TUGAS AKHIR - KM184801

PELABELAN PRIMA LINGKUNGAN TERTUTUP BERSAMA GRAF TERKAIT RODA

ANISA SAVERINA ALFIYANI
NRP. 06111640000076

Dosen Pembimbing:
Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

TUGAS AKHIR - KM184801

PELABELAN PRIMA LINGKUNGAN TERTUTUP BERSAMA GRAF TERKAIT RODA

ANISA SAVERINA ALFIYANI
NRP. 06111640000076

Dosen Pembimbing:
Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

TUGAS AKHIR - KM184801

PELABELAN PRIMA LINGKUNGAN TERTUTUP BERSAMA GRAF TERKAIT RODA

ANISA SAVERINA ALFIYANI
NRP. 06111640000076

Dosen Pembimbing:
Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

FINAL PROJECT - KM184801

COMMON CLOSED NEIGHBOURHOOD PRIME LABELING OF WHEEL RELATED GRAPHS

ANISA SAVERINA ALFIYANI
NRP. 06111640000076

Supervisors:
Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

PELABELAN PRIMA LINGKUNGAN TERTUTUP BERSAMA GRAF TERKAIT RODA

COMMON CLOSED NEIGHBOURHOOD PRIME LABELING OF WHEEL RELATED GRAPHS

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
ANISA SAVERINA ALFIYANI
NRP. 06111640000076

Menyetujui,
Dosen Pembimbing,

Dr. Dra. Rinurwati, M.Si
NIP. 19640304 198903 2 002

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS

Subchan S.Si., M.Sc., Ph.D.
NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, 18 Agustus 2020

PELABELAN PRIMA LINGKUNGAN TERTUTUP BERSAMA GRAF TERKAIT RODA

Nama	:	Anisa Saverina Alfiyani
NRP	:	06111640000076
Departemen	:	Matematika FSAD ITS
Dosen Pembimbing	:	Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

Abstrak

Diberikan graf terhubung $G = (V(G), E(G))$ dengan n simpul. Suatu fungsi bijektif $f : V(G) \to \{1, 2, 3, ..., n\}$ dikatakan pelabelan prima jika untuk setiap dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$ dengan u bertetangga dengan v, $gcd\{f(u), f(v)\} = 1$. Graf G dikatakan memiliki pelabelan prima lingkungan jika terdapat suatu pemetaan bijektif $f : V(G) \to \{1, 2, 3, ..., n\}$ sedemikian hingga untuk setiap $v \in V(G)$ dengan $deg(v) > 1$, $gcd\{f(u) : u \in N(v)\} = 1$. Pada Tugas Akhir ini, diperkenalkan jenis pelabelan baru yaitu pelabelan prima lingkungan tertutup bersama. Graf G dikatakan memiliki pelabelan prima lingkungan tertutup bersama jika terdapat fungsi bijektif $f : V(G) \to \{1, 2, ..., n\}$ sedemikian hingga untuk setiap dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$ dengan u bertetangga dengan v, $gcd\{f(w) : w \in N[u, v]\} = 1$. Dalam Tugas Akhir ini juga dibuktikan bahwa graf dasar dan beberapa graf terkait roda merupakan graf prima lingkungan tertutup bersama, dengan memberikan langkah-langkah (algoritma) untuk mendapatkan pelabelan prima lingkungan bersama pada graf tersebut.

Kata Kunci : Pelabelan prima, Pelabelan prima lingkungan, Pelabelan prima lingkungan tertutup bersama, Graf terkait roda

COMMON CLOSED NEIGHBOURHOOD PRIME LABELING OF WHEEL RELATED GRAPHS

Name	:	Anisa Saverina Alfiyani
NRP	:	06111640000076
Department	:	Mathematics FSDA ITS
Supervisors	:	Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

Abstract

Let $G = (V(G), E(G))$ be a connected graph with n vertices. A bijection $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., n\}$ is said to be prime labeling if for each two distinct vertices $u, v \in V(G)$ which u is adjacent to v, $gcd\{f(u), f(v)\} = 1$. A graph G is called neighbourhood prime if there is a bijection $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., n\}$ so that for each vertex $v \in V(G)$ with $deg(v) > 1$, $gcd\{f(u) : u \in N(v)\} = 1$. In this Final Project, author introduces a new type of labeling called common closed neighbourhood prime labeling. A graph G is called common closed neighbourhood prime if there is a bijection $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., n\}$ so that for each two distinct vertices $u, v \in V(G)$ which u is adjacent to v, $gcd\{f(w) : w \in N[u, v]\} = 1$. Author proved that basic graphs and wheel related graphs are common closed neighbourhood prime graphs, by providing steps (algorithms) to obtain the common closed neighbourhood prime labeling.

Key-words : *Prime labeling, Neighbourhood prime labeling, Closed neighbourhood prime labeling, Wheel related graphs.*

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur senantiasa penulis panjatkan kepada Allah SWT, atas karunia dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul “PELABELAN PRIMA LINGKUNGAN TERTUTUP BERSAMA GRAF TERKAIT RODA” sebagai syarat kelulusan untuk mendapat gelar sarjana di Program Studi Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Selama Penulisan laporan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis mendapatkan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Orang tua penulis Syaiful Ashar dan Siti Asna serta kedua kakak dan adik penulis M. Alfiyan Dzulfikri dan M. ’Ariiq Nauval atas motivasi dan dukungannya selama ini.
2. Bapak Subchan S.Si., M.Sc., Ph.D., selaku kepala Departemen Matematika FSAD ITS.
3. Ibu Dr. Dra. Rinurwati, M.Si, selaku dosen pembimbing, atas bimbingan, motivasi, serta masukan selama proses pengerjaan Tugas Akhir.
4. Bapak Dr. Darmaji, S.Si, MT, Ibu Soleha, S.Si, M.Si, dan Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si, selaku dosen penguji yang sudah memberikan kritik dan saran dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si dan Bapak Dr. Budi Setiyono, S.Si, MT, sebagai dosen wali yang sudah membantu mengarahkan penulis selama berkuliah di ITS.
6. Seluruh Bapak dan Ibu dosen Departemen Matematika ITS atas bekal ilmu pengetahuan yang telah diajarkan.
7. Sahabat penulis Ajriya Aliyah Rosmala dan Yuliana yang selalu mendukung serta menjadi *moodbooster* bagi penulis.

8. Para mahasiswa Departemen Matematika ITS angkatan 2016 terutama Septi Nurul Azizah, Chozainurrohmah Safitri, Hengky Kurniawan, serta Sovia Prabaningtyas yang selalu menemani, mendukung dan membantu penulis selama berkuliah di ITS.
9. Kak J, B, S, W, dan D yang selalu menasehati, mendukung, serta menginspirasi penulis.
10. Seluruh pihak lainnya yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan, doa, dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Kritik dan saran membangun dari pembaca sangat penulis harapkan agar Tugas Akhir ini menjadi lebih baik dan bermanfaat.

Surabaya, 18 Agustus 2020

Anisa Saverina Alfiyani

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

		Halaman
G	Graf	vii
$V(G)$	Himpunan simpul dari graf G	vii
$E(G)$	Himpunan sisi dari graf G	vii
$gcd(a,b)$	Bilangan bulat positif pembagi bersama terbesar dari a dan b	vii
$\in$	Anggota dari	vii
$deg(v)$	Derajat dari simpul v	vii
$N(v)$	Lingkungan terbuka dari simpul v	vii
$N[v]$	Lingkungan tertutup dari simpul v	6
$N[u,v]$	Lingkungan tertutup bersama dari simpul u dan v	vii
P_n	Graf lintasan dengan n simpul	2
C_n	Graf siklus dengan n simpul	2
S_n	Graf bintang dengan n simpul	3
W_n	Graf roda dengan $n+1$ simpul	3
G_n	Graf gir dengan $2n+1$ simpul	3
H_n	Graf helm dengan $2n+1$ simpul	3
Sf_n	Graf bunga matahari dengan $2n+1$ simpul	3
$G+H$	Operasi join pada graf G dan H	9
$\cup$	Gabungan	6
$\cap$	Irisan	21
$\lvert V(G)\rvert$	Banyak anggota $V(G)$	21
$\lvert E(G)\rvert$	Banyak anggota $E(G)$	21

$G \cong H$	Graf G isomorfik dengan graf H	23
$N(C_n, l, r)$	Graf kalung dengan r buah C_n dihubungkan lintasan sepanjang l	46

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan serta manfaat dari Tugas Akhir. Pada latar belakang masalah dijelaskan mengenai situasi permasalahan saat ini, hal yang mendorong penulis untuk melakukan Tugas Akhir, serta penelitian terdahulu terkait topik yang dipilih. Rumusan masalah berisi tentang pernyataan eksplisit mengenai masalah. Subbab tujuan berisi tentang tujuan yang dicapai dalam Tugas Akhir, sedangkan subbab manfaat berisi kegunaan yang diperoleh dari Tugas Akhir.

1.1 Latar Belakang Masalah

Hubungan antara simpul dan sisi dapat diaplikasikan dalam berbagai permasalahan sehari-hari, misalnya pada jaringan fisik seperti rangkaian listrik, jalan raya, atau molekul organik. Selain itu, hubungan simpul dan sisi juga dapat merepresentasikan ekosistem, hubungan sosial, atau *database*. Hubungan simpul dan sisi tersebut dapat dimodelkan dengan struktur kombinatorik yang disebut graf, yang terdiri dari dua himpunan yaitu simpul dan sisi dan relasi insiden antara simpul dan sisi [4]. Pelabelan graf merupakan salah satu kajian dalam teori graf. Pelabelan graf adalah pemetaan bilangan bulat pada simpul atau sisi, atau keduanya dengan suatu kondisi tertentu. Pelabelan graf diperkenalkan pada pertengahan tahun 1960-an. Pelabelan graf berkembang sangat cepat. Dalam jangka waktu 50 tahun, hampir 200 teknik pelabelan graf telah dipelajari dalam lebih dari 2800 paper. Secara umum, pelabelan graf dapat diaplikasikan dalam beberapa bidang seperti teori pengkodean, kristalografi sinar x, radar, astronomi, desain sirkuit, manajemen basis data dan lain sebagainya [3].

