



TUGAS AKHIR - KM184801

**KONTROL OPTIMUM SISTEM INVENTORI-PRODUKSI
DENGAN MEMPERHATIKAN KERUSAKAN PRODUK PADA
UMKM (USAHA MIKRO KECIL DAN MENENGAH)**

JINANDYA MENTARI NURRACHELIA
0611164000064

Dosen Pembimbing
Subchan, Ph.D.

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



TUGAS AKHIR – KM184801

**KONTROL OPTIMUM SISTEM INVENTORI-
PRODUKSI DENGAN MEMPERHATIKAN
KERUSAKAN PRODUK PADA UMKM (USAHA
MIKRO KECIL DAN MENENGAH)**

**JINANDYA MENTARI NURRACHELIA
NRP. 0611164000064**

**Dosen Pembimbing:
Subchan, Ph.D**

**Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020**



FINAL PROJECT – KM184801

***OPTIMUM CONTROL OF PRODUCTION-INVENTORY
SYSTEMS WITH DETERIORATING PRODUCT AT
MSME (MICRO SMALL AND MEDIUM ENTERPRISE)***

**JINANDYA MENTARI NURRACHELIA
NRP. 0611164000064**

**Supervisor:
Subchan, Ph.D**

**Department of Matematics
Faculty of Sains and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020**

LEMBAR PENGESAHAN

KONTROL OPTIMUM SISTEM INVENTORI- PRODUKSI DENGAN MEMPERHATIKAN KERUSAKAN PRODUK PADA UMKM (USAHA MIKRO KECIL DAN MENENGAH)

OPTIMUM CONTROL OF PRODUCTION-INVENTORY SYSTEMS WITH DETERIORATING PRODUCT AT MSME (MICRO SMALL AND MEDIUM ENTERPRISE)

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
Oleh:

Jinandya Mentari Nurrachelia
NRP. 06111640000064

Menyetujui,
Dosen Pembimbing I,



Subchan, Ph.D

NIP. 19710513 199702 1 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FMKSD-ITS



Subchan, Ph.D

NIP. 19710513 199702 1 001

ABSTRAK

UMKM merupakan suatu usaha perdagangan yang dikelola oleh perorangan maupun badan usaha dalam lingkup kecil atau mikro, oleh karena itu didalam UMKM sangat diperlukan adanya pengendalian persediaan untuk meningkatkan kualitas produk yang dijual. Untuk mengendalikan persediaan atau mengoptimalkan masalah inventori adalah dengan menggunakan model sistem inventori-produksi yang merupakan model dinamik sehingga dapat disajikan sebagai masalah kontrol optimum. Penelitian ini membahas mengenai kontrol optimum suatu sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk pada salah satu UMKM di Jawa Barat. Penyelesaian kontrol optimum tersebut menggunakan prinsip maksimum pontryagin, sehingga solusi yang didapat berupa *state* dan *co state* sehingga dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan Runge Kutta orde 4.

Kata Kunci: *UMKM, kontrol optimum, sistem inventori-produksi, prinsip maksimum pontryagin.*

ABSTRACT

MSME is a trading business that is managed by individuals and business entities in the small or micro range, therefore the MSME is necessary for the control of supplies to improve the quality of products sold. To control inventory or optimize inventory problems is to use inventory-production system model that is dynamic model so it can be presented as optimum control problem. This research discusses the optimum control of an inventory-production system with the attention of product damage to one of the MSME in West Java. Completion of the optimum control using the maximum principle of pontryagin, so the solution obtained in the form of state and co state so that can be solved numerically by using the order Runge Kutta 4.

Keywords: *MSME, optimum control, production-inventori system, pontryagin maximum principle*

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke-hadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan limpahan rahmatNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

“KONTROL OPTIMUM SISTEM INVENTORI- PRODUKSI DENGAN MEMPERHATIKAN KERUSAKAN PRODUK PADA UMKM (USAHA MIKRO KECIL DAN MENENGAH)”

Sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Subchan, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika FSAD ITS dan dosen pembimbing yang telah memberikan dukungan, bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
2. Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si, Bapak Drs. Komar Baihaqi, M.Si dan Ibu Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si, MT selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tugas Akhir ini.

3. Bapak Prof. Dr. Mohamad Isa Irawan, MT selaku dosen wali yang telah membantu dan mendukung penulis selama menempuh pendidikan di ITS ini.
4. Ibu Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, MT selaku Sekretaris Program Studi Sarjana Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberikan arahan akademik dan menyusun jadwal.
5. Seluruh Bapak dan Ibu dosen serta para Staff Tata Usaha Departemen Matematika FSAD ITS.
6. Kedua orang tua serta saudara kandung yang penulis sayangi yaitu Mama, Papa, Dede dan Nenek, serta keluarga besar lainnya atas dukungan, doa, dan semangat yang tak kunjung berhenti untuk diberikan kepada penulis.
7. Teman seperjuangan dan sahabat penulis yaitu Nadhira Azane dan Annisa Rahmienda yang senantiasa memberikan semangat, motivasi, mendengar keluh kesah penulis, serta membantu penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
8. Teman-teman HEHEHE (Bunga, Masha, Hasna, Vivien, Aufa, Kirbek, Kirmad dan Erlin), teman-teman UKAFO (Eva, Danang, Rafif, Dipra, Dea, Adet), Yovia, serta teman-teman Lemniscate yang memberikan semangat, motivasi, mendengar keluh kesah penulis dan ikut membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
9. Teman-teman yang ikut turut membantu dan memberikan solusi untuk penulis sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini yaitu Zuhair, Dian, Meyla, dan Sapta.

10. Semua pihak yang belum disebutkan yang telah membantu dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
11. Terakhir untuk diri saya sendiri karena sampai akhir tidak memutuskan untuk menyerah dalam menyelesaikan proses penyusunan Tugas Akhir ini.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini tentu masih terdapat beberapa kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat dalam pengembangan ilmu bagi banyak pihak.

Surabaya, Juni 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	iii
<i>TITLE PAGE</i>	v
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	3
1.3. Batasan Masalah	3
1.4. Tujuan Penelitian	4
1.5. Manfaat Penelitian	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1. Penelitian Terdahulu	5
2.2. Usaha Mikro Kecil dan Menengah (UMKM)	6
2.3. Model Sistem Inventori-Produksi	8
2.4. Kontrol Optimum	11
2.5. Prinsip Maksimum Pontryagin	12
BAB III METODE PENELITIAN	15
3.1. Metode Penelitian	15
3.2. Diagram Alur Penelitian	17
BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN	19
4.1. Model Sistem Inventori Produksi dengan Kerusakan Produk	19

4.2.	Pengolahan Data dan Menentukan Parameter Distribusi	22
4.3.	Penyelesaian Masalah Kontrol Optimum	25
4.4.	Penyelesaian Numerik	28
4.5.	Analisis dan Hasil Simulasi pada UMKM.....	31
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN		39
5.1.	Kesimpulan	39
5.2.	Saran	40
DAFTAR PUSTAKA.....		41
BIODATA PENULIS.....		59

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3. 1	Diagram Alir	17
Gambar 4. 1	Mekanisme model sistem Inventori-Produksi dengan kerusakan produk	19
Gambar 4. 2	Laju Kerusakan Produk pada kasus UMKM .	32
Gambar 4. 3	Fungsi Tingkat Inventori pada UMKM	33
Gambar 4. 4	Fungsi Tingkat Produksi pada UMKM.....	34
Gambar 4. 5	Hubungan Fungsi $I(t)$ dan $P(t)$	35
Gambar 4. 6	Fungsi Total Biaya Penalti pada UMKM	36

DAFTAR LAMPIRAN

LAMPIRAN 1	43
LAMPIRAN 2	45
LAMPIRAN 3	51
LAMPIRAN 4	52
LAMPIRAN 5	57

BAB I

PENDAHULUAN

Pada Bab ini dibahas latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan manfaat penelitian pada Tugas Akhir.

1.1. Latar Belakang

Berkembangnya zaman telah membuat persaingan di dunia pemasaran Indonesia semakin berkembang pesat, untuk mengatasi masalah tersebut maka suatu UMKM perlu meningkatkan kualitas produk mereka agar tidak kalah saing dengan yang lain. UMKM merupakan suatu usaha perdagangan yang dikelola oleh perorangan maupun badan usaha dalam lingkup kecil atau mikro[1], oleh karena itu untuk meningkatkan kualitas produk yang dijual oleh UMKM dan bertahan dalam persaingan pasar adalah dengan melakukan pengendalian persediaan. Persediaan (inventori) merupakan suatu aset lancar yang dimiliki perusahaan dengan maksud untuk dijual dalam suatu periode tertentu, atau persediaan barang-barang tersebut masih dalam pengerjaan atau proses (*work in progress*), ataupun persediaan bahan baku (*raw material*) yang masih menunggu penggunaannya dalam suatu proses produksi[2]. Oleh karena itu pengendalian persediaan sangat diperlukan dalam sebuah perusahaan, karena jika persediaan tersebut berlebihan maka dapat beresiko kerusakan produk yang disebabkan oleh penyimpanan produk yang terlalu lama. Selain rugi dalam kerusakan produk, biaya penyimpanan juga akan semakin besar disebabkan banyaknya produk yang menumpuk. Sebaliknya, jika persediaan perusahaan tersebut tidak mencukupi, maka tidak dapat memenuhi permintaan konsumen.

Satu dari beberapa cara yang dapat digunakan untuk mengoptimalkan masalah inventori adalah dengan

menggunakan model EOQ (*Economic Order Quantity*), model EOQ pada dasarnya merupakan model statis yang artinya permintaan konstan sepanjang waktu. Tetapi pada kasus yang lebih nyata, permintaan dalam sebuah perusahaan dapat berubah-ubah seiring berjalannya waktu dan tidak dapat diperkirakan juga, sehingga model tersebut kurang tepat. Maka model yang paling tepat adalah model dinamik yang mempertimbangkan tingkat produksi dan penyimpanan persediaan dari waktu ke waktu, yang dapat diselesaikan dengan masalah kontrol optimum dengan satu peubah keadaan (tingkat persediaan) dan satu peubah kontrol (tingkat produksi) yaitu model sistem inventori-produksi.

Penelitian terdahulu yang berkaitan dengan kontrol optimum dalam inventori-produksi yaitu Kontrol Optimum Sistem Inventori-Produksi dengan Laju Kerusakan Barang Menyebar Weibull[3], penelitian tersebut merupakan rekonstruksi dari karya ilmiah Al-Khedhairi & Tadj. Selain itu, penelitian lainnya berjudul Kontrol Optimal Sistem Inventori dengan Memperhatikan Kerusakan Produk[4], penelitian tersebut membahas tentang adanya kontrol optimal untuk meminimumkan total biaya mengenai biaya penalti. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan diterapkan kontrol optimum sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk pada kasus sesungguhnya, dengan menggunakan data dari salah satu UMKM di Jawa Barat. Sistem inventori tersebut diselesaikan dengan menggunakan prinsip maksimum pontryagin, dan selanjutnya akan diselesaikan dengan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Sehingga didapatkan hasil kontrol optimum inventori produksi untuk salah satu UMKM di Jawa Barat.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, adapun perumusan masalah yang diambil dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana kontrol optimum pada model sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk?
2. Bagaimana penerapan model kontrol optimum sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk terhadap UMKM?
3. Bagaimana simulasi dari penerapan model kontrol optimum sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk terhadap UMKM?

1.3. Batasan Masalah

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan, adapun batasan masalah yang diambil dalam penelitian ini adalah:

1. Tidak dikaji apa yang menyebabkan terjadinya kerusakan pada produk.
2. Tidak ada perbaikan produk pada perusahaan.
3. Data yang digunakan adalah salah satu data UMKM di Jawa Barat yaitu Kartika Rasa Lapis Sumedang yang termasuk kedalam usaha menengah, dan yang diteliti adalah toko pusat Kartika Rasa Lapis Sumedang.
4. Data yang diambil dari tahun 2019 sampai 2020.
5. Produk yang diteliti adalah produk dengan jumlah penjualan terbesar dan menyerap biaya yang besar, yang secara signifikan sangat berpengaruh dalam sistem persediaan UMKM, dalam hal ini produk yang diteliti adalah bolu lapis sumedang.
6. Seluruh permintaan konsumen dapat dipenuhi oleh perusahaan.

