Berdasarkan grafik yang dihasilkan, terlihat bahwa sistem dengan kontrol H_∞ memiliki *peak* menuju 0. Sehingga dapat dikatakan bahwa kontrol H_∞ cukup baik dalam mengendalikan lantai 1, 2, 3, 4, 5 dan 6. Hasil tersebut juga menjawab tujuan dari kontrol H_∞ pada gedung bertingkat yaitu untuk mempercepat kestabilan sistem apabila terjadi gangguan pada sistem.

4.4.8 Simulasi reduksi kontrol H_∞ dengan data 6 lantai

Reduksi kontrol H_∞ dilakukan untuk memperoleh kontrol H_∞ berorde rendah, berdasarkan tabel (4.20) terlihat bahwa sistem kontrol bersifat stabil, sistem kontrol juga bersifat teramat dan terkendali karena mempunyai rank *full* pada matriks keterkendalian dan keteramatan.

Tabel 4.20 Nilai eigen sistem kontrol

Nilai eigen
$-5.679 + 10.442i$
$-5.679 - 10.442i$
$-11.667 + 3.345i$
$-11.667 + 3.345i$
$-11.725 + 10^{-16}i$
$-5.958 + 4.749i$
$-5.958 - 4.749i$
$-1.408 + 2.917$
$-1.408 - 2.917$
$-1.129 + 2.483i$
$-1.129 - 2.483i$
$-2.888 + 10^{-16}i$

Dengan terpenuhinya kondisi tersebut, maka bisa diperoleh kontrol setimbang yang dijabarkan sebagai berikut:

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 & 7.362 & 4.287 & -1.098 & -2.041 & -1.344 & 0.114 & 0.726 & 0.095 & 0.233 & 0.129 \\ 5.198 & -2.305 & 3.633 & 3.956 & -0.918 & -1.777 & -1.134 & 0.119 & 0.609 & 0.086 & 0.186 & -0.12 \\ -1.583 & 2.482 & -4.415 & -7.752 & 1.477 & 2.943 & 1.829 & -0.204 & -0.987 & -0.132 & -0.299 & 0.195 \\ -1.609 & -1.870 & 4.399 & -2.454 & 1.458 & 2.573 & 1.739 & -0.248 & -0.954 & -0.152 & -0.337 & 0.184 \\ -0.7 & -0.556 & 0.706 & 0.250 & -0.833 & -2.860 & -1.855 & -0.482 & 1.006 & 0.173 & 0.210 & -0.11 \\ 0.666 & 1.109 & -1.903 & 0.635 & 0.980 & -5.018 & -6.688 & 1.393 & 3.457 & 1.142 & 2.065 & -1.2 \\ -0.103 & -0.025 & 0.521 & 0.304 & -0.167 & 2.096 & -8.233 & 1.745 & 5.701 & -1.542 & 2.271 & 0.484 \\ 0.498 & 0.104 & -0.339 & -0.180 & 0.745 & 3.075 & -2.879 & -10.172 & 0.282 & -4.078 & -5.271 & 3.975 \\ -0.098 & -0.125 & -0.063 & 0.274 & -0.261 & -0.595 & 3.809 & -0.597 & -3.428 & 3.997 & -3.203 & 0.142 \\ -0.547 & -0.280 & 0.184 & 0.026 & -0.723 & -0.049 & 2.397 & 1.308 & -5.231 & -3.844 & -2.596 & 0.291 \\ -0.289 & 0.294 & -0.641 & 0.635 & -0.492 & -2.639 & -0.856 & 0.144 & -0.376 & -4.171 & -9.876 & 0.612 \\ -0.119 & 0.155 & -0.098 & 0.275 & 0.218 & -0.802 & -0.036 & 0.038 & -0.548 & 1.896 & -1.098 & -11.76 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0.164 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.134 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.097 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.059 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.019 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0016 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 \end{bmatrix}$$

Karena $\tilde{W} = \tilde{M}$, maka kontrol $(\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, \tilde{C}_c, D_c)$ telah memenuhi syarat setimbang.

Dengan didapatkannya kontrol setimbang, maka selanjutnya dilakukan pemotongan variabel agar kontrol tereduksi. Pemotongan setimbang dapat dilihat dari loncatan nilai singular hankel yang paling besar. Hasil perhitungan nilai singular hankel pada kontrol ditunjukkan pada Tabel (4.21) sebagai berikut:

Tabel 4.21 Nilai Singular Hankel Kontrol (A_p, B_p, C_p, D_p)

i	σ_i
1	$10^{-15} \times (0.519)$
2	$10^{-15} \times (0.424)$
3	$10^{-15} \times (0.307)$
4	$10^{-15} \times (0.185)$
5	$10^{-15} \times (0.063)$
6	$10^{-15} \times (0.028)$
7	$10^{-15} \times (0.01)$
8	$10^{-15} \times (0.009)$
9	$10^{-15} \times (0.007)$
10	$10^{-15} \times (0.005)$
11	$10^{-15} \times (0.003)$
12	$10^{-15} \times (0.001)$

Berikut Kontrol tereduksi yang terbagi berdasarkan besar orde kontrol tereduksi.

a. Reduksi Kontrol Orde 11

Diperoleh kontrol $(\tilde{A}_{c11}, \tilde{B}_{c11}, \tilde{C}_{c11}, D_c)$ tereduksi orde 11 yang ditampilkan pada matriks berikut:

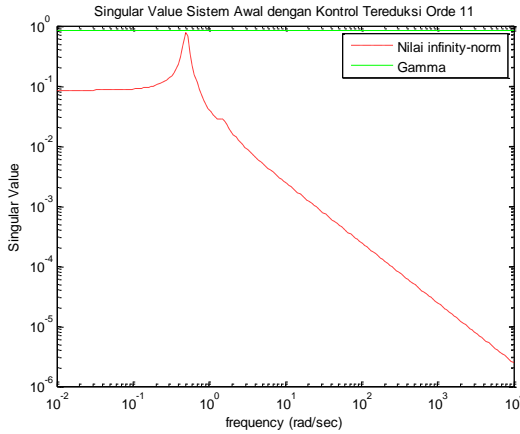
$$\tilde{A}_{c11} = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 & 7.362 & 4.287 & -1.098 & -2.041 & -1.344 & 0.114 & 0.726 & 0.095 & 0.233 \\ 5.198 & -2.305 & 3.633 & 3.956 & -0.918 & -1.777 & -1.134 & 0.119 & 0.609 & 0.086 & 0.186 \\ -1.583 & 2.482 & -4.415 & -7.752 & 1.477 & 2.943 & 1.829 & -0.204 & -0.987 & -0.132 & -0.299 \\ -1.609 & -1.870 & 4.399 & -2.454 & 1.458 & 2.573 & 1.739 & -0.248 & -0.954 & -0.152 & -0.337 \\ -0.7 & -0.556 & 0.706 & 0.250 & -0.833 & -2.860 & -1.855 & -0.482 & 1.006 & 0.173 & 0.210 \\ 0.666 & 1.109 & -1.903 & 0.635 & 0.980 & -5.018 & -6.688 & 1.393 & 3.457 & 1.142 & 2.065 \\ -0.103 & -0.025 & 0.521 & 0.304 & -0.167 & 2.096 & -8.233 & 1.745 & 5.701 & -1.542 & 2.271 \\ 0.498 & 0.104 & -0.339 & -0.180 & 0.745 & 3.075 & -2.879 & -10.172 & 0.282 & -4.078 & -5271 \\ -0.098 & -0.125 & -0.063 & 0.274 & -0.261 & -0.595 & 3.809 & -0.597 & -3.428 & 3.997 & -3.203 \\ -0.547 & -0.280 & 0.184 & 0.026 & -0.723 & -0.049 & 2.397 & 1.308 & -5.231 & -3.844 & -2.596 \\ -0.289 & 0.294 & -0.641 & 0.635 & -0.492 & -2.639 & -0.856 & 0.144 & -0.376 & -4.171 & -9.876 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c11} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.142 & -0.111 & -0.05 & -0.064 & -0.172 & -0.248 \\ 0.189 & 0.089 & 0.076 & 0.011 & -0.084 & -0.07 \\ -0.235 & -0.144 & -0.024 & 0.025 & 0.048 & -0.078 \\ -0.098 & 0.076 & 0.062 & -0.039 & -0.078 & -0.044 \\ 0.046 & -0.022 & 0.014 & -0.002 & 0.002 & -0.023 \\ -0.025 & -0.052 & 0.017 & 0.01 & 0.072 & -0.01 \\ 0.023 & 0.004 & -0.011 & -0.062 & 0.026 & 0.003 \\ -0.001 & -0.005 & 0.009 & -0.021 & -0.038 & 0.065 \\ 0.004 & -0.11 & 0.002 & 0.035 & -0.016 & 0.003 \\ 0.012 & -0.022 & 0.014 & 0.001 & -0.018 & -0.009 \\ 0.002 & -0.045 & -0.001 & -0.002 & -0.001 & 0.003 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c11} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.138 & 0.097 & -0.113 & -0.064 & 0.035 & 0.032 & 0.045 & 0.027 & -0.015 & -0.012 & 0.004 \\ 0.172 & 0.117 & -0.138 & -0.076 & 0.029 & 0.033 & 0.047 & 0.014 & -0.029 & 0.025 & 0.003 \\ 0.179 & 0.122 & -0.142 & -0.082 & 0.029 & 0.047 & 0.011 & -0.019 & -0.012 & -0.011 & -0.015 \\ 0.162 & 0.113 & -0.135 & -0.078 & 0.015 & 0.037 & 0.011 & -0.014 & 0.002 & 0.003 & 0.021 \\ 0.135 & 0.09 & -0.108 & -0.067 & 0.009 & 0.042 & 0.025 & -0.044 & -0.018 & -0.014 & -0.036 \\ 0.069 & 0.053 & -0.063 & -0.037 & 0.011 & 0.04 & 0.011 & -0.052 & -0.007 & -0.012 & -0.009 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 11 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 11 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.30). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 11 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.30 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 11

b. Reduksi Kontrol Orde 10

Diperoleh kontrol $(\tilde{A}_{c10}, \tilde{B}_{c10}, \tilde{C}_{c10}, D_c)$ tereduksi orde 10 yang ditampilkan pada matriks berikut:

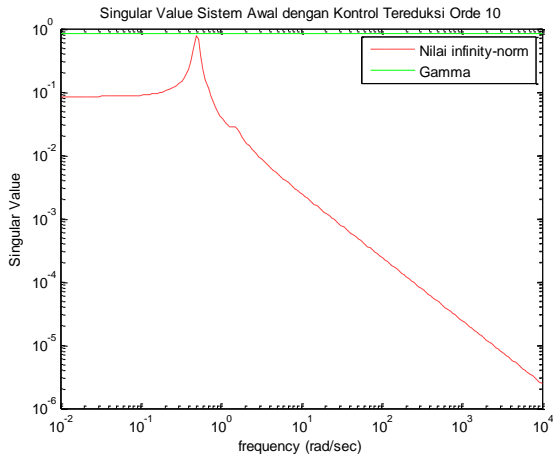
$$\tilde{A}_{c10} = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 & 7.362 & 4.287 & -1.098 & -2.041 & -1.344 & 0.114 & 0.726 & 0.095 \\ 5.198 & -2.305 & 3.633 & 3.956 & -0.918 & -1.777 & -1.134 & 0.119 & 0.609 & 0.086 \\ -1.583 & 2.482 & -4.415 & -7.752 & 1.477 & 2.943 & 1.829 & -0.204 & -0.987 & -0.132 \\ -1.609 & -1.870 & 4.399 & -2.454 & 1.458 & 2.573 & 1.739 & -0.248 & -0.954 & -0.152 \\ -0.7 & -0.556 & 0.706 & 0.250 & -0.833 & -2.860 & -1.855 & -0.482 & 1.006 & 0.173 \\ 0.666 & 1.109 & -1.903 & 0.635 & 0.980 & -5.018 & -6.688 & 1.393 & 3.457 & 1.142 \\ -0.103 & -0.025 & 0.521 & 0.304 & -0.167 & 2.096 & -8.233 & 1.745 & 5.701 & -1.542 \\ 0.498 & 0.104 & -0.339 & -0.180 & 0.745 & 3.075 & -2.879 & -10.172 & 0.282 & -4.078 \\ -0.098 & -0.125 & -0.063 & 0.274 & -0.261 & -0.595 & 3.809 & -0.597 & -3.428 & 3.997 \\ -0.547 & -0.280 & 0.184 & 0.026 & -0.723 & -0.049 & 2.397 & 1.308 & -5.231 & -3.844 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c10} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.142 & -0.111 & -0.05 & -0.064 & -0.172 & -0.248 \\ 0.189 & 0.089 & 0.076 & 0.011 & -0.084 & -0.07 \\ -0.235 & -0.144 & -0.024 & 0.025 & 0.048 & -0.078 \\ -0.098 & 0.076 & 0.062 & -0.039 & -0.078 & -0.044 \\ 0.046 & -0.022 & 0.014 & -0.002 & 0.002 & -0.023 \\ -0.025 & -0.052 & 0.017 & 0.01 & 0.072 & -0.01 \\ 0.023 & 0.004 & -0.011 & -0.062 & 0.026 & 0.003 \\ -0.001 & -0.005 & 0.009 & -0.021 & -0.038 & 0.065 \\ 0.004 & -0.11 & 0.002 & 0.035 & -0.016 & 0.003 \\ 0.012 & -0.022 & 0.014 & 0.001 & -0.018 & -0.009 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_{c10} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.138 & 0.097 & -0.113 & -0.064 & 0.035 & 0.032 & 0.045 & 0.027 & -0.015 & -0.012 \\ 0.172 & 0.117 & -0.138 & -0.076 & 0.029 & 0.033 & 0.047 & 0.014 & -0.029 & 0.025 \\ 0.179 & 0.122 & -0.142 & -0.082 & 0.029 & 0.047 & 0.011 & 0.019 & -0.012 & -0.011 \\ 0.162 & 0.113 & -0.135 & -0.078 & 0.015 & 0.037 & 0.011 & -0.014 & 0.002 & 0.003 \\ 0.135 & 0.09 & -0.108 & -0.067 & 0.009 & 0.042 & 0.025 & -0.044 & -0.018 & -0.014 \\ 0.069 & 0.053 & -0.063 & -0.037 & 0.011 & 0.04 & 0.011 & -0.052 & -0.007 & -0.012 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 10 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 10 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.31). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 10 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.31 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 10

c. Reduksi Kontrol Orde 9

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c9}, \tilde{B}_{c9}, \tilde{C}_{c9}, D_c$) tereduksi orde 9 yang ditampilkan pada matriks berikut:

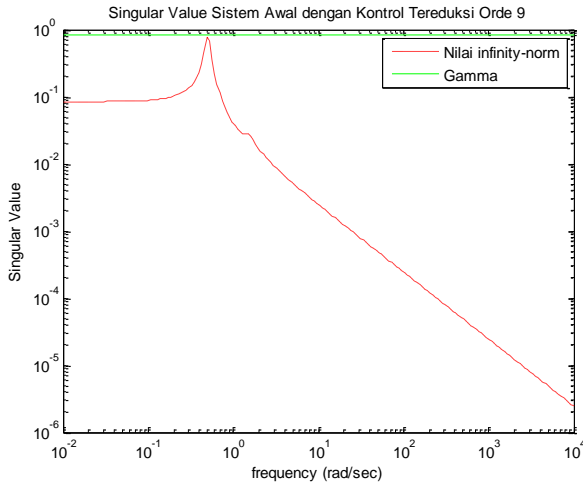
$$\tilde{A}_{c9} = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 & 7.362 & 4.287 & -1.098 & -2.041 & -1.344 & 0.114 & 0.726 \\ 5.198 & -2.305 & 3.633 & 3.956 & -0.918 & -1.777 & -1.134 & 0.119 & 0.609 \\ -1.583 & 2.482 & -4.415 & -7.752 & 1.477 & 2.943 & 1.829 & -0.204 & -0.987 \\ -1.609 & -1.870 & 4.399 & -2.454 & 1.458 & 2.573 & 1.739 & -0.248 & -0.954 \\ -0.7 & -0.556 & 0.706 & 0.250 & -0.833 & -2.860 & -1.855 & -0.482 & 1.006 \\ 0.666 & 1.109 & -1.903 & 0.635 & 0.980 & -5.018 & -6.688 & 1.393 & 3.457 \\ -0.103 & -0.025 & 0.521 & 0.304 & -0.167 & 2.096 & -8.233 & 1.745 & 5.701 \\ 0.498 & 0.104 & -0.339 & -0.180 & 0.745 & 3.075 & -2.879 & -10.172 & 0.282 \\ -0.098 & -0.125 & -0.063 & 0.274 & -0.261 & -0.595 & 3.809 & -0.597 & -3.428 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c9} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.142 & -0.111 & -0.05 & -0.064 & -0.172 & -0.248 \\ 0.189 & 0.089 & 0.076 & 0.011 & -0.084 & -0.07 \\ -0.235 & -0.144 & -0.024 & 0.025 & 0.048 & -0.078 \\ -0.098 & 0.076 & 0.062 & -0.039 & -0.078 & -0.044 \\ 0.046 & -0.022 & 0.014 & -0.002 & 0.002 & -0.023 \\ -0.025 & -0.052 & 0.017 & 0.01 & 0.072 & -0.01 \\ 0.023 & 0.004 & -0.011 & -0.062 & 0.026 & 0.003 \\ -0.001 & -0.005 & 0.009 & -0.021 & -0.038 & 0.065 \\ 0.004 & -0.11 & 0.002 & 0.035 & -0.016 & 0.003 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c9} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.138 & 0.097 & -0.113 & -0.064 & 0.035 & 0.032 & 0.045 & 0.027 & -0.015 \\ 0.172 & 0.117 & -0.138 & -0.076 & 0.029 & 0.033 & 0.047 & 0.014 & -0.029 \\ 0.179 & 0.122 & -0.142 & -0.082 & 0.029 & 0.047 & 0.011 & 0.019 & -0.012 \\ 0.162 & 0.113 & -0.135 & -0.078 & 0.015 & 0.037 & 0.011 & -0.014 & 0.002 \\ 0.135 & 0.09 & -0.108 & -0.067 & 0.009 & 0.042 & 0.025 & -0.044 & -0.018 \\ 0.069 & 0.053 & -0.063 & -0.037 & 0.011 & 0.04 & 0.011 & -0.052 & -0.007 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 9 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 9 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.32). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 9 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.32 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{ZW} kontrol orde 9

d. Reduksi Kontrol Orde 8

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c8}, \tilde{B}_{c8}, \tilde{C}_{c8}, D_c$) tereduksi orde 8 yang ditampilkan pada matriks berikut:

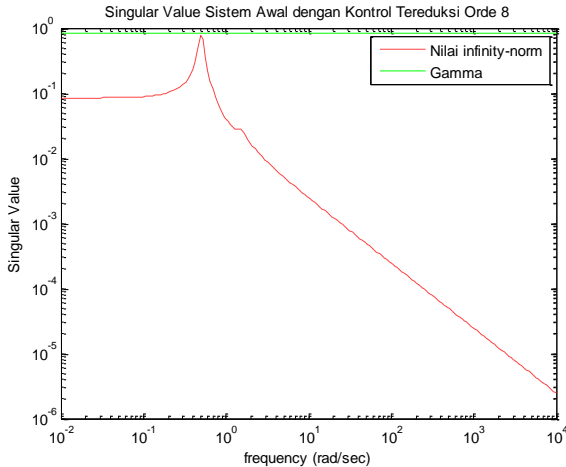
$$\tilde{A}_{c8} = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 & 7.362 & 4.287 & -1.098 & -2.041 & -1.344 & 0.114 \\ 5.198 & -2.305 & 3.633 & 3.956 & -0.918 & -1.777 & -1.134 & 0.119 \\ -1.583 & 2.482 & -4.415 & -7.752 & 1.477 & 2.943 & 1.829 & -0.204 \\ -1.609 & -1.870 & 4.399 & -2.454 & 1.458 & 2.573 & 1.739 & -0.248 \\ -0.7 & -0.556 & 0.706 & 0.250 & -0.833 & -2.860 & -1.855 & -0.482 \\ 0.666 & 1.109 & -1.903 & 0.635 & 0.980 & -5.018 & -6.688 & 1.393 \\ -0.103 & -0.025 & 0.521 & 0.304 & -0.167 & 2.096 & -8.233 & 1.745 \\ 0.498 & 0.104 & -0.339 & -0.180 & 0.745 & 3.075 & -2.879 & -10.172 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c8} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.142 & -0.111 & -0.05 & -0.064 & -0.172 & -0.248 \\ 0.189 & 0.089 & 0.076 & 0.011 & -0.084 & -0.07 \\ -0.235 & -0.144 & -0.024 & 0.025 & 0.048 & -0.078 \\ -0.098 & 0.076 & 0.062 & -0.039 & -0.078 & -0.044 \\ 0.046 & -0.022 & 0.014 & -0.002 & 0.002 & -0.023 \\ -0.025 & -0.052 & 0.017 & 0.01 & 0.072 & -0.01 \\ 0.023 & 0.004 & -0.011 & -0.062 & 0.026 & 0.003 \\ -0.001 & -0.005 & 0.009 & -0.021 & -0.038 & 0.065 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_{c8} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.138 & 0.097 & -0.113 & -0.064 & 0.035 & 0.032 & 0.045 & 0.027 \\ 0.172 & 0.117 & -0.138 & -0.076 & 0.029 & 0.033 & 0.047 & 0.014 \\ 0.179 & 0.122 & -0.142 & -0.082 & 0.029 & 0.047 & 0.011 & 0.019 \\ 0.162 & 0.113 & -0.135 & -0.078 & 0.015 & 0.037 & 0.011 & -0.014 \\ 0.135 & 0.09 & -0.108 & -0.067 & 0.009 & 0.042 & 0.025 & -0.044 \\ 0.069 & 0.053 & -0.063 & -0.037 & 0.011 & 0.04 & 0.011 & -0.052 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 8 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 8 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.33). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 8 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.33 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{ZW} kontrol orde 8

e. Reduksi Kontrol Orde 7

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c7}, \tilde{B}_{c7}, \tilde{C}_{c7}, D_c$) tereduksi orde 7 yang ditampilkan pada matriks berikut:

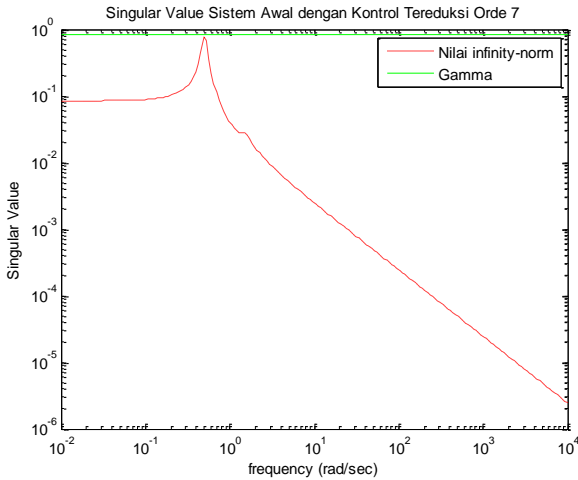
$$\tilde{A}_{c7} = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 & 7.362 & 4.287 & -1.098 & -2.041 & -1.344 \\ 5.198 & -2.305 & 3.633 & 3.956 & -0.918 & -1.777 & -1.134 \\ -1.583 & 2.482 & -4.415 & -7.752 & 1.477 & 2.943 & 1.829 \\ -1.609 & -1.870 & 4.399 & -2.454 & 1.458 & 2.573 & 1.739 \\ -0.7 & -0.556 & 0.706 & 0.250 & -0.833 & -2.860 & -1.855 \\ 0.666 & 1.109 & -1.903 & 0.635 & 0.980 & -5.018 & -6.688 \\ -0.103 & -0.025 & 0.521 & 0.304 & -0.167 & 2.096 & -8.233 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c7} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.142 & -0.111 & -0.05 & -0.064 & -0.172 & -0.248 \\ 0.189 & 0.089 & 0.076 & 0.011 & -0.084 & -0.07 \\ -0.235 & -0.144 & -0.024 & 0.025 & 0.048 & -0.078 \\ -0.098 & 0.076 & 0.062 & -0.039 & -0.078 & -0.044 \\ 0.046 & -0.022 & 0.014 & -0.002 & 0.002 & -0.023 \\ -0.025 & -0.052 & 0.017 & 0.01 & 0.072 & -0.01 \\ 0.023 & 0.004 & -0.011 & -0.062 & 0.026 & 0.003 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c7} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.138 & 0.097 & -0.113 & -0.064 & 0.035 & 0.032 & 0.045 \\ 0.172 & 0.117 & -0.138 & -0.076 & 0.029 & 0.033 & 0.047 \\ 0.179 & 0.122 & -0.142 & -0.082 & 0.029 & 0.047 & 0.011 \\ 0.162 & 0.113 & -0.135 & -0.078 & 0.015 & 0.037 & 0.011 \\ 0.135 & 0.09 & -0.108 & -0.067 & 0.009 & 0.042 & 0.025 \\ 0.069 & 0.053 & -0.063 & -0.037 & 0.011 & 0.04 & 0.011 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 7 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 7 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.34). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 7 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.34 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 7

f. Reduksi Kontrol Orde 6

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c6}, \tilde{B}_{c6}, \tilde{C}_{c6}, D_c$) tereduksi orde 6 yang ditampilkan pada matriks berikut:

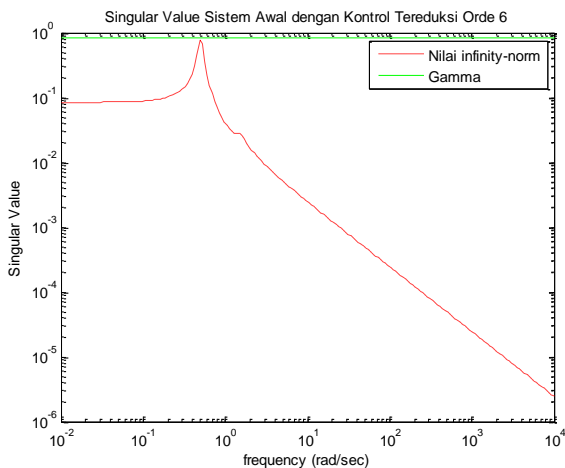
$$\tilde{A}_{c6} = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 & 7.362 & 4.287 & -1.098 & -2.041 \\ 5.198 & -2.305 & 3.633 & 3.956 & -0.918 & -1.777 \\ -1.583 & 2.482 & -4.415 & -7.752 & 1.477 & 2.943 \\ -1.609 & -1.870 & 4.399 & -2.454 & 1.458 & 2.573 \\ -0.7 & -0.556 & 0.706 & 0.250 & -0.833 & -2.860 \\ 0.666 & 1.109 & -1.903 & 0.635 & 0.980 & -5.018 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c6} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.142 & -0.111 & -0.05 & -0.064 & -0.172 & -0.248 \\ 0.189 & 0.089 & 0.076 & 0.011 & -0.084 & -0.07 \\ -0.235 & -0.144 & -0.024 & 0.025 & 0.048 & -0.078 \\ -0.098 & 0.076 & 0.062 & -0.039 & -0.078 & -0.044 \\ 0.046 & -0.022 & 0.014 & -0.002 & 0.002 & -0.023 \\ -0.025 & -0.052 & 0.017 & 0.01 & 0.072 & -0.01 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c6} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.138 & 0.097 & -0.113 & -0.064 & 0.035 & 0.032 \\ 0.172 & 0.117 & -0.138 & -0.076 & 0.029 & 0.033 \\ 0.179 & 0.122 & -0.142 & -0.082 & 0.029 & 0.047 \\ 0.162 & 0.113 & -0.135 & -0.078 & 0.015 & 0.037 \\ 0.135 & 0.09 & -0.108 & -0.067 & 0.009 & 0.042 \\ -0.069 & 0.053 & -0.063 & -0.037 & 0.011 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 6 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 6 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.35). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 6 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.35 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{ZW} kontrol orde 6