Salah satu jenis pelabelan graf yang masih terus berkembang adalah pelabelan prima. Gagasan pelabelan prima diperkenalkan dalam paper karya Tout, Dabbouchy dan Howalla pada tahun 1982

[13]. Hingga saat ini ada berbagai macam perkembangan dari pelabelan prima, salah satunya adalah pelabelan prima lingkungan yang diperkenalkan oleh S.K. Patel dan N.P. Shrimali dalam papernya pada tahun 2015 [8]. Pada kajiannya, S.K. Patel dan N.P. Shrimali menyelidiki pelabelan prima lingkungan pada graf lintasan, graf siklus, graf helm, graf helm tertutup dan graf bunga. Lawrence dan Sheriff mengkaji pelabelan prima lingkungan pada graf buku dengan halaman segitiga dan segiempat [10].

Pelabelan prima lingkungan telah dikembangkan oleh Rajesh Kumar dan Mathew Varkey di tahun 2018 yang kemudian diberi nama pelabelan prima lingkungan total. Graf yang memenuhi pelabelan tersebut disebut graf prima lingkungan total. Dalam papernya, diperkenalkan pelabelan prima lingkungan total serta membuktikan bahwa graf lintasan P_n, graf siklus C_n dengan n bilangan genap dan $n \neq 2$ modulo empat dan graf sisir merupakan graf prima lingkungan total [6]. Lebih jauh, dalam Tugas Akhir ini akan dikembangkan jenis pelabelan baru dari pelabelan prima lingkungan yang disebut pelabelan *common closed neighbourhood-prime* atau pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf dasar dan graf terkait roda.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah pada tugas akhir ini sebagai berikut :

1. Bagaimana fungsi pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf dasar?
2. Bagaimana fungsi pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf terkait roda dengan $n \geq 4$?

1.3 Batasan Masalah

Graf yang dibahas pada tugas akhir ini adalah graf siklus C_n, graf bintang S_n, graf roda W_n, graf gir G_n, graf helm H_n dan graf bunga matahari Sf_n dengan $n \geq 4$.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dari tugas akhir ini adalah :

1. Menemukan fungsi pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf dasar.
2. Menemukan fungsi pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf terkait roda dengan $n \geq 4$.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diperoleh dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Untuk mengembangkan pengetahuan dan memperdalam analisis mengenai pelabelan graf.
2. Sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya mengenai pelabelan prima lingkungan tertutup bersama dari graf hasil operasi yang lain.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai penelitian terdahulu yang berkaitan dengan pelabelan prima lingkungan tertutup bersama. Kemudian dibahas mengenai graf secara umum, beberapa graf terkait roda, pelabelan secara umum, pelabelan prima dan pelabelan prima lingkungan.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967. Pelabelan graf kini telah banyak berkembang. Telah dipelajari berbagai jenis pelabelan baru [3]. Pelabelan prima adalah jenis pelabelan graf yang diperkenalkan pada tahun 1982 dalam paper karya Tout, at al[13]. Penelitian terbaru dilakukan oleh Lavanya dan Ganesan dalam papernya yang terbit pada bulan oktober 2019 lalu. Mereka membahas pelabelan prima pada graf siklus *split*[7].

Pengembangan pelabelan prima salah satunya adalah pelabelan prima lingkungan. Jenis pelabelan ini pertama kali diperkenalkan pada tahun 2015 oleh S.K. Patel dan N.P. Shrimali dan diuji pada graf lintasan, siklus, helm, helm tertutup dan bunga. Dari penelitian tersebut didapatkan beberapa hasil yang ditulis dalam teorema-teorema. Mereka membuktikan bahwa graf lintasan, graf helm, graf helm tertutup, dan graf bunga merupakan graf prima lingkungan. Dalam kajiannya, juga didapatkan bahwa graf siklus C_n juga merupakan graf prima lingkungan jika $n \neq 2 \pmod 4$[7].

Kemudian pada tahun 2018 diterbitkan sebuah artikel mengenai perngembangan dari pelabelan prima lingkungan yang berjudul *A Note on Total neighbourhood Prime Labeling*. Dalam papernya, Rajesh Kumar dan Mathew Varkey memperkenalkan jenis pelabelan baru yaitu pelabelan prima lingkungan total. Pelabelan tersebut disebut pelabelan total karena pelabelan ini tidak hanya memberikan label pada simpul graf saja, tetapi juga pada sisi graf. Dalam kajiannya, mereka mempelajari pelabelan tersebut pada graf lintasan dan graf siklus. Kemudian dibuktikan bahwa graf lintasan P_n dan graf siklus C_n dengan n bilangan genap dan $n \neq 2 mod(4)$ adalah graf prima lingkungan total[6].

2.2 Graf dan Pengertian Terkait

Pada subbab ini, dijelaskan mengenai beberapa istilah pada graf secara umum serta graf dasar (graf siklus dan graf bintang) dan beberapa graf terkait roda.

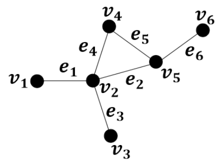
Definisi 2.2.1 [4] *Suatu graf* $G = (V(G), E(G))$ *adalah struktur matematika yang terdiri dari sepasang himpunan berhingga* $V(G)$ *dan* $E(G)$*. Anggota dari* $V(G)$ *disebut simpul dan anggota dari* $E(G)$ *disebut sisi. Simpul ujung dari suatu sisi adalah dua simpul yang terhubung dengan sisi tersebut.*

Dua sisi berbeda yang terkait pada sebuah simpul disebut sisi bertetangga, sedangkan dua simpul yang terkait oleh sebuah sisi disebut simpul bertetangga. Insidensi merupakan hubungan antara suatu sisi dengan simpul ujungnya.

Definisi 2.2.2 [4] *Sebuah simpul* u *dan* v *di graf* G *dikatakan bertetangga jika terdapat sebuah sisi* $e = uv \in E(G)$ *yang menghubungkan simpul* u *dan* v*. Lingkungan terbuka dari sebuah simpul* v *di graf* G *adalah himpunan dari semua simpul tetangga dari* v*, dinotasikan sebagai* $N(v)$*. Lingkungan tertutup dari simpul* v *adalah* $N[v] = N(v) \cup \{v\}$*.*

Definisi 2.2.3 [4] *Derajat dari sebuah simpul* v *dari graf* G *dinotasikan dengan* $deg(v)$ *adalah banyaknya sisi yang insiden dengan simpul* v*.*

Misalkan diberikan sebuah graf $G = (V(G), E(G))$ sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf $G = (V(G), E(G))$

Berdasarkan Gambar 2.1, dapat diketahui bahwa:

1. Himpunan simpul dari graf G adalah $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_6\}$ dan himpunan sisi dari graf G adalah $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_6\}$.

2. Contoh dua simpul dari graf G yang bertetangga adalah simpul v_1 dengan v_2, karena terdapat sisi $e_1 = v_1v_2$ yang membuat simpul v_1 dan simpul v_2 insiden dengan e_1.

3. Lingkungan terbuka dari simpul v_5 adalah $N(v_5) = \{v_2, v_4, v_6\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari simpul v_5 adalah $N[v_5] = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$.

4. Derajat dari simpul v_3 adalah $deg(v_3) = 1$ dan derajat dari simpul v_2 adalah $deg(v_2) = 4$.

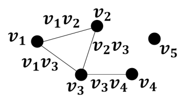
2.2.1 Graf Siklus

Sebelum membahas mengenai graf siklus, akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai jalan dan lintasan.

Definisi 2.2.4 [2] *Jalan (walk) adalah barisan bergantian antara simpul dan sisi, seperti* $v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, v_2, ..., v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n$ *yang diawali dan diakhiri oleh simpul sehingga setiap sisi terkait langsung dengan dua simpul terdekat sebelum dan sesudah sisi tersebut. Penulisan* $v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, v_2, ..., v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n$ *biasa ditulis sebagai* $v_0, v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n$*. Banyak sisi pada jalan disebut panjang (length) dari jalan tersebut.*

Definisi 2.2.5 [2] *Lintasan (path) adalah jalan yang setiap simpulnya berbeda. Lintasan dari simpul u ke simpul v dinotasikan dengan lintasan $u - v$.*

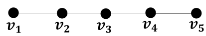
Definisi 2.2.6 [2] *Siklus (cycle) adalah jalan $v_0, v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n$ dengann $n \geq 3$, $v_0 = v_n$ dan setiap $v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n$ berbeda.*



Gambar 2.2 Graf G

Pada Gambar 2.2, v_3, v_1, v_2, v_3, v_4 merupakan jalan, v_2, v_1, v_3, v_4 merupakan lintasan, v_1, v_2, v_3, v_1 merupakan siklus.

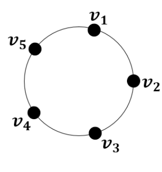
Definisi 2.2.7 [2] *Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari sebuah lintasan. Graf lintasan dengan ordo n dinotasikan dengan P_n.*



Gambar 2.3 Graf P_5

Gambar 2.3 di atas merupakan graf lintasan dengan lima simpul yang dinotasikan dengan P_5.

Definisi 2.2.8 [2] *Graf siklus adalah graf yang terdiri dari sebuah siklus. Graf siklus dengan n simpul dinotasikan dengan C_n.*



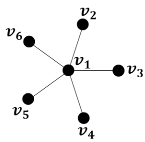
Gambar 2.4 Graf Siklus C_5

Gambar 2.4 mengilustrasikan graf siklus C_5 dengan himpunan simpul $V(C_5) = \{v_1, v_2, ..., v_5\}$.

2.2.2 Graf Bintang

Graf bintang dengan n simpul dinotasikan dengan S_n yang juga dikenal dengan n-*star* didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2.9 [5] *Graf bintang S_n adalah graf pohon dengan n simpul, sebuah simpul berderajat $n-1$ dan simpul yang lain berderajat satu.*



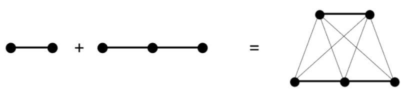
Gambar 2.5 Graf Bintang S_6

Graf bintang S_6 dengan himpunan simpul $V(S_6) = \{v_1, v_2, ..., v_6\}$ diilustrasikan oleh Gambar 2.5.