7. Model yang digunakan pada penelitian ini adalah model inventori-produksi kontinu.
8. Metode yang digunakan adalah prinsip maksimum pontryagin.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, maka tujuan yang ingin dicapai dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan kontrol optimum dari sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk.
2. Menganalisa hasil dari penerapan model kontrol optimum sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk terhadap UMKM.
3. Menganalisa simulasi penerapan kontrol optimum sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk terhadap UMKM.

1.5. Manfaat Penelitian

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan, adapun manfaat yang diambil dalam penelitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan kepada pembaca dalam mengidentifikasi permasalahan sehingga dapat mengetahui sekaligus menambah wawasan mengenai penerapan kontrol optimum sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dalam permasalahan nyata pada UMKM.
2. Memberikan informasi dan bahan pertimbangan terhadap UMKM tentang penerapan kontrol optimum sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk yang dapat mengoptimalkan persediaan dan barang yang diproduksi sehingga tidak mengalami kerugian.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai penelitian terdahulu, usaha mikro kecil dan menengah, model sistem inventori-produksi, kontrol optimum dan prinsip maksimum pontryagin.

2.1. Penelitian Terdahulu

Dalam Tugas Akhir ini penulis merujuk pada beberapa penelitian terdahulu yang sesuai dengan topik yang diambil. Terdapat penelitian yang membahas tentang kontrol optimum sistem inventori-produksi dengan kerusakan produk, yaitu penelitian yang dilakukan oleh Nurus Sa'adah[3] membahas tentang kontrol optimum suatu sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan barang yang disimpan dan menyelesaikannya dengan Prinsip Maksimum Pontryagin.

Selain itu, pada penelitian selanjutnya dari Vylđa Pavela[4] membahas tentang adanya kontrol optimal untuk meminimumkan biaya penalti yaitu biaya yang muncul saat banyaknya inventori dan banyaknya produksi tidak sesuai dengan yang diinginkan. Penyelesaian kontrol optimal tersebut menggunakan prinsip Maksimum Pontryagin.

Penelitian yang akan dilakukan oleh peneliti pada penelitian ini berbeda dengan penelitian-penelitian terdahulu, perbedaannya ada pada penerapan kasusnya, kalau pada penelitian ini diterapkan pada kasus sesungguhnya yaitu diterapkan pada salah satu UMKM di Jawa Barat sedangkan pada penelitian terdahulu tidak diterapkan dan hanya diasumsikan saja. Selain itu dalam penyelesaian *state* dan *costatonya* para peneliti terdahulu menyelesaikannya dengan penyelesaian analitik dan selanjutnya diselesaikan dengan

metode Beda Hingga, sedangkan pada penelitian ini peneliti menggunakan penyelesaian numerik dengan metode Runge Kutta Orde 4 untuk menyelesaikan *state* dan *costatonya*. Metode Runge Kutta Orde 4 lebih tepat dan cepat digunakan untuk menyelesaikan *state* dan *costatonya* dibanding dengan penyelesaian analitik yang dilanjutkan dengan penyelesaian numerik menggunakan metode Beda Hingga.

2.2. Usaha Mikro Kecil dan Menengah (UMKM)

Definisi UMKM sudah diatur di Indonesia dan sudah diterapkan dalam Undang-Undang Republik Indonesia No.20 Tahun 2008 tentang UMKM. Sudah dinyatakan bahwa usaha mikro adalah usaha produktif milik orang perorangan dan/atau badan usaha perorangan yang memiliki kriteria usaha mikro sebagaimana diatur dalam Pasal 1 dari UU tersebut[1]. Dalam UU tersebut juga telah disebutkan bahwa usaha kecil merupakan usaha ekonomi produktif yang berdiri sendiri, yang dilakukan oleh orang perorangan atau badan usaha yang bukan merupakan anak perusahaan atau bukan anak cabang yang dimiliki, dikuasai atau menjadi bagian, baik langsung maupun tidak langsung, dari usaha menengah atau usaha besar yang memenuhi kriteria usaha kecil[1]. Sedangkan usaha mikro adalah usaha ekonomi produktif yang berdiri sendiri yang dilakukan oleh perorangan atau badan usaha yang bukan merupakan anak perusahaan atau bukan cabang perusahaan yang dimiliki, dikuasai, atau menjadi bagian baik langsung maupun tidak langsung, dari usaha mikro, usaha kecil atau usaha besar yang memenuhi kriteria usaha mikro[1].

Di dalam Undang-undang tersebut, kriteria yang digunakan untuk mendefinisikan UMKM seperti yang

tercantum dalam Pasal 6 adalah nilai kekayaan bersih atau nilai aset tidak termasuk tanah dan bangunan tempat usaha, atau hasil penjualan tahunan. Dengan kriteria sebagai berikut[1]:

- Usaha Mikro, yaitu usaha produktif milik orang perorangan atau badan usaha milik perorangan yang memenuhi kriteria yaitu memiliki kekayaan bersih paling banyak Rp 50.000.000 (lima puluh juta rupiah) tidak termasuk tanah dan bangunan tempat usaha, serta memiliki hasil penjualan tahunan paling banyak Rp 300.000.000 (tiga ratus juta rupiah).
- Usaha Kecil, yaitu usaha ekonomi produktif yang berdiri sendiri yang dilakukan oleh orang perorangan atau badan usaha yang bukan merupakan anak perusahaan atau bukan cabang perusahaan yang dimiliki, dikuasai atau menjadi bagian baik langsung maupun tidak langsung dari usaha menengah atau usaha besar yang memenuhi kriteria yaitu memiliki kekayaan bersih lebih dari Rp50.000.000,00 (lima puluh juta rupiah) sampai dengan paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah) tidak termasuk tanah dan bangunan tempat usaha, serta memiliki hasil penjualan tahunan lebih dari Rp300.000.000,00 (tiga ratus juta rupiah) sampai dengan paling banyak Rp2.500.000.000,00 (dua milyar lima ratus juta rupiah).
- Usaha Menengah, yaitu usaha ekonomi produktif yang berdiri sendiri, yang dilakukan oleh orang perorangan atau badan usaha yang bukan merupakan anak perusahaan atau cabang perusahaan yang dimiliki, dikuasai, atau menjadi bagian baik langsung maupun tidak langsung

dengan usaha kecil atau usaha besar yang memenuhi kriteria yaitu memiliki kekayaan bersih lebih dari Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah) sampai dengan paling banyak Rp10.000.000.000,00 (sepuluh milyar rupiah) tidak termasuk tanah dan bangunan tempat usaha, serta memiliki hasil penjualan tahunan lebih dari Rp2.500.000.000,00 (dua milyar lima ratus juta rupiah) sampai dengan paling banyak Rp50.000.000.000,00 (lima puluh milyar rupiah).

Secara umum, tujuan utama yang ingin dicapai oleh UMKM adalah memiliki usaha yang tangguh dan mandiri yang memiliki daya saing tinggi dan berperan utama dalam produksi dan distribusi kebutuhan pokok, bahan baku, serta dalam permodalan untuk menghadapi persaingan bebas. Oleh karena itu, pemberdayaan UMKM sangat penting dan strategis dalam mengantisipasi perekonomian kedepan terutama dalam memperkuat struktur perekonomian nasional.

2.3. Model Sistem Inventori-Produksi

Persediaan dapat didefinisikan sebagai suatu aktiva yang meliputi barang-barang milik perusahaan dengan tujuan untuk dijual kembali dalam suatu periode tertentu atau persediaan barang-barang yang masih dalam pengerjaan (proses) produksi ataupun persediaan bahan baku yang menunggu penggunaannya dalam proses produksi[5].

Bagi suatu perusahaan, persediaan berguna untuk menjaga kelancaran proses produksi untuk memenuhi permintaan yang akan datang dengan meraih keuntungan bagi perusahaan. Namun, selain dapat memperoleh keuntungan, persediaan juga dapat mengakibatkan kerugian bagi

perusahaan disebabkan terdapat biaya tambahan diluar rencana total biaya yang harus ditanggung oleh perusahaan, sehingga dapat mengurangi keuntungan yang akan diperoleh. Untuk itu penting diperlukannya pengendalian persediaan untuk menjaga kelangsungan produksi serta meminimumkan total biaya yang muncul.

Pengendalian persediaan yang dijalankan oleh suatu perusahaan tentu sudah memiliki tujuan-tujuan tertentu. Pengendalian persediaan yang dijalankan tersebut adalah untuk menjaga tingkat persediaan pada tingkat yang optimum sehingga diperoleh penghematan untuk suatu persediaan. Dengan demikian pengendalian persediaan dapat diartikan sebagai suatu kegiatan dalam memperkirakan jumlah persediaan (bahan baku) yang tepat, dengan jumlah yang tidak terlalu besar dan tidak terlalu sedikit dibandingkan dengan kebutuhan atau permintaan. Dari pengertian tersebut, maka dapat disimpulkan tujuan pengendalian persediaan adalah sebagai berikut[6]:

1. Untuk dapat memenuhi permintaan atau kebutuhan konsumen dengan cepat.
2. Untuk menjaga kontinuitas produksi atau secara sederhananya menjaga suatu perusahaan agar tidak mengalami kehabisan persediaan yang dapat menyebabkan terhentinya pengerjaan produksi.
3. Untuk mempertahankan stabilitas suatu perusahaan dan menjamin kelancaran kegiatan produksi.
4. Untuk mempertahankan dan meningkatkan penjualan dan laba perusahaan.

5. Untuk menghilangkan resiko terhadap sulitnya permintaan akan bahan baku. Sebab biasanya bahan baku hanya didapatkan pada bulan tertentu, sehingga pada saat bahan baku tersebut sulit didapatkan di pasaran, kegiatan produksi perusahaan tidak akan terganggu.
6. Untuk menjaga persediaan perusahaan supaya penyimpanan dalam gudang tidak besar-besaran, karena dapat menyebabkan biaya menjadi besar.

Dari keterangan diatas, maka sangat penting bagi UMKM untuk mempunyai sistem pengendalian persediaan, salah satu cara untuk mengendalikan persediaan di sebuah perusahaan adalah dengan mengoptimumkan sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk. Berikut merupakan model inventori-produksi kontinu dan dapat dirumuskan sebagai berikut[7]:

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t)) \quad (2.1)$$

dengan

$I(t)$ = Banyaknya inventori pada waktu t (state variable)

$P(t)$ = Banyaknya produksi pada waktu t (control variable)

$D(t)$ = Banyaknya permintaan pada waktu t

$\theta(t, I(t))$ = Banyaknya barang yang rusak pada waktu t

Model tersebut disajikan sebagai masalah kontrol optimal dengan satu variabel *state* dan satu variabel *control*. Permasalahan yang terkait dengan model tersebut adalah untuk meminimalkan fungsi tujuan berikut[7]:

$$\min_{P(t) \geq 0} J(P, I) = \int_0^T F(t, I(t), P(t)) dt \quad (2.2)$$

dengan

$$F(t, I(t), P(t)) = \left\{ \frac{h}{2} [I(t) - \hat{I}]^2 + \frac{K}{2} [P(t) - \hat{P}]^2 \right\}$$

dan kondisi batas $I(0) = I_0, P(T) = \hat{P}(T), I(T) = \hat{I}, P(t) \geq 0$

dengan:

T	= waktu perencanaan produksi
I_0	= banyaknya inventori saat $t = 0$
h	= biaya penyimpanan
K	= biaya produksi
\hat{I}	= banyaknya inventori yang diinginkan
$\hat{P}(t)$	= banyaknya produksi yang diinginkan saat waktu t

2.4. Kontrol Optimum

Masalah kontrol optimum dapat didefinisikan sebagai suatu permasalahan untuk menentukan peubah kontrol yang akan dimasukkan ke dalam model atau sistem dan memenuhi suatu kendala, atau secara sederhananya kontrol optimum merupakan suatu masalah yang menentukan peubah kontrol $u(t)$ (bergantung pada waktu t) yang membawa sistem dari state awal $x(t_0)$ pada waktu t_0 kepada state terminal atau state akhir $x(T)$ pada waktu terminal atau waktu akhir T , dengan demikian rupa sehingga memperoleh nilai maksimum atau nilai minimum untuk fungsional objektif.

