



TUGAS AKHIR - KM184801

**PENENTUAN HARGA *DIGITAL CALL OPTION* DENGAN  
MODEL BLACK-SCHOLES MENGGUNAKAN METODE  
HOMOTOPI PERTURBASI**

**ISLACHIYATUL UMMAH  
0611164000075**

Dosen Pembimbing  
Endah Rokhmati M.P., Ph.D  
Dra. Nur Asiyah, M.Si

Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2020



TUGAS AKHIR - KM184801

**PENENTUAN HARGA DIGITAL CALL OPTION  
DENGAN MODEL BLACK-SCHOLES  
MENGUNAKAN METODE HOMOTOPI  
PERTURBASI**

ISLACHİYATUL UMMAH  
NRP 06111640000075

Dosen Pembimbing:  
Endah Rokhmati M.P., Ph.D  
Dra. Nur Asiyah, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2020





FINAL PROJECT - KM184801

**PRICING DIGITAL CALL OPTION IN THE  
BLACK-SCHOLES MODEL USING HOMOTOPY  
PERTURBATION METHOD**

ISLACHIYATUL UMMAH  
NRP 06111640000075

Supervisors:  
Endah Rokhmati M.P., Ph.D  
Dra. Nur Asiyah, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Science and Data Analytics  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2020



**LEMBAR PENGESAHAN**  
**PENENTUAN HARGA *DIGITAL CALL OPTION***  
**DENGAN MODEL BLACK-SCHOLES**  
**MENGUNAKAN METODE HOMOTOPI PERTURBASI**

***PRICING DIGITAL CALL OPTION IN THE***  
***BLACK-SCHOLES MODEL USING HOMOTOPY***  
***PERTURBATION METHOD***

**TUGAS AKHIR**

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika  
pada bidang studi Riset Operasi dan Pengolahan Data  
Program Studi S1 Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

**ISLACHIYATUL UMMAH**  
NRP. 06111640000075

Menyetujui,

Pembimbing II

Pembimbing I



Dra. Nur Asiyah, M.Si  
NIP.19610822 198701 2



Endah Rokhmah M.P., Ph.D  
NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui

Kepala Departemen Matematika  
FSAD ITS



Subchan, Ph.D  
NIP. 19710513 199702 1 001  
Surabaya, 2020



**PENENTUAN HARGA *DIGITAL CALL*  
*OPTION*  
DENGAN MODEL BLACK-SCHOLES  
MENGUNAKAN METODE HOMOTOPI  
PERTURBASI**

Nama Mahasiswa : Islachiyatul Ummah  
NRP : 0611164000075  
Jurusan : Matematika FSAD-ITS  
Pembimbing : 1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D  
2. Dra. Nur Asiyah, M.Si

**Abstrak**

*Opsi merupakan suatu produk investasi yang nilainya bergantung pada harga saham. Sayangnya pergerakan harga saham di pasar modal cenderung tidak stabil dan susah untuk diprediksi. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan harga opsi call digital dengan model Black-Scholes menggunakan dua metode dan untuk mengetahui kinerja metode tersebut. Pertama, solusi analitik dari model Black-Scholes dicari dengan mengubahnya menjadi persamaan difusi. Kemudian, solusi pendekatan analitiknya dicari menggunakan metode homotopi perturbasi. Setelah itu, dilakukan simulasi dengan membandingkan kedua nilai tersebut. Hasil yang didapatkan adalah nilai dari solusi pendekatan analitik mendekati nilai dari solusi analitik. Jadi, dapat disimpulkan bahwa metode homotopi perturbasi dapat digunakan untuk mencari solusi pendekatan analitik model Black-Scholes dan menghasilkan solusi pendekatan yang cukup akurat.*

**Kata kunci :** *Metode Homotopi Perturbasi, Model Black-Scholes, Opsi, Opsi Digital.*





# PRICING DIGITAL CALL OPTION IN THE BLACK-SCHOLES MODEL USING HOMOTOPY PERTURBATION METHOD

Name : Islachiyatul Ummah  
NRP : 06111640000075  
Department : Mathematics FMCDs-ITS  
Supervisors : 1. Endah Rokhmah M.P., Ph.D  
2. Dra. Nur Asiyah, M.Si

## Abstract

*Option is a derivative investment product whose value depends on the stock price. Unfortunately, the stock price fluctuating and difficult to predict. In this paper, we discuss how to determine the price of digital call options with the Black-Scholes model using two methods and to determine the accuracy of these methods. First, the analytical solution is sought by transforming it into a diffusion equation. Then, the approximate analytical solution is sought using the homotopy perturbation method. After getting the analytical solution and approximate analytical solution for Black-Scholes then simulating it to compare the values. It's concluded that the approximate analytical solution obtained using homotopy perturbation method approaches the value of the analytical solution. So, homotopy perturbation method can be used to find the approximate analytical solution for Black-Scholes model and generate an accurate approximate solution.*

**Keyword :** *Black-Scholes Model, Digital Call Option, Homotopy Perturbation Method, Option.*



## KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **PENENTUAN HARGA *DIGITAL CALL OPTION* DENGAN MODEL BLACK-SCHOLES MENGGUNAKAN METODE HOMOTOPI PERTURBASI** sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika ITS. Tak lupa juga, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada beberapa pihak yang secara langsung maupun tidak langsung telah membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Pihak-pihak tersebut adalah:

1. Bapak Subchan, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika ITS dan Ibu Dr. Dwi Ratna S.,MT selaku Sekretaris Departemen I Matematika ITS yang telah membantu dan memberi dukungan selama perkuliahan hingga terselesaikannya tugas akhir ini.
2. Ibu Endah Rokhmati M.P.,Ph.D dan Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si selaku dosen pembimbing, berkat bimbingan dan dukungan Ibu, saya mampu menyelesaikan tugas akhir ini dengan lancar.
3. Bapak Drs. Sentot Didik S., M.Si, Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc, dan Ibu Soleha, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas semua kritik dan saran yang diberikan kepada penulis demi perbaikan tugas akhir ini.
4. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si dan Bapak Dr. Budi Setiyono, S.Si, MT selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika ITS.

5. Bapak Amirul Hakam, S.Si, M.Si selaku dosen Departemen Matematika yang telah membimbing penulis dan memberikan informasi yang menunjang pengerjaan tugas akhir ini.
6. Mas Venansius Ryan, S.Mat, Firman, Yoyo yang telah membantu dan memberikan informasi yang menunjang pengerjaan tugas akhir ini.
7. Bapak Ibu dosen dan staf Departemen Matematika ITS
8. Ayah, Ibu, dan Kakak yang selalu mendoakan, mendukung secara materi dan non-materi, memotivasi penulis untuk rajin belajar dan semangat menggapai impian.
9. Teman-teman Lemniscate Matematika 2016 yang selalu memberi penulis semangat dalam kuliah, menemani penulis belajar, bermain dan berlibur, serta mengukir banyak kenangan-kenangan yang uwu ♡
10. Member "Manusia Gabut", Kirana, Fara, Rizkha, Hasna, Farida, Novia, Mayga, Rani, Rini yang sudah menemani penulis selama kuliah hingga mengerjakan tugas akhir.
11. Member "Ameng Fans Club", Ameng, Lena, Fara, Bahrul, dan Maarif yang selalu mendukung penulis sejak SMA hingga penulis hampir selesai menempuh studi S1.
12. Alvaro Basily S. yang selalu membantu dan meringankan beban penulis selama kuliah hingga penulis hampir selesai menempuh studi S1.

Masih banyak lagi pihak-pihak yang berjasa dalam masa perkuliahan penulis yang tidak dapat disebutkan satu-persatu. Apabila terdapat kesalahan penulisan, kritik dan

saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan sebagai modal perbaikan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat dan membantu orang banyak.

Surabaya, Juni 2020

Penulis.



## DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
BAB I    PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	4
1.3 Batasan Masalah . . . . .	5
1.4 Tujuan . . . . .	5
1.5 Manfaat . . . . .	5
1.6 Sistematika Penulisan . . . . .	6
BAB II    TINJAUAN PUSTAKA	9
2.1 Penelitian Terdahulu . . . . .	9
2.2 Opsi . . . . .	10
2.3 Komponen-Komponen dalam Kontrak Opsi .	11
2.4 Jenis-Jenis Opsi . . . . .	13
2.5 Opsi Digital . . . . .	15
2.6 Lemma Ito . . . . .	16
2.7 Distribusi Normal . . . . .	16



2.8	Persamaan Black-Scholes untuk Opsi <i>Call</i> Digital.....	17
2.9	Persamaan Difusi .....	19
2.10	Metode Homotopi Perturbasi .....	20
2.11	<i>Error Function</i> .....	22
2.12	<i>Mean Absolute Deviation</i> .....	23
BAB III	METODE PENELITIAN	25
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	29
4.1	Pengkajian Model Black-Scholes .....	29
4.2	Solusi Analitik Model Black-Scholes untuk Menentukan Harga Opsi <i>Call</i> Digital Tipe Eropa .....	31
4.3	Solusi Pendekatan Analitik Model Black-Scholes untuk Menentukan Harga Opsi <i>Call</i> Digital Tipe Eropa .....	39
4.4	Simulasi .....	49
4.4.1	Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Pendekatan Analitik Model Black-Scholes Terhadap Perubahan Harga Saham .....	49
4.4.2	Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Pendekatan Analitik Model Black-Scholes Terhadap Perubahan Waktu Jatuh Tempo .....	58
BAB V	PENUTUP	63
	DAFTAR PUSTAKA	67
	BIODATA PENULIS	69

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Solusi analitik model Black-Scholes. . . .	50
Gambar 4.2	Solusi pendekatan analitik model Black-Scholes. . . . .	52
Gambar 4.3	Perbandingan solusi analitik dan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes. . . . .	54
Gambar 4.4	Selisih nilai solusi model Black-Scholes terhadap perubahan harga saham. . . .	57
Gambar 4.5	Solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat $S < K$ . . . .	59
Gambar 4.6	Selisih nilai solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat $S < K$ . . . . .	59
Gambar 4.7	Solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat $S = K$ . . . .	60
Gambar 4.8	Selisih nilai solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat $S = K$ . . . . .	60
Gambar 4.9	Solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat $S > K$ . . . .	61
Gambar 4.10	Selisih nilai solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat $S > K$ . . . . .	62



## DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Solusi analitik model Black-Scholes. . . . .	51
Tabel 4.2	Solusi pendekatan analitik model Black-Scholes. . . . .	53
Tabel 4.3	Perbandingan solusi analitik dan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes. . . . .	55
Tabel 4.3	Perbandingan solusi analitik dan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes (Lanjutan). . . . .	56



# BAB I

## PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian.

### 1.1 Latar Belakang

Investasi merupakan kegiatan penanaman uang atau modal dalam suatu perusahaan atau proyek untuk mendapatkan suatu keuntungan. Seiring dengan berkembangnya teknologi, pola pikir manusia pun juga berkembang, sehingga tercipta ide-ide baru dalam investasi di pasar modal. Saat ini telah banyak alternatif investasi yang dapat dijadikan pilihan oleh para investor. Investor tidak hanya bisa memiliki saham yang diperjualbelikan di pasar modal, tetapi juga bisa berinvestasi dengan membeli produk turunan atau produk derivatif. Berdasarkan Undang-Undang Pasar Modal No. 8 Tahun 1995, produk derivatif adalah turunan dari efek atau produk, baik produk atau efek yang bersifat hutang maupun yang bersifat ekuitas. Artinya, produk derivatif adalah produk yang nilainya tergantung pada nilai produk yang mendasarinya (*underlying asset*), seperti saham, obligasi, suku bunga, indeks saham, indeks obligasi, mata uang, komoditas, atau produk-produk keuangan lainnya. Produk derivatif sering digunakan oleh para pelaku pasar modal (pemodal dan perusahaan efek) sebagai salah satu sarana untuk melakukan lindung nilai atas portofolio yang mereka miliki. Oleh karena itu, produk derivatif nilainya akan lebih murah dibandingkan dengan

produk utamanya atau produk yang mendasarinya. Terdapat banyak sekali jenis produk derivatif, diantaranya adalah *future contract*, *forward contract*, *swap*, *option* (opsi), dan sebagainya. Produk derivatif yang saat ini cukup diminati para investor adalah opsi. Opsi mempunyai kelebihan dalam menangani resiko keuangan sebab investor dapat menentukan batas maksimal dan minimal harga aset sehingga mengurangi kemungkinan terjadinya kenaikan atau penurunan harga aset pada saat jatuh tempo.