2.2.3 Graf Roda

Sebelum mendefinisikan graf roda, terlebih dahulu diberikan definisi graf hasil operasi join seperti dalam Definisi 2.2.10.

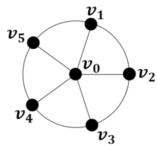
Definisi 2.2.10 [4] *Graf hasil operasi join dari graf G dan H dinotasikan dengan $G + H$ dan didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan menghubungkan setiap simpul di graf G dengan semua simpul dari graf H.*



Gambar 2.6 Graf $P_2 + P_3$

Gambar 2.6 merupakan contoh dari graf hasil operasi join dari P_2 dengan P_3. Contoh lain graf hasil operasi join adalah graf roda.

Definisi 2.2.11 [14] *Graf roda W_n didefinisikan sebagai graf hasil operasi join dari graf K_1 dan C_n dan dinotasikan dengan $K_1 + C_n$. Simpul yang bersesuaian dengan K_1 disebut apeks dan simpul-simpul yang bersesuaian dengan graf siklus disebut simpul rim sedangkan sisi-sisi yang bersesuaian dengan graf siklus disebut sisi rim.*



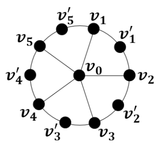
Gambar 2.7 Graf Roda W_5

Gambar 2.7 mengilustrasikan graf roda W_5 dengan himpunan simpul $V(W_5) = V(K_1) \cup V(C_5) = \{v_0\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_5\}$.

2.2.4 Graf Gir

Graf gir merupakan graf yang dibentuk dari graf roda W_n dengan menambahkan n simpul. Definisi berikut menjelaskan pengertian dari graf gir.

Definisi 2.2.12 [14] *Graf gir diperoleh dengan menyisipkan sebuah simpul pada setiap sisi rim pada graf roda. Graf gir yang diperoleh dari graf roda W_n dinotasikan dengan G_n.*



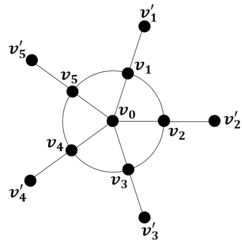
Gambar 2.8 Graf Gir G_5

Graf gir G_5 dengan himpunan simpul $V(G_5) = V(K_1) \cup V(C_5) \cup \{v_1', v_2', ..., v_5'\} = \{v_0\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_5\} \cup \{v_1', v_2', ..., v_5'\}$ diilustrasikan pada Gambar 2.8.

2.2.5 Graf Helm

Graf helm dibentuk dari penambahan n sisi pada graf roda W_n. Untuk lebih jelasnya, pengertian dari graf helm dapat dilihat pada Definisi 2.2.13.

Definisi 2.2.13 [14] *Graf helm H_n diperoleh dengan merekatkan salah satu simpul ujung dari sebuah sisi tambahan pada simpul v_i dari graf roda W_n, untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*



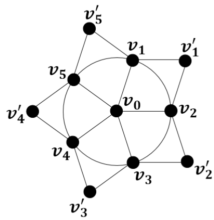
Gambar 2.9 Graf Helm H_5

Ilustrasi pada Gambar 2.9 merupakan contoh graf helm H_5 dengan himpunan simpul $V(H_5) = V(K_1) \cup V(C_5) \cup \{v_1', v_2', ..., v_5'\} = \{v_0\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_5\} \cup \{v_1', v_2', ..., v_5'\}$.

2.2.6 Graf Bunga Matahari

Sama halnya dengan graf gir, graf bunga matahari Sf_n juga didapat dengan menambahkan n simpul pada graf roda W_n, namun dengan cara yang berbeda. Graf bunga matahari didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2.14 [9] *Graf bunga matahari Sf_n didapat dari graf roda W_n dengan himpunan simpul rim $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ yang ditambahkan n simpul tambahan $v'_1, v'_2, ..., v'_n$ dimana simpul tambahan v'_i dikenakan operasi join dengan simpul v_i dan $v_{i+1(mod\, n)}$.*



Gambar 2.10 Graf Bunga Matahari Sf_5

Gambar 2.10 mengilustrasikan graf helm H_5 dengan himpunan simpul $V(Sf_5) = V(K_1) \cup V(C_5) \cup \{v'_1, v'_2, ..., v'_5\} = \{v_0\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_5\} \cup \{v'_1, v'_2, ..., v'_5\}$

2.3 Pelabelan Graf

Pada subbab ini dijelaskan mengenai pelabelan graf khususnya pelabelan prima dan pelabelan prima lingkungan.

Definisi 2.3.1 [1] *Pelabelan graf adalah pemberian label pada elemen dari sebuah graf G. Elemen graf tersebut bisa berupa simpul, sisi atau keduanya dari graf G.*

Jika hanya simpul dari graf G yang dilabelkan, maka graf yang dihasilkan adalah graf pelabelan simpul, begitu juga jika yang dilabelkan hanya sisi saja, maka menghasilkan graf pelabelan sisi, sedangkan jika yang dilabelkan adalah simpul dan sisi, maka menghasilkan graf pelabelan total.

2.3.1 Pelabelan Prima (*Prime Labeling*)

Sebelum mendefinisikan pelabelan prima, terlebih dahulu diberikan definisi gcd (*greatest common divisor*) atau pembagi persekutuan terbesar seperti dalam Definisi 2.3.2.

Definisi 2.3.2 [12] *Diberikan dua bilangan bulat a dan b. Pembagi persekutuan terbesar dari a dan b, $gcd(a, b)$ adalah suatu bilangan bulat positif $d \geq 1$ yang memenuhi*

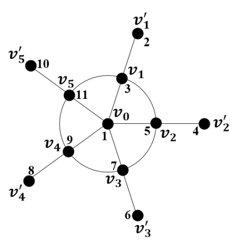
i. d membagi a dan d membagi b.

ii. Untuk sebarang bilangan bulat c, bila c membagi a dan b, maka c membagi d.

Dengan kata lain, $gcd(a, b)$ adalah bilangan bulat terbesar di dalam himpunan dari semua pembagi persekutuan dari a dan b. Dua bilangan bulat dikatakan relatif prima jika nilai gcdnya sama dengan satu. Konsep ini yang akan digunakan dalam pelabelan prima.

Definisi 2.3.3 [13] *Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$ dengan n simpul. Suatu fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., n\}$ disebut pelabelan prima jika untuk setiap dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$ dengan u bertetangga dengan v, $gcd\{f(u), f(v)\} = 1$. Graf yang memenuhi pelabelan prima disebut graf prima.*

Berikut ini adalah contoh pelabelan prima pada graf H_5:



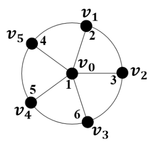
Gambar 2.11 Pelabelan Prima pada Graf H_5

2.3.2 Pelabelan Prima Lingkungan (*Neighbourhood Prime Labeling*)

Pelabelan prima lingkungan merupakan perkembangan dari pelabelan prima. Sesuai dengan namanya, pelabelan ini berarti melabeli lingkungan terbuka dari suatu simpul dengan bilangan bulat yang relatif prima. Pengertian pelabelan prima lingkungan dijelaskan dalam Definisi 2.3.4.

Definisi 2.3.4 [8] *Suatu graf* $G = (V(G), E(G))$ *dengan* n *simpul dikatakan memiliki pelabelan prima lingkungan jika terdapat pemetaan bijektif* $f : V(G) \to \{1, 2, 3, ..., n\}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $v \in V(G)$ *dengan* $deg(v) > 1$*,* $gcd\{f(u) : u \in N(v)\} = 1$*. Graf yang memenuhi pelabelan prima lingkungan disebut graf prima lingkungan.*

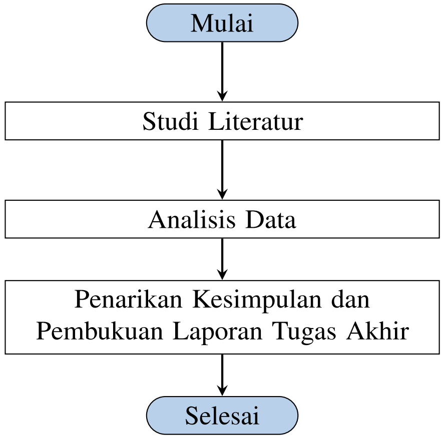
Gambar 2.12 merupakan contoh pelabelan prima lingkungan pada graf W_5



Gambar 2.12 Pelabelan Prima Lingkungan pada Graf W_5

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bagian ini dijelaskan mengenai langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah Tugas Akhir ini.



Gambar 3.1 *Flowchart* Proses Pengerjaan Tugas Akhir

Adapun penjelasan dari masing-masing tahapan dari *flowchart* di atas sebagai berikut:

1. **Studi Literatur**
   Tahap pertama adalah melakukan studi referensi mengenai istilah dan pengertian yang terkait pada beberapa graf terkait roda yang dibahas dalam tugas akhir ini, pelabelan pada graf khususnya pelabelan *Neighbourhood Prime* dan jenisnya serta hal yang berhubungan dengan tugas akhir ini. Studi literatur yang dilakukan bersumber pada *e-book*, jurnal, dan paper internasional yang terkait.

2. **Analisis Data**
   Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap ini adalah:

   a Mengontruksi graf C_n, S_n, dan beberapa graf terkait roda mulai dari W_n, G_n, H_n dan S_n dengan $n \geq 4$.

   b Memberikan label prima lingkungan tertutup bersama pada setiap simpul masing-masing graf yang telah dikonstruksikan.

   c Menentukan aturan pelabelan.

3. **Penarikan Kesimpulan dan Pembukuan Tugas Akhir**
   Pada tahap terakhir, ditarik kesimpulan berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dan dibukukan dalam Tugas Akhir.