Masalah kontrol optimum dapat dinyatakan melalui sitem persamaan diferensial berikut[8]:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.3)$$

sehingga kontrol optimum mempunyai tujuan untuk memaksimumkan atau meminimumkan fungsi objektif[4]

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.4)$$

dengan kondisi batas

$$x(t_0) = x_0; x(t_f) = x_f$$

Dengan t_0 adalah waktu awal dan t_f adalah waktu akhir, S, V dan f merupakan fungsi skalar[9]. Kontrol $u^*(t)$ merupakan kontrol optimal, jika disubstitusikan kedalam sistem maka akan diperoleh keadaan (*state*) yang optimal $x^*(t)$ dan pada waktu yang sama fungsi objektif juga dapat dioptimumkan. Tujuan utama dari kontrol yang optimal yaitu untuk menentukan suatu kontrol yang mempengaruhi suatu proses untuk memenuhi kendala fisik. Kemudian, pada saat yang sama dapat ditentukan nilai optimal sesuai dengan fungsi tujuan atau fungsi objektif[10].

2.5. Prinsip Maksimum Pontryagin

Untuk menyelesaikan masalah kontrol optimum salah satunya dapat diselesaikan dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Prinsip maksimum pontryagin merupakan suatu kondisi yang digunakan untuk memperoleh kontrol terbaik pada sistem dinamik dari state awal hingga state akhir, sehingga didapatkan penyelesaian kontrol optimum dengan memaksimumkan indeks perfomasi (fungsi objektif). Penyelesaian masalah kontrol optimum dengan prinsip maksimum Pontryagin dijelaskan sebagai berikut[8]:

Diberikan persamaan state $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ dan fungsi objektif $J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) +$

$\int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt$, dimana nilai kondisi batas $x(t = t_0) = x_0$; $t = t_f$ diberikan bebas begitu pun dengan $x(t_f)$.

Syarat untuk memaksimumkan fungsi objektif J adalah dengan mengkonversikan persamaan state dan fungsi objektif J kedalam masalah memaksimumkan fungsi Hamiltonian. Untuk mendapatkan syarat tersebut maka harus mengikuti langkah-langkah berikut[8]:

Langkah 1 : Membentuk fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\ = V(x(t), u(t), t) \\ + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

Langkah 2 : Memaksimumkan H terhadap semua kontrol $u(t)$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_* = 0$$

dan mendapatkan

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

Langkah 3 : Dengan menggunakan hasil dari langkah 2 ke dalam langkah 1, dapat menentukan H^* yang optimal

$$\begin{aligned} H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) \\ = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t) \end{aligned}$$

Langkah 4 : Menyelesaikan persamaan state dan co state

$$\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* \text{ dan } \dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_*$$

dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0$$

Langkah 5 : Mensubstitusikan hasil $\mathbf{x}^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah 4 ke dalam kontrol optimal $\mathbf{u}^*(t)$ pada langkah 2, sehingga diperoleh hasil kontrol optimum.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bagian ini menjelaskan tahapan-tahapan yang digunakan untuk menyelesaikan penelitian ini. Tahapan penelitian ini terdiri dari beberapa tahapan, yaitu studi literatur, pengumpulan dan pengolahan data, menentukan formulasi masalah kontrol optimum, menyelesaikan permasalahan kontrol optimum, pembuatan program simulasi, analisis dan kesimpulan hasil simulasi.

3.1. Metode Penelitian

1. Studi Literatur

Studi Literatur bertujuan untuk mendukung pengerjaan tugas akhir dalam konsep pemecahan masalah. Studi literatur yang dibahas berkaitan tentang model sistem inventori-produksi, kontrol optimum, dan prinsip maksimum pontryagin. Studi literatur dapat berupa jurnal ilmiah, tugas akhir atau thesis, maupun artikel dari internet yang berkaitan dengan penelitian ini.

2. Pengumpulan dan Pengolahan Data

Data yang digunakan yaitu data sekunder yang berupa data inventori dari salah satu UMKM di Jawa Barat, dan akan dilakukan pengolahan data terhadap penelitian, yaitu untuk mengetahui data inventori, produksi barang, permintaan barang, kerusakan barang, sehingga diperoleh fungsi dari data-data tersebut.

3. Menentukan formulasi masalah kontrol optimum

Pada tahap ini akan ditentukan formulasi kontrol optimum yang meliputi sistem inventori-

produksi dengan memperhatikan kerusakan produk, fungsi obyektif, serta kondisi syarat batas lainnya yang harus dipenuhi.

4. Menyelesaikan permasalahan kontrol optimum

Metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimum tersebut dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

5. Membuat Simulasi Program

Solusi dari permasalahan kontrol optimum tersebut dapat menggunakan software Matlab berdasarkan metode runge kutta orde 4 dengan menggunakan model sistem inventori-produksi dengan memperhatikan *state*, *co state*, fungsi obyektif, serta kondisi syarat yang harus dipenuhi.

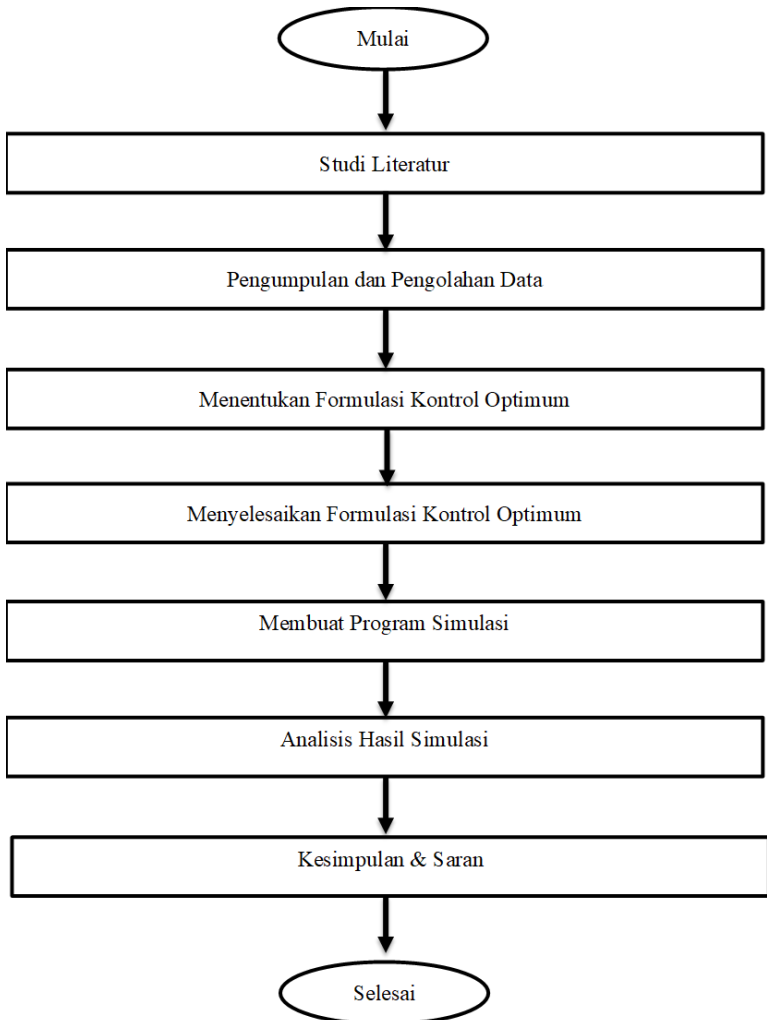
6. Analisis dan kesimpulan hasil simulasi

Analisis dan kesimpulan dari hasil simulasi dilakukan untuk membahas hasil akhir berdasarkan hasil pengolahan data dan penerapan model. Setelah itu diperoleh hasil sistem inventori-produksi yang optimal untuk salah satu UMKM di Jawa Barat.

7. Kesimpulan dan Saran

Untuk tahap terakhir, akan diambil suatu kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

3.2. Diagram Alur Penelitian



Gambar 3. 1 Diagram Alir

BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini dibahas formulasi masalah kontrol optimal sistem inventori produksi dengan kerusakan produk dengan 1 variabel state dan 1 variabel kontrol, membahas pengolahan data mengenai fungsi kerusakan produk, membahas mengenai penyelesaian kontrol optimalnya dengan menggunakan prinsip maksimum pontryagin, diakhiri dengan menjalankan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan dijalankan menggunakan *software* Matlab.

4.1. Model Sistem Inventori Produksi dengan Kerusakan Produk

Tugas akhir ini membahas sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dengan menggunakan model kontinu yang diterapkan pada kasus nyata, menggunakan model kontinu karena proses produksi dapat dimulai pada setiap waktu. Ilustrasi mekanisme inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk pada UMKM dengan memperhatikan 1 jenis barang adalah sebagai berikut:



Gambar 4. 1 Mekanisme model sistem Inventori-Produksi dengan kerusakan produk

Model tersebut disajikan sebagai masalah kontrol optimal dengan satu variabel *state* dan satu variabel *control* dengan masing-masing yaitu banyaknya inventori sebagai variabel *state* dan banyaknya produksi sebagai variabel *control*.

Sangat penting bagi UMKM untuk mempunyai sistem pengendalian persediaan, caranya adalah dengan mengoptimalkan sistem Inventori-Produksi dengan memperhatikan kerusakan produk. Diasumsikan suatu UMKM mengalami kerusakan produk pada gudang *inventori* dengan tingkat kerusakan produk yaitu $\theta(t)$. Karena kerusakan produk sangat erat hubungan dengan inventori, dimana inventori dapat berkurang apabila terdapat kerusakan produk didalamnya. Model tersebut terdiri dari satu variabel *state* dan satu variabel *control* berturut-turut merupakan banyaknya produksi dan banyaknya inventori.

Berikut ini merupakan model inventori produksi kontinu dengan kerusakan produk:

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t)) \quad (4.1)$$

dengan

- $I(t)$ = Banyaknya inventori pada waktu t (state variable)
- $P(t)$ = Banyaknya produksi pada waktu t (control variable)
- $D(t)$ = Banyaknya permintaan pada waktu t
- $\theta(t, I(t))$ = Banyaknya barang yang rusak pada waktu t

Dalam penelitian ini diasumsikan kerusakan produk mengikuti sebaran Weibull dengan laju kerusakan yaitu $\theta(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$, dengan menyesuaikan data empirik terhadap sebaran matematis para peneliti menggunakan sebaran Weibull untuk memodelkan laju kerusakan barang. Oleh

karena itu model inventori produksi kontinu dengan kerusakan produk dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \alpha\beta t^{\beta-1}I(t) \quad (4.2)$$

Model tersebut merupakan model kontinu, dan disebabkan produksi pada $P(t)$, permintaan terjadi pada $D(t)$, dan kerusakan produk pada $\alpha\beta t^{\beta-1}I(t)$, sehingga persamaan tersebut merupakan persamaan dinamik inventori-produksi. Banyaknya inventori bergantung pada banyaknya produksi, banyaknya permintaan konsumen, dan banyaknya kerusakan produk yang terjadi pada inventori.

Didefinisikan Fungsi Objektif sebagai berikut:

$$\min_{P(t) \geq 0} J(P, I) = \int_0^T F(t, I(t), P(t)) dt \quad (4.3)$$

dengan

$$F(t, I(t), P(t)) = \left\{ \frac{h}{2} [I(t) - \hat{I}]^2 + \frac{K}{2} [P(t) - \hat{P}]^2 \right\} \quad (4.4)$$

dan kondisi batas

$$I(0) = I_0, P(T) = \hat{P}, P(t) \geq 0, I(T) = \hat{I} \quad (4.5)$$

dengan:

T	= waktu perencanaan produksi
I_0	= banyaknya inventori saat $t = 0$
h	= biaya penyimpanan
K	= biaya produksi
\hat{I}	= banyaknya inventori yang diinginkan
$\hat{P}(t)$	= banyaknya produksi yang diinginkan saat waktu t

Fungsi objektif tersebut digunakan untuk menghitung besarnya total biaya mengenai biaya penalti pada UMKM. Total biaya mengenai biaya penalti tersebut meliputi biaya penyimpanan dan biaya produksi, dan biaya penalti dikenakan apabila banyaknya inventori dan banyaknya produksi menyimpang dari target yang diinginkan oleh UMKM tersebut. Untuk mendapatkan fungsi objektif pada persamaan 4.4 sehingga dapat mencapai nilai minimum dan menyelesaikan masalah kontrol optimum dapat diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

4.2. Pengolahan Data dan Menentukan Parameter Distribusi

Pada penelitian ini akan dilakukan olah data untuk dimasukkan kedalam model Inventori nanti. Data-data yang diperlukan yaitu waktu perencanaan produksi, inventori di waktu awal, banyaknya inventori yang diinginkan, biaya penyimpanan (holding cost), biaya produksi, fungsi permintaan dan parameter distribusi Weibull pada kerusakan produk.