Bursa Efek Indonesia mendefinisikan opsi sebagai kontrak yang memberikan hak kepada pihak pertama untuk membeli (*call option*) dan atau menjual (*put option*) kepada pihak lain atas sejumlah saham (*underlying asset*) pada harga kesepakatan (*strike price*) dan dalam jangka waktu tertentu. Opsi adalah hak sehingga kontrak tersebut tentu saja boleh dijalankan atau tidak. Opsi bukanlah suatu keharusan untuk dieksekusi. Opsi dapat dijalankan apabila pemegang opsi mendapat keuntungan. Berdasarkan fungsinya, opsi dibagi menjadi dua yaitu opsi beli (*call option*) dan opsi jual (*put option*). Berdasarkan waktu eksekusinya, opsi memiliki beberapa jenis diantaranya adalah opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika. Pada saat jatuh tempo, opsi akan membayarkan sejumlah nilai yang sesuai dengan kesepakatan awal yang disebut *payoff*. Opsi digital merupakan salah satu opsi tipe Eropa. Opsi digital adalah jenis kontrak opsi yang memiliki pembayaran tetap jika aset yang mendasarinya bergerak melewati harga kesepakatan yang sudah ditentukan. Opsi ini memberikan pilihan kepada investor untuk menentukan harga kesepakatan di titik tertentu pada masa yang akan datang. Saat waktu jatuh tempo tiba, jika harga kesepakatan berada di bawah harga saham (*in-the-money*), artinya opsi *call* digital akan menguntungkan dan investor mendapat keuntungan. Jika opsi berakhir dengan harga kesepakatan

di atas harga saham (*out-of-money*), berarti opsi *call* digital tidak menguntungkan dan investor mengalami kerugian. Nilai maksimal kerugian yang dialami investor adalah sebesar premi yang dibayarkan di awal perdagangan, terlepas dari pergerakan harga aset yang mendasarinya. Opsi ini diminati investor sebab investor dapat menentukan harga kesepakatan dan tidak terbatas pada posisi pasar. Sehingga keuntungan yang didapatkan investor akan lebih besar dibandingkan dengan opsi yang lain.

Opsi memang sangat menarik untuk dicoba oleh para investor. Sayangnya pergerakan harga opsi tersebut sangat sulit untuk diprediksi karena harga saham bersifat stokastik. Pergerakan harga opsi cenderung tidak stabil dan naik turun secara drastis. Akibatnya investor merasa ragu untuk melakukan eksekusi. Oleh karena itu, perlu adanya kajian mengenai penentuan harga opsi yang pasti agar investor bisa menilai apakah harga opsi di pasar merupakan harga yang dianggap *fair*. Beberapa penelitian tentang penetapan harga opsi telah dilakukan. Ziwie Ke, Joanna Goard, dan Song Ping Zhu telah melakukan penelitian dengan judul “*An Appropriate Approach to Pricing European Style Options with the Adomian Decomposition Method*” pada tahun 2017. Penelitian ini membahas tentang metode dekomposisi numerik adomian untuk menetapkan harga opsi Eropa menggunakan model Black-Scholes [1]. Kemudian, Vasile L. Lazar telah melakukan penelitian terhadap penetapan harga opsi *call* digital dengan judul “*Pricing Digital Call Option in the Heston Stochastic Volatility Model*” pada tahun 2003. Pada penelitian ini digunakan asumsi volatilitas pada opsi tidak konstan sehingga dalam menentukan harga opsi digunakan model Heston [2]. Selanjutnya ada penelitian yang dilakukan oleh Ji Huan He dengan judul *Homotopy Perturbation Method: A New Nonlinear Analytical Technique*. Penelitian ini membahas



mengenai penggunaan metode homotopi perturbasi dalam menyelesaikan persamaan nonlinear [3].

Pada penelitian ini dilakukan penentuan harga opsi *call* digital dengan asumsi volatilitasnya konstan. Model yang cocok untuk digunakan adalah model Black-Scholes. Model Black-Scholes yang dikemukakan oleh Fisher Black dan Myron Scholes pada tahun 1973 adalah suatu persamaan diferensial orde dua yang dapat digunakan untuk menentukan harga opsi tipe Eropa. Asumsi-asumsi lain yang digunakan dalam model tersebut adalah tidak ada pembayaran dividen, tidak ada biaya transaksi, suku bunga bebas resiko dan bernilai konstan, serta perubahan harga saham bersifat stokastik [4]. Pada penelitian ini dilakukan dua cara untuk menentukan harga opsi. Pertama dengan menurunkan model Black-Scholes sehingga didapatkan solusi analitiknya. Selanjutnya dengan mencari solusi pendekatan analitik dari model Black-Scholes. Salah satu metode untuk mendapatkan pendekatan dari solusi analitik model Black-Scholes adalah metode homotopi perturbasi. Kedua solusi tersebut dibandingkan untuk mengetahui akurasi dari metode homotopi perturbasi. Oleh karena itu, penelitian ini membahas tentang penentuan harga opsi *call* digital tipe Eropa dengan model Black-Scholes menggunakan metode homotopi perturbasi.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Apakah metode homotopi perturbasi bisa menghasilkan solusi pendekatan analitik yang baik untuk model Black-Scholes?
2. Bagaimana solusi pendekatan analitik dari model Black-Scholes yang didapat menggunakan metode homotopi perturbasi?

### 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Tipe opsi yang digunakan adalah opsi *call* digital tipe Eropa.
2. Tingkat suku bunga bebas resiko, artinya tingkat bunga konstan selama masa hidup opsi.
3. Tidak ada biaya transaksi atau pajak.
4. Tidak terjadi pembagian dividen selama kontrak opsi.
5. Perubahan harga saham mengikuti gerak Brown serta bersifat acak dan berdistribusi normal.

### 1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui kinerja metode homotopi perturbasi dalam menghasilkan solusi pendekatan analitik untuk model Black-Scholes.
2. Mendapatkan solusi pendekatan analitik dari model Black-Scholes menggunakan metode homotopi perturbasi.

### 1.5 Manfaat

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai kinerja metode homotopi perturbasi dalam menghasilkan solusi pendekatan analitik untuk model Black-Scholes.
2. Memberikan informasi mengenai bentuk dari solusi pendekatan analitik model Black-Scholes yang didapat menggunakan metode homotopi perturbasi.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Buku ini disusun dalam lima bab, yaitu:

### 1. BAB I: PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

### 2. BAB II: TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi teori-teori utama maupun penunjang yang terkait dengan permasalahan. Diantaranya yaitu beberapa penelitian terdahulu, pengenalan opsi, komponen-komponen dalam kontrak opsi, jenis-jenis opsi, dan opsi digital. Kemudian, lemma Ito, model Black-Scholes, dan persamaan difusi. Lalu, ada juga teori tentang metode homotopi perturbasi, *error function*, dan *mean absolute deviation*.

### 3. BAB III: METODE PENELITIAN

Bab ini berisi tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan tugas akhir. Tahapan tersebut adalah studi literatur dan mengkaji model Black-Scholes. Kemudian, mencari solusi analitik dan solusi pendekatan analitik dari model Black-Scholes menggunakan metode homotopi perturbasi. Lalu, dilakukan simulasi dengan membandingkan nilai dari solusi analitik dan solusi pendekatan analitik menggunakan *software* Matlab. Tahap terakhir yaitu penarikan kesimpulan dan penyusunan buku tugas akhir.

### 4. BAB IV: ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi penjelasan tahapan-tahapan dalam mendapatkan solusi analitik dan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes beserta simulasinya.

## 5. BAB V: PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.



## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai hal-hal yang berkaitan dengan opsi, opsi digital, model Black-Scholes, metode homotopi perturbasi serta teori-teori yang mendukung dalam mengestimasi harga opsi *call* digital.

### 2.1 Penelitian Terdahulu

Ada banyak sekali penelitian mengenai penetapan harga opsi. Namun, penelitian mengenai penetapan harga dari opsi digital tipe Eropa masih belum banyak dilakukan. Berikut ini adalah beberapa penelitian mengenai penetapan harga opsi digital. Vasile L. Lazar pernah melakukan penelitian terhadap penetapan harga opsi *call* digital dengan judul “*Pricing Digital Call Option in the Heston Stochastic Volatility Model*” pada tahun 2003. Penelitian tersebut mengungkapkan bahwa dalam dunia nyata, volatilitas pada opsi tidak selalu konstan. Terjadi kenaikan dan penurunan yang tak menentu sehingga digunakan model Heston dalam menentukan harga opsi. Penulis menggunakan model Heston karena model tersebut menggunakan asumsi bahwa volatilitas tidak konstan dan termasuk proses stokastik. Model ini sangat populer karena memiliki tiga fitur utama, yaitu tidak ada volatilitas negatif, adanya korelasi antara pengembalian aset dan volatilitas, serta memiliki formula penetapan harga bentuk tertutup [2].

Selanjutnya ada Ziwe Ke, Joanna Goard, dan Song Ping Zhu yang melakukan penelitian dengan judul “*An Appropriate Approach to Pricing European Style Options with the Adomian Decomposition Method*” pada tahun 2017.

Penelitian ini membahas tentang metode numerik dekomposisi adomian untuk menetapkan harga opsi Eropa menggunakan model Black-Scholes. Namun, fungsi *payoff* pada beberapa opsi terkadang sulit untuk diturunkan sehingga menerapkan metode dekomposisi adomian ke model Black-Scholes tidaklah mudah. Metode ini dilakukan dengan cara menurunkan fungsi *payoff* serta melakukan pendekatan dengan memindahkan titik singular ke titik tak berhingga melalui transformasi koordinat. Hasil numeriknya menunjukkan bahwa pendekatan tersebut berhasil mengatasi kesulitan yang disebabkan oleh sifat diferensiabel fungsi *payoff* [1].

Kemudian ada penelitian yang dilakukan oleh Ji-Huan He dengan judul *Homotopy Perturbation Method: A New Nonlinear Analytical Technique*. Pada penelitian ini, diungkapkan bahwa metode homotopi perturbasi dapat mengatasi kelemahan pada metode perturbasi, yaitu dalam hal penggunaan parameter yang bernilai kecil ( $p \in [0, 1]$ ). Metode perturbasi dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nonlinear, sayangnya metode ini menggunakan asumsi bahwa parameter kecil harus ada. Asumsi ini membuat metode perturbasi tidak bisa diterapkan pada beberapa masalah nonlinear. Sebab tidak semua persamaan nonlinear memiliki parameter kecil di dalamnya sehingga peneliti menemukan metode baru tanpa menggunakan parameter kecil dalam menyelesaikan permasalahan nonlinear. Yaitu metode homotopi perturbasi[3].

## 2.2 Opsi

Opsi dalam saham pertama kali diperjual-belian pada tahun 1973 di suatu bursa yang terorganisir. Sejak saat itu, perdagangan opsi semakin berkembang pesat hingga kini opsi telah diperdagangkan di seluruh dunia. Opsi adalah suatu jenis kontrak antara dua pihak dimana satu pihak memberi hak kepada pihak lain untuk membeli aset tertentu pada harga

dan periode tertentu. Kontrak opsi juga mengizinkan pihak untuk menjual aset pada harga dan periode tertentu.

Ada dua macam tipe kontrak opsi saham yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* adalah suatu tipe kontrak yang memberikan hak kepada pembeli opsi untuk membeli dari penjual opsi sejumlah lembar saham tertentu pada harga dan jangka waktu tertentu. Sedangkan tipe opsi yang kedua adalah opsi *put* yaitu suatu tipe kontrak yang memberikan hak kepada pembeli opsi untuk menjual kepada penjual opsi sejumlah lembar saham tertentu pada harga dan jangka waktu tertentu.

### 2.3 Komponen-Komponen dalam Kontrak Opsi

Berikut adalah komponen-komponen yang mempengaruhi harga opsi [5]:

1. Harga saham ( $S$ )

Harga saham sangat mempengaruhi harga opsi sebab saham merupakan aset yang mendasari kontrak dalam opsi. Hubungan antara harga saham dan harga opsi *call* adalah searah. Apabila harga saham meningkat maka harga opsi *call* pun turut meningkat. Sebaliknya, apabila harga saham menurun, maka harga opsi menurun pula. Sedangkan harga saham dan harga opsi *put* memiliki hubungan yang terbalik. Artinya, apabila harga saham naik maka harga opsi *put* akan turun dan sebaliknya.

2. Harga kesepakatan atau *strike price* ( $K$ )

Harga kesepakatan merupakan harga yang disepakati oleh pihak penjual dan pembeli opsi untuk membeli atau menjual opsi pada waktu tertentu sebelum kontrak jatuh tempo. Jika semua komponen opsi diasumsikan tetap, semakin rendah harga kesepakatan maka semakin



tinggi harga opsi *call*. Sebaliknya, semakin tinggi harga kesepakatan maka semakin tinggi pula harga opsi *put*.

3. Waktu jatuh tempo ( $T$ )

Waktu jatuh tempo merupakan batas waktu untuk mengeksekusi opsi. Setelah waktu jatuh tempo tiba, sebuah opsi sudah tidak memiliki nilai. Jika semua komponen dianggap tetap maka semakin lama waktu jatuh tempo akan mengakibatkan harga opsi semakin tinggi. Hal tersebut disebabkan karena waktu jatuh tempo sebuah opsi relatif pendek, sehingga investor akan kekurangan waktu untuk melakukan analisis dan berspekulasi terhadap kenaikan atau penurunan harga saham.

4. Tingkat suku bunga bebas resiko ( $r$ )

Tingkat suku bunga bebas resiko merupakan tingkat suku bunga yang tidak memiliki resiko sama sekali. Pada tingkat suku bunga bebas resiko jangka pendek, umumnya jika tingkat suku bunga bebas resiko meningkat maka harga-harga saham juga akan mengalami kenaikan. Pada tingkat suku bunga bebas resiko jangka pendek yang tinggi, investor akan semakin tertarik untuk membeli opsi *call* daripada membeli saham. Hal ini menyebabkan harga opsi *call* menjadi naik.