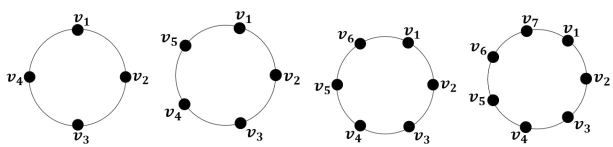
BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai proses mengonstruksi graf-graf terkait, konsep pelabelan prima lingkungan tertutup bersama, serta langkah-langkah pembuktian pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf dasar dan graf terkait roda.

4.1 Konstruksi Graf Dasar dan Graf Terkait Roda

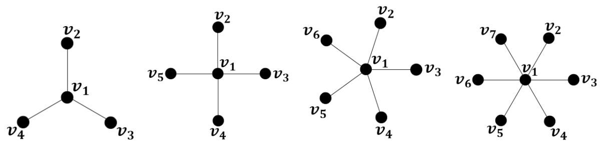
Graf yang dikonstruksi adalah graf C_n, S_n, dan beberapa graf terkait roda mulai dari W_n, G_n, H_n dan S_n dengan $n \geq 4$.

1. Graf siklus C_n
   Gambar 4.1 mengilustrasikan graf C_4, C_5, C_6, dan C_7.



Gambar 4.1 Konstruksi Graf Siklus C_4, C_5, C_6, dan C_7

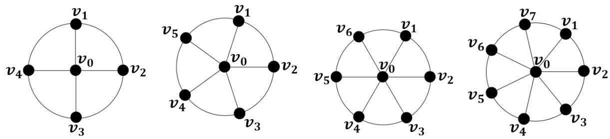
2. Graf bintang S_n
   Contoh konstruksi graf bintang S_4, S_5, S_6, dan S_7 diperlihatkan pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Konstruksi Graf Bintang S_4, S_5, S_6, dan S_7

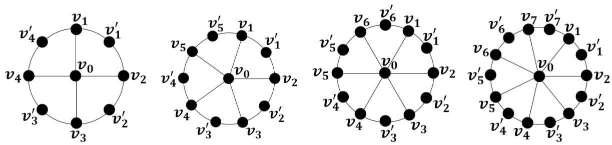
3. Graf roda W_n

Contoh konstruksi graf roda W_4, W_5, W_6, dan W_7 diilustrasikan pada Gambar 4.3.



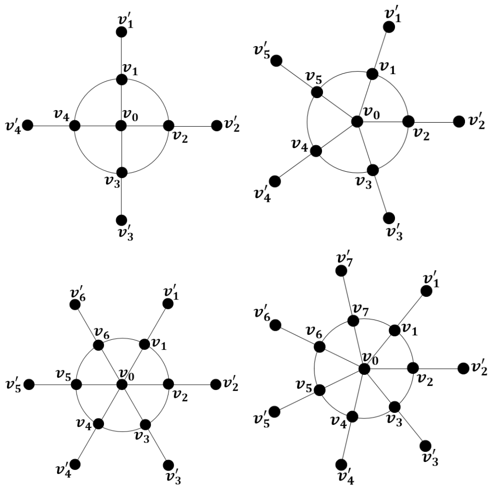
Gambar 4.3 Konstruksi Graf Roda W_4, W_5, W_6, dan W_7

4. Graf gir G_n
   Contoh konstruksi graf gir G_4, G_5, G_6, dan G_7 diperlihatkan pada Gambar 4.4.



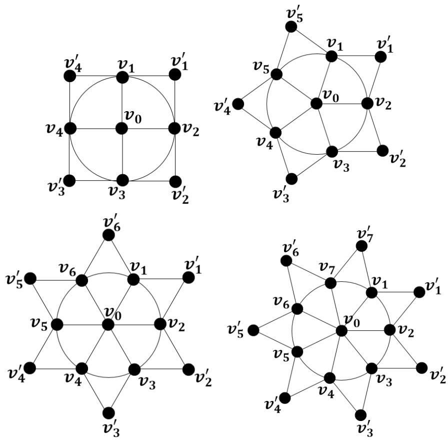
Gambar 4.4 Konstruksi Graf Gir G_4, G_5, G_6, dan G_7

5. Graf helm H_n
   Contoh konstruksi graf helm H_4, H_5, H_6, dan H_7 seperti diilustrasikan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Konstruksi Graf Helm H_4, H_5, H_6, dan H_7

6. Graf Bunga Matahari Sf_n
   Contoh konstruksi graf bunga matahari Sf_4, Sf_5, Sf_6, dan Sf_7 diperlihatkan pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Konstruksi Graf Bunga Matahari
Sf_4, Sf_5, Sf_6, dan Sf_7

Hasil-hasil utama Tugas Akhir ini disajikan dalam Subbab 4.2 sampai dengan 4.5 yaitu berturut-turut merumuskan konsep pelabelan prima lingkungan tertutup bersama, langkah-langkah pelabelan lingkungan tertutup bersama pada graf dasar dan graf terkait roda, dan hubungan antara pelabelan prima, pelabelan prima lingkungan, dan prima lingkungan tertutup bersama.

4.2 Konsep Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama

Konsep pelabelan prima lingkungan tertutup bersama dikembangkan dari konsep pelabelan prima dan pelabelan prima lingkungan. Pelabelan prima lingkungan tertutup bersama merupakan pelabelan simpul dimana untuk setiap dua simpul yang bertetangga pada lingkungan tertutup bersamanya, dilabelkan dengan bilangan sedemikian hingga pembagi bersama terbesar dari bilangan-bilangan tersebut adalah satu. Berdasarkan konsep tersebut, dirumuskan sebuah definisi sebagai berikut:

Definisi 4.2.1 *Graf G dikatakan memiliki pelabelan prima* *lingkungan tertutup bersama jika terdapat fungsi bijektif* $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., n\}$ *sedemikian hingga untuk setiap dua titik berbeda* $u, v \in V(G)$ *dengan* u *bertetangga dengan* v, $gcd\{f(w) : w \in N[u, v]\} = 1$. *Graf yang mempunyai pelabelan prima lingkungan tertutup bersama disebut graf prima lingkungan tertutup bersama.*

Himpunan $N[u, v]$ merupakan lingkungan tertutup bersama dari simpul u dan v, yaitu irisan dari lingkungan tertutup simpul u dengan lingkungan tertutup simpul v, dapat ditulis sebagai $N[u, v] = N[u] \cap N[v]$.

4.3 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Dasar

Graf dasar yang dimaksud adalah graf siklus C_n dan graf bintang S_n dengan $n \geq 4$.

4.3.1 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Siklus

Algoritma pelabelan lingkungan tertutup bersama pada graf siklus disajikan dalam Algoritma 4.1.

Algoritma 4.1.
Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Graf Siklus C_n.

Langkah 1.
Dimisalkan G adalah suatu graf siklus C_n.

Graf G memiliki himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, ..., v_nv_1\}$, sehingga jelas bahwa $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = n$.

Langkah 2.

Diambil dua simpul bertetangga v_i dan v_{i+1} dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Lingkungan tertutup dari simpul v_i adalah $N[v_i] = \{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari simpul v_{i+1} adalah $N[v_{i+1}] = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_i, v_{i+1}] = \{v_i, v_{i+1}\}$.

Langkah 3.
Didefinisikan suatu fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., n\}$ dengan $f(v_i) = i$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Fungsi $f(v_i) = i$ merupakan fungsi bijektif karena bersifat injektif dan surjektif. Bukti bahwa $f(v_i) = i$ merupakan fungsi injektif yaitu dengan mengambil sebarang $v_a, v_b \in V(G)$ dengan $f(v_a) = f(v_b)$, harus dibuktikan $a = b$. Dapat dilihat bahwa

$$\begin{aligned} & f(v_a) = f(v_b) \\ \Leftrightarrow \quad & a = b \end{aligned}$$

Jadi diperoleh $a = b$. Dengan demikian, f adalah fungsi injektif.
Selanjutnya bukti bahwa $f(v_i) = i$ merupakan fungsi surjektif yaitu dengan mengambil $b \in \{1, 2, ..., n\}$, kemudian ditunjukkan terdapat $x \in V(G)$ sehingga $f(x) = b$.

$$\begin{aligned} & f(x) = b \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) = f(v_i) && \text{, untuk suatu } i \in \{1, 2, ..., n\} \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) = i && \text{, untuk suatu } i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ (definisi)} \\ \Leftrightarrow \quad & x = v_i && \text{, untuk suatu } i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ (definisi)} \end{aligned}$$

Jadi terdapat $x = v_i \in V(G)$ sedemikian sehingga,

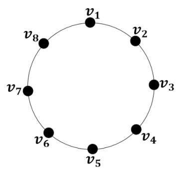
$$\begin{aligned} & f(x) = b \\ \Leftrightarrow \quad & f(v_i) = i \end{aligned}$$

Dengan demikian, $f(v_i) = i$ merupakan fungsi surjektif.
Jadi, terbukti bahwa fungsi $f(v_i) = i$ adalah fungsi bijektif.

Langkah 4.
Diperiksa nilai dari $gcd\{f(v_i), f(v_{i+1})\}$.

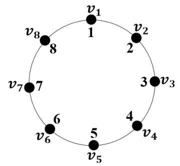
Apabila didapat $gcd\{f(v_i), f(v_{i+1})\} = 1$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$, maka graf G memiliki pelabelan prima lingkungan tertutup bersama. Karena $f(v_i) = i$ dan $f(v_{i+1}) = i + 1$, maka pastilah $gcd\{f(v_i), f(v_{i+1})\} = 1$. Sebab misalkan $f(v_i)$ bilangan bulat ganjil, maka $f(v_{i+1})$ adalah bilangan bulat genap dan sebaliknya.
Akibatnya, dapat disimpulkan bahwa graf siklus $G \cong C_n$ memiliki pelabelan prima lingkungan tertutup bersama. Jadi, graf siklus merupakan graf prima lingkungan tertutup bersama.