Selanjutnya akan ditentukan nilai parameter dari distribusi Weibull untuk mengetahui parameter dari data kerusakan produk pada UMKM tertera pada Lampiran 1. Distribusi Weibull yang digunakan pada penelitian ini adalah distribusi Weibull dengan 2 parameter, dimana parameter $\alpha > 0$ adalah parameter skala dan parameter $\beta > 0$ adalah parameter bentuk.

Fungsi kepadatan peluang distribusi Weibull dalam penelitian ini adalah sebagai berikut[11]:

$$f(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} \quad (4.6)$$

dan fungsi kumulatif dari distribusi Weibull adalah sebagai berikut:

$$F(t) = 1 - e^{-(\alpha t^\beta)} \quad (4.7)$$

dalam mencari parameter distribusi Weibull dapat menggunakan pendekatan metode ranking median. Dengan metode ini, parameter distribusi weibull diestimasi terlebih dahulu melalui kumulatifnya.

Berikut merupakan turunan rumus fungsi kumulatif

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - e^{-(\alpha t^\beta)} \\ 1 - F(t) &= e^{-(\alpha t^\beta)} \\ \ln(1 - F(t)) &= -(\alpha t^\beta) \\ \ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right) &= \alpha t^\beta \\ \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right) &= \beta \ln \alpha t \\ \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right) &= \beta \ln \alpha + \beta \ln t \end{aligned} \quad (4.8)$$

Persamaan tersebut mirip dengan persamaan regresi linear sederhana, yaitu:

$$\hat{y} = a + bt \quad (4.9)$$

dimana sebagai variable dependen adalah $\hat{y} = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right)$, sebagai variable independent adalah $t = \ln t$, sebagai interserp adalah $a = \beta \ln \alpha$, dan sebagai slope adalah $b = \beta$.

Dengan mendapatkan bentuk regresi linier sederhana tersebut, maka akan diperoleh parameter distribusi Weibull yang diketahui, yaitu:

$$\theta = e^{-\left(\frac{\alpha}{b}\right)}$$

$$\alpha = \frac{1}{\theta^\beta}$$

$$\beta = b$$

Fungsi distribusi kumulatif $F(t)$ dapat didekati dengan Ranking Median Pendekatan Benard, yaitu

$$RM = \frac{i - 0,3}{n + 0,4}$$

dimana:

α = parameter skala

β = parameter bentuk

i = urutan data

n = banyaknya data

Oleh karena itu dengan menggunakan persamaan (4.8) diperoleh model regresi dari tabel perhitungan pada Lampiran 2 yaitu

$$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - RM}\right)\right) = -3,9145 + 1,9709 \ln x$$

Sehingga parameter distribusi Weibullnya adalah

$$\beta = b = 1,9709$$

$$\theta = e^{-\left(\frac{\alpha}{b}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\left(\frac{-3,9145}{1,9709}\right)} \\
&= 7,287402 \\
\alpha &= \frac{1}{\theta^\beta} \\
&= \frac{1}{7,287402^{1,9709}} \\
&= 0,019951
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan nilai parameter dari distribusi Weibull pada kerusakan produk pada UMKM, selanjutnya akan dilakukan perhitungan pada laju kerusakan. Berikut adalah perhitungan laju kerusakan pada kerusakan produk pada UMKM:

$$\begin{aligned}
h(t) = \theta(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \\
&= \frac{\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta}}{1 - (1 + e^{-\alpha t^\beta})} \\
&= \alpha\beta t^{\beta-1} \\
&= (0,019951)(1,9709)t^{(1,9709-1)} \\
&= 0,03932t^{0,9709}
\end{aligned}$$

4.3. Penyelesaian Masalah Kontrol Optimum

Untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimum pada persamaan (4.3) dapat diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Permasalahan kontrol

optimum tersebut dapat diselesaikan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Membentuk Fungsi Hamiltonian

Fungsi Hamiltonian pada Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}'(t)f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (4.10)$$

Dengan mendefinisikan λ sebagai variable adjoin, maka fungsi Hamiltonian dapat ditulis sebagai berikut:

$$H = -\left\{\frac{h}{2}(I(t) - \hat{I})^2 + \frac{K}{2}[P(t) - \hat{P}]^2\right\} + \lambda(t)[P(t) - D(t) - \alpha\beta t^{\beta-1}I(t)] \quad (4.11)$$

2. Menentukan Kontrol

$$\frac{\partial H}{\partial P} = 0$$

$$-K(P(t) - \hat{P}) + \lambda(t) = 0$$

$$-KP(t) + K\hat{P} + \lambda(t) = 0$$

$$KP(t) = K\hat{P} + \lambda(t)$$

$$P(t) = \hat{P} + \frac{\lambda(t)}{K} \quad (4.12)$$

3. Menentukan H^* yang optimal

Dengan menggunakan hasil dari persamaan (4.12) ke dalam fungsi Hamiltonian maka akan diperoleh:

$$H^* = -\left\{\frac{h}{2}(I(t) - \hat{I})^2 + \frac{K}{2}[P(t) - \hat{P}]^2\right\} + \lambda(t)[P(t) - D(t) - \alpha\beta t^{\beta-1}I(t)]$$

$$\begin{aligned}
H^* &= -\left\{\frac{h}{2}(I(t) - \hat{I})^2 + \frac{K}{2}\left[\hat{P} + \frac{\lambda(t)}{K} - \hat{P}\right]^2\right\} \\
&\quad + \lambda(t)\left[\hat{P} + \frac{\lambda(t)}{K} - D(t) - \alpha\beta t^{\beta-1}I(t)\right] \\
H^* &= -\left\{\frac{h}{2}(I(t) - \hat{I})^2 + \frac{K}{2}\left(\frac{\lambda(t)}{K}\right)^2\right\} \\
&\quad + \lambda(t)\left[\hat{P} + \frac{\lambda(t)}{K} - D(t) - \alpha\beta t^{\beta-1}I(t)\right] \\
H^* &= -\left\{\frac{h}{2}(I(t) - \hat{I})^2 + \frac{\lambda(t)^2}{2K}\right\} + \hat{P}\lambda(t) + \frac{\lambda^2(t)}{K} - \\
&\quad D(t)\lambda(t) - \alpha\beta t^{\beta-1}I(t)\lambda(t) \tag{4.14}
\end{aligned}$$

4. Menyelesaikan persamaan *state* dan *co state*

• Persamaan *state*

Persamaan *state* dalam kondisi optimal diperoleh dengan cara menurunkan fungsi Pontryagin H^* yang sudah optimal terhadap I dan dapat dinyatakan secara matematis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{I}^*(t) &= +\left(\frac{\partial H}{\partial I}\right)_* \\
\dot{I}^*(t) &= -\frac{\lambda(t)}{K} + \hat{P}(t) + \frac{2\lambda(t)}{K} - D(t) - \alpha\beta t^{\beta-1}I(t) \\
\dot{I}^*(t) &= \hat{P}(t) + \frac{\lambda(t)}{K} - D(t) - \alpha\beta t^{\beta-1}I(t) \\
\dot{I}^*(t) &= P(t) - D(t) - \alpha\beta t^{\beta-1}I(t) \tag{4.15}
\end{aligned}$$

• Persamaan *co state*

Persamaan *co state* dalam kondisi optimal diperoleh dengan cara menurunkan fungsi Pontryagin H^* yang sudah optimal terhadap λ dan dapat dinyatakan secara matematis sebagai berikut:

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_*$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}^*(t) &= -[-h[I(t) - \hat{I}] - \theta(t)\lambda(t)] \\ \dot{\lambda}^*(t) &= h[I(t) - \hat{I}] + \theta(t)\lambda(t)\end{aligned}\quad (4.16)$$

dengan kondisi awal I_0 dan kondisi akhir $\lambda(tf) = 0$.

Setelah diperoleh hasil dari Prinsip Maksimum Pontryagin yaitu persamaan (4.12), *state* pada persamaan (4.15) dan *co state* pada persamaan (4.16) selanjutnya akan menyelesaikan hasil tersebut dengan simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4.

4.4. Penyelesaian Numerik

Penyelesaian kondisi batas, persamaan state, persamaan costate pada masalah kontrol optimal model sistem Inventori-Produksi dengan memperhatikan kerusakan produk tidak mudah diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, permasalahan ini diselesaikan secara numerik. Penyelesaian numerik dilakukan untuk memudahkan dalam menganalisa. Pada penelitian ini, penyelesaian numerik dapat diselesaikan dengan metode Runge Kutta orde 4 dan forward-backward sweep method.

Langkah pertama untuk penyelesaian numerik adalah transformasikan masalah kontrol optimal model sistem inventori – produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dalam bentuk diskrit. Diskritisasi dilakukan pada interval $[t_0, t_f]$ dengan step size $h_0 = \frac{(t_f - t_0)}{N}$ dan *grid* $t_i = t_0 + ih_0 (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ sehingga $t_f = t_N$. Selanjutnya, pada persamaan state dilakukan diskritisasi beda maju (forward sweep) metode Runge Kutta orde 4 karena diketahui nilai awal dari state. Kemudian untuk persamaan costate dilakukan

diskritisasi beda mundur (backward sweep) metode Runge Kutta orde 4 karena diketahui nilai akhir dari costate.

- *Forward Sweep* pada persamaan *State*

$$\dot{I}^*(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$$

hasil diskritisasi dengan menggunakan forward sweep Runge Kutta orde 4 sebagai berikut.

$$I_{n+1} = I_n + \frac{h}{6} (k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I})$$

dengan

$$k_{1,I} = f(t_n, \hat{P}_n, D_n, \theta_n, I_n)$$

$$k_{1,I} = \hat{P}_n - D_n - \theta_n I_n$$

$$k_{2,I} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, \frac{1}{2}(D_n + D_{n+1}), \theta_n + \theta_{n+1}, \hat{P}_n + \hat{P}_{n+1}\right)$$

$$k_{2,I} = \frac{1}{2}(\hat{P}_n + \hat{P}_{n+1}) - \frac{1}{2}(D_n + D_{n+1}) - \frac{1}{2}(\theta_n + \theta_{n+1}) \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right)$$

$$k_{3,I} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, \frac{1}{2}(D_n + D_{n+1}), \theta_n + \theta_{n+1}, \hat{P}_n + \hat{P}_{n+1}\right)$$

$$k_{3,I} = \frac{1}{2}(\hat{P}_n + \hat{P}_{n+1}) - \frac{1}{2}(D_n + D_{n+1}) - \frac{1}{2}(\theta_n + \theta_{n+1}) \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right)$$

$$k_{4,I} = f\left(t_n + h, \hat{P}_{n+1}, D_{n+1}, \theta_{n+1}, I_n + k_{3,I}\right)$$

$$k_{4,I} = \hat{P}_{n+1} - D_{n+1} - \theta_{n+1} (I_n + k_{3,I})$$

- *Backward Sweep* pada persamaan *co state*

$$\dot{\lambda}^*(t) = h[I(t) - \hat{I}] + \theta(t)\lambda(t)$$

hasil diskritisasi dengan menggunakan backward sweep Runge Kutta orde 4 sebagai berikut.

$$\lambda_{n-1} = \lambda_n + \frac{h}{6}(k_{1,\lambda} + 2k_{2,\lambda} + 2k_{3,\lambda} + k_{4,\lambda})$$

dengan

$$k_{1,\lambda} = f(t_n, I_n, \theta_n, \lambda_n)$$

$$k_{1,\lambda} = h[I_n - \hat{I}] + \theta_n \lambda_n$$

$$k_{2,\lambda} = f\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_n - \frac{k_{1,\lambda}}{2}, \frac{1}{2}(\theta_n + \theta_{n+1}), I_n + I_{n+1}\right)$$

$$k_{2,\lambda} = h\left[\frac{1}{2}(I_n + I_{n+1}) - \hat{I}\right] + \frac{1}{2}(\theta_n + \theta_{n+1})\left(\lambda_n - \frac{k_{1,\lambda}}{2}\right)$$

$$k_{3,\lambda} = f\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_n - \frac{k_{2,\lambda}}{2}, \frac{1}{2}(\theta_n + \theta_{n+1}), I_n + I_{n+1}\right)$$

$$k_{3,\lambda} = h\left[\frac{1}{2}(I_n + I_{n+1}) - \hat{I}\right] + \frac{1}{2}(\theta_n + \theta_{n+1})\left(\lambda_n - \frac{k_{2,\lambda}}{2}\right)$$

$$k_{4,\lambda} = f(t_n - h, I_{n-1}, \theta_{n-1}, \lambda_n - k_{3,\lambda})$$

$$k_{4,\lambda} = h[I_{n-1} - \hat{I}] + (\theta_{n-1})(\lambda_n - k_{3,\lambda})$$

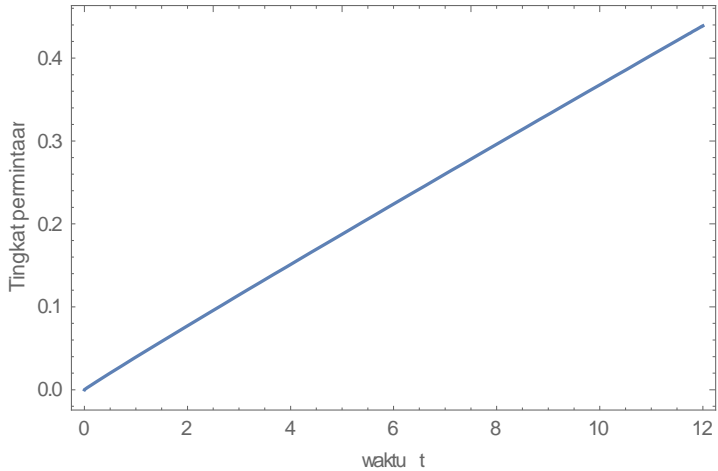
dengan h adalah langkah waktu. Setelah diperoleh diskritisasi sistem, selanjutnya hasil diskritisasi tersebut diimplementasikan ke dalam program komputer untuk simulasi. Simulasi numerik dari masalah kontrol optimal yang dilakukan dengan metode forward sweep dan backward sweep Runge Kutta orde 4 akan dijalankan dengan menggunakan *software* Matlab.