5. Volatilitas harga saham ( $\sigma$ )

Volatilitas merupakan harga fluktuasi dari sebuah saham yang ditunjukkan oleh standar deviasi atau varians. Jika semua komponen dianggap tetap, semakin besar volatilitas harga saham yang diharapkan maka harga opsi juga semakin tinggi. Sebab semakin besar volatilitas maka semakin besar pula peluang harga saham mengalami perubahan yang diinginkan.

## 6. Dividen ( $q$ )

Kemungkinan sebuah saham memberikan dividen cenderung menurunkan harga opsi *call* dari saham tersebut. Sebab para investor akan lebih tertarik untuk membeli saham itu sendiri dibandingkan membeli opsinya. Sebaliknya, adanya dividen akan cenderung meningkatkan harga pada opsi *put*.

### 2.4 Jenis-Jenis Opsi

Berdasarkan bentuk hak yang diberikan kepada pemegang opsi, opsi dapat dikelompokkan menjadi dua jenis [6]:

#### 1. Opsi *Call*

Opsi *call* atau opsi beli memberikan hak untuk membeli suatu saham dengan harga tertentu (harga pada saat seseorang dapat menjual atau membeli saham) pada tanggal tertentu (untuk tipe Eropa) atau sebelumnya (untuk tipe Amerika). Opsi *call* dinotasikan dengan  $C$ . Berdasarkan pengertian dari opsi *call*, harga opsi *call* merupakan pengurangan antara harga saham dengan harga kesepakatan. Bentuk persamaan matematis nilai intrinsik opsi *call* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$C = \max(S - K, 0), \quad (2.1)$$

dengan:

- $C$  : nilai yang dibayarkan opsi *call*,
- $S$  : harga aset yang mendasari pada saat jatuh tempo,
- $K$  : harga kesepakatan atau *strike price*.

Persamaan (2.1) menunjukkan bahwa opsi *call* akan bernilai nol jika harga kesepakatan lebih tinggi dari harga saham. Jika harga saham lebih tinggi dari harga

kesepakatan maka nilai opsi *call* merupakan selisih dari harga saham dengan harga kesepakatan. Opsi *call* dapat dibedakan menjadi 3 jenis yaitu [7]:

- (a) Opsi *call* dikatakan *out of the money* jika harga saham lebih rendah dari pada harga kesepakatan dan opsi ini akan bernilai nol.
- (b) Opsi *call* dikatakan *in the money* jika harga saham lebih tinggi dari harga kesepakatan dan bernilai positif.
- (c) Opsi *call* dikatakan *at the money* jika harga saham sama dengan harga kesepakatan.

## 2. Opsi *Put*

Opsi *put* atau opsi jual memberikan hak untuk menjual suatu saham dengan harga tertentu (harga pada saat seseorang dapat menjual atau membeli saham) pada tanggal tertentu (untuk tipe Eropa) atau sebelumnya (untuk tipe Amerika). Opsi *put* dinotasikan dengan  $P$ . Berdasarkan pengertian dari opsi *put*, harga opsi *put* merupakan pengurangan antara harga kesepakatan dengan harga saham. Bentuk persamaan matematis nilai intrinsik opsi *put* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P = \text{maks}(K - S, 0), \quad (2.2)$$

dengan:

- $P$  : nilai yang dibayarkan opsi *put*,
- $S$  : harga aset yang mendasari pada saat jatuh tempo,
- $K$  : harga kesepakatan atau *strike price*.

Persamaan (2.2) menunjukkan opsi *put* akan bernilai nol, jika harga saham lebih tinggi dari harga

kesepakatan. Jika harga kesepakatan lebih tinggi dari harga saham maka nilai opsi *put* merupakan selisih dari harga kesepakatan dengan harga saham. Opsi *put* dapat dibedakan menjadi 3 jenis yaitu [7]:

- (a) Opsi *put* dikatakan *out of the money* jika harga saham lebih tinggi dari pada harga kesepakatan dan opsi ini akan bernilai nol.
- (b) Opsi *put* dikatakan *in the money* jika harga saham lebih rendah dari harga kesepakatan dan bernilai positif.
- (c) Opsi *put* dikatakan *at the money* jika harga saham sama dengan harga kesepakatan, sehingga opsi ini akan bernilai nol.

## 2.5 Opsi Digital

Opsi digital adalah jenis kontrak opsi yang memiliki pembayaran tetap jika aset yang mendasarinya bergerak melewati harga kesepakatan (*strike price*) yang sudah ditentukan. Opsi ini memberikan pilihan kepada investor untuk menentukan harga kesepakatan di titik tertentu pada masa yang akan datang. Jika harga kesepakatan berada di bawah harga opsi (*in-the-money*) saat waktu jatuh tempo tiba maka opsi *call* digital menguntungkan dan investor mendapat keuntungan. Jika opsi berakhir dengan harga kesepakatan di atas harga opsi (*out-of-money*) saat waktu jatuh tempo tiba maka opsi *call* digital tidak menguntungkan dan investor mengalami kerugian.

Nilai maksimal kerugian yang dialami investor adalah sebesar premi yang dibayarkan di awal perdagangan, terlepas dari pergerakan harga aset yang mendasarinya. Opsi *call* digital memiliki fungsi *payoff* yang unik. Opsi *call* digital dengan harga kesepakatan  $K$  dan waktu waktu jatuh tempo

$T$  akan membayar satu unit apabila memenuhi kriteria berikut [1]:

1. Opsi *call* digital saat jatuh tempo:

$$C(S, T) = \begin{cases} 1 & S > K \\ 0 & S \leq K. \end{cases}$$

2. Opsi *put* digital saat jatuh tempo:

$$P(S, T) = \begin{cases} 1 & S < K \\ 0 & S \geq K. \end{cases}$$

## 2.6 Lemma Ito

Misalkan  $u(X, t)$  kontinu, fungsi tak acak dengan turunan parsial dan  $X(t)$  adalah proses stokastik yang didefinisikan sebagai berikut [8]:

$$dX(t) = a(X, t) dt + b(X, t) dZ(t), \quad (2.3)$$

dengan  $dZ(t)$  didefinisikan sebagai *standard Wiener Process*.

Proses stokastik dari  $Y(t) = u(X(t), t)$  mengikuti bentuk turunan stokastik sebagai berikut:

$$dY(t) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a(X, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(b(X, t))^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dt + b(X, t) \frac{\partial u}{\partial x} dZ(t). \quad (2.4)$$

## 2.7 Distribusi Normal

Distribusi normal digunakan sebagai dasar untuk mengkaji formula Black-Scholes dalam menentukan harga opsi *call* digital. *Probability Density Function* dan *Cumulative Distribution Function* dari distribusi normal dengan mean  $\mu$

dan varian  $\sigma^2$  adalah sebagai berikut [8]:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

$$\text{pdf} : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{CDF} : F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Jika variabel acak  $X$  memiliki mean sama dengan nol dan varian sama dengan satu maka variabel acak  $X$  berdistribusi normal standar. *Probability Density Function* dan *Cumulative Distribution Function* dari distribusi normal standar adalah sebagai berikut [9]:

$$X \sim N(0, 1).$$

$$\text{pdf} : n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{CDF} : N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

## 2.8 Persamaan Black-Scholes untuk Opsi *Call Digital*

Berikut ini adalah asumsi-asumsi dalam persamaan model Black-Scholes untuk menentukan model harga opsi:

1. Model penilaian hanya berlaku untuk opsi tipe Eropa.
2. Tingkat bunga bebas resiko, artinya tingkat bunga konstan selama masa hidup opsi.
3. Tidak ada biaya transaksi atau pajak.
4. Tidak terjadi pembagian dividen selama kontrak opsi.

5. Perubahan harga saham mengikuti gerak Brown serta bersifat acak dan berdistribusi normal.

Misalkan  $C = C(S, t)$  adalah sebuah fungsi harga opsi. Perubahan harga saham  $S$  pada waktu  $t$  diasumsikan mengikuti gerak Brown, yaitu [8]:

$$\frac{dS}{S} = \rho dt + \sigma dz, \quad (2.5)$$

dengan:

$\rho$  : *expected of return*,

$\sigma$  : volatilitas,

$dz$  : *standard weiner process*.

$\rho$  dan  $\sigma$  dianggap konstan.

Persamaan  $C = C(S, t)$  dapat dibentuk menjadi persamaan diferensial dengan menggunakan lemma Ito dan berubah menjadi persamaan berikut:

$$dC = \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} \rho S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dz. \quad (2.6)$$

Model Black-Scholes diperoleh dengan mempertimbangkan dinamika portofolio dan fluktuasi pasar pada waktu ke  $t$  dengan asumsi tidak adanya peluang arbitrase:

$$\left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt = \left( C - \frac{\partial C}{\partial S} S \right) r dt$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial S} S r - rC = 0, \quad (2.7)$$

dengan  $S$  adalah harga saham,  $r$  adalah tingkat suku bunga bebas resiko,  $\sigma$  adalah volatilitas harga saham. Persamaan (2.7) merupakan persamaan diferensial parsial orde dua yang biasa disebut dengan model Black-Scholes. Persamaan tersebut digunakan untuk mencari harga opsi *call* digital.

Berikut ini adalah solusi analitik model Black-Scholes yang digunakan untuk menentukan harga opsi *call* digital:

$$C(S, t) = e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (2.8)$$

dengan

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\phi^2}{2}} d\phi \quad \text{dan}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Proses untuk mendapatkan solusi analitik model Black-Scholes pada persamaan (2.8) dijelaskan pada bab 4.

## 2.9 Persamaan Difusi

Persamaan difusi adalah persamaan analitik yang linear dan berorde dua, dimana persamaan umumnya adalah[10]:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0. \quad (2.9)$$

Jika diberikan syarat awal,  $u(x, 0) = u_0(x)$  maka persamaan (2.9) memiliki solusi fundamental

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \tau) u_0(y) dy. \quad (2.10)$$

dengan

$$G(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k\tau}}.$$

Persamaan (2.10) memenuhi persamaan (2.9) sebab

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_t(x, \tau) u_0(y) dy - k \int_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(x, \tau) u_0(y) dy = 0.$$



## 2.10 Metode Homotopi Perturbasi

Metode homotopi perturbasi merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan differensial nonlinear dan hasil perhitungannya cukup efektif dan akurat. Metode ini digunakan untuk mencari solusi pendekatan analitik model Black-Scholes pada persamaan (2.7). Berikut ini adalah konsep dasar metode homotopi perturbasi [3].

Misalkan:

$$A(u) - f(\tau) = 0 \quad \tau \in \Omega, \quad (2.11)$$

dengan kondisi batas

$$B\left(u, \frac{\partial u(\tau)}{\partial n}\right) = 0 \quad \tau \in \Gamma. \quad (2.12)$$

$A$  adalah operator turunan nonlinear.  $B$  adalah operator batas.  $f(\tau)$  adalah fungsi yang diketahui.  $\Omega$  adalah domain.  $\Gamma$  adalah batas dari domain  $\Omega$  dan  $u(\tau)$  adalah fungsi yang akan ditentukan dan bergantung pada  $r$ . Operator  $A$  dapat dibagi menjadi dua bagian yaitu  $L$  dan  $N$ , dengan  $L$  adalah operator linear dan  $N$  adalah operator nonlinear. Oleh karena itu, persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai berikut:

$$L(u) + N(u) - f(\tau) = 0. \quad (2.13)$$

Selanjutnya konstruksikan suatu homotopi  $v(\tau, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$  yang memenuhi persamaan berikut:

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v - u_0)] + p[L(v) + N(v) - f(\tau)] = 0, \quad (2.14)$$

dengan  $p \in [0, 1]$ . Persamaan di atas ekuivalen dengan

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + p[L(v) + N(v) - f(\tau)] = 0, \quad (2.15)$$

dengan  $p \in [0, 1]$ .  $p$  merupakan *embedding* parameter yang digunakan sebagai parameter kecil dan  $u_0$  merupakan estimasi awal dari persamaan (2.11) yang memenuhi kondisi batas. Selanjutnya jika diberikan  $p = 0$ , maka persamaan (2.15) menjadi:

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0. \quad (2.16)$$

Jika  $p = 1$  maka persamaan (2.15) menjadi:

$$H(v, 1) = L(v) + N(v) - f(\tau) = 0. \quad (2.17)$$

Proses perubahan  $p$  dari 0 ke 1 mengubah  $v(\tau, p)$  dari  $v_0(x)$  ke  $v(x)$  dalam topologi disebut deformasi, sedangkan persamaan (2.16) dan persamaan (2.17) disebut homotopi. Misalkan solusi dari persamaan (2.14) dan persamaan (2.15) mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$v(x) = v_0(x) + pv_1(x) + p^2v_2(x) + \dots \quad (2.18)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (2.18) ke persamaan (2.14) diperoleh:

$$\begin{aligned} H(v(\tau, p), p) &= (1 - p) [L(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) - L(u_0)] + \\ & p [L(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)] + \\ & p [N(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)] - p[f(\tau)] = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Misalkan  $L$  dan  $N$  merupakan operator diferensial untuk masing-masing fungsi linear dan nonlinear. Persamaan (2.19) ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} H(v, p) &= L(v_0) - L(u_0) + p[L(v_1) + N(v_0) + L(u_0) - f(\tau)] \\ & + p^2 [N(v_1) + L(v_2)] + p^3 [L(v_3) + N(v_3)] + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Selanjutnya ekspansi persamaan (2.20) berdasarkan pada orde perturbasi dan diperoleh orde nol, yaitu:

$$\begin{aligned}
 p^0 : L(v_0) - L(u_0) &= 0 \\
 L(v_0) &= L(u_0) \\
 v_0 &= L^{-1}L(u_0) \\
 v_0 &= u_0.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Untuk orde pertama didapat:

$$\begin{aligned}
 p^1 : L(v_1) + N(v_0) + L(u_0) - f(\tau) &= 0 \\
 L(v_1) &= -N(v_0) - L(u_0) \\
 &\quad + f(\tau) \\
 v_1 &= -L^{-1}N(v_0) - L^{-1}L(u_0) \\
 &\quad + L^{-1}f(\tau) \\
 v_1 &= -L^{-1}N(v_0) - u_0 \\
 &\quad + -L^{-1}f(\tau).
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Selanjutnya diperoleh nilai-nilai  $v_0, v_1, \dots$ . Perkiraan solusi persamaan (2.11) dengan  $p \rightarrow 1$  adalah

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} (v) = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \tag{2.23}$$

### 2.11 *Error Function*

*Error function* adalah fungsi galat yang ditemui saat mengintegrasikan distribusi normal (yang merupakan bentuk normal dari fungsi Gaussian). *Error function* dapat dinyatakan sebagai berikut[11]:

$$y = \text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \tag{2.24}$$

dengan  $x \geq 0$  dan  $y \in [0, 1]$ .