g. Reduksi Kontrol Orde 5

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c5}, \tilde{B}_{c5}, \tilde{C}_{c5}, D_c$) tereduksi orde 5 yang ditampilkan pada matriks berikut:

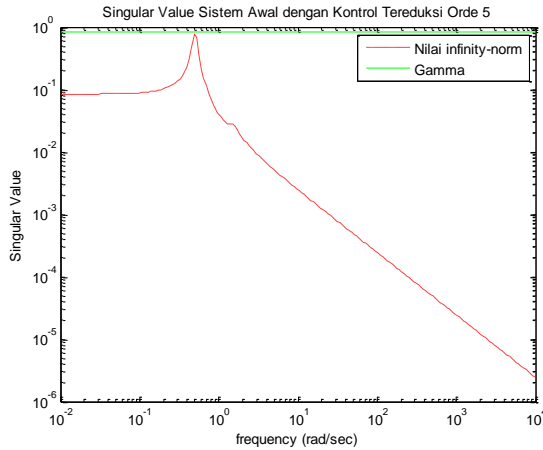
$$\tilde{A}_{c5} = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 & 7.362 & 4.287 & -1.098 \\ 5.198 & -2.305 & 3.633 & 3.956 & -0.918 \\ -1.583 & 2.482 & -4.415 & -7.752 & 1.477 \\ -1.609 & -1.870 & 4.399 & -2.454 & 1.458 \\ -0.7 & -0.556 & 0.706 & 0.250 & -0.833 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c5} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.142 & -0.111 & -0.05 & -0.064 & -0.172 & -0.248 \\ 0.189 & 0.089 & 0.076 & 0.011 & -0.084 & -0.07 \\ -0.235 & -0.144 & -0.024 & 0.025 & 0.048 & -0.078 \\ -0.098 & 0.076 & 0.062 & -0.039 & -0.078 & -0.044 \\ 0.046 & -0.022 & 0.014 & -0.002 & 0.002 & -0.023 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c5} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.138 & 0.097 & -0.113 & -0.064 & 0.035 \\ 0.172 & 0.117 & -0.138 & -0.076 & 0.029 \\ 0.179 & 0.122 & -0.142 & -0.082 & 0.029 \\ 0.162 & 0.113 & -0.135 & -0.078 & 0.015 \\ 0.135 & 0.09 & -0.108 & -0.067 & 0.009 \\ 0.069 & 0.053 & -0.063 & -0.037 & 0.011 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 5 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 5 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.36). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 5 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.36 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 5

h. Reduksi Kontrol Orde 4

Diperoleh kontrol $(\tilde{A}_{c4}, \tilde{B}_{c4}, \tilde{C}_{c4}, D_c)$ tereduksi orde 4 yang ditampilkan pada matriks berikut:

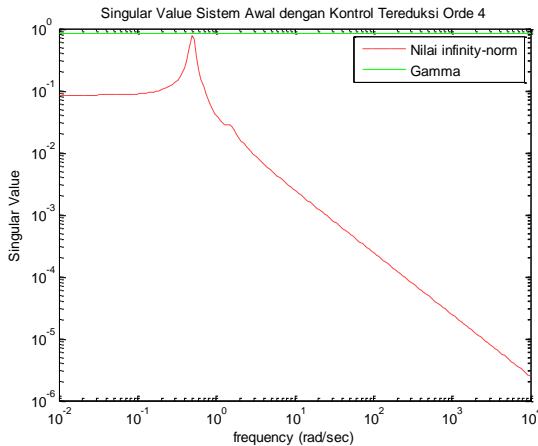
$$\tilde{A}_{c4} = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 & 7.362 & 4.287 \\ 5.198 & -2.305 & 3.633 & 3.956 \\ -1.583 & 2.482 & -4.415 & -7.752 \\ -1.609 & -1.870 & 4.399 & -2.454 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c4} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.142 & -0.111 & -0.05 & -0.064 & -0.172 & -0.248 \\ 0.189 & 0.089 & 0.076 & 0.011 & -0.084 & -0.07 \\ -0.235 & -0.144 & -0.024 & 0.025 & 0.048 & -0.078 \\ -0.098 & 0.076 & 0.062 & -0.039 & -0.078 & -0.044 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c4} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.138 & 0.097 & -0.113 & -0.064 \\ 0.172 & 0.117 & -0.138 & -0.076 \\ 0.179 & 0.122 & -0.142 & -0.082 \\ 0.162 & 0.113 & -0.135 & -0.078 \\ 0.135 & 0.09 & -0.108 & -0.067 \\ 0.069 & 0.053 & -0.063 & -0.037 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 4 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 4 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.37). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 4 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.37 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 4

i. Reduksi Kontrol Orde 3

Diperoleh kontrol $(\tilde{A}_{c3}, \tilde{B}_{c3}, \tilde{C}_{c3}, D_c)$ tereduksi orde 3 yang ditampilkan pada matriks berikut:

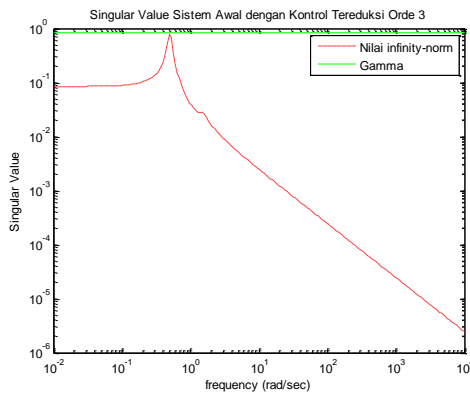
$$\tilde{A}_{c3} = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 & 7.362 \\ 5.198 & -2.305 & 3.633 \\ -1.583 & 2.482 & -4.415 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{c3} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.142 & -0.111 & -0.05 & -0.064 & -0.172 & -0.248 \\ 0.189 & 0.089 & 0.076 & 0.011 & -0.084 & -0.07 \\ -0.235 & -0.144 & -0.024 & 0.025 & 0.048 & -0.078 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c3} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.138 & 0.097 & -0.113 \\ 0.172 & 0.117 & -0.138 \\ 0.179 & 0.122 & -0.142 \\ 0.162 & 0.113 & -0.135 \\ 0.135 & 0.09 & -0.108 \\ 0.069 & 0.053 & -0.063 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 3 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 3 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.38). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 3 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.38 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 3

f. Reduksi Kontrol Orde 2

Diperoleh kontrol ($\tilde{A}_{c2}, \tilde{B}_{c2}, \tilde{C}_{c2}, D_c$) tereduksi orde 2 yang ditampilkan pada matriks berikut:

$$\tilde{A}_{c2} = \begin{bmatrix} -3.956 & -9.694 \\ 5.198 & -2.305 \end{bmatrix}$$

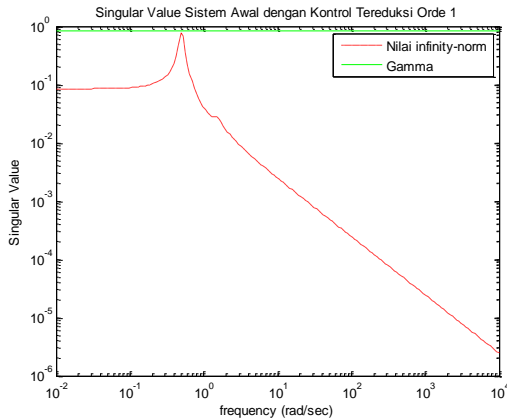
$$\tilde{B}_{c2} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.142 & -0.111 & -0.05 & -0.064 & -0.172 & -0.248 \\ 0.189 & 0.089 & 0.076 & 0.011 & -0.084 & -0.07 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c2} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.138 & 0.097 \\ 0.172 & 0.117 \\ 0.179 & 0.122 \\ 0.162 & 0.113 \\ 0.135 & 0.09 \\ 0.069 & 0.053 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 2 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 2 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.39). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 2 masih dapat diterapkan pada sistem awal.

Setelah diperoleh kontrol tereduksi orde 1 dan diterapkan ke sistem awal. Diperoleh nilai singular dari sistem *close-loop* dengan kontrol orde 1 berada dibawah nilai gammanya yang ditampilkan pada gambar (4.40). Hal ini berarti bahwa kontrol tereduksi orde 1 masih dapat diterapkan pada sistem awal.



Gambar 4.40 Grafik *Singular Value* \hat{T}_{zw} kontrol orde 1

Dari simulasi yang telah dilakukan diperoleh *infinity-norm* dari sistem dengan kontrol dan sistem kontrol tereduksi berdasarkan tabel (4.22) sebagai berikut:

Tabel 4.22 Nilai *infinity-norm* dari sistem dengan kontrol dan sistem dengan kontrol tereduksi

Jenis Sistem	<i>infinity-norm</i>
Sistem dengan Kontrol	0.850668598407675
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 11	0.849809718846279
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 10	0.849809718846289
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 9	0.849809718846285
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 8	0.849809718846285
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 7	0.849809718846289
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 6	0.849809718846277
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 5	0.849809718846276
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 4	0.849809718846294
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 3	0.849809718846306
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 2	0.849809718846448
Sistem dengan Kontrol Tereduksi orde 1	0.849809718846495

Setelah mengamati hasil kontrol tereduksi dan sistem *close-loop* kontrol tereduksi dari sistem bangunan bertingkat 2 dan 3, dan 6 terlihat bahwa orde kontrol yang direduksi menghasilkan *infinity-norm* yang masih berada dibawah nilai gamma yang diberikan. Hal itu menunjukkan bahwa kemampuan kontrol tereduksi untuk menahan gangguan masih memenuhi, sehingga dapat dikatakan reduksi terhadap kontrol berpengaruh terhadap *robustness* dari sistem awal ketika diterapkan kontrol tereduksi.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dalam Tugas Akhir ini, diperoleh langkah-langkah untuk melakukan desain kontrol H_∞ berorde rendah pada gedung bertingkat n dengan menggunakan Balanced Truncation. Langkah pertama yang dilakukan adalah membentuk model matematika gedung bertingkat n yang akan di terapkan pada sistem awal, kemudian dicari kontrol H_∞ , setelah itu kontrol direduksi dengan menggunakan metode Balanced Truncation. Dihasilkan kontrol tereduksi berukuran r , kemudian dilakukan penerapan kontrol tereduksi orde r pada sistem awal yang memenuhi syarat *infinity-norm* yang masih berada di sekitar nilai γ .

Berdasarkan simulasi pada model gedung bertingkat 2, 3, 5, dan 6 diperoleh bahwa ketika sistem diberikan kontrol, nilai *infinity-norm* bernilai kurang dari γ . Hal ini menunjukkan bahwa kontrol dapat mengurangi efek dari gangguan sehingga sistem menjadi *robust*. Dari hasil yang diperoleh juga terlihat bahwa sistem dengan kontrol mempunyai performansi yang lebih baik dibandingkan sistem tanpa kontrol pada sebagian besar waktu t . Hal itu ditunjukkan oleh grafik osilasi dimana sistem dengan kontrol H_∞ memiliki kestabilan yang lebih cepat dibandingkan sistem tanpa kontrol.

Kontrol yang telah diperoleh kemudian direduksi dengan orde r untuk diterapkan ke sistem awal, hasil kontrol tereduksi dan sistem *close-loop* kontrol tereduksi dari sistem bangunan bertingkat 2, 3, dan 6 menghasilkan orde kontrol yang direduksi dengan *infinity-norm* yang masih berada dibawah nilai γ yang diberikan. Hal itu menunjukkan bahwa kemampuan kontrol tereduksi untuk menahan gangguan masih memenuhi, sehingga dapat dikatakan reduksi terhadap kontrol berpengaruh terhadap *robustness* dari sistem awal ketika diterapkan kontrol tereduksi.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya diharapkan untuk mencari sistem gedung bertingkat dengan tingkatan yang lebih tinggi dengan data yang memenuhi agar bisa dilakukan reduksi untuk dapat menemukan perbedaan signifikan dari reduksi kontrol H_∞ .

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Febrian, H.M. 2019. “Kajian Desain Kontrol Sistem Menggunakan Metode H_∞ ”. Tugas Akhir. Matematika ITS.
- [2] Zhou, Kemin. 1999. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall.
- [3] Fadhilah, H.N. 2019. “Desain Sentralisasi dan Desentralisasi Kontrol H_∞ dengan Pendekatan *Linear Matrix Inequality*”. Tesis. S2 Matematika ITS.
- [4] Siahaan, C.S. 2019. “Desain Kontrol Berorde Rendah dengan Metode H_∞ ”. Tugas Akhir. Matematika ITS.
- [5] Guisheng Zhai, Shinichi Murao, Naoki Koyama, dan Masaharu Yoshida. 2003. “*Low order Controller H_∞ Design: An LMI Approach*”. Wakayama University, Japan.
- [6] Peter Benner, Tim Mitchell, dan Michael L. Overton. 2018. “*Low order Control Design Using a Reduced-Order Model With a Stability Constraint on the Full-Order Model*”.
- [7] Subiono. 2013. Sistem Linear dan Kontrol Optimal, Surabaya: Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [8] D. Arif. 2014. Kontruksi dan Implementasi Algoritma Filter Kaman pada Model Tereduksi, Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada

- [9] Tian-Wei Ma, Ning-Shou Xu, dan Yu Tang. 2007. “*Decentralized Robust Control of Building Structure Under Seismic Excitations*”. Vol 37, 121-140.
- [10] Yang Wang, Jerome P. Lynch, dan Kincho H. Law. 2008. “*Decentralized H_∞ Controller Design for Large-scale Civil Structures*”. Vol 38, 377-401.
- [11] Grigoriadis, K.M., dan Skelton, R.E. 1996. “*Low-order Control Design for LMI Problems using Alternating Projection Methods*”. Automatica. Vol 32, 1117-1125.
- [12] Rubio-Massegu, J.,Palacios-Quinonero, F., dan Rossell, J.M. 2012. “*Decentralized static output feedback H_∞ controller design for buildings under seismic excitation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics*”. Vol 41, 1199-1205.

BIODATA PENULIS



Penulis bernama Maslahatul Ummah atau biasa dipanggil Masha, lahir di Mamboro, 02 April 1999. Jenjang pendidikan formal yang ditempuh oleh penulis dimulai dari TK Aisyah Mamboro (2003-2004), SDN Al Khaeraat Mamboro (2004-2010), SMPN Model Terpadu Madani Palu (2010-2013), SMAN Model Terpadu Madani Palu (2013-2016). Setelah lulus dari SMAN Model Terpadu Madani Palu, penulis melanjutkan studi jenjang S1 di Departemen Matematika ITS pada tahun 2016 melalui jalur SNMPTN dengan NRP 06111640000032. Di Departemen Matematika ITS, penulis mengambil rumpun mata kuliah pemodelan dan simulasi sistem. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di KM ITS melalui Himpunan Mahasiswa Matematika ITS sebagai staff *Sport and Art Development* (2017-2018) dan (2018-2019) serta juga aktif sebagai staff Syiar Ibnu Muqhlah (2017-2018) dan (2018-2019). Penulis juga aktif diberbagai kepanitiaan, seperti menjadi Tim SC Pengaderan angkatan 2018, GEMPA ITS dan Olimpiade Matematika ITS (OMITS). Salah satu pengalaman penulis yang tak terlupakan selama kuliah di Departemen Matematika ITS adalah mengikuti *student exchange* ke jepang pada tahun 2019.

Penulis berharap banyak untuk perkembangan penelitian matematika di Departemen Matematika ITS, oleh karena itu jika ada yang ingin memberikan saran, kritik dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini, bisa dilakukan dengan mengirimkannya melalui email maslahatulummah02@gmail.com.