4.5. Analisis dan Hasil Simulasi pada UMKM

Pada subbab ini akan dipaparkan mengenai hasil simulasi numerik dengan menggunakan metode *forward sweep* dan *backward sweep* Runge Kutta orde 4 dengan menerapkan kondisi batas pada persamaan (4.5) sehingga dapat diperoleh solusi yang optimal. Simulasi numerik tersebut dijalankan dengan menggunakan *software* Matlab. Berikut akan dimasukkan nilai-nilai parameter dari model sistem inventori-produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dengan menggunakan data dari salah satu UMKM di Jawa Barat pada penelitian ini.

Diketahui pada UMKM di penelitian ini merencanakan produksinya selama 12 bulan/1 tahun ($T = 12$), dengan inventori awal saat produksi sebanyak 84 unit ($I_0 = 84$). Biaya yang ditanggung oleh UMKM yaitu terdiri dari 2 biaya penyimpanan dan biaya produksi, dua biaya tersebut yaitu biaya penyimpanan sebesar 90juta ($h = 90$) dan biaya produksi sebesar 550juta ($K = 550$). Banyaknya inventori yang diinginkan adalah tetap, yaitu sebanyak 204 unit ($\hat{I} = 204$).

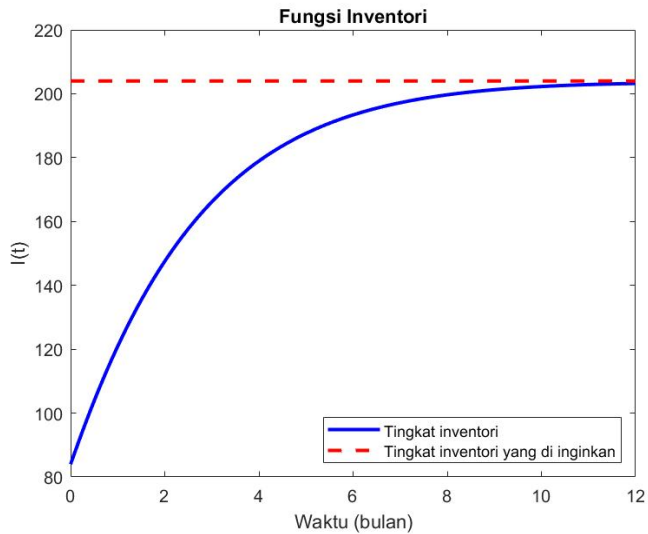
Nilai parameter distribusi Weibull yaitu $\beta = 1,9709$ dan $\alpha = 0,019951$ yang merupakan sebaran tingkat kerusakan produk. Laju kerusakan barang yaitu $\theta = 0.03932t^{0,9709}$ meningkat secara linier seperti Gambar 4.1



Gambar 4. 2 Laju Kerusakan Produk pada kasus UMKM

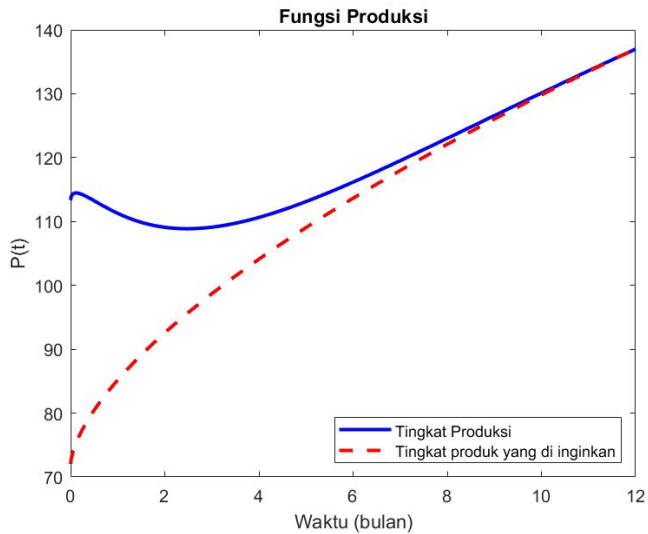
Permintaan konsumen yang terjadi pada UMKM ini berupa fungsi $D(t) = 72.00674 - 0.00185(t)$ yang diperoleh dari hasil regresi pada software Minitab yang tertera pada Lampiran 5. Dengan fungsi permintaan pada UMKM yang diperoleh dari hasil regresi tersebut, maka didapatkan

grafik fungsi Inventori yang ditunjukkan oleh Gambar 4.3 sebagai berikut:



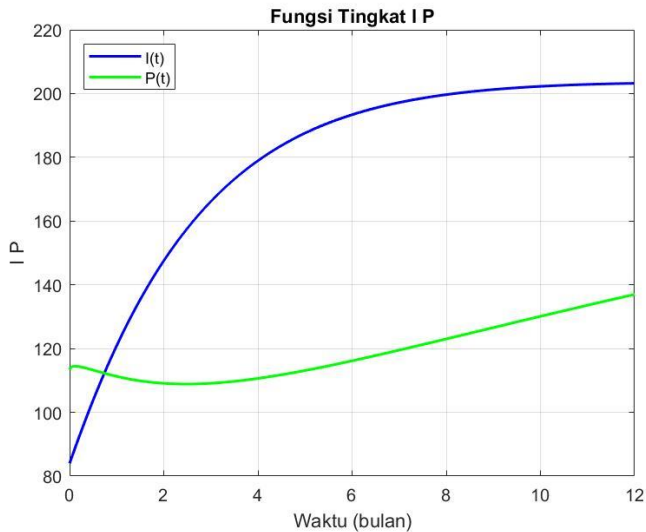
Gambar 4. 3 Fungsi Tingkat Inventori pada UMKM

selain itu diperoleh juga grafik fungsi produksi yang ditunjukkan oleh Gambar 4.4



Gambar 4. 4 Fungsi Tingkat Produksi pada UMKM

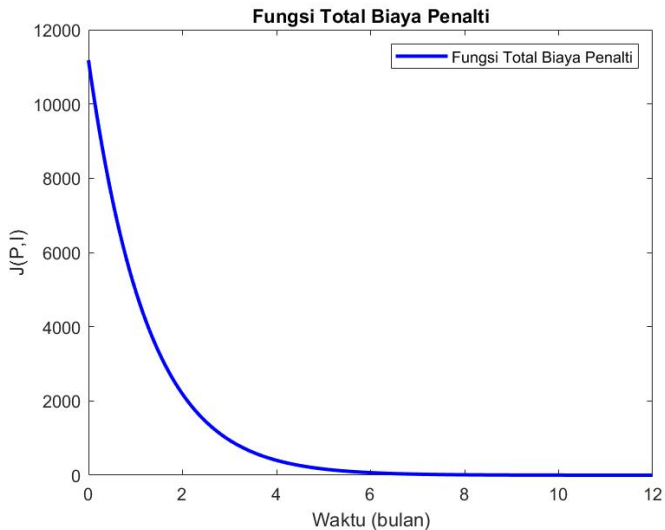
Dari dua gambar tersebut menunjukkan bahwa banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi menuju dengan banyaknya inventori dan banyaknya barang yang diproduksi yang diinginkan oleh UMKM, dapat diartikan bahwa kondisi UMKM tersebut sudah mencapai nilai yang optimal dikarenakan banyaknya inventori dan banyaknya barang sudah sesuai dengan keinginan dari UMKM sendiri. Sehingga hal tersebut membuat total biaya penalti menjadi minimum. Hubungan antara $I^*(t)$ dan $P^*(t)$ dapat dilihat pada Gambar 4.5 di bawah ini



Gambar 4. 5 Hubungan Fungsi $I(t)$ dan $P(t)$

Gambar 4.5 menunjukkan keterkaitan hubungan antara antara $I^*(t)$ dan $P^*(t)$. Karena dari UMKM sendiri menginginkan Inventori awal dan Inventori akhir sebanyak 84 dan 204, dengan fungsi permintaan $D(t) = 72.00674 - 0.00185(t)$ dan fungsi laju kerusakan produk $\theta = 0,03932t^{0,9709}$, maka diperoleh grafik produksinya seperti pada Gambar 4.4 dan 4.5, didapatkan awal produksi dengan sebanyak 113 dan diakhir produksi sebanyak 137. Banyaknya produksi yang diperoleh tersebut dikontrol agar Inventori awal dan Inventori akhir menjadi seperti yang diinginkan oleh UMKM tersebut, diikuti banyaknya permintaan konsumen sehingga tidak menyebabkan kelebihan atau kekurangan di Inventori dan mencapai kondisi yang optimal.

Dari Gambar 4.3 dan 4.4 menunjukkan bahwa banyaknya Inventori dan banyaknya Produksi menuju ke target atau menuju yang diinginkan oleh UMKM, hal tersebut tentu mempengaruhi kedalam total biaya penalti pada UMKM. Berikut ini adalah grafik fungsi total biaya penalti yang ditunjukkan pada Gambar 4.6



Gambar 4. 6 Fungsi Total Biaya Penalti pada UMKM

Fungsi total biaya penalti pada gambar tersebut menunjukkan bahwa total biaya penalti pada UMKM ini semakin menurun dan pada waktu selanjutnya menjadi tetap sehingga total biaya pada UMKM pun mencapai total biaya penalti yang minimum. Total biaya penalti terjadi disebabkan terdapat banyaknya inventori dan banyaknya produksi yang menyimpang dari target yang diinginkan oleh UMKM. Hal tersebut sesuai dengan kondisi yang diharapkan, dimana

banyaknya Inventori dan banyaknya Produksi dapat mencapai target sehingga total biaya penalti yang dikeluarkan oleh UMKM mencapai biaya minimum. Hal itu disebabkan juga tidak terjadinya kekurangan atau kelebihan barang sehingga tidak ada kerugian dalam UMKM tersebut. Maka UMKM dalam penelitian ini telah mencapai tingkat persediaan yang optimal, dikarenakan untuk mencapai tingkat persediaan yang optimal tersebut haru dapat meminimumkan fungsi objektif yang berupa total biaya mengenai biaya penalti dan juga mencapai target yang diinginkan oleh UMKM tersebut.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari hasil pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya. Selain itu, diberikan saran untuk penelitian berikutnya.