*Error function* memiliki sebuah komplemen. Komplemen tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$1 - y = \text{Erfc}(x) = 1 - \text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad (2.25)$$

dengan  $x \geq 0$  dan  $y \in [0, 1]$ . *Error function* memiliki beberapa sifat. Sifat-sifat tersebut yaitu

$$\begin{aligned} \text{Erf}(-\infty) &= -1, & \text{Erf}(\infty) &= 1. \\ \text{Erf}(-x) &= -\text{Erf}(x), & \text{Erf}(x^*) &= (\text{Erf}(x))^*. \end{aligned}$$

## 2.12 Mean Absolute Deviation

*Mean absolute deviation* (MAD) adalah sebuah metode untuk mengukur akurasi sebuah peramalan. MAD merupakan nilai total absolut dari *forecast error* dibagi banyaknya data. Apabila nilai MAD mendekati nol, maka nilai hasil peramalan dianggap baik dan mendekati nilai aktual.

Pada penelitian ini, hasil dari solusi pendekatan analitik model Black-Scholes dianggap sebagai nilai hasil peramalan dan solusi analitik model Black-Scholes merupakan nilai aktual. Selisih dari nilai aktual dan nilai hasil peramalan adalah *forecast error*. Formula MAD adalah sebagai berikut [12]:

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|, \quad (2.26)$$

dengan:

- $n$  : banyak data,
- $e_t$  : selisih antara nilai aktual dan nilai hasil peramalan (*forecast error*).



## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Pada bab ini dijelaskan langkah – langkah dalam mengerjakan penelitian tentang penentuan harga opsi *call* digital dengan model Black-Scholes menggunakan metode homotopi perturbasi. Berikut ini adalah langkah – langkah yang dilaksanakan pada penelitian ini:

#### **1. Studi Literatur**

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan mencari referensi mengenai karakteristik opsi terutama opsi *call* digital. Kemudian, dicari pula referensi mengenai model Black-Scholes dan metode yang digunakan yaitu metode homotopi perturbasi. Referensi yang digunakan berupa literatur, jurnal ilmiah, tugas akhir yang berkaitan dengan permasalahan ini, serta artikel-artikel dari internet yang relevan.

#### **2. Mengkaji Model Black-Scholes**

Pada tahap ini dilakukan penurunan fungsi harga opsi tipe Eropa menggunakan Lemma Ito untuk mendapatkan model Black-Scholes pada persamaan (2.7).

#### **3. Mencari Solusi Analitik dari Model Black-Scholes**

Berikut ini adalah langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan solusi analitik dari model Black-Scholes:

- (a) Mensubstitusi  $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$  dan  $\tau = T - t$  ke model Black-Scholes pada persamaan (2.7).
- (b) Mentransformasikan model Black-Scholes yang telah ditransformasi pada tahap sebelumnya ke bentuk persamaan difusi.
- (c) Mencari kondisi batas baru untuk model Black-Scholes yang sudah ditransformasi ke bentuk persamaan difusi.
- (d) Mencari solusi dari model Black-Scholes yang sudah diubah ke bentuk persamaan difusi menggunakan fungsi *Green*.

#### 4. Mencari Solusi Pendekatan Analitik dari Model Black-Scholes

Berikut ini adalah langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan solusi pendekatan analitik dari model Black-Scholes menggunakan metode homotopi perturbasi:

- (a) Menentukan kondisi batas dari model Black-Scholes.
- (b) Mengubah persamaan diferensial Black-Scholes ke bentuk homotopi.
- (c) Mengekspansikan model Black-Scholes yang sudah diubah ke bentuk homotopi ke dalam bentuk deret pangkat.
- (d) Mendapatkan solusi dari persamaan deret pangkat.

#### 5. Simulasi Hasil

Pada tahap ini dilakukan simulasi secara numerik terhadap solusi analitik dan solusi pendekatan analitik dari model Black-Scholes menggunakan *software* Matlab. Tujuan simulasi adalah untuk mengetahui

apakah solusi pendekatan analitik yang didapatkan dengan metode homotopi perturbasi mendekati solusi analitik.

Simulasi dilakukan dengan cara mensubstitusi parameter-parameter yang telah ditentukan. Hasil simulasi disajikan dalam bentuk tabel dan grafik. Untuk menguji akurasi hasil solusi pendekatan digunakan formula *mean absolute deviation*.

## 6. Menarik Kesimpulan dan Menyusun Buku Tugas Akhir

Pada tahap yang terakhir dilakukan langkah-langkah berikut:

- (a) Menarik kesimpulan dari tahap sebelumnya, yaitu terkait solusi analitik dan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes serta hasil dari simulasi yang dilakukan.
- (b) Memberikan saran bagi penelitian selanjutnya.
- (c) Menyusun buku tugas akhir.





## BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

### 4.1 Pengkajian Model Black-Scholes

Bagian ini membahas mengenai penurunan fungsi harga opsi *call* tipe Eropa untuk mendapatkan model Black-Scholes.  $C(S, t)$  merupakan fungsi harga opsi dengan  $S$  adalah harga *underlying asset* (saham) dan  $t$  adalah waktu saat ke- $t$ . Misalkan  $\Pi$  adalah nilai portofolio dari *one long option position* dan  $\Delta$  adalah nilai portofolio dari *short option position*. Nilai dari  $\Pi$  dinyatakan dalam persamaan berikut,

$$\Pi = -C + \Delta S, \quad (4.1)$$

dengan  $C$  adalah harga opsi dan  $S$  adalah harga saham. Perubahan nilai portofolio dari waktu  $t$  ke  $t + dt$  adalah

$$d\Pi = -dC + \Delta dS. \quad (4.2)$$

Perubahan harga saham  $S$  pada waktu  $t$  diasumsikan mengikuti gerak Brown, yaitu:

$$\begin{aligned} dS &= \rho S dt + \sigma S dZ \\ \frac{dS}{S} &= \rho dt + \sigma dZ, \end{aligned} \quad (4.3)$$

dengan

- $S$  : harga saham
- $\rho$  : *expected rate of return*
- $\sigma$  : volatilitas
- $dZ$  : *Standard Brownian Process*.

$C$  adalah fungsi stokastik dari  $S$  sehingga dengan menggunakan Lemma Ito, persamaan harga opsi  $C(S, t)$  menjadi

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt. \quad (4.4)$$

Substitusikan persamaan (4.4) ke persamaan (4.2) sehingga didapatkan persamaan berikut,

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dC + \Delta dS \\ d\Pi &= - \left( \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt \right) + \Delta dS \\ d\Pi &= - \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \left( -\frac{\partial C}{\partial S} + \Delta \right) dS. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Untuk menghilangkan faktor *randomness* dari persamaan (4.5), substitusikan nilai  $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$  ke persamaan 4.5 sehingga didapatkan persamaan berikut,

$$d\Pi = - \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt. \quad (4.6)$$

Jika perubahan nilai portofolio menjadi bebas resiko, maka nilainya harus setara dengan keuntungan yang akan didapatkan ketika uang dengan jumlah yang sama diinvestasikan ke bank tanpa bunga yang mengandung resiko. Artinya,

$$\begin{aligned} d\Pi &= r\Pi dt \\ -\frac{\partial C}{\partial t} dt - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt &= r(-C + \Delta S) dt \\ -\frac{\partial C}{\partial t} dt - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt &= r \left( -C + \frac{\partial C}{\partial S} S \right) dt \\ -\frac{\partial C}{\partial t} dt - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt &= -rC dt + rS \frac{\partial C}{\partial S} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt + rS \frac{\partial C}{\partial S} dt - rC dt &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Jadi, persamaan (4.7) merupakan persamaan differensial parsial orde dua yang dikenal sebagai model Black-Scholes. Persamaan ini berlaku untuk segala sekuritas derivatif dengan kondisi batas tertentu.

#### 4.2 Solusi Analitik Model Black-Scholes untuk Menentukan Harga Opsi *Call* Digital Tipe Eropa

Harga opsi *call* digital dapat ditentukan menggunakan solusi analitik dari model Black-Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0.$$

Kondisi awalnya sebagai berikut:

$$C(S, T) = \begin{cases} 1 & S > K \\ 0 & S \leq K, \end{cases} \quad (4.8)$$

dengan:

- $C(S, T)$  : harga opsi *call* digital saat jatuh tempo
- $S$  : harga saham
- $T$  : waktu jatuh tempo
- $K$  : harga kesepakatan atau *strike price*.

Transformasikan persamaan (4.7) ke dalam bentuk persamaan difusi. Misalkan:

$$S = Ke^x \leftrightarrow x = \ln \left( \frac{S}{K} \right) \quad (4.9)$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad (4.10)$$

$$C(S, t) = V(x, \tau). \quad (4.11)$$

Persamaan (4.7) ditransformasi menggunakan persamaan (4.9)-(4.11). Hasil dari transformasi tersebut adalah:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \tau} \left( -\frac{\sigma^2}{2} \right) = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial V}{\partial \tau}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x} \left( \frac{K}{S} \frac{1}{K} \right) = \frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{e^{-x}}{K} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) \frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{e^{-x}}{K} \right) \frac{K}{S} \frac{1}{K} \\ &= \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{e^{-x}}{K} + \left( \frac{e^{-x}}{K} \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{1}{S} \\ &= \frac{e^{-2x}}{K^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Substitusi persamaan (4.9)-(4.14) ke persamaan (4.7), didapatkan

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} (e^{2x} K^2) \frac{e^{-2x}}{K^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + r K e^x \frac{e^{-x}}{K} \frac{\partial V}{\partial x} - rV &= 0 \\ -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + r \frac{\partial V}{\partial x} - rV &= 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} - V &= 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} V = 0. \quad (4.15)$$

Persamaan (4.15) merupakan model Black-Scholes yang telah ditransformasi. Kondisi awal pada persamaan (4.8) menjadi :

$$\begin{aligned} C(S, 0) &= \begin{cases} 1, & S > K \\ 0, & S \leq K \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & Ke^x > K \\ 0, & Ke^x \leq K \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & e^x > 1 \\ 0, & e^x \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \\ &= V(x, 0). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Selanjutnya persamaan (4.15) ditransformasikan sekali lagi menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$V(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} &= \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha u) + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &\quad e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

Persamaan (4.15) menjadi:

$$\begin{aligned}
 0 &= -e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{2r}{\sigma^2} \right) e^{\alpha x + \beta \tau} u \\
 0 &= - \left( \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \left( \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{2r}{\sigma^2} \right) u.
 \end{aligned}$$

Kemudian dilakukan penyederhanaan pada persamaan di atas sehingga menjadi bentuk yang paling sederhana.