Graf C_n dengan $n = 8$ dan $n = 9$ bersama nama titik-titiknya masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.7 dan Gambar 4.9. Contoh pelabelan lingkungan tertutup bersama pada graf siklus dengan $n = 8$ dan $n = 9$ masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.8 dan Gambar 4.10.

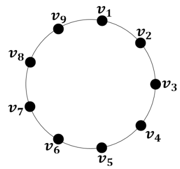


Gambar 4.7 Graf Siklus C_8

Simpul dari graf siklus C_8 pada Gambar 4.7 dilabeli dengan fungsi yang memenuhi $f(v_i) = i$, untuk $i \in \{1, 2, ..., 8\}$.

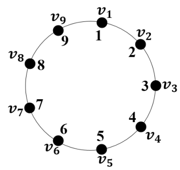


Gambar 4.8 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Siklus C_8



Gambar 4.9 Graf Siklus C_9

Graf siklus C_9 dilabeli dengan fungsi yang memenuhi $f(v_i) = i$, untuk $i \in \{1, 2, ..., 9\}$.



Gambar 4.10 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Siklus C_9

4.3.2 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Bintang

Algoritma pelabelan lingkungan tertutup bersama pada graf bintang disajikan dalam Algoritma 4.2.

Algoritma 4.2.
Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Graf Bintang S_n.

Langkah 1.
Dimisalkan G adalah suatu graf bintang S_n.

Himpunan simpul dari graf G adalah $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, ..., v_1v_{n-1}\}$. Dapat dilihat bahwa $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = n - 1$.

Langkah 2.
Diambil dua simpul bertetangga v_i dan v_{i+1} dengan $i \in \{2, 3, ..., n\}$.

Lingkungan tertutup dari simpul v_1 adalah $N[v_1] = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v_i adalah $N[v_i] = \{v_1, v_i\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_1, v_i] = \{v_1, v_i\}$.

Langkah 3.
Didefinisikan fungsi bijektif $f : V(G) \to \{1, 2, ..., n\}$ dengan $f(v_i) = i$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

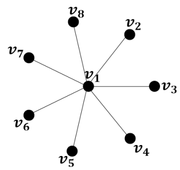
Fungsi $f(v_i) = i$ merupakan fungsi bijektif karena bersifat injektif dan surjektif. Bukti bahwa $f(v_i) = i$ bersifat injektif dan surjektif telah dijelaskan pada pelabelan prima lingkungan tertutup pada graf siklus.

Langkah 4.
Diperiksa nilai dari $gcd\{f(v_1), f(v_i)\}$.

Apabila didapat $gcd\{f(v_1), f(v_i)\} = 1$ untuk $i \in \{2, 3, ..., n\}$, maka graf G memiliki pelabelan prima lingkungan tertutup bersama. Karena $f(v_i) = i$ dan $f(v_1) = 1$, maka pastilah $gcd\{f(v_1), f(v_i)\} = 1$.

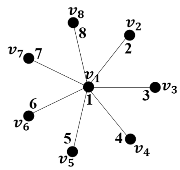
Akibatnya dapat disimpulkan bahwa graf $G \cong S_n$ memiliki pelabelan prima lingkungan tertutup bersama. Jadi, graf bintang merupakan graf prima lingkungan tertutup bersama.

Graf bintang S_n dengan $n = 8$ dan $n = 9$ beserta nama simpul-simpulnya masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.11 dan Gambar 4.13. Contoh pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf bintang dengan $n = 8$ dan $n = 9$ masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.12 dan Gambar 4.14.

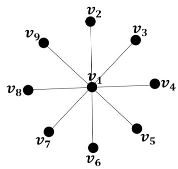


Gambar 4.11 Graf Bintang S_8

Gambar 4.11 kemudian dilabeli dengan fungsi $f(v_i) = i$, untuk $i \in \{1, 2, ..., 8\}$, sehingga didapat Gambar 4.12.

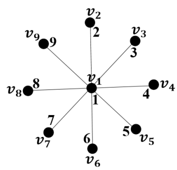


Gambar 4.12 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Bintang S_8



Gambar 4.13 Graf Bintang S_9

Berikut pemberian label di simpul dari graf bintang S_9 dengan fungsi $f(v_i) = i$, untuk $i \in \{1, 2, ..., 9\}$.



Gambar 4.14 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Bintang S_9

4.4 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Terkait Roda

Graf terkait roda yang dimaksud adalah graf roda W_n, graf gir G_n, graf helm H_n dan graf bunga matahari Sf_n dengan $n \geq 4$.

4.4.1 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Roda

Algoritma pelabelan lingkungan tertutup bersama pada graf roda disajikan dalam Algoritma 4.3.

Algoritma 4.3.
Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Graf Roda W_n.

Langkah 1.

Dimisalkan G adalah suatu graf roda W_n.

Himpunan simpul graf G adalah $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_n\}$ dengan v_0 adalah simpul berderajat n dan untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., n\}$, v_i adalah simpul di C_n dari G. Himpunan sisi graf G adalah $E(G) = \{v_0v_1, v_0v_2, ..., v_0v_n, v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$, maka jelas bahwa $|V(G)| = n + 1$ dan $|E(G)| = 2n$.

Langkah 2.
Ditinjau dari dua simpul yang bertetangga di G, terdapat dua kasus:

a) Dua simpul bertetangga di G yang merupakan simpul ujung dari sisi rim G:

   Misalkan diambil dua simpul v_i dan v_{i+1} dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup v_i adalah $N[v_i] = \{v_0, v_i, v_{i+1}, v_{i-1}\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v_{i+1} adalah $N[v_{i+1}] = \{v_0, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_i, v_{i+1}] = \{v_0, v_i, v_{i+1}\}$.

b) Dua simpul bertetangga yang merupakan simpul ujung dari sisi apeks dari G:

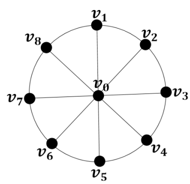
   Misalkan diambil dua simpul bertetangga v_0 dan v_i dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup v_0 adalah $N[v_0] = \{v_0, v_i, v_{i+1}, ..., v_n\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v_i adalah $N[v_i] = \{v_0, v_i, v_{i+1}, v_{i-1}\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_0, v_i] = \{v_0, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\}$.

Langkah 3.
Didefinisikan fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., n + 1\}$ dengan $f(v_i) = i + 1$ untuk $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Langkah 4.
Diperiksa nilai dari $gcd\{f(v_0), f(v_i), f(v_{i+1})\}$ serta nilai dari $gcd\{f(v_0), f(v_{i-1}), f(v_i), f(v_{i+1})\}$.

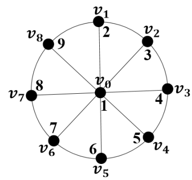
Apabila didapat keduanya bernilai 1 untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$, maka graf G memiliki pelabelan prima lingkungan tertutup bersama.
Tampak bahwa $f(v_0) = 1$ maka $gcd\{f(v_0), f(v_i), f(v_{i+1})\} = 1$ dan $gcd\{f(v_0), f(v_{i-1}), f(v_i), f(v_{i+1})\} = 1$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Akibatnya, dapat disimpulkan bahwa graf $G \cong W_n$ memiliki pelabelan prima lingkungan tertutup bersama. Jadi, graf roda merupakan graf prima lingkungan tertutup bersama.

Graf roda W_n dengan $n = 8$ dan $n = 9$ beserta nama simpul-simpulnya masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.15 dan Gambar 4.17. Contoh pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf roda dengan $n = 8$ dan $n = 9$ masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.16 dan Gambar 4.18.

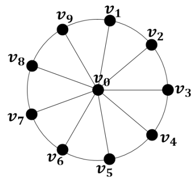


Gambar 4.15 Graf Roda W_8

Simpul dari graf roda W_8 dilabeli dengan fungsi yang memenuhi $f(v_i) = i + 1$, untuk $i \in \{0, 1, 2, ..., 8\}$.

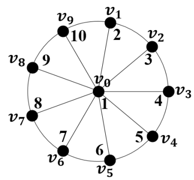


Gambar 4.16 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Roda W_8



Gambar 4.17 Graf Roda W_9

Graf roda W_9 pada Gambar 4.17 dilabeli dengan fungsi yang memenuhi $f(v_i) = i + 1$, untuk $i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.



Gambar 4.18 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Roda W_9

4.4.2 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Gir

Algoritma pelabelan lingkungan tertutup bersama pada graf gir disajikan dalam Algoritma 4.4.

Algoritma 4.4.
Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Graf Gir G_n.

Langkah 1.
Dimisalkan G adalah suatu graf gir G_n.

Himpunan simpul dari graf G adalah $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_n, v'_1, v'_2, ..., v'_n\} = A \cup B$ dengan $A = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan $B = \{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$. Himpunan sisi graf G adalah $E(G) = \{v_0v_1, v_0v_2, ..., v_0v_n, v_1v'_1, v'_1v_2, v_2v'_2, v'_2v_3, ..., v_nv'_n, v'_nv_1\}$. Dapat diketahui bahwa $|V(G)| = 2n + 1$ dan $|E(G)| = 3n$.

Langkah 2.
Ditinjau dari dua simpul yang bertetangga di G, terdapat tiga kasus:

a) Dua simpul bertetangga yang merupakan simpul ujung dari sisi apeks dari G:

   Misalkan diambil simpul v_0 dan v_i dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup v_0 adalah $N[v_0] = \{v_0, v_i, v_{i+1}, ..., v_n\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v_i adalah $N[v_i] = \{v_0, v_iv'_i, v'_{i-1}\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_0, v_i] = \{v_0, v_i\}$.

b) Dua simpul bertetangga yang merupakan simpul ujung dari sisi rim G:

   Misalkan diambil simpul v_i dan v'_i dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup dari v_i adalah $N[v_i] = \{v_0, v_i, v'_{i-1}, v'_i\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v'_i adalah $N[v'_i] = \{v_i, v_{i+1}, v'_i\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_i, v'_i] = \{v_i, v'_i\}$.

c) Dua simpul bertetangga yang merupakan simpul ujung dari sisi rim G yang lain:

Misalkan diambil simpul v_i' dan v_{i+1} dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup v_i' adalah $N[v_i'] = \{v_i, v_{i+1}, v_i'\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v_{i+1} adalah $N[v_{i+1}] = \{v_0, v_{i+1}, v_i', v_{i+1}'\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_i' v_{i+1}] = \{v_{i+1}, v_i'\}$.