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan analisis dari hasil pembahasan, maka kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Dari penyelesaian kontrol optimal diperoleh variabel kontrolnya produksi yang optimal yaitu $P(t) = \hat{P} + \frac{\lambda(t)}{K}$, dan diperoleh juga persamaan *state* dan *co state* yaitu

- *State*

$$\dot{I}^*(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$$

- *Co State*

$$\dot{\lambda}^*(t) = h[I(t) - \hat{I}] + \theta(t)\lambda(t)$$

2. Diperoleh parameter kerusakan produk pada UMKM yang berdistribusi Weibull dengan menurunkan rumus fungsi kumulatif yaitu $\beta = 1,9709$ dan $\alpha = 0,019951$ serta laju kerusakannya yaitu $\theta(t) = 0,03932t^{0,9709}$ berbasis data dari UMKM tersebut. Sehingga parameter-parameter tersebut diterapkan kedalam model sistem inventori produksi dengan memperhatikan kerusakan produk sehingga didapatkan inventori dan produksi yang optimal.
3. Dari hasil penerapan data UMKM ke dalam model dan dimasukkan ke dalam penyelesaian simulasi numerik dengan menggunakan software *Matlab*, dapat dilihat

bahwa banyaknya inventori dan banyaknya produksi pada UMKM tersebut mencapai nilai yang optimal atau nilai yang diinginkan oleh UMKM tersebut, yaitu dengan Inventori awal dan akhir sebanyak 84 dan 204, dan Produksi akhir awal dan akhir sebanyak 113 dan 137. Hal tersebut menunjukkan total biaya mengenai biaya penalti mencapai nilai minimum ketika banyaknya Inventori dan banyaknya produksi yang diinginkan mencapai nilai yang optimal, dikatakan mencapai nilai yang optimal ketika mencapai target yang diinginkan oleh UMKM tersebut dan dapat meminimumkan total biaya mengenai biaya penalti.

5.2. Saran

Pada penulisan selanjutnya, hal yang dapat dikembangkan dari penelitian ini adalah dengan menggunakan data pada perusahaan lain atau yang cakupannya lebih besar dari UMKM, serta dapat mengembangkan model Sistem Inventori-Produksi dengan memperhatikan kerusakan produk sehingga produk yang digunakan tidak hanya untuk satu jenis saja.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Tambunan, T. 2009. “UMKM di Indonesia”. Bogor: Ghalia Indonesia.
- [2] Rangkuti, F. 2007. “Manajemen Persediaan: Aplikasi di Bidang Bisnis. Edisi 2”. Jakarta: PT. Raja Grafindo Persada.
- [3] Sa’adah, N. 2013. “Kontrol Optimum Sistem Inventori-Produksi dengan Laju Kerusakan Barang Menyebar Weibull”. Skripsi Departemen Matematika, IPB. Bogor.
- [4] Pavela, V. 2015. “Kontrol Optimal Sistem Inventori dengan Memperhatikan Kerusakan Produk”. Thesis Departemen Matematika, ITS. Surabaya.
- [5] Alexandri, M. B. 2009. “Manajemen Keuangan Bisnis: Teori dan Soal”. Bandung: Penerbit Alfabeta.
- [6] Ristono, A. 2013. “Manajemen Persediaan”. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.
- [7] Bounkhel, M., Tadj, L., dan Benhadid, Y. 2006. “*Optimal Control of Deteriorating Production Inventory System with Weibull Distributed Deterioration*”.
- [8] Naidu, D. S. 2002. “*Optimal Control Systems.*”. New York.

- [9] Lewis, F. L. Draguna, V. dan Syrmos, V. L. 2012. "*Optimal Control Third Edition*". Canada: John Wiley & Sons Inc.
- [10] Subchan, S. dan Zbikowski, R. 2009. "*Computational optimal control: Tools and practice*". John Wiley & Sons.
- [11] Ross, S. 1996. "Suatu Pengantar ke Teori Peluang. Sumantri B Penerjemah". Bogor.

LAMPIRAN 1

Data kerusakan produk pada UMKM

Tabel 5. 1 Tabel Data Kerusakan Produk pada UMKM

TGL	JAN	FEB	MAR	APR	MEI	JUN	JUL	AGT	SEP	OKT	NOV	DES
1	5	10	7	11	5	1	10	5	6	8	8	1
2	10	3	8	4	3	9	11	8	11	4	5	6
3	1	2	6	9	9	2	4	5	2	1	11	6
4	4	10	3	9	8	3	10	6	6	9	5	3
5	7	7	11	8	4	10	6	10	11	6	5	6
6	1	10	7	6	7	4	7	8	1	7	11	6
7	9	4	8	11	11	7	8	2	4	2	5	10
8	6	2	5	8	6	6	7	8	4	6	11	8
9	6	9	9	7	11	4	1	7	11	10	5	6
10	11	10	6	8	10	3	7	8	1	11	7	11
11	5	6	9	4	9	5	6	10	6	6	1	3
12	1	9	6	11	9	9	4	6	11	2	7	6
13	6	9	9	3	7	7	9	10	7	6	8	9
14	4	7	3	6	9	10	10	4	8	8	2	4
15	1	9	5	6	5	8	5	3	7	11	5	6
16	9	5	8	7	1	2	11	9	8	1	7	2
17	6	2	7	7	4	6	9	10	9	1	9	11
18	9	6	2	3	4	5	8	7	11	6	10	3
19	2	6	5	1	9	5	1	8	4	1	4	6
20	7	8	4	6	6	8	11	8	6	2	5	3
21	6	5	7	5	7	3	8	6	9	6	7	3
22	3	4	4	11	4	2	11	4	5	7	1	7
23	2	7	4	7	7	10	9	10	4	6	6	11
24	10	9	11	5	11	7	5	2	7	7	11	5
25	10	2	8	4	11	9	5	1	2	9	9	7
26	2	7	3	2	6	8	9	10	11	11	11	2
27	6	10	10	6	7	5	7	6	3	7	9	3
28	7	5	2	5	11	5	1	8	5	11	4	1
29	2		10	4	2	4	5	10	6	8	2	2
30	11		6	5	5	6	3	6	5	7	4	7
31	9		8		5		5	11		5		7

Data permintaan produk pada UMKM

Tabel 5. 2 Tabel Data Permintaan Produk pada UMKM

TGL	JAN	FEB	MAR	APR	MEI	JUN	JUL	AGS	SEP	OKT	NOV	DES
1	161	97	56	33	77	92	61	53	143	70	43	95
2	83	105	69	73	88	96	70	72	91	60	127	46
3	88	105	114	92	94	156	47	55	74	47	147	37
4	84	76	50	41	85	226	39	83	47	81	44	42
5	105	115	66	61	103	0	69	54	41	87	53	61
6	133	72	62	82	0	14	95	67	77	161	39	62
7	60	69	59	97	40	106	79	81	95	44	75	68
8	34	73	78	48	25	146	39	65	127	34	78	109
9	42	79	86	49	39	153	59	96	71	52	101	45
10	75	117	109	51	17	106	66	126	46	71	87	51
11	56	32	102	78	38	80	67	21	50	80	67	52
12	87	36	32	49	56	68	85	95	37	88	51	83
13	76	57	34	99	31	63	61	94	80	105	41	66
14	270	66	31	113	29	110	119	74	126	69	65	74
15	34	76	75	92	25	99	40	72	114	39	82	110
16	54	84	121	72	35	108	34	80	44	40	79	44
17	53	151	118	46	56	27	34	124	35	42	91	43
18	74	70	36	116	120	45	46	181	41	146	46	70
19	88	37	48	89	103	55	71	74	90	78	67	68
20	108	42	51	88	37	56	109	66	43	94	57	130
21	44	32	42	91	30	74	52	49	85	48	52	180
22	53	76	76	66	37	84	57	60	129	37	41	134
23	45	93	55	58	50	88	52	82	68	69	75	93
24	43	88	100	64	80	57	42	93	63	44	94	113
25	41	38	45	36	172	154	25	139	67	76	42	41
26	80	54	36	87	88	36	88	69	51	77	23	53
27	80	40	32	110	46	60	84	62	80	116	33	88
28	34	52	41	75	78	82	74	50	78	51	39	66
29	55		62	52	84	79	52	53	90	45	45	69
30	37		80	68	87	52	40	92	53	32	79	89
31	34		100		61		64	109		57		59

LAMPIRAN 2

Perhitungan turunan rumus fungsi kumulatif

i	x	ln(x)	RM	yi
1	1	0	0,001915709	-6,256708968
2	1	0	0,004652436	-5,368033653
3	1	0	0,007389163	-4,904034864
4	1	0	0,010125889	-4,587575388
5	1	0	0,012862616	-4,346964091
6	1	0	0,015599343	-4,152675622
7	1	0	0,01833607	-3,989646258
8	1	0	0,021072797	-3,849142216
9	1	0	0,023809524	-3,725645038
10	1	0	0,026546251	-3,615444437
11	1	0	0,029282978	-3,515925565
12	1	0	0,032019704	-3,425176156
13	1	0	0,034756431	-3,341755387
14	1	0	0,037493158	-3,264550605
15	1	0	0,040229885	-3,192684658
16	1	0	0,042966612	-3,125453793
17	1	0	0,045703339	-3,062284762
18	1	0	0,048440066	-3,002704424
19	1	0	0,051176793	-2,946317709
20	1	0	0,053913519	-2,892791336
21	1	0	0,056650246	-2,841841563
22	2	0,693147181	0,059386973	-2,793224828
23	2	0,693147181	0,0621237	-2,746730505
24	2	0,693147181	0,064860427	-2,70217522
25	2	0,693147181	0,067597154	-2,659398343
26	2	0,693147181	0,070333881	-2,618258372
27	2	0,693147181	0,073070608	-2,578630019
28	2	0,693147181	0,075807334	-2,540401814
29	2	0,693147181	0,078544061	-2,503474151
30	2	0,693147181	0,081280788	-2,467757658
31	2	0,693147181	0,084017515	-2,433171846
32	2	0,693147181	0,086754242	-2,399643961
33	2	0,693147181	0,089490969	-2,367108031
34	2	0,693147181	0,092227696	-2,335504045
35	2	0,693147181	0,094964423	-2,304777254
36	2	0,693147181	0,097701149	-2,274877577
37	2	0,693147181	0,100437876	-2,245759081
38	2	0,693147181	0,103174603	-2,217379537
39	2	0,693147181	0,10591133	-2,18970003
40	2	0,693147181	0,108648057	-2,162684624

41	2	0,693147181	0,111384784	-2,136300063
42	2	0,693147181	0,114121511	-2,110515511
43	2	0,693147181	0,116858238	-2,085302323
44	2	0,693147181	0,119594964	-2,060633843
45	2	0,693147181	0,122331691	-2,03648522
46	2	0,693147181	0,125068418	-2,012833255
47	2	0,693147181	0,127805145	-1,98965625
48	2	0,693147181	0,130541872	-1,966933889
49	3	1,098612289	0,133278599	-1,944647114
50	3	1,098612289	0,136015326	-1,922778033
51	3	1,098612289	0,138752053	-1,901309817
52	3	1,098612289	0,141488779	-1,880226626
53	3	1,098612289	0,144225506	-1,859513526
54	3	1,098612289	0,146962233	-1,839156424
55	3	1,098612289	0,14969896	-1,819142007
56	3	1,098612289	0,152435687	-1,799457683
57	3	1,098612289	0,155172414	-1,780091531
58	3	1,098612289	0,157909141	-1,761032253
59	3	1,098612289	0,160645868	-1,742269134
60	3	1,098612289	0,163382594	-1,723791999
61	3	1,098612289	0,166119321	-1,705591179
62	3	1,098612289	0,168856048	-1,687657477
63	3	1,098612289	0,171592775	-1,669982139
64	3	1,098612289	0,174329502	-1,652556825
65	3	1,098612289	0,177066229	-1,635373583
66	3	1,098612289	0,179802956	-1,618424826
67	3	1,098612289	0,182539683	-1,601703308
68	3	1,098612289	0,185276409	-1,585202107
69	4	1,386294361	0,188013136	-1,568914603
70	4	1,386294361	0,190749863	-1,552834461
71	4	1,386294361	0,19348659	-1,536955616
72	4	1,386294361	0,196223317	-1,521272259
73	4	1,386294361	0,198960044	-1,505778817
74	4	1,386294361	0,201696771	-1,490469948
75	4	1,386294361	0,204433498	-1,475340521
76	4	1,386294361	0,207170224	-1,460385611
77	4	1,386294361	0,209906951	-1,445600484
78	4	1,386294361	0,212643678	-1,43098059
79	4	1,386294361	0,215380405	-1,41652155
80	4	1,386294361	0,218117132	-1,402219151