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( -2\alpha - \frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\
 &\quad + \left( \beta - \alpha^2 - \alpha \frac{2r}{\sigma^2} + \alpha + \frac{2r}{\sigma^2} \right) u \tag{4.18} \\
 0 &= \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + Bu,
 \end{aligned}$$

dengan:

$$\begin{aligned}
 A &= -2\alpha - \frac{2r}{\sigma^2} + 1, \text{ dan} \\
 B &= \beta - \alpha^2 - \alpha \frac{2r}{\sigma^2} + \alpha + \frac{2r}{\sigma^2}.
 \end{aligned}$$

Persamaan (4.18) menjadi persamaan difusi apabila nilai  $A$  dan  $B$  sama dengan nol sehingga,

$$\begin{aligned}
 0 &= -2\alpha - \frac{2r}{\sigma^2} + 1 \\
 \alpha &= -\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

dan

$$\begin{aligned}
 0 &= \beta - \alpha^2 - \alpha \frac{2r}{\sigma^2} + \alpha + \frac{2r}{\sigma^2} \\
 \beta &= \alpha^2 + \alpha \frac{2r}{\sigma^2} - \alpha - \frac{2r}{\sigma^2} \\
 &= \alpha^2 + \left( \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \alpha - \frac{2r}{\sigma^2} \\
 &= (\alpha - 1) \left( \alpha - \frac{2r}{\sigma^2} \right).
 \end{aligned}$$

Substitusi nilai  $\alpha$  pada persamaan (4.19) ke persamaan di atas sehingga didapatkan persamaan berikut,

$$\beta = \frac{1}{4} \left( \frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right)^2. \quad (4.20)$$

Misalkan  $k = \frac{2r}{\sigma^2}$  maka persamaan (4.17), (4.19), (4.20) menjadi

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -\frac{1}{2}(k - 1), \\
 \beta &= -\frac{1}{4}(k + 1)^2
 \end{aligned}$$

serta

$$V(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau).$$

Substitusi persamaan (4.19) dan (4.20) ke persamaan (4.18), sehingga persamaan (4.18) menjadi:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Persamaan (4.21) merupakan model Black-Scholes yang telah ditransformasi menjadi persamaan difusi.



Kondisi awal pada persamaan (4.16) menjadi:

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x} V(x, 0) \\
 &= \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k-1)x} & Ke^x > K \\ 0 & Ke^x \leq K, \end{cases} \quad (4.22) \\
 &= \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k-1)x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Solusi dari persamaan (4.21) didapatkan menggunakan fungsi Green dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} u(s, 0) ds. \quad (4.23)$$

Misalkan

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}} \\
 ds &= \sqrt{2\tau} dq.
 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Substitusi persamaan (4.24) ke persamaan (4.23) sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{2}} u(x + q\sqrt{2\tau}, 0) \sqrt{2\tau} dq \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{2}} u(x + q\sqrt{2\tau}, 0) dq \quad (4.25) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{2}} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+q\sqrt{2\tau})} dq.
 \end{aligned}$$

Persamaan (4.25) disederhanakan sehingga menjadi

$$u(x, \tau) = \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(q^2 - (k-1)q\sqrt{2\tau})} dq. \quad (4.26)$$

Kemudian persamaan (4.26) dimodifikasi menjadi

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(q^2 - (k-1)q\sqrt{2\tau}) + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau - \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} dq \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(q^2 - (k-1)q\sqrt{2\tau} + \frac{2}{4}(k-1)^2\tau) + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} dq \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(q - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau})^2} dq. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Misalkan

$$\begin{aligned} p &= q - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} \\ dp &= dq. \end{aligned}$$

Persamaan (4.27) menjadi

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}p^2} dp \\ &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}p^2} dp \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}\right) \\
&= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N\left(\frac{x + \frac{1}{2}(k-1)2\tau}{\sqrt{2\tau}}\right).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$N(\cdot)$  adalah fungsi distribusi kumulatif normal standar. Selanjutnya persamaan (4.28) diubah menjadi fungsi dari  $S$  dan  $t$  sehingga didapatkan persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
C(S, t) &= V(x, \tau) \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \\
&= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \\
&\quad N\left(\frac{x + \frac{1}{2}(k-1)2\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \\
&= e^{-k\tau} N\left(\frac{x + \frac{1}{2}(k-1)2\tau}{\sqrt{2\tau}}\right).
\end{aligned}$$

Substitusi nilai  $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$ ,  $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$ , dan  $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ , sehingga

$$\begin{aligned}
C(S, t) &= e^{-\frac{2r}{\sigma^2} \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \\
&\quad N\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)2\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sqrt{2\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}}\right) \\
&= e^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \\
&= e^{-r(T-t)} N(d_2).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$N(\cdot)$  merupakan bentuk CDF dari distribusi normal standar,

dengan

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{(T - t)}}.$$

Persamaan (4.29) merupakan solusi analitik dari persamaan diferensial Black-Scholes yang dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *call* digital tipe Eropa.

### 4.3 Solusi Pendekatan Analitik Model Black-Scholes untuk Menentukan Harga Opsi *Call* Digital Tipe Eropa

Harga opsi *call* digital dapat ditentukan menggunakan solusi analitik dari model Black-Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0.$$

Kondisi awalnya sebagai berikut,

$$C(S, T) = \begin{cases} 1 & S > K \\ 0 & S \leq K, \end{cases} \quad (4.30)$$

dengan:

$C(S, T)$  : harga opsi *call* digital saat jatuh tempo

$S$  : harga saham

$T$  : waktu jatuh tempo

$K$  : harga kesepakatan atau *strike price*.

Transformasikan persamaan (4.7) menggunakan persamaan berikut,

$$S = Ke^x \leftrightarrow x = \ln \left( \frac{S}{K} \right) \quad (4.31)$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad (4.32)$$

$$C(S, t) = v(x, \tau). \quad (4.33)$$

Hasil dari transformasi menggunakan persamaan (4.31)-(4.33) adalah

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \tau} \left( -\frac{\sigma^2}{2} \right) = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial v}{\partial S} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{K}{S} \frac{1}{K} \right) = \frac{1}{S} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e^{-x}}{K} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) \frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{e^{-x}}{K} \right) \frac{K}{S} \frac{1}{K} \\ &= \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{e^{-x}}{K} + \left( -\frac{e^{-x}}{K} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{1}{S} \\ &= \frac{e^{-2x}}{K^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Persamaan (4.7) berubah menjadi

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} (e^{2x} K^2) \frac{e^{-2x}}{K^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + rK e^x \frac{e^{-x}}{K} \frac{\partial v}{\partial x} - rv &= 0 \\ -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + r \frac{\partial v}{\partial x} - rv &= 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} - v &= 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Misalkan  $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ , maka persamaan (4.34) menjadi

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{k} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{k} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} - v &= 0 \\
 -\frac{\partial v}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + k \frac{\partial v}{\partial x} - kv &= 0 \quad (4.35) \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial \tau} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv &= 0.
 \end{aligned}$$

Persamaan (4.35) merupakan model Black-Scholes yang telah ditransformasi dengan kondisi awal:

$$\begin{aligned}
 C(S, 0) &= \begin{cases} 1, & S > K \\ 0, & S \leq K \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1, & Ke^x > K \\ 0, & Ke^x \leq K \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1, & e^x > 1 \\ 0, & e^x \leq 1 \end{cases} \quad (4.36) \\
 &= \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \\
 &= v(x, 0).
 \end{aligned}$$

Persamaan (4.36) diskontinu pada saat  $x = 0$ . Untuk mengatasi hal tersebut perlu dilakukan transformasi menggunakan persamaan berikut,

$$z = \frac{x}{\sqrt{\tau}}, \quad w = \sqrt{\tau}, \quad v(x, \tau) = u(z, w). \quad (4.37)$$

Hasil transformasi menggunakan persamaan di atas adalah

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(u)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{w}, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{w} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{w} \right) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{1}{w^2}, \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial w} \\ \frac{\partial u}{\partial w} &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial w} \\ \frac{\partial u}{\partial w} &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{w} z e + \frac{\partial v}{\partial \tau} 2w \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} 2w &= \frac{\partial u}{\partial w} - \frac{z}{w} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{1}{2w} \left( \frac{\partial u}{\partial w} - \frac{z}{w} \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Persamaan (4.35) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{1}{w^2} + (k-1) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{w} - ku - \frac{1}{2w} \left( \frac{\partial u}{\partial w} - \frac{z}{w} \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2(k-1)w \frac{\partial u}{\partial z} - 2kuw^2 - w \frac{\partial u}{\partial w} + z \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\ w \frac{\partial u}{\partial w} &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2(k-1)w \frac{\partial u}{\partial z} + z \frac{\partial u}{\partial z} - 2kuw^2 \\ w \frac{\partial u}{\partial w} + u &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + z \frac{\partial u}{\partial z} + 2(k-1)w \frac{\partial u}{\partial z} - 2kuw^2 + u \\ \frac{\partial(uw)}{\partial w} &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + z \frac{\partial u}{\partial z} + u + 2(k-1)w \frac{\partial u}{\partial z} - 2kuw^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Titik diskontinu pada persamaan (4.36) saat  $x = 0$  menjadi bergeser ke titik  $z = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sqrt{\tau}} \right) = \pm\infty$ . Kondisi awal pada persamaan (4.36) berubah menjadi

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(z, w) = \begin{cases} 1, & z \rightarrow +\infty \\ 0, & z \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (4.42)$$

Modifikasi persamaan (4.41) dan konstruksikan sebuah persamaan homotopi

$$\frac{\partial(uw)}{\partial w} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + z \frac{\partial u}{\partial z} + u + 2(k-1)wp \frac{\partial u}{\partial z} - 2kuw^2 p^2. \quad (4.43)$$

Asumsikan persamaan (4.43) mempunyai solusi berbentuk

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \dots, \quad p \in [0, 1] \quad (4.44)$$

Substitusikan persamaan (4.44) ke persamaan (4.43) sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial(w(u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \dots))}{\partial w} &= 2 \frac{\partial^2(u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \dots)}{\partial z^2} \\ &+ z \frac{\partial(u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \dots)}{\partial z} \\ &+ (u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \dots) \\ &+ 2p(k-1)w \frac{\partial(u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \dots)}{\partial z} \\ &- 2p^2 kw^2 (u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \dots). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Samakan pangkat dari  $p$  sehingga didapatkan persamaan berikut

$$\begin{aligned} p^0 : \frac{\partial(wu_0)}{\partial w} &= 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial u_0}{\partial z} + u_0 \\ p^1 : \frac{\partial(wu_1)}{\partial w} &= 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + z \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_1 + 2(k-1)w \frac{\partial u_0}{\partial z} \\ p^2 : \frac{\partial(wu_2)}{\partial w} &= 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + z \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_2 + 2(k-1)w \frac{\partial u_1}{\partial z} + 2kw^2 u_0 \\ p^n : \frac{\partial(wu_n)}{\partial w} &= 2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + z \frac{\partial u_n}{\partial z} + u_n + 2(k-1)w \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z} \\ &+ 2kw^2 u_{n-2}, \quad \text{dengan } n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (4.46)$$



Solusi dari persamaan (4.46) dicari dalam bentuk berikut

$$u_n(z, w) = f_n(z)w^n. \quad (4.47)$$

Kondisi awal pada persamaan (4.42) menjadi

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(z, w) = \begin{cases} 1, & z \rightarrow +\infty \\ 0, & z \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (4.48)$$

untuk  $n = 0$  dan

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(z, w) = \begin{cases} 0, & z \rightarrow +\infty \\ 0, & z \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (4.49)$$

untuk  $n \geq 1$ .

Persamaan (4.46) menjadi

$$\begin{aligned} p^0 : \quad & 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial f_0}{\partial z} + f_0 - \frac{\partial(f_0 w)}{\partial w} = 0 \\ & 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial f_0}{\partial z} + f_0 - \left( \frac{\partial f_0}{\partial w} w + f_0 \right) = 0 \\ & 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial f_0}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^1 : \quad & 2 \frac{\partial^2 (f_1 w)}{\partial z^2} + z \frac{\partial (f_1 w)}{\partial z} + f_1 w + 2(k-1)w \frac{\partial f_0}{\partial z} - \frac{\partial (f_1 w)}{\partial w} w \\ & \quad \quad \quad - f_1 w = 0 \\ & 2w \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + zw \frac{\partial f_1}{\partial z} + 2(k-1)w \frac{\partial f_0}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial w} w^2 - f_1 w = 0 \\ & w \left( 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + z \frac{\partial f_1}{\partial z} + 2(k-1) \frac{\partial f_0}{\partial z} - f_1 \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^2 : 2 \frac{\partial^2(f_2 w^2)}{\partial z^2} + z \frac{\partial(f_2 w^2)}{\partial z} + (f_2 w^2) + 2(k-1)w \frac{\partial(f_1 w)}{\partial z} - \\
2kw^2 f_0 - \frac{\partial(f_2 w^2)}{\partial w} w - (f_2 w^2) = 0 \\
2w^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} + zw^2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + 2(k-1)w^2 \frac{\partial f_1}{\partial z} - 2kw^2 f_0 - \frac{\partial f_2}{\partial w} w^3 - \\
2f_2 w^2 = 0 \\
w^2 \left( 2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} + z \frac{\partial f_2}{\partial z} - 2f_2 + 2(k-1) \frac{\partial f_1}{\partial z} - 2kf_0 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Bentuk umum dari persamaan di atas dengan  $n \geq 2$  adalah

$$\begin{aligned}
p^n : 2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + z \frac{\partial u_n}{\partial z} + u_n + 2(k-1)w \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z} - \frac{\partial(wu_n)}{\partial w} + \\
2kw^2 u_{n-2} = 0 \\
w^n \left( 2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial z^2} + z \frac{\partial f_n}{\partial z} - n f_n + 2(k-1) \frac{\partial f_{n-1}}{\partial z} - 2k f_{n-2} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Selanjutnya dicari solusi dari persamaan (4.50) dengan bantuan *software Mathematica*.