Langkah 3.
Didefinisikan dua fungsi bijektif $f : V(G) \to \{1, ..., 2n + 1\}$ yaitu:
$f : A \to \{1, 2, 4, 6, ..., 2n\}$ yang memenuhi:

$$f(v_i) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{untuk} & i \in \{0\} \\ 2i & \text{untuk} & i \in \{1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

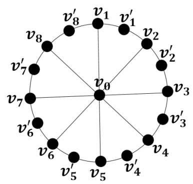
$f : B \to \{3, 5, ..., 2n + 1\}$ yang memenuhi:

$$f(v_i') = 2i + 1 \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Langkah 4.
Diperiksa nilai $gcd\{f(v_0), f(v_i)\}$, $gcd\{f(v_i), f(v_i')\}$, dan $gcd\{f(v_{i+1}), f(v_i')\}$.

Apabila ketiganya bernilai 1 untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$, maka graf G memiliki pelabelan lingkungan tertutup bersama.
Tampak bahwa $f(v_0) = 1$, maka pastilah $gcd\{f(v_0), f(v_i)\} = 1$ berapapun nilai $f(v_i)$. Kemudian dapat dilihat bahwa $f(v_i) = 2i$, $f(v_{i+1}) = 2(i + 1) = 2i + 2$ dan $f(v_i') = 2i + 1$, maka didapat $f(v_i)$ dan $f(v_i')$ serta $f(v_{i+1})$ dan $f(v_i')$ pasti relatif prima. Sehingga $gcd\{f(v_i), f(v_i')\}$ dan $gcd\{f(v_{i+1}), f(v_i')\}$ pasti bernilai 1 untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Akibatnya, dapat disimpulkan bahwa graf $G \cong G_n$ memiliki pelabelan prima lingkungan tertutup bersama. Jadi, graf gir merupakan graf prima lingkungan tertutup bersama.

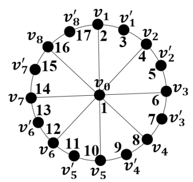
Graf gir G_n dengan $n = 8$ dan $n = 9$ beserta nama simpul-simpulnya masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.19 dan Gambar 4.21. Contoh pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf gir dengan $n = 8$ dan $n = 9$ masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.20 dan Gambar 4.22.



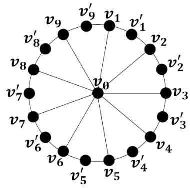
Gambar 4.19 Graf Gir G_8

Gambar 4.19 kemudian dilabeli dengan fungsi yang memenuhi:

$$f(v_i) = 1, \text{ untuk } i \in \{0\}$$
$$f(v_i) = 2i, \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., 8\}$$
$$f(v'_i) = 2i + 1, \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., 8\}$$



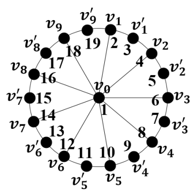
Gambar 4.20 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Gir G_8



Gambar 4.21 Graf Gir G_9

Berikut pemberian label di simpul dari graf gir G_9 dengan fungsi yang memenuhi:

$$f(v_i) = 1, \text{ untuk } i \in \{0\}$$
$$f(v_i) = 2i, \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., 9\}$$
$$f(v_i') = 2i + 1, \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., 9\}$$



Gambar 4.22 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Gir G_9

4.4.3 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Helm

Algoritma pelabelan lingkungan tertutup bersama pada graf helm disajikan dalam Algoritma 4.5.

Algoritma 4.5.
Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Graf Helm H_n.

Langkah 1.

Dimisalkan G adalah suatu graf helm H_n.

Graf G memiliki himpunan simpul $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_n, v'_1, v'_2, ..., v'_n\} = A \cup B$ dengan $A = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan $B = \{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$. Himpunan sisi $E(G) = \{v_0v_1, v_0v_2, ..., v_0v_n, v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n, v_nv_1, v_1v'_1, v_2v'_2, ..., v_nv'_n\}$. Dapat diketahui bahwa $|V(G)| = 2n + 1$ dan $|E(G)| = 3n$.

Langkah 2.
Ditinjau dari dua simpul yang bertetangga di G, terdapat tiga kasus:

a) Dua simpul bertetangga di G yang merupakan simpul ujung dari sisi rim dari G:

   Misalkan diambil simpul v_i dan v_{i+1} dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup v_i adalah $N[v_i] = \{v_0, v_i, v_{i-1}, v_{i+1}, v'_i\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v_{i+1} adalah $N[v_{i+1}] = \{v_0, v_i, v_{i+2}, v'_{i+1}\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_i, v_{i+1}] = \{v_0, v_i, v_{i+1}\}$.

b) Ditinjau dua simpul bertetangga yang merupakan simpul ujung dari sisi apeks dari G:

   Misalkan diambil simpul v_0 dan v_i dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup v_0 adalah $N[v_0] = \{v_0, v_i, v_{i+1}, ..., v_n\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v_i adalah $N[v_i] = \{v_0, v_i, v_{i-1}, v_{i+1}, v'_i\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_0, v_i] = \{v_0, v_i, v_{i-1}, v_{i+1}\}$.

c) Dua simpul bertetangga yang merupakan simpul ujung dari sisi anting dari G:

   Misalkan diambil simpul v_i dan v'_i dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup v_i adalah $N[v_i] = \{v_0, v_i, v_{i-1}, v_{i+1}, v'_i\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v'_i adalah $N[v'_i] =$

$\{v_i, v_i'\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_i, v_i'] = \{v_i, v_i'\}$.

Langkah 3.
Didefinisikan dua fungsi bijektif $f : V(G) \to \{1, ..., 2n+1\}$ yaitu:
$f : A \to \{1, 3, 5, ..., 2n+1\}$ yang memenuhi:

$$f(v_i) = 2i + 1 \text{ untuk } i \in \{0, 1, 2, ..., n\}.$$

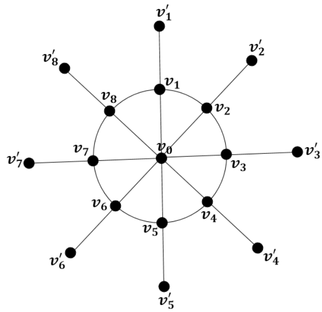
$f : B \to \{2, 4, 6, ..., 2n\}$ yang memenuhi:

$$f(v_i') = 2i \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Langkah 4.
Diperiksa nilai $gcd\{f(v_0), f(v_i), f(v_{i+1})\}$, $gcd\{f(v_i), f(v_i')\}$ dan $gcd\{f(v_0), f(v_i), f(v_{i-1}), f(v_{i+1})\}$.

Apabila ketiganya bernilai 1 untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$, maka graf G memiliki pelabelan lingkungan bersama.
Karena $f(v_0) = 1$, maka pastilah $gcd\{f(v_0), f(v_i), f(v_{i+1})\}$, dan $gcd\{f(v_0), f(v_i), f(v_{i-1}), f(v_{i+1})\}$ bernilai 1 untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Kemudian dapat dilihat bahwa $f(v_i) = 2i + 1$ dan $f(v_i) = 2i$, sehingga keduanya pasti relatif prima, yaitu $gcd\{f(v_i), f(v_i')\} = 1$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Akibatnya, dapat disimpulkan bahwa graf $G \cong H_n$ memiliki pelabelan prima lingkungan tertutup bersama. Jadi, graf helm merupakan graf prima lingkungan tertutup bersama.

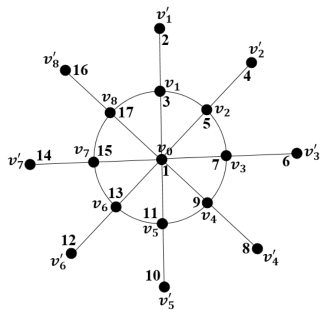
Graf helm H_n dengan $n = 8$ dan $n = 9$ beserta nama simpul-simpulnya masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.23 dan Gambar 4.25. Contoh pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf helm dengan $n = 8$ dan $n = 9$ masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.24 dan Gambar 4.26.



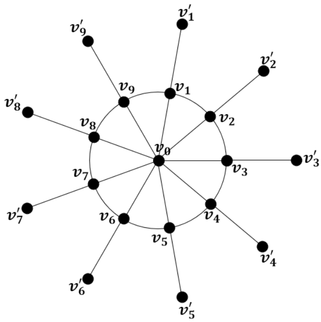
Gambar 4.23 Graf Helm H_8

Simpul dari graf helm H_8 diberi label dengan fungsi yang memenuhi:

$$f(v_i) = 2i + 1, \text{ untuk } i \in \{0, 1, 2, ..., 8\}$$
$$f(v'_i) = 2i, \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., 8\}$$



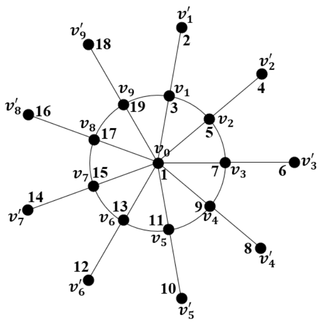
Gambar 4.24 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Helm H_8



Gambar 4.25 Graf Helm H_9

Gambar 4.25 diberi label pada simpulnya dengan fungsi yang memenuhi:

$$f(v_i) = 2i + 1, \text{ untuk } i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$$
$$f(v'_i) = 2i, \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., 9\}$$



Gambar 4.26 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Helm H_9

4.4.4 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Bunga Matahari

Algoritma pelabelan lingkungan tertutup bersama pada graf bintang disajikan dalam Algoritma 4.6.

Algoritma 4.6.
Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Graf Bunga Matahari Sf_n.

Langkah 1.
Dimisalkan G adalah suatu graf bunga matahari Sf_n.