81	4	1,386294361	0,220853859	-1,388069337
82	4	1,386294361	0,223590586	-1,374068198
83	4	1,386294361	0,226327313	-1,360211966
84	4	1,386294361	0,229064039	-1,34649701
85	4	1,386294361	0,231800766	-1,332919824
86	4	1,386294361	0,234537493	-1,319477024
87	4	1,386294361	0,23727422	-1,306165345
88	4	1,386294361	0,240010947	-1,292981631
89	4	1,386294361	0,242747674	-1,279922831
90	4	1,386294361	0,245484401	-1,266985997
91	4	1,386294361	0,248221128	-1,254168278
92	4	1,386294361	0,250957854	-1,241466912
93	4	1,386294361	0,253694581	-1,22887923
94	4	1,386294361	0,256431308	-1,216402644
95	4	1,386294361	0,259168035	-1,204034648
96	4	1,386294361	0,261904762	-1,191772815
97	4	1,386294361	0,264641489	-1,17961479
98	4	1,386294361	0,267378216	-1,16755829
99	4	1,386294361	0,270114943	-1,1556011
100	5	1,609437912	0,272851669	-1,143741072
101	5	1,609437912	0,275588396	-1,131976119
102	5	1,609437912	0,278325123	-1,120304215
103	5	1,609437912	0,28106185	-1,108723392
104	5	1,609437912	0,283798577	-1,097231739
105	5	1,609437912	0,286535304	-1,085827396
106	5	1,609437912	0,289272031	-1,074508556
107	5	1,609437912	0,292008758	-1,063273462
108	5	1,609437912	0,294745484	-1,052120403
109	5	1,609437912	0,297482211	-1,041047715
110	5	1,609437912	0,300218938	-1,030053779
111	5	1,609437912	0,302955665	-1,019137017
112	5	1,609437912	0,305692392	-1,008295892
113	5	1,609437912	0,308429119	-0,997528907
114	5	1,609437912	0,311165846	-0,986834604
115	5	1,609437912	0,313902573	-0,976211561
116	5	1,609437912	0,316639299	-0,96565839
117	5	1,609437912	0,319376026	-0,95517374
118	5	1,609437912	0,322112753	-0,94475629
119	5	1,609437912	0,32484948	-0,934404754
120	5	1,609437912	0,327586207	-0,924117873

121	5	1,609437912	0,330322934	-0,913894422
122	5	1,609437912	0,333059661	-0,9037332
123	5	1,609437912	0,335796388	-0,893633039
124	5	1,609437912	0,338533114	-0,883592793
125	5	1,609437912	0,341269841	-0,873611345
126	5	1,609437912	0,344006568	-0,863687602
127	5	1,609437912	0,346743295	-0,853820495
128	5	1,609437912	0,349480022	-0,844008979
129	5	1,609437912	0,352216749	-0,834252031
130	5	1,609437912	0,354953476	-0,824548651
131	5	1,609437912	0,357690203	-0,814897859
132	5	1,609437912	0,360426929	-0,805298698
133	5	1,609437912	0,363163656	-0,795750227
134	5	1,609437912	0,365900383	-0,786251527
135	5	1,609437912	0,36863711	-0,776801699
136	5	1,609437912	0,371373837	-0,767399859
137	5	1,609437912	0,374110564	-0,758045141
138	5	1,609437912	0,376847291	-0,748736699
139	5	1,609437912	0,379584018	-0,7394737
140	6	1,791759469	0,382320744	-0,73025533
141	6	1,791759469	0,385057471	-0,721080787
142	6	1,791759469	0,387794198	-0,711949287
143	6	1,791759469	0,390530925	-0,702860059
144	6	1,791759469	0,393267652	-0,693812347
145	6	1,791759469	0,396004379	-0,684805409
146	6	1,791759469	0,398741106	-0,675838514
147	6	1,791759469	0,401477833	-0,666910948
148	6	1,791759469	0,404214559	-0,658022005
149	6	1,791759469	0,406951286	-0,649170994
150	6	1,791759469	0,409688013	-0,640357235
151	6	1,791759469	0,41242474	-0,631580059
152	6	1,791759469	0,415161467	-0,622838809
153	6	1,791759469	0,417898194	-0,614132838
154	6	1,791759469	0,420634921	-0,60546151
155	6	1,791759469	0,423371648	-0,596824199
156	6	1,791759469	0,426108374	-0,588220288
157	6	1,791759469	0,428845101	-0,579649171
158	6	1,791759469	0,431581828	-0,571110249
159	6	1,791759469	0,434318555	-0,562602935
160	6	1,791759469	0,437055282	-0,554126648

161	6	1,791759469	0,439792009	-0,545680817
162	6	1,791759469	0,442528736	-0,53726488
163	6	1,791759469	0,445265463	-0,528878279
164	6	1,791759469	0,448002189	-0,520520469
165	6	1,791759469	0,450738916	-0,512190908
166	6	1,791759469	0,453475643	-0,503889065
167	6	1,791759469	0,45621237	-0,495614412
168	6	1,791759469	0,458949097	-0,487366432
169	6	1,791759469	0,461685824	-0,479144611
170	6	1,791759469	0,464422551	-0,470948444
171	6	1,791759469	0,467159278	-0,462777431
172	6	1,791759469	0,469896004	-0,454631077
173	6	1,791759469	0,472632731	-0,446508895
174	6	1,791759469	0,475369458	-0,438410402
175	6	1,791759469	0,478106185	-0,430335122
176	6	1,791759469	0,480842912	-0,422282582
177	6	1,791759469	0,483579639	-0,414252315
178	6	1,791759469	0,486316366	-0,406243861
179	6	1,791759469	0,489053093	-0,398256761
180	6	1,791759469	0,491789819	-0,390290563
181	6	1,791759469	0,494526546	-0,382344819
182	6	1,791759469	0,497263273	-0,374419085
183	6	1,791759469	0,5	-0,366512921
184	6	1,791759469	0,502736727	-0,358625891
185	6	1,791759469	0,505473454	-0,350757563
186	6	1,791759469	0,508210181	-0,342907508
187	6	1,791759469	0,510946907	-0,335075302
188	6	1,791759469	0,513683634	-0,327260523
189	6	1,791759469	0,516420361	-0,319462751
190	6	1,791759469	0,519157088	-0,311681572
191	6	1,791759469	0,521893815	-0,303916573
192	7	1,945910149	0,524630542	-0,296167343
193	7	1,945910149	0,527367269	-0,288433476
194	7	1,945910149	0,530103996	-0,280714567
195	7	1,945910149	0,532840722	-0,273010214
196	7	1,945910149	0,535577449	-0,265320015
197	7	1,945910149	0,538314176	-0,257643574
198	7	1,945910149	0,541050903	-0,249980493
199	7	1,945910149	0,54378763	-0,242330379
200	7	1,945910149	0,546524357	-0,234692839

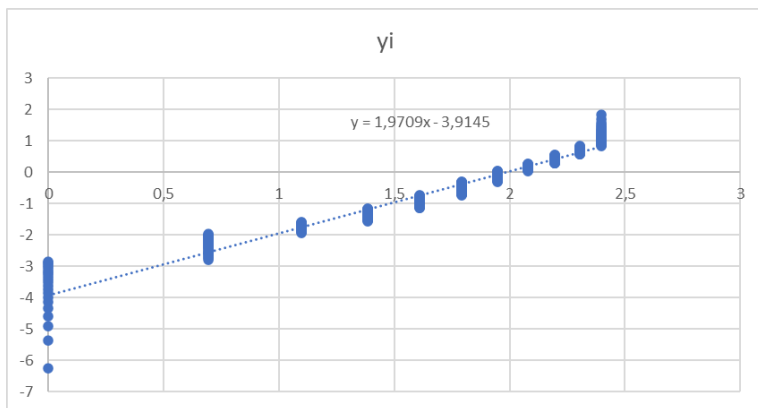
201	7	1,945910149	0,549261084	-0,227067481
202	7	1,945910149	0,551997811	-0,219453917
203	7	1,945910149	0,554734537	-0,211851757
204	7	1,945910149	0,557471264	-0,204260615
205	7	1,945910149	0,560207991	-0,196680104
206	7	1,945910149	0,562944718	-0,189109839
207	7	1,945910149	0,565681445	-0,181549435
208	7	1,945910149	0,568418172	-0,17399851
209	7	1,945910149	0,571154899	-0,166456679
210	7	1,945910149	0,573891626	-0,158923559
211	7	1,945910149	0,576628352	-0,151398769
212	7	1,945910149	0,579365079	-0,143881925
213	7	1,945910149	0,582101806	-0,136372646
214	7	1,945910149	0,584838533	-0,128870548
215	7	1,945910149	0,58757526	-0,121375249
216	7	1,945910149	0,590311987	-0,113886366
217	7	1,945910149	0,593048714	-0,106403514
218	7	1,945910149	0,595785441	-0,09892631
219	7	1,945910149	0,598522167	-0,091454368
220	7	1,945910149	0,601258894	-0,083987302
221	7	1,945910149	0,603995621	-0,076524725
222	7	1,945910149	0,606732348	-0,069066248
223	7	1,945910149	0,609469075	-0,061611482
224	7	1,945910149	0,612205802	-0,054160034
225	7	1,945910149	0,614942529	-0,046711512
226	7	1,945910149	0,617679256	-0,039265521
227	7	1,945910149	0,620415982	-0,031821664
228	7	1,945910149	0,623152709	-0,024379542
229	7	1,945910149	0,625889436	-0,016938754
230	7	1,945910149	0,628626163	-0,009498895
231	7	1,945910149	0,63136289	-0,002059559
232	7	1,945910149	0,634099617	0,005379663
233	7	1,945910149	0,636836344	0,012819185
234	7	1,945910149	0,639573071	0,02025942
235	7	1,945910149	0,642309797	0,027700789
236	7	1,945910149	0,645046524	0,035143714
237	8	2,079441542	0,647783251	0,042588621
238	8	2,079441542	0,650519978	0,050035941
239	8	2,079441542	0,653256705	0,057486108
240	8	2,079441542	0,655993432	0,064939561

241	8	2,079441542	0,658730159	0,072396744
242	8	2,079441542	0,661466886	0,079858104
243	8	2,079441542	0,664203612	0,087324096
244	8	2,079441542	0,666940339	0,094795178
245	8	2,079441542	0,669677066	0,102271815
246	8	2,079441542	0,672413793	0,109754476
247	8	2,079441542	0,67515052	0,117243639
248	8	2,079441542	0,677887247	0,124739785
249	8	2,079441542	0,680623974	0,132243405
250	8	2,079441542	0,683360701	0,139754994
251	8	2,079441542	0,686097427	0,147275057
252	8	2,079441542	0,688834154	0,154804103
253	8	2,079441542	0,691570881	0,162342653
254	8	2,079441542	0,694307608	0,169891234
255	8	2,079441542	0,697044335	0,177450382
256	8	2,079441542	0,699781062	0,185020642
257	8	2,079441542	0,702517789	0,192602567
258	8	2,079441542	0,705254516	0,200196723
259	8	2,079441542	0,707991242	0,207803683
260	8	2,079441542	0,710727969	0,215424033
261	8	2,079441542	0,713464696	0,223058369
262	8	2,079441542	0,716201423	0,230707297
263	8	2,079441542	0,71893815	0,238371438
264	8	2,079441542	0,721674877	0,246051424
265	8	2,079441542	0,724411604	0,253747899
266	8	2,079441542	0,727148331	0,261461524
267	8	2,079441542	0,729885057	0,269192971
268	9	2,197224577	0,732621784	0,276942927
269	9	2,197224577	0,735358511	0,284712098
270	9	2,197224577	0,738095238	0,292501201
271	9	2,197224577	0,740831965	0,300310974
272	9	2,197224577	0,743568692	0,308142171
273	9	2,197224577	0,746305419	0,315995564
274	9	2,197224577	0,749042146	0,323871946
275	9	2,197224577	0,751778872	0,331772128
276	9	2,197224577	0,754515599	0,339696942
277	9	2,197224577	0,757252326	0,347647245
278	9	2,197224577	0,759989053	0,355623913
279	9	2,197224577	0,76272578	0,363627848
280	9	2,197224577	0,765462507	0,371659978

281	9	2,197224577	0,768199234	0,379721255
282	9	2,197224577	0,770935961	0,387812661
283	9	2,197224577	0,773672687	0,395935204
284	9	2,197224577	0,776409414	0,404089924
285	9	2,197224577	0,779146141	0,412277894
286	9	2,197224577	0,781882868	0,420500218
287	9	2,197224577	0,784619595	0,428758035
288	9	2,197224577	0,787356322	0,437052522
289	9	2,197224577	0,790093049	0,445384895
290	9	2,197224577	0,792829776	0,453756407
291	9	2,197224577	0,795566502	0,462168358
292	9	2,197224577	0,798303229	0,470622091
293	9	2,197224577	0,801039956	0,479118995
294	9	2,197224577	0,803776683	0,48766051
295	9	2,197224577	0,80651341	0,496248129
296	9	2,197224577	0,809250137	0,504883399
297	9	2,197224577	0,811986864	0,513567927
298	9	2,197224577	0,814723591	0,52230338
299	9	2,197224577	0,817460317	0,531091491
300	9	2,197224577	0,820197044	0,539934064
301	9	2,197224577	0,822933771	0,548832972
302	9	2,197224577	0,825670498	0,557790169
303	10	2,302585093	0,828407225	0,566807691
304	10	2,302585093	0,831143952	0,575887659
305	10	2,302585093	0,833880679	0,585032289
306	10	2,302585093	0,836617406	0,594243896
307	10	2,302585093	0,839354132	0,603524898
308	10	2,302585093	0,842090859	0,612877827
309	10	2,302585093	0,844827586	0,622305333
310	10	2,302585093	0,847564313	0,631810194
311	10	2,302585093	0,85030104	0,641395326
312	10	2,302585093	0,853037767	0,651063788
313	10	2,302585093	0,855774494	0,660818799
314	10	2,302585093	0,858511221	0,670663743
315	10	2,302585093	0,861247947	0,680602187
316	10	2,302585093	0,863984674	0,69063789
317	10	2,302585093	0,866721401	0,700774823
318	10	2,302585093	0,869458128	0,71101718
319	10	2,302585093	0,872194855	0,7213694
320	10	2,302585093	0,874931582	0,731836188

321	10	2,302585093	0,877668309	0,742422533
322	10	2,302585093	0,880405036	0,753133736
323	10	2,302585093	0,883141762	0,763975438
324	10	2,302585093	0,885878489	0,774953647
325	10	2,302585093	0,888615216	0,786074775
326	10	2,302585093	0,891351943	0,797345677
327	10	2,302585093	0,89408867	0,80877369
328	10	2,302585093	0,896825397	0,820366685
329	10	2,302585093	0,899562124	0,832133121
330	11	2,397895273	0,902298851	0,844082105
331	11	2,397895273	0,905035577	0,856223461
332	11	2,397895273	0,907772304	0,868567817
333	11	2,397895273	0,910509031	0,881126687
334	11	2,397895273	0,913245758	0,893912584
335	11	2,397895273	0,915982485	0,906939137
336	11	2,397895273	0,918719212	0,920221237
337	11	2,397895273	0,921455939	0,933775192
338	11	2,397895273	0,924192666	0,947618931
339	11	2,397895273	0,926929392	0,96177222
340	11	2,397895273	0,929666119	0,976256935
341	11	2,397895273	0,932402846	0,99109738
342	11	2,397895273	0,935139573	1,006320667
343	11	2,397895273	0,9378763	1,02195718
344	11	2,397895273	0,940613027	1,038041135
345	11	2,397895273	0,943349754	1,054611269
346	11	2,397895273	0,946086481	1,071711693
347	11	2,397895273	0,948823207	1,089392961
348	11	2,397895273	0,951559934	1,107713416
349	11	2,397895273	0,954296661	1,126740918
350	11	2,397895273	0,957033388	1,146555088
351	11	2,397895273	0,959770115	1,167250255
352	11	2,397895273	0,962506842	1,18893941
353	11	2,397895273	0,965243569	1,211759604
354	11	2,397895273	0,967980296	1,23587947
355	11	2,397895273	0,970717022	1,261510002
356	11	2,397895273	0,973453749	1,288920412
357	11	2,397895273	0,976190476	1,318462321
358	11	2,397895273	0,978927203	1,350608196
359	11	2,397895273	0,981663393	1,386015602
360	11	2,397895273	0,984400657	1,425641621

361	11	2,397895273	0,987137384	1,470964071
362	11	2,397895273	0,989874111	1,524459339
363	11	2,397895273	0,992610837	1,590813728
364	11	2,397895273	0,995347564	1,680895763
365	11	2,397895273	0,998084291	1,833807526

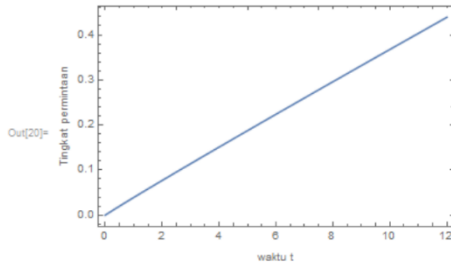


LAMPIRAN 3

```
In[10]:=  $\alpha = 0.019951;$   
 $\beta = 1.9709;$ 
```

```
In[19]:=  $\theta[t_] := \alpha \beta t^{(\beta - 1)}$ 
```

```
In[20]:= Plot[ $\theta[t]$ , {t, 0, 12}, Frame  $\rightarrow$  True, FrameLabel  $\rightarrow$  {"waktu t", "Tingkat permintaan"}]
```



```
In[21]:=  $\theta[t_] = \alpha \beta t^{(\beta - 1)}$ 
```

```
Out[21]=  $0.0393214 t^{0.9709}$ 
```

LAMPIRAN 4

```

%persamaan state
%  $dH/dI = P\_topi - D - teta*I$ 
%persamaan  $\bar{c}$ o state
%  $dH/dlamda = h[I-I\_topi] + teta*lamda$ 
clc;
clear all;
close all;

%% Parameter
h = 90;           %biaya penyimpanan
c = 550;         %biaya produksi
alpha = 0.039329;
beta = 1.6423;
I_topi = 204; %inventori akhir
Pmin = 0;
I0 = 84; %inventori awal
delta = 0.00273973;

%% function
%state
fI = @(t, I, P) -alpha*beta*t^(beta-1)*I+P-(72.00674 - 0.00185*(t));

%costate
flambda = @(t, I, lambda) h*(I-I_topi)+lambda*alpha*beta*t^(beta-1);

%% Step size
test = -1;
t0 = 0;           %waktu awal
tf = 12;         %waktu akhir
h2 = 0.01;       %increment
N = (tf-t0)/h2;

```

```

%% Initial condition
I = zeros(1,N+1);
P = zeros(1,N+1);
lambda = zeros(1,N+1);

t(1) = t0;
t(N+1) = tf;
for i=1:N-1
    t(i+1)=t(i)+h2;
end
I(1) = I0;

for j = 1:N+1
    P_topi(j) = (72.00674 -
0.00185*(t(j)))+ alpha*beta*t(j)^(beta-
1)*I_topi;          %produksi optimal

end

while (test < 0)
    oldP=P;
    oldI=I;
    oldlambda=lambda;

    for i = 1:N
        k1I = fI(t(i), I(i), P(i));
        k2I = fI(t(i)+h2/2,
I(i)+k1I*h2/2, P(i)+h2/2);
        k3I = fI(t(i)+h2/2,
I(i)+k2I*h2/2, P(i)+h2/2);
        k4I = fI(t(i)+h2, I(i)+k3I*h2,
P(i)+h2);

```

```

I(i+1)=I(i)+(k1I+2*k2I+2*k3I+k4I)*(h2/6);

    t(i+1) = t(i)+h2;
end

for i = 1:N
    j = N+2-i;
    klambda1 = flambda(t(j), I(j),
lambda(j));
    klambda2 = flambda(t(j)-h2/2,
0.5*(I(j)+I(j-1)),lambda(j)-
klambda1*h2/2);
    klambda3 = flambda(t(j)-h2/2,
0.5*(I(j)+I(j-1)),lambda(j)-
klambda2*h2/2);
    klambda4 = flambda(t(j)-h2, I(j-
1), lambda(j)-h2*klambda3);

    lambda(j-1)=lambda(j)-(klambda1 +
2*klambda2+2*klambda3+klambda4)*(h2/6);
end
P= max(0,(P_topi+lambda/c));
%kontrol produksi
P = 0.5*( P + oldP);
J = (0.5*(h.*((I-I_topi).^2) +
c.*((P-P_topi).^2))*h2);
D = 72.00674 - 0.00185*(t);

    temp1 = delta*sum(abs(P))-
sum(abs(oldP-P)); %untuk dapet nilai
pengontrol optimalnya
    temp2 = delta*sum(abs(I))-
sum(abs(oldI-I));

```

```

        temp3 = delta*sum(abs(lambda))-
sum(abs(olddlamba-lambda));
        test = min(temp1, min(temp2, temp3));
end

%% Plot
figure(1)
plot(t, I, 'blue', 'LineWidth', 2)
hold on
plot(t, I_topi*ones(length(t)), '--
r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (bulan)');
ylabel('I(t)');
legend({'Tingkat inventori', 'Tingkat
inventori yang di
inginkan'}, 'Location', 'southeast');
title('Fungsi Inventori');

figure(2)
plot(t, P, 'blue', 'LineWidth', 2)
hold on
plot(t, P_topi, '--r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (bulan)');
ylabel('P(t)');
legend({'Tingkat Produksi', 'Tingkat
produk yang di
inginkan'}, 'Location', 'southeast');
title('Fungsi Produksi');

figure(3)
plot(t, J, 'blue', 'LineWidth', 2)
hold on
xlabel('Waktu (bulan)');
ylabel('J(P, I)');

```

```
legend('Fungsi Total Biaya');
title('Fungsi Total Biaya');

figure(4)
plot(t,D,'blue','LineWidth',2)
hold on
xlabel('Waktu (bulan)');
ylabel('D(t)');
legend('Fungsi Tingkat Permintaan');
title('Fungsi Permintaan');

figure(5)
plot(t,D,'red','LineWidth',1.5);
hold on
plot(t,I,'blue','LineWidth',1.5);
hold on
plot(t,P,'green','LineWidth',1.5);
hold off
legend({'D(t)', 'I(t)', 'P(t)'}, 'Location',
'northwest');
xlabel('Waktu (bulan)');
ylabel('D I P');
grid on;
title('Fungsi Tingkat D I P');
```


LAMPIRAN 5

Regression Analysis: Permintaan versus x

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	1	14	13,84	0,01	0,912
x	1	14	13,84	0,01	0,912
Error	363	407999	1123,96		
Total	364	408013			

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
33,5256	0,00%	0,00%	0,00%

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	72,01	3,52	20,47	0,000	
x	-0,0018	0,0167	-0,11	0,912	1,00

Regression Equation

$$\text{Permintaan} = 72.01 - 0.0018 x$$

Fits and Diagnostics for Unusual Observations

Obs	Permintaan	Fit	Resid	Std Resid	
1	161,00	72,00	89,00	2,67	R
14	270,00	71,98	198,02	5,94	R
48	151,00	71,92	79,08	2,37	R
126	0,00	71,77	-71,77	-2,14	R
145	172,00	71,74	100,26	3,00	R
154	156,00	71,72	84,28	2,52	R

155	226,00	71,72	154,28	4,61	R
156	0,00	71,72	-71,72	-2,14	R
159	146,00	71,71	74,29	2,22	R
160	153,00	71,71	81,29	2,43	R
176	154,00	71,68	82,32	2,46	R
230	181,00	71,58	109,42	3,27	R
237	139,00	71,57	67,43	2,01	R
244	143,00	71,56	71,44	2,13	R
279	161,00	71,49	89,51	2,68	R
291	146,00	71,47	74,53	2,23	R
307	147,00	71,44	75,56	2,26	R
355	180,00	71,35	108,65	3,26	R

R Large residual

BIODATA PENULIS



Jinandya Mentari Nurrachelia atau biasa dipanggil Jinan, lahir di Sumedang pada tanggal 19 Juli 1998. Penulis menempuh Pendidikan formal dimulai dari sekolah di TK Bahagia, SDN Cibeusi, SMP Labschool Cibiru dan SMAN 1 SUMEDANG. Pada saat ini penulis menempuh Pendidikan S1 di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya Departemen Matematika. Selama kuliah, penulis aktif mengikuti kegiatan dan organisasi, diantaranya berpartisipasi di UKAFO ITS sebagai bendahara dari tahun 2017-2019, Himpunan Mahasiswa Matematika ITS (HIMATIKA ITS) sebagai Staff Social Development pada tahun 2019. Penulis juga mengikuti acara-acara kepanitiaan, diantaranya ikut serta dalam *event* GEMPA 2016, GUYUB ITS 2017, OMITS 2018 dan OMITS 2019. Selain itu, penulis juga menjadi peserta Global Project Based Learning (GPBL) mewakili Departemen Matematika ITS yang berkolaborasi dengan Shibaura Institute of Teknologi Jepang (SIT) yang diselenggarakan di ITS Surabaya (2019), serta mengikuti kegiatan GPBL yang dilaksanakan di SIT Jepang (2019) juga.

Demikian biodata penulis, jika ada kritik, saran dan informasi lebih lanjut berkaitan dengan Tugas Akhir ini dapat menghubungi melalui

email: mentarijinandya@gmail.com