Untuk  $p^0$ ,

$$2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial f_0}{\partial z} = 0. \tag{4.51}$$

Persamaan diferensial tersebut memiliki solusi umum

$$f_0 = C_2 + C_1 \sqrt{\pi} \operatorname{Erf} \left( \frac{z}{2} \right).$$

Nilai  $C_1$  dan  $C_2$  adalah sebagai berikut

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \quad \text{dan} \quad C_2 = \frac{1}{2},$$

sehingga

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right) \operatorname{Erf} \left( \frac{z}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Erf} \left( \frac{z}{2} \right).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Kemudian untuk  $p^1$ ,

$$2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + z \frac{\partial f_1}{\partial z} + 2(k-1) \frac{\partial f_0}{\partial z} - f_1 = 0. \quad (4.53)$$

Persamaan diferensial tersebut memiliki solusi umum

$$f_1 = zC_1 - e^{-\frac{z^2}{4}} C_2 - \frac{1}{4} z (-1 + k + z\sqrt{\pi} C_2) \operatorname{Erf} \left( \frac{z}{2} \right).$$

Nilai  $C_1$  dan  $C_2$  adalah sebagai berikut

$$C_1 = 0 \quad \text{dan} \quad C_2 = -\frac{k-1}{2\sqrt{\pi}},$$

sehingga

$$f_1 = \frac{1}{4}(k-1) \left( \frac{2e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} - z \operatorname{Erfc} \left( \frac{z}{2} \right) \right). \quad (4.54)$$

Kemudian untuk  $p^2$ ,

$$2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} + z \frac{\partial f_2}{\partial z} - 2f_2 + 2(k-1) \frac{\partial f_1}{\partial z} - 2kf_0 = 0. \quad (4.55)$$

Persamaan diferensial tersebut memiliki solusi umum

$$\begin{aligned} f_2 = & \frac{1}{32} ((k^2(2+z^2) - 2k(18+z^2) + (2+z^2)(1+16C_2)) - \\ & ((2k(z^2-6) + k^2(2+z^2) - (z^2+2)(-1+2\sqrt{\pi}C_1)) \operatorname{Erfc} \left( \frac{z}{2} \right)) \\ & + \left( \frac{2e^{-\frac{z^2}{4}} z(1+(k-6)k+2\sqrt{\pi}C_1)}{\sqrt{\pi}} \right)). \end{aligned}$$

Nilai  $C_1$  dan  $C_2$  adalah sebagai berikut

$$C_1 = \frac{k^2 + 2k + 1}{2\sqrt{\pi}} \quad \text{dan}$$

$$C_2 = \frac{1}{16} (-1 + 2k - K^2),$$

sehingga

$$f_2 = -\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}(k-1)^2 z}{8\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}k \left( -2 + \operatorname{Erfc} \left( \frac{z}{2} \right) \right). \quad (4.56)$$

Kemudian untuk  $p^3$ ,

$$2\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} + z\frac{\partial f_3}{\partial z} - 3f_3 + 2(k-1)\frac{\partial f_2}{\partial z} - 2kf_1 = 0. \quad (4.57)$$

Persamaan diferensial tersebut memiliki solusi umum

$$f_3 = z(z^2 + 6)C_1 + \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}(3(k-1)(k+1)^2 z^2 - 4\sqrt{\pi}(z^2 + 4)C_2)}{96\sqrt{\pi}} + \frac{1}{192}z(z^2 + 6)(-1 + k(-9 + k(9 + k))) - 4\sqrt{\pi}C_2) \operatorname{Erf} \left( \frac{z}{2} \right).$$

Nilai  $C_1$  dan  $C_2$  adalah sebagai berikut

$$C_1 = 0 \quad \text{dan} \quad C_2 = -\frac{1 + 9k - 9k^2 - k^3}{4\sqrt{\pi}},$$

sehingga

$$f_3 = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}(-2(k-1)(1 + k(10 + k)) + (k-1)^3 z^2)}{48\sqrt{\pi}}. \quad (4.58)$$

Kemudian untuk  $p^4$ ,

$$2\frac{\partial^2 f_4}{\partial z^2} + z\frac{\partial f_4}{\partial z} - 4f_4 + 2(k-1)\frac{\partial f_3}{\partial z} - 2kf_2 = 0. \quad (4.59)$$

Persamaan diferensial tersebut memiliki solusi umum

$$\begin{aligned}
 f_4 = & \frac{1}{6144} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2e^{-\frac{z^2}{4}} z(18 - 11z^2 + k^4(18 - 11z^2)) \right. \\
 & - 66k^2(10 + z^2) + 4k(18 + 5z^2) + 4k^3(18 + 5z^2) + \\
 & 48k^2(44 + 12z^2 + z^4) + 8(12 + 12z^2 + z^4)(\sqrt{\pi}C_1 + 64C_2) - \\
 & (36 + 12k + (12 + k(-110 + 3k(4 + k)))) + 36(k + 1)^4 z^2 + \\
 & - 8\sqrt{\pi}(10 + z^2)C_1 + 3(k + 1)^4 z^4 \\
 & \left. 8\sqrt{\pi}(12 + 12z^2 + z^4)C_1 \operatorname{Erf}\left(\frac{z}{2}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Nilai  $C_1$  dan  $C_2$  adalah sebagai berikut

$$C_1 = -\frac{3(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)}{8\sqrt{\pi}} \quad \text{dan}$$

$$C_2 = \frac{3}{512} (k^4 + 4k^3 - 10k^2 + 4k + 1), \text{ sehingga}$$

$$\begin{aligned}
 f_4 = & \frac{1}{384} \left( 96k^2 + \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} (6(k-1)^2(1+k(k+6))z - (k-1)^4 z^3)}{\sqrt{\pi}} \right) \\
 & + \frac{1}{384} \left( 96k^2 \operatorname{Erf}\left(\frac{z}{2}\right) \right).
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Karena  $u_i = f_i(z)w^i$  maka solusi dari persamaan (4.46) adalah

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Erf}\left(\frac{z}{2}\right) \\
 u_1 &= w \left( \frac{1}{4}(k-1) \left( \frac{2e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} - z \operatorname{Erfc}\left(\frac{z}{2}\right) \right) \right) \\
 u_2 &= w^2 \left( -\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}(k-1)^2 z}{8\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} k \left( -2 + \operatorname{Erfc}\left(\frac{z}{2}\right) \right) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= w^3 \left( \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} (-2(k-1)(1+k(10+k)) + (k-1)^3 z^2)}{48\sqrt{\pi}} \right) \\
u_4 &= \frac{w^4}{384} \left( 96k^2 + \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} (6(k-1)^2(1+k(k+6))z - (k-1)^4 z^3)}{\sqrt{\pi}} \right) \\
&\quad + \frac{w^4}{384} \left( 96k^2 \operatorname{Erf} \left( \frac{z}{2} \right) \right).
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Sehingga solusi dari persamaan (4.43) adalah

$$u(z, w) = \lim_{p \rightarrow 1} u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3 + p^4 u_4, \tag{4.62}$$

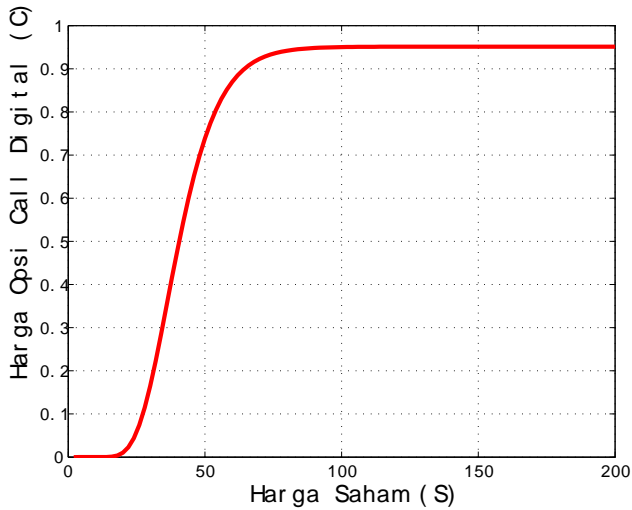
dengan nilai  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$  pada persamaan (4.61). Persamaan (4.62) adalah solusi pendekatan analitik dari model Black-Scholes yang dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *call* digital.

#### 4.4 Simulasi

Pada tahap ini dilakukan simulasi terhadap solusi analitik dan juga solusi pendekatan analitik model Black-Scholes. Simulasi dilakukan untuk mengetahui apakah nilai dari solusi pendekatan analitik yang didapatkan menggunakan metode homotopi perturbasi mendekati nilai dari solusi analitik. Selain itu, dilakukan juga perhitungan nilai galat untuk mengetahui akurasi dari metode homotopi perturbasi.

##### 4.4.1 Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Pendekatan Analitik Model Black-Scholes Terhadap Perubahan Harga Saham

Simulasi ini dilakukan untuk menentukan harga opsi *call* digital menggunakan solusi analitik dan pendekatan analitik model Black-Scholes. Kemudian kedua solusi tersebut



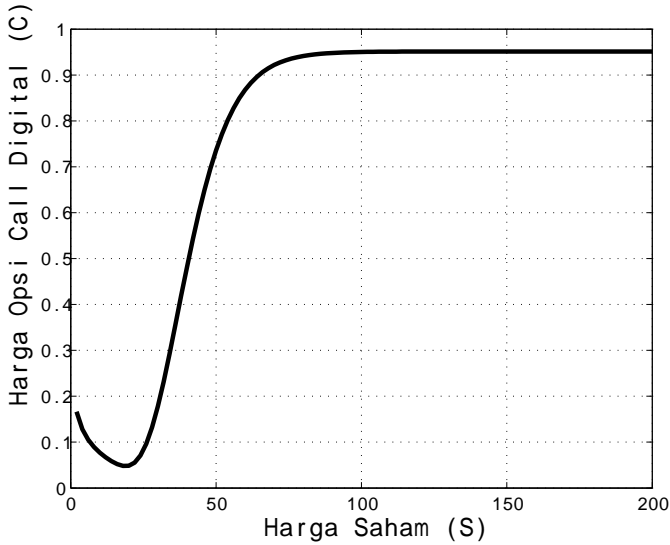
Gambar 4.1: Solusi analitik model Black-Scholes.

dibandingkan nilainya. Setelah itu, galat dari perbandingan kedua solusi tersebut dihitung. Langkah pertama, dilakukan perhitungan harga opsi *call* digital menggunakan solusi analitik model Black-Scholes. Diberikan contoh kontrak tanpa dividen. Asumsikan harga kesepakatan ( $K$ ) sebesar Rp.40. Tingkat suku bunga bebas resiko ( $r$ ) 5%. Volatilitas harga saham ( $\sigma$ ) sebesar 0,324336. Waktu jatuh tempo selama 1 tahun serta nilai harga saham tertera pada Tabel 4.1. Berdasarkan Tabel 4.1, dapat diperoleh plot grafik pada Gambar 4.1. Terlihat pada Gambar 4.1 bahwa saat nilai harga saham ( $S$ ) semakin tinggi, maka harga opsi *call* digital juga semakin tinggi. Harga opsi naik drastis saat harga saham mendekati harga kesepakatan dan mulai terlihat konstan saat harga saham lebih dari Rp.100.

Tabel 4.1: Solusi analitik model Black-Scholes.

S	BS	S	BS	S	BS	S	BS
2	9.9E-24	52	0.773913	102	0.950418	152	0.951226
4	8.94E-15	54	0.804195	104	0.95058	154	0.951226
6	1.35E-10	56	0.829938	106	0.950709	156	0.951227
8	4.23E-08	58	0.851635	108	0.950813	158	0.951227
10	1.97E-06	60	0.869783	110	0.950895	160	0.951228
12	3.06E-05	62	0.884863	112	0.950962	162	0.951228
14	0.000236	64	0.897322	114	0.951014	164	0.951228
16	0.001134	66	0.907562	116	0.951057	166	0.951229
18	0.003885	68	0.915943	118	0.951091	168	0.951229
20	0.010369	70	0.922774	120	0.951118	170	0.951229
22	0.022896	72	0.928324	122	0.95114	172	0.951229
24	0.043652	74	0.93282	124	0.951157	174	0.951229
26	0.07411	76	0.936452	126	0.951171	176	0.951229
28	0.114669	78	0.939381	128	0.951182	178	0.951229
30	0.164588	80	0.941738	130	0.951192	180	0.951229
32	0.222177	82	0.943631	132	0.951199	182	0.951229
34	0.28515	84	0.94515	134	0.951205	184	0.951229
36	0.350992	86	0.946368	136	0.951209	186	0.951229
38	0.417287	88	0.947342	138	0.951213	188	0.951229
40	0.481939	90	0.948122	140	0.951216	190	0.951229
42	0.543294	92	0.948746	142	0.951219	192	0.951229
44	0.600177	94	0.949244	144	0.951221	194	0.951229
46	0.651867	96	0.949642	146	0.951222	196	0.951229
48	0.69803	98	0.949961	148	0.951224	198	0.951229
50	0.738645	100	0.950215	150	0.951225	200	0.951229



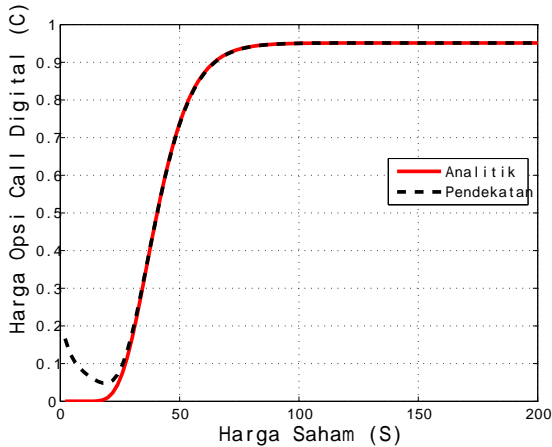


Gambar 4.2: Solusi pendekatan analitik model Black-Scholes.

Selanjutnya dilakukan perhitungan harga opsi *call* digital menggunakan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes. Diberikan contoh kontrak tanpa dividen. Asumsikan nilai dari harga kesepakatan ( $K$ ) sebesar Rp.40. Tingkat suku bunga bebas resiko ( $r$ ) sebesar 5%. Volatilitas harga saham ( $\sigma$ ) sebesar 0,324336. Waktu jatuh tempo 1 tahun serta nilai harga saham tertera pada Tabel 4.2. Berdasarkan Tabel 4.2, dapat diperoleh plot grafik pada Gambar 4.2. Terlihat pada Gambar 4.2 bahwa saat nilai harga saham ( $S$ ) semakin tinggi, maka harga opsi *call* digital juga semakin tinggi. Harga opsi naik drastis saat harga saham mendekati harga kesepakatan. Pada saat nilai harga saham  $S$  kurang dari Rp.20, harga opsi *call* digital cenderung turun.

Tabel 4.2: Solusi pendekatan analitik model Black-Scholes.

S	HPM	S	HPM	S	HPM	S	HPM
2	0.16643	52	0.771142	102	0.950391	152	0.951246
4	0.12792	54	0.801564	104	0.950562	154	0.951247
6	0.10540	56	0.827503	106	0.950698	156	0.951247
8	0.08941	58	0.849425	108	0.950808	158	0.951248
10	0.07702	60	0.867811	110	0.950895	160	0.951248
12	0.06692	62	0.883126	112	0.950965	162	0.951249
14	0.05855	64	0.895809	114	0.951021	164	0.951249
16	0.05198	66	0.906258	116	0.951066	166	0.951249
18	0.04807	68	0.914827	118	0.951102	168	0.951249
20	0.04847	70	0.921827	120	0.951131	170	0.951249
22	0.05534	72	0.927525	122	0.951154	172	0.951249
24	0.07077	74	0.93215	124	0.951173	174	0.95125
26	0.09623	76	0.935894	126	0.951188	176	0.95125
28	0.13216	78	0.938918	128	0.9512	178	0.95125
30	0.17787	80	0.941356	130	0.951209	180	0.95125
32	0.23174	82	0.943318	132	0.951217	182	0.95125
34	0.29152	84	0.944894	134	0.951223	184	0.95125
36	0.35472	86	0.94616	136	0.951228	186	0.95125
38	0.41891	88	0.947175	138	0.951233	188	0.95125
40	0.48194	90	0.947988	140	0.951236	190	0.95125
42	0.54212	92	0.948639	142	0.951239	192	0.95125
44	0.59819	94	0.94916	144	0.951241	194	0.95125
46	0.64938	96	0.949577	146	0.951242	196	0.95125
48	0.69529	98	0.949911	148	0.951244	198	0.95125
50	0.73582	100	0.950178	150	0.951245	200	0.95125



Gambar 4.3: Perbandingan solusi analitik dan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes.

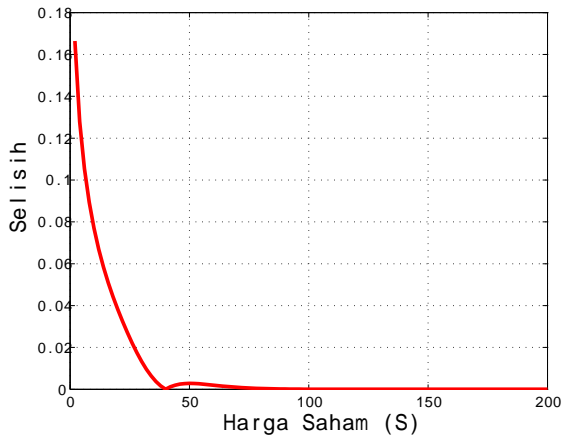
Selanjutnya dilakukan perbandingan harga opsi *call* digital yang didapatkan menggunakan solusi analitik dan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes. Diberikan contoh kontrak tanpa dividen. Asumsikan harga kesepakatan ( $K$ ) sebesar Rp.40. Tingkat suku bunga bebas resiko ( $r$ ) sebesar 5%. Volatilitas harga saham ( $\sigma$ ) sebesar 0,324336. Waktu jatuh tempo selama 1 tahun serta nilai harga saham tertera pada Tabel 4.3. Kolom S berisi nilai harga saham. Kolom BS berisi nilai solusi analitik model Black-Scholes. Kolom HPM berisi nilai solusi pendekatan analitik yang didapatkan menggunakan metode homotopi perturbasi. Berdasarkan nilai pada Tabel 4.3 didapatkan plot grafik pada Gambar 4.3. Nilai dari solusi pendekatan analitik mulai mendekati nilai solusi analitik saat harga saham mendekati dan melewati harga kesepakatan.

Tabel 4.3: Perbandingan solusi analitik dan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes.

S	BS	HPM	S	BS	HPM
2	9.9E-24	0.16642957	52	0.773913	0.771142
4	8.94E-15	0.127921394	54	0.804195	0.801564
6	1.35E-10	0.105395555	56	0.829938	0.827503
8	4.23E-08	0.089413256	58	0.851635	0.849425
10	1.97E-06	0.077018174	60	0.869783	0.867811
12	3.06E-05	0.066915939	62	0.884863	0.883126
14	0.000236	0.058545892	64	0.897322	0.895809
16	0.001134	0.051981634	66	0.907562	0.906258
18	0.003885	0.048073972	68	0.915943	0.914827
20	0.010369	0.048474851	70	0.922774	0.921827
22	0.022896	0.055340359	72	0.928324	0.927525
24	0.043652	0.070772379	74	0.93282	0.93215
26	0.07411	0.096233425	76	0.936452	0.935894
28	0.114669	0.132159722	78	0.939381	0.938918
30	0.164588	0.177870582	80	0.941738	0.941356
32	0.222177	0.231739943	82	0.943631	0.943318
34	0.28515	0.291523007	84	0.94515	0.944894
36	0.350992	0.354722151	86	0.946368	0.94616
38	0.417287	0.418906537	88	0.947342	0.947175
40	0.481939	0.481941278	90	0.948122	0.947988
42	0.543294	0.542117226	92	0.948746	0.948639
44	0.600177	0.59819462	94	0.949244	0.94916
46	0.651867	0.649383744	96	0.949642	0.949577
48	0.69803	0.695286826	98	0.949961	0.949911
50	0.738645	0.735821661	100	0.950215	0.950178

Tabel 4.3: Perbandingan solusi analitik dan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes (Lanjutan).

S	BS	HPM	S	BS	HPM
102	0.950418	0.950391	152	0.951226	0.951246
104	0.95058	0.950562	154	0.951226	0.951247
106	0.950709	0.950698	156	0.951227	0.951247
108	0.950813	0.950808	158	0.951227	0.951248
110	0.950895	0.950895	160	0.951228	0.951248
112	0.950962	0.950965	162	0.951228	0.951249
114	0.951014	0.951021	164	0.951228	0.951249
116	0.951057	0.951066	166	0.951229	0.951249
118	0.951091	0.951102	168	0.951229	0.951249
120	0.951118	0.951131	170	0.951229	0.951249
122	0.95114	0.951154	172	0.951229	0.951249
124	0.951157	0.951173	174	0.951229	0.95125
126	0.951171	0.951188	176	0.951229	0.95125
128	0.951182	0.9512	178	0.951229	0.95125
130	0.951192	0.951209	180	0.951229	0.95125
132	0.951199	0.951217	182	0.951229	0.95125
134	0.951205	0.951223	184	0.951229	0.95125
136	0.951209	0.951228	186	0.951229	0.95125
138	0.951213	0.951233	188	0.951229	0.95125
140	0.951216	0.951236	190	0.951229	0.95125
142	0.951219	0.951239	192	0.951229	0.95125
144	0.951221	0.951241	194	0.951229	0.95125
146	0.951222	0.951242	196	0.951229	0.95125
148	0.951224	0.951244	198	0.951229	0.95125
150	0.951225	0.951245	200	0.951229	0.95125



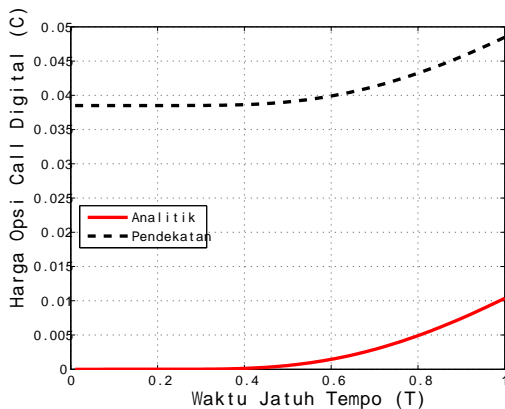
Gambar 4.4: Selisih nilai solusi model Black-Scholes terhadap perubahan harga saham.

Selanjutnya galat dari perbandingan kedua solusi tersebut dihitung menggunakan formula *mean absolute deviation* dan didapatkan nilai sebesar 0.009932965. Nilai tersebut sangat kecil dan mendekati nol. Selisih dari nilai solusi analitik dan solusi pendekatan analitik terhadap perubahan harga saham ditampilkan pada Gambar 4.4. Berdasarkan Gambar 4.4, selisih nilai dari kedua solusi tersebut turun drastis dan mendekati nol saat harga saham lebih besar dari harga kesepakatan. Hal tersebut menyiratkan bahwa solusi pendekatan analitik yang didapat menggunakan metode homotopi perturbasi cukup mendekati solusi analitik saat harga saham mendekati dan melewati harga kesepakatan. Metode homotopi perturbasi mampu menghasilkan solusi pendekatan yang akurat karena galatnya sangat kecil dan mendekati nol.

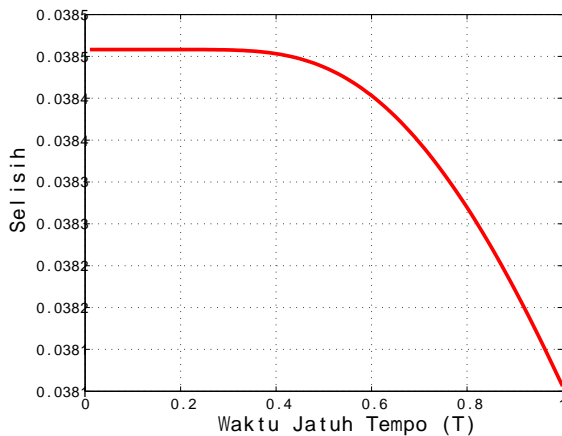
#### 4.4.2 Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Pendekatan Analitik Model Black-Scholes Terhadap Perubahan Waktu Jatuh Tempo

Simulasi ini dilakukan untuk membandingkan harga opsi *call* digital yang didapat menggunakan solusi analitik dan pendekatan analitik dari model Black-Scholes. Diberikan contoh kontrak tanpa dividen dengan harga saham kurang dari harga kesepakatan. Asumsikan bahwa harga kesepakatan ( $K$ ) sebesar Rp.40 dan harga saham sebesar Rp.20. Tingkat suku bunga bebas resiko ( $r$ ) sebesar 5%. Volatilitas harga saham ( $\sigma$ ) sebesar 0,324336. Waktu jatuh tempo selama 1 tahun. Terlihat pada Gambar 4.5, nilai dari solusi pendekatan analitik tidak mendekati solusi analitik. Selisih kedua solusi tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.6. Berdasarkan Gambar 4.6, selisih kedua solusi tersebut semakin kecil seiring dengan berjalannya waktu. Galat dari perbandingan kedua solusi tersebut dihitung menggunakan formula *mean absolute deviation* dan didapatkan nilai sebesar 0.038420.

Selanjutnya diberikan contoh kasus ketika harga saham sama dengan harga kesepakatan. Diberikan contoh kontrak tanpa dividen. Asumsikan harga kesepakatan ( $K$ ) sebesar Rp.40. Harga saham sebesar Rp.40. Tingkat suku bunga bebas resiko ( $r$ ) sebesar 5%. Volatilitas harga saham ( $\sigma$ ) sebesar 0,324336. Waktu jatuh tempo selama 1 tahun. Terlihat pada Gambar 4.7 bahwa nilai dari solusi pendekatan analitik mendekati solusi analitik. Selisih dari kedua solusi tersebut terlihat pada Gambar 4.8. Berdasarkan Gambar 4.8, selisih kedua solusi tersebut semakin besar seiring dengan bertambahnya waktu. Meski selisihnya semakin besar, tetapi nilainya sangat kecil dan mendekati nol. Nilai galat dari perbandingan kedua solusi tersebut dihitung menggunakan formula *mean absolute deviation* dan didapatkan nilai sebesar  $3.6184 \times 10^{-7}$ .

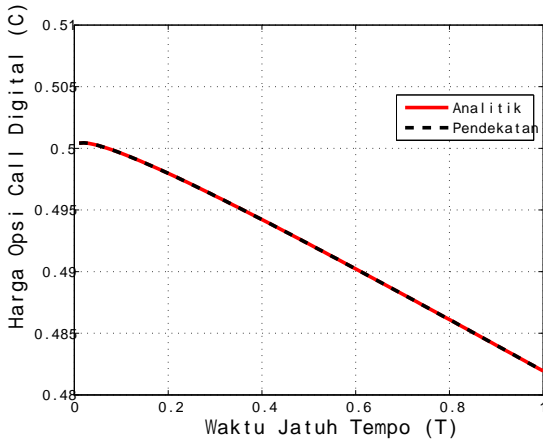


Gambar 4.5: Solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat  $S < K$ .

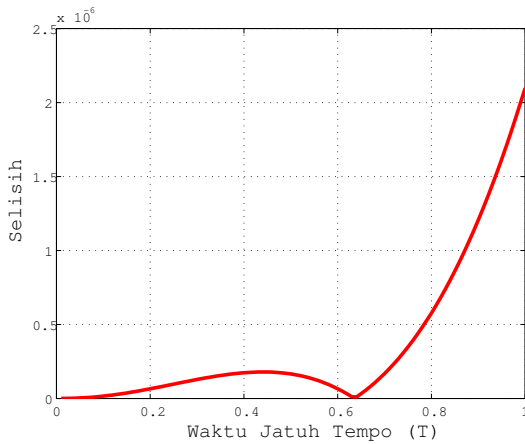


Gambar 4.6: Selisih nilai solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat  $S < K$ .

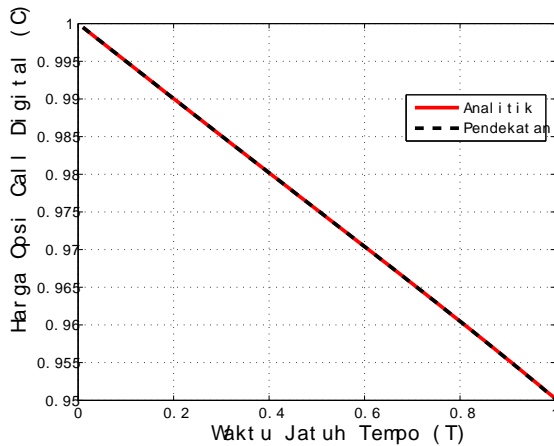




Gambar 4.7: Solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat  $S=K$ .

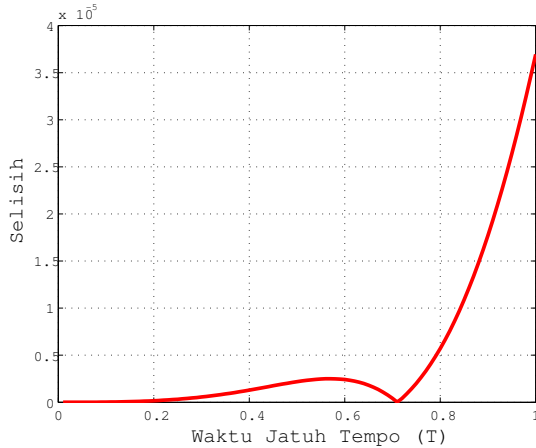


Gambar 4.8: Selisih nilai solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat  $S=K$ .



Gambar 4.9: Solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat  $S > K$ .

Selanjutnya diberikan contoh kasus ketika harga saham lebih besar dari harga kesepakatan. Diberikan contoh kontrak opsi tanpa dividen. Asumsikan bahwa harga kesepakatan ( $K$ ) sebesar Rp.40. Harga saham sebesar Rp.100. Tingkat suku bunga bebas resiko ( $r$ ) sebesar 5%. Volatilitas harga saham ( $\sigma$ ) sebesar 0,324336 dan waktu jatuh tempo selama 1 tahun. Terlihat pada Gambar 4.9 bahwa nilai dari solusi pendekatan analitik mendekati solusi analitik. Selisih dari kedua nilai tersebut terlihat pada Gambar 4.10. Berdasarkan Gambar 4.10, selisih kedua solusi tersebut semakin besar seiring dengan bertambahnya waktu. Meski selisihnya semakin besar tetapi nilainya sangat kecil dan mendekati nol. Nilai galat dari perbandingan kedua solusi tersebut dihitung menggunakan formula *mean absolute deviation* dan didapatkan nilai sebesar  $4.9120 \times 10^{-6}$ .



Gambar 4.10: Selisih nilai solusi model Black-Scholes terhadap perubahan waktu jatuh tempo saat  $S > K$ .

Berdasarkan hasil simulasi di atas, dapat disimpulkan bahwa harga opsi *call* digital semakin naik saat harga saham kurang dari harga kesepakatan. Lalu, harga opsi *call* digital mulai turun saat harga saham mulai mendekati dan melewati harga kesepakatan. Solusi pendekatan analitik mendekati solusi analitik saat harga saham mendekati dan melewati harga kesepakatan. Hal tersebut dapat dilihat dari nilai galat yang sangat kecil dan mendekati nol.

## BAB V PENUTUP

Pada tahap ini, diberikan kesimpulan dari penelitian ini. Terdiri dari bentuk solusi analitik dan solusi pendekatan analitik model Black-Scholes. Kemudian dipaparkan hasil dari simulasi perbandingan kedua solusi tersebut dan akurasi dari solusi pendekatan analitik yang didapatkan menggunakan metode homotopi perturbasi. Selain itu, diberikan pula saran bagi penelitian selanjutnya.

### 1. Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dibahas pada tahap sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

- (a) Solusi analitik dari model Black-Scholes untuk opsi *call* digital adalah

$$C(S, t) = e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$N(\cdot)$  merupakan bentuk CDF dari distribusi normal standar, dengan

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{(T - t)}}.$$

- (b) Solusi pendekatan analitik dari model Black-Scholes untuk opsi *call* digital yang didapatkan

menggunakan metode homotopi perturbasi adalah

$$\begin{aligned}
 u(z, w) = & \lim_{p \rightarrow 1} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Erf} \left( \frac{z}{2} \right) \right) + \\
 & pw \left( \frac{1}{4} (k-1) \left( \frac{2e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} - z \operatorname{Erfc} \left( \frac{z}{2} \right) \right) \right) + \\
 & p^2 w^2 \left( -\frac{e^{-\frac{z^2}{4}} (k-1)^2 z}{8\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} k \left( -2 + \operatorname{Erfc} \left( \frac{z}{2} \right) \right) \right) + \\
 & p^3 w^3 \left( \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} (-2(k-1)(1+k(10+k)) + (k-1)^3 z^2)}{48\sqrt{\pi}} \right) + \\
 & p^4 \frac{w^4}{384} \left( \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} (6(k-1)^2 (1+k(k+6))z - (k-1)^4 z^3)}{\sqrt{\pi}} \right) + \\
 & p^4 \frac{w^4}{384} \left( 96k^2 + 96k^2 \operatorname{Erf} \left( \frac{z}{2} \right) \right).
 \end{aligned}$$

- (c) Berdasarkan hasil simulasi pada tahap sebelumnya, solusi pendekatan analitik yang telah didapatkan menggunakan metode homotopi perturbasi cukup mendekati solusi analitik model Black-Scholes. Hal tersebut dapat dilihat dari nilai galat saat kedua solusi tersebut dibandingkan. Ketika kedua solusi tersebut dibandingkan terhadap perubahan harga saham, didapatkan galat sebesar 0.009932965. Saat kedua solusi tersebut dibandingkan terhadap perubahan waktu jatuh tempo, didapatkan tiga hasil. Saat harga saham lebih kecil dari harga kesepakatan didapatkan galat sebesar 0.03842. Kemudian, saat harga saham sama dengan harga kesepakatan didapatkan galat sebesar  $3.6184 \times$

$10^{-7}$ . Kemudian, saat harga saham lebih besar dari harga kesepakatan didapatkan galat sebesar  $4.9120 \times 10^{-6}$ . Nilai galat dari perbandingan-perbandingan tersebut nilainya sangat kecil bahkan mendekati nol. Jadi, dapat disimpulkan bahwa akurasi dari metode homotopi perturbasi dalam menghasilkan solusi pendekatan analitik sangat baik.

## 2. **Saran**

Pada Tugas Akhir ini belum dibahas mengenai penyelesaian model Black-Scholes menggunakan metode homotopi perturbasi dengan opsi tipe Eropa lainnya dan juga beberapa pengembangan asumsi dari model Black-Scholes. Oleh sebab itu, penulis menyarankan agar penelitian dapat dilanjutkan dengan pada pembahasan tersebut.



## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Z. Ke, J. Goard, and S.-P. Zhu, “An appropriate approach to pricing european-style options with the adomian decomposition method,” *The ANZIAM Journal*, vol. 59, no. 3, p. 349–369, 2018.
- [2] V. Lazăr, “Pricing digital call option in the heston stochastic volatility model,” *Studia Universitatis Babeş-Bolyai. Mathematica*, vol. 48, 01 2003.
- [3] J.-H. He, “Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique,” *Applied Mathematics and Computation - AMC*, vol. 135, pp. 73–79, 02 2003.
- [4] J. Hull, *Option, Futures, and Other Derivatives*, 8th ed. Boston :Prentice Hall, 2012.
- [5] E. Tandelilin, *Portofolio dan Investasi: Teori dan Aplikasi*. Kanisius, 2010. [Online]. Available: <https://books.google.co.id/books?id=YLORI8ul44kC>
- [6] S. Broverman, *Mathematics of Investment and Credit*, ser. ACTEX academic series. ACTEX Publications, Incorporated, 2010. [Online]. Available: <https://books.google.co.id/books?id=wBghlzN0vVQC>
- [7] A. Rahman, “Model black-scholes put call parity harga opsi tipe eropa dengan pembagian dividen,” *Skripsi*, 2010.
- [8] Y. Kwok, *Mathematical Models of Financial Derivatives*, ser. Springer Finance. Springer



Berlin Heidelberg, 2008. [Online]. Available:  
<https://books.google.co.id/books?id=2sGwSafA8eAC>

- [9] L. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, ser. Classic Series. Brooks/Cole Cengage Learning, 1992. [Online]. Available:  
<https://books.google.co.id/books?id=MkFRIAAACA AJ>
- [10] J. Cannon and F. Browder, *The One-Dimensional Heat Equation*, ser. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1984. [Online]. Available:  
<https://books.google.co.id/books?id=XWSnBZxbz2oC>
- [11] L. Andrews and S. of Photo-optical Instrumentation Engineers, *Special Functions of Mathematics for Engineers*, ser. Oxford science publications. SPIE Optical Engineering Press, 1998. [Online]. Available:  
<https://books.google.co.id/books?id=2CAqsF-RebgC>
- [12] D. Montgomery, C. Jennings, and M. Kulahci, *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*, ser. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2011. [Online]. Available:  
<https://books.google.co.id/books?id=-qaFi0oOPAYC>

## BIODATA PENULIS



Penulis buku tugas akhir ini bernama lengkap Islachiyatul Ummah dan biasanya dipanggil Islah (yang artinya damai ♡). Penulis lahir di Gresik pada tanggal 31 Oktober 1998 dan pernah mengenyam pendidikan formal di SMPN 3 Gresik pada tahun 2010-2013, lalu di SMAN 1 Manyar, Gresik pada tahun 2013-2016. Saat ini penulis sedang menempuh pendidikan di Departemen Matematika ITS sejak tahun 2016 dan mengambil konsentrasi pada bidang Riset Operasi dan Pengolahan Data (ROPD). Selama menjadi mahasiswi, penulis aktif dalam berbagai kegiatan kepanitiaan dan organisasi. Diantaranya yaitu menjadi pengajar dalam program ITS Mengajar 2017 yang diadakan di Jombang, Jawa Timur. Kemudian menjadi panitia dalam kegiatan Olimpiade Matematika ITS (OMITS) 2018 dan OMITS 2019, Ini Lho ITS! (ILITS) 2018, Gerigi ITS 2018, dan beberapa turnamen yang diadakan oleh ITS Badminton Community (IBC). Selain itu, penulis juga pernah menjabat sebagai staf *External Affair Department* HIMATIKA ITS 17/18, Kepala Departemen *External Affair Department* HIMATIKA ITS 18/19, staf Departemen Jaringan dan Media Ibnu Muqlah (Lembaga Dakwah Jurusan Matematika ITS) pada periode 2017/2018 dan berlanjut di jabatan yang sama hingga periode 2018/2019. Penulis juga pernah menjadi asisten dosen mata kuliah Matematika 1 pada tahun 2018 dan 2019 serta menjadi peserta dalam beberapa pelatihan yang diadakan di ITS seperti LKMM Pra-TD, LKMM TD

dan LKMM TM. Apabila ada pertanyaan, kritik maupun saran untuk tugas akhir ini, Anda bisa menghubungi penulis melalui email [islachiyatul.ummah@gmail.com](mailto:islachiyatul.ummah@gmail.com).