Himpunan simpul dari graf G adalah $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_n, v_1', v_2', ..., v_n'\} = A \cup B$ dengan $A = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan $B = \{v_1', v_2', ..., v_n'\}$. Himpunan sisinya adalah $E(G) = \{v_0v_1, v_0v_2, ..., v_0v_n, v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n, v_nv_1, v_1v_1', v_2v_2', ..., v_nv_n'\}$. Diketahui bahwa $|V(G)| = 2n + 1$ dan $|E(G)| = 4n$.

Langkah 2.
Ditinjau dari dua simpul yang bertetangga di G, terdapat tiga kasus:

a) Dua simpul bertetangga di G yang merupakan simpul ujung dari sisi rim dari G:

   Misalkan diambil simpul v_i dan v_{i+1} dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup dari v_i adalah $N[v_i] = \{v_0, v_i, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i', v_{i-1}'\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v_{i+1} adalah $N[v_{i+1}] = \{v_0, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_i', v_{i+1}'\}$. Selanjutnya didapat, $N[v_i, v_{i+1}] = \{v_0, v_i, v_{i+1}, v_i'\}$.

b) Dua simpul bertetangga yang merupakan simpul ujung dari sisi apeks dari G:
   Misalkan diambil sisi v_0 dan v_i dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup v_0 adalah $N[v_0] = \{v_0, v_i, v_{i+1}, ..., v_n\}$,

sedangkan lingkungan tertutup dari v_i adalah $N[v_i] = \{v_0, v_i, v_{i-1}, v_{i+1}, v'_i, v'_{i-1}\}$. Selanjutnya, didapat $N[v_0, v_i] = \{v_0, v_i, v_{i-1}, v_{i+1}\}$.

c) Dua simpul bertetangga yang merupakan simpul ujung dari sisi anting dari G:

Misalkan diambil sisi v_i dan v'_i dengan $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lingkungan tertutup dari v_i adalah $N[v_i] = \{v_0, v_i, v_{i-1}, v_{i+1}, v'_i, v'_{i-1}\}$, sedangkan lingkungan tertutup dari v'_i adalah $N[v'_i] = \{v_i, v_{i+1}, v'_i\}$. Selanjutnya didapat, $N[v_i, v'_i] = \{v_i, v_{i+1}, v'_i\}$.

Langkah 3.
Didefinisikan dua fungsi bijektif $f : V(G) \to \{1, ..., 2n + 1\}$ yaitu:
$f : A \to \{1, 3, 5, ..., 2n + 1\}$ yang memenuhi:

$$f(v_i) = 2i + 1 \text{ untuk } i \in \{0, 1, 2, ..., n\}.$$

$f : B \to \{2, 4, 6, ..., 2n\}$ yang memenuhi:

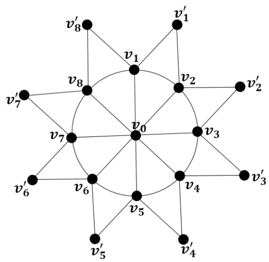
$$f(v'_i) = 2i \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Langkah 4.
Diperiksa nilai dari $gcd\{f(v_0), f(v_i), f(v_{i-1}), f(v_{i+1})\}$, $gcd\{f(v_0), f(v_i), f(v_{i+1}), f(v'_i)\}$, $gcd\{f(v_i), f(v_{i+1}), f(v'_i)\}$.

Apabila ketiganya bernilai 1. untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$, maka graf G memiliki pelabelan lingkungan bersama.
Dapat diperhatikan bahwa $f(v_0) = 2(0) + 1 = 1$, maka pastilah nilai dari $gcd\{f(v_0), f(v_i), f(v_{i+1}), f(v'_i)\}$ dan $gcd\{f(v_0), f(v_i), f(v_{i-1}), f(v_{i+1})\}$ adalah 1 untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Kemudian dapat dilihat bahwa $f(v_i) = 2i + 1$ dan $f(v'_i) = 2i$, sehingga keduanya pasti relatif prima dan $gcd\{f(v_i), f(v_{i+1}), f(v'_i)\}$

juga bernilai 1 untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Akibatnya, dapat disimpulkan bahwa graf $G \cong Sf_n$ memiliki pelabelan prima lingkungan tertutup bersama. Jadi, graf bunga mathari merupakan graf prima lingkungan tertutup bersama.

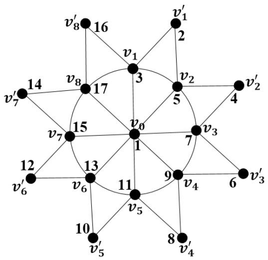
Graf bunga matahari Sf_n dengan $n = 8$ dan $n = 9$ beserta nama simpul-simpulnya masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.27 dan Gambar 4.29. Contoh pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf bunga matahari dengan $n = 8$ dan $n = 9$ masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.28 dan Gambar 4.30.



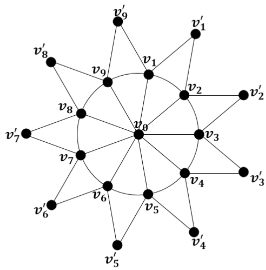
Gambar 4.27 Graf Bunga Matahari Sf_8

Gambar 4.27 dilabeli dengan fungsi yang memenuhi:

$$f(v_i) = 2i + 1, \text{ untuk } i \in \{0, 1, 2, ..., 8\}$$
$$f(v'_i) = 2i, \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., 8\}$$



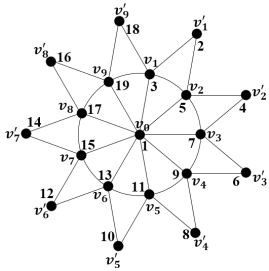
Gambar 4.28 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Bunga Matahari Sf_8



Gambar 4.29 Graf Bunga Matahari Sf_9

Graf bunga matahari Sf_9 dilabeli dengan fungsi yang memenuhi:

$$f(v_i) = 2i + 1, \text{ untuk } i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$$
$$f(v_i') = 2i, \text{ untuk } i \in \{1, 2, ..., 9\}$$



Gambar 4.30 Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Pada Graf Bunga Matahari Sf_9

4.5 Hubungan Pelabelan Prima, Prima Lingkungan, dan Prima Lingkungan Tertutup Bersama

Pada subbab ini dijelaskan mengenai hubungan antara pelabelan prima lingkungan tertutup bersama dengan dua pelabelan sebelumnya.

4.5.1 Hubungan Pelabelan Prima dengan Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama

Hubungan antara pelabelan prima dan pelabelan prima lingkungan tertutup bersama dapat ditentukan berdasarkan definisi dari kedua pelabelan tersebut. Definisi pelabelan prima terdapat pada Definisi 2.3.3, sedangkan definisi pelabelan prima lingkungan terttup bersama tertuang dalam Definisi 4.2.1.

Hubungan antara graf prima dan graf prima lingkungan tertutup bersama dituangkan dalam Teorema 4.5.1.

Teorema 4.5.1 *Misalkan G adalah graf terhubung berordo $n \geq 2$. Jika G adalah graf prima maka G adalah graf prima lingkungan tertutup bersama.*

Bukti:

Diketahui G adalah graf prima dan misalkan $u, v, w \in V(G)$.

Oleh karena G graf prima maka setiap dua simpul bertetangga $u, v \in V(G)$ mempunyai label dengan $gcd = 1$. Akibatnya jika $N[u, v] = \{u, v\}$, maka jelas $gcd\{f(u), f(v)\} = 1$.
Karena G adalah graf prima maka gcd dari $f(u)$ dengan setiap $f(w), w \in N(u)$ adalah 1. Akibatnya gcd label dari elemen-elemen $N[u]$ adalah 1. Demikian juga gcd label elemen-elemen dari $N[v]$ adalah 1. Akibatnya gcd label elemen-elemen dari $N[u, v]$ adalah 1.

Dari bukti di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa himpunan graf prima merupakan himpunan bagian dari himpunan graf prima lingkungan tertutup bersama, dengan kata lain graf yang memenuhi pelabelan prima pasti memenuhi pelabelan prima lingkungan tertutup bersama, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Contoh graf prima lingkungan tertutup bersama yang bukan merupakan graf Prima adalah graf roda W_n dengan n bilangan bulat ganjil.

4.5.2 Hubungan Pelabelan Prima Lingkungan dengan Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama

Sebelum membahas hubungan pelabelan prima lingkungan dengan pelabelan prima lingkungan tertutup bersama, akan dijelaskan hubungan pelabelan prima dengan pelabelan prima lingkungan.

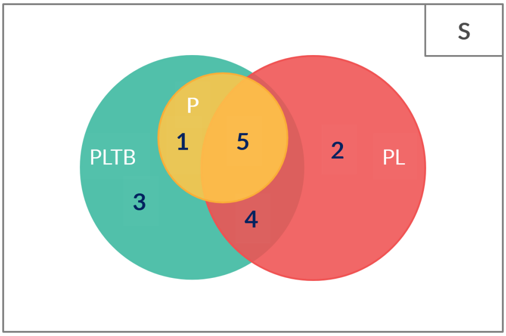
Remark [8] *Konsep dari graf prima dan graf prima lingkungan adalah independen sehingga suatu graf prima mungkin merupakan graf prima lingkungan atau mungkin bukan graf prima lingkungan, dan berlaku sebaliknya.*

Berdasarkan Remark di atas dapat diketahui bahwa himpunan graf prima beririsan dengan himpunan graf prima lingkungan. Karena pada Teorema 4.5.1 telah dijelaskan bahwa himpunan graf prima adalah subset atau himpunan bagian dari himpunan graf prima lingkungan tertutup bersama, maka himpunan graf prima lingkungan tertutup bersama juga beririsan dengan himpunan graf prima lingkungan.

Hubungan himpunan graf prima, graf prima lingkungan, dan graf prima lingkungan tertutup bersama serta contoh-contoh graf tersebut dijelaskan dalam Subsubbab 4.5.3.

4.5.3 Diagram Venn dan Contoh Graf

Ilustrasi hubungan antara pelabelan prima, prima lingkungan, dan prima lingkungan tertutup bersama diberikan pada Gambar 4.31.



