TUGAS AKHIR – KM184801

ANALISIS KESTABILAN *SWITCHED LINEAR SYSTEMS* DENGAN FUNGSI *COMMON* LYAPUNOV DAN APLIKASINYA PADA PWM-*DRIVEN BOOST CONVERTER*

ADELIA TRIANA PAMUNGKAS
NRP 061116 4000 0012

Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

TUGAS AKHIR – KM184801

ANALISIS KESTABILAN *SWITCHED LINEAR SYSTEMS* DENGAN FUNGSI *COMMON* LYAPUNOV DAN APLIKASINYA PADA PWM-*DRIVEN BOOST CONVERTER*

ADELIA TRIANA PAMUNGKAS
NRP 061116 4000 0012

Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

FINAL PROJECT – KM184801

STABILITY ANALYSIS OF SWITCHED LINEAR SYSTEMS WITH COMMON LYAPUNOV FUNCTION AND ITS APPLICATION ON PWM-DRIVEN BOOST CONVERTER

ADELIA TRIANA PAMUNGKAS
NRP 061116 4000 0012

Supervisor
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS KESTABILAN *SWITCHED LINEAR SYSTEMS* DENGAN FUNGSI *COMMON* LYAPUNOV DAN APLIKASINYA PADA PWM-*DRIVEN BOOST CONVERTER*

STABILITY ANALYSIS OF SWITCHED LINEAR SYSTEMS WITH COMMON LYAPUNOV FUNCTION AND ITS APPLICATION ON PWM-DRIVEN BOOST CONVERTER

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelas Sarjana Matematika pada bidang studi Matematika Terapan Program Studi S1 Departemen Matematika Fakultas Sains dan Analitika Data – Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
ADELIA TRIANA PAMUNGKAS
NRP. 06111640000012

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si
NIP. 19830517 200812 1 003

Dosen Pembimbing I,

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si
NIP. 19730930 199702 1 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS

Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001
Surabaya, 8 Juni 2020

ANALISIS KESTABILAN *SWITCHED LINEAR SYSTEMS* DENGAN FUNGSI *COMMON* LYAPUNOV DAN APLIKASINYA PADA PWM-*DRIVEN BOOST CONVERTER*

Nama : Adelia Triana Pamungkas
NRP : 06111640000012
Departemen : Matematika
Pembimbing : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

ABSTRAK

Suatu permasalahan di kehidupan kita sehari-hari kebanyakan dapat dimodelkan sebagai sistem dinamik. Oleh karena itu, sistem dinamik merupakan representasi masalah dalam dunia nyata dengan model matematika agar dapat diselesaikan. Sistem dinamik memiliki dua bentuk, yaitu sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Namun, tidak jarang kita menjumpai sistem yang melibatkan bagian diskrit dan kontinu, atau yang biasa disebut dengan sistem hibrid. Sistem hibrid merupakan bidang penelitian yang relatif baru dalam bidang matematika terapan dengan berbagai macam bagian, salah satunya adalah *switched systems. Switched systems* adalah sistem hibrid yang bagian diskritnya sederhana. Kejadian perpindahan pada *switched systems* dibedakan menjadi dua macam, yaitu *state-dependent switching* (perpindahan berdasarkan *state*) dan *time-dependent switching* (perpindahan berdasarkan waktu). *Switched systems* juga dibedakan menjadi *switched linear systems* dan *switched nonlinear systems.* Oleh karena itu, sangat penting untuk mempelajari *switched systems* sekaligus analisis kestabilannya.

Pada penelitian ini dibahas mengenai analisis kestabilan pada *switched linear systems* dengan mengkontruksi fungsi *common* Lyapunov kuadratik. Sistem yang digunakan adalah sistem *autonomous* (sistem yang tidak mengandung input). Selanjutnya dilakukan implementasi kestabilan *switched linear systems* pada PWM-*Driven Boost Converter.* Pada model PWM bagian yang

diskrit adalah sistem yang aktif, sedangkan bagian yang kontinu adalah penyelesaian dari persamaan diferensialnya.

Hasil dari penelitian ini adalah model PWM-*Driven Boost Converter* bersifat *Globally Uniformly Exponentially Stable* (GUES). Hasil tersebut ditunjukkan dengan melakukan 3 langkah pembuktian, yaitu menentukan titik setimbang dari setiap subsistem, menentukan kestabilan dengan memeriksa nilai eigen dari setiap subsistem, dan menyelesaikan persamaan LMI. Selain itu, juga ditunjukkan dengan grafik solusi yang menuju ke titik asal $x = 0$.

Kata kunci*: kestabilan, switched linear systems, fungsi common Lyapunov kuadratik, PWM-Driven Boost Converter*

STABILITY ANALYSIS OF SWITCHED LINEAR SYSTEMS WITH COMMON LYAPUNOV FUNCTION AND ITS APPLICATION ON PWM-DRIVEN BOOST CONVERTER

Name : Adelia Triana Pamungkas
NRP : 06111640000012
Department : Mathematics
Supervisor : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

ABSTRACT

A problem in our daily lives can be modeled as dynamic system. Therefore, a dynamic system are representations of problems in the real life by using a mathematical model so that it can be solved. Dynamic systems are divided into discrete dynamic systems and continuous dynamic systems. However, there