Gambar 4.31 Diagram Venn Hubungan antara Himpunan Graf Prima, Prima Lingkungan, dan PLTB

Pada Gambar 4.31, S adalah himpunan semesta, P menyatakan Himpunan graf prima, PL menyatakan himpunan graf prima lingkungan, dan PLTB menyatakan himpunan graf prima lingkungan tertutup bersama. Kemudian angka-angka pada diagram tersebut digunakan hanya untuk mempermudah penyebutan bagiannya saja.

Berikut beberapa contoh graf dalam masing-masing bagian pada diagram di atas.

Tabel 4.1 Contoh Graf dan Himpunan yang Dipenuhi.

Bagian	Memenuhi Himpunan	Contoh Graf
1	P, PLTB	C_n dengan n kelipatan 6.
2	PL	$N(C_4, 5, 3)$
3	PLTB	
4	PL, PLTB	W_n dengan n ganjil
5	P, PL, PLTB	P_n, C_n dengan n bukan kelipatan 6, W_n dengan n genap

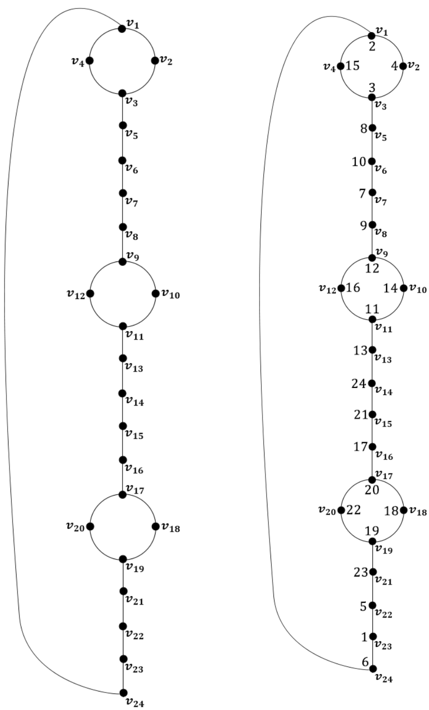
Telah disebutkan dalam [3] bahwa graf siklus C_n merupakan graf prima untuk setiap n. Kemudian dalam [8] juga telah dipelajari bahwa graf C_n merupakan graf prima lingkungan jika n bukan merupakan kelipatan 6 atau $n \neq 2$ (mod 4). Karena dalam tugas akhir ini telahdibuktikan bahwa graf C_n merupakan hgraf prima lingkungan tertutup bersama untuk setiap n, maka contoh graf pada bagian 1 Gambar 4.31 adalah C_n dengan n kelipatan 6 sedangkan graf C_n dengan n bukan merupakan kelipatan 6 merupakan contoh dari bagian 5 karena memenuhi ketiga pelabelan tersebut.

Pada [3] disebutkan bahwa graf roda W_n merupakan graf prima jika n genap, sedangkan pada [8] terdapat Teorema berikut:

Teorema 4.5.2 [8] *Diberikan* $G = (v(G), E(G))$ *suatu graf dengan* $n \geq 2$ *simpul. Jika terdapat sebuah simpul* $v_0 \in V(G)$ *yang berderajat* $n - 1$, *maka* G *merupakan graf prima lingkungan.*

Karena graf W_n memenuhi kondisi tersebut, maka graf W_n merupakan graf prima lingkungan untuk setiap n. Juga, dalam tugas akhir ini telah dibuktikan bahwa berlaku pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf W_n. Jadi graf W_n dengan n genap memenuhi ketiga pelabelan tersebut dan untuk n ganjil hanya memenuhi pelabelan prima lingkungan dan pelabelan prima lingkungan tertutup bersama.

Graf $N(C_4, 5, 3)$ pada Tabel 4.1 adalah graf kalung dengan $n = 4, l = 5$, dan $r = 3$. Graf Kalung (*Necklace Graph*) disimbolkan dengan $N(C_n, l, r)$ merupakan graf yang dibentuk oleh r buah manik-manik yang dihubungkan dengan lintasan sepanjang l dimana setiap manik-manik tersebut membentuk graf siklus C_n. Berikut merupakan gambar graf $N(C_4, 5, 3)$:



Gambar 4.32 a. Graf $N(C_4, 5, 3)$, b. Pelabelan Prima Lingkungan Pada Graf $N(C_4, 5, 3)$

Graf $N(C_4, 5, 3)$ memiliki 24 simpul dan 27 sisi. Pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf tersebut memiliki ketentuan yang sama dengan pelabelan prima, karena untuk setiap dua simpul yang bertetangga, lingkungan tertutup bersamanya merupakan kedua simpul itu sendiri. Graf $N(C_4, 5, 3)$ tidak dapat dilabelkan dengan pelabelan prima maupun prima lingkungan tertutup bersama karena pasti terdapat dua bilangan genap yang bertetangga. Namun, graf $N(C_4, 5, 3)$ dapat dilabelkan dengan pelabelan prima lingkungan. Pelabelan prima lingkungan pada graf $N(C_4, 5, 3)$ dapat dilihat pada Gambar 4.32 b.

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis pada bab IV, serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil studi, analisis data, dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Pelabelan prima lingkungan tertutup bersama berlaku pada graf siklus C_n dan graf bintang S_n yaitu dengan meninjau lingkungan tertutup bersama untuk setiap simpul yang bertetangga pada graf siklus C_n dan graf bintang S_n. Karena lingkungan tertutup bersama setiap dua simpul yang bertetangga adalah dua simpul itu sendiri, maka label untuk setiap simpul yang bertetangga harus relatif prima. Jadi didapat fungsi pelabelan $f(v_i) = i$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

2. Pelabelan prima lingkungan tertutup bersama berlaku pada graf graf-graf terkait roda yaitu dengan membagi kasus sesuai jenis sisi yang terbentuk dari setiap dua simpul yang bertetangga untuk meninjau lingkungan tertutup bersamanya. Kemudian didefinisikan fungsi agar label dari lingkungan tertutup bersama pada setiap dua simpul yang bertetangga saling relatif prima. Fungsi pelabelan masing-masing tertera dalam Tabel 5.1.

Tabel 5.1 Fungsi Pelabelan Prima Lingkungan Tertutup Bersama Graf Terkait Roda

Graf	**Fungsi Pelabelan**
W_n	$f(v_i) = i + 1$ untuk $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$
G_n	$f(v_i) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{untuk} & i \in \{0\} \\ 2i & \text{untuk} & i \in \{1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$
	$f(v_i') = 2i + 1$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$
H_n	$f(v_i) = 2i + 1$ untuk $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$
	$f(v_i') = 2i$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$
Sf_n	$f(v_i) = 2i + 1$ untuk $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$
	$f(v_i') = 2i$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$

5.2 Saran

Berdasarkan dari kesimpulan di atas, penulis menyarankan beberapa hal sebagai berikut:

1. Untuk penelitian selanjutnya dapat dibahas mengenai pelabelan prima lingkungan tertutup bersama pada graf hasil operasi yang lain.

2. Untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan program untuk melakukan pelabelan prima lingkungan tertutup bersama.

3. Pelabelan prima lingkungan tertutup bersama dapat dikembangkan menjadi pelabelan prima lingkungan tertutup bersama total, yaitu dengan melabeli simpul dan sisi graf.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G., Egan, C., and Zhang, P. (2019). *How to Label a Graph*. Springer.

[2] Chartrand, G., Lesniak, L., and Zhang, P. (2010). *Graphs & digraphs*, volume 39. CRC press.

[3] Gallian, J. A. (2019). *A dynamic survey of graph labeling*. Electronic Journal of Combinatorics, 1(DynamicSurveys):DS6.

[4] Gross, J. L. and Yellen, J. (2005). *Graph theory and its applications*. CRC press.

[5] Harary, F. (1999). *Graph Theory*.

[6] Kumar, T. R. and Varkey, T. M. (2018). *A note on total neighborhood prime labelings*. Internat. J. Pure and Appl. Math, 118(4):1007–1013.

[7] Lavanya, S. and Ganesan, V. (2019). *Prime labeling of split graph of cycle cn*.

[8] Patel, S. K. and Shrimali, N. P. (2015). *Neighborhood-prime labeling*. International Journal of Mathematics and Soft Computing, 5(2):135–143.

[9] Ponraj, R., Narayanan, S. S., and Kala, R. (2015). *A note on difference cordial graphs*. Palestine Journal of mathematics, 4(1):189–197.

[10] Raj, P. L. R. and Sheriff, M. M. (2019). *Some more results on neighbourhood-prime labeling of graphs*.

[11] Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics & Applications*. McGraw-Hill.

[12] Subiono (2016). *Aljabar sebagai suatu pondasi matematika*.

[13] Tout, R., Dabboucy, A., and Howalla, K. (1982). *Prime labeling of graphs*. National Academy Science Letters-India, 5(11):365–368.

[14] Vaidya, S. and Shah, N. (2013). *Prime cordial labeling of some wheel related graphs*. Malaya Journal of Matematik, 4(1):148–156.

BIODATA PENULIS

Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan Syaiful Ashar dan Siti Asna. Penulis dilahirkan di Kabupaten Gresik pada tanggal 2 Juli 1998. Penulis menempuh pendidikan dimulai dari SD Muhammadiyah GKB Gresik, MTs YKUI Ponpes. Maskumambang Dukun Gresik yang dilanjutkan dengan SMP Muhammadiyah 4 Giri Gresik, dan SMAN 1 Gresik hingga akhirnya menempuh masa perkuliahan di Departemen Matematika Fakultas Sains dan Analitika Data (FSAD) ITS. Selama mengenyam kehidupan kuliahnya, penulis juga mengikuti beberapa organisasi intra kampus, yaitu UKM Taekwondo, UKM IFLS khususnya pada acara Big Event K-Fest dan Inochi, LDD Ibnu Muqlah, serta menjadi staff pada Big Event HIMATIKA yakni OMITS 12th dan 13th. Mengenai Informasi lebih lanjut serta kritik dan saran dapat menghubungi penulis via *e-mail saverina16@mhs.matematika.its.ac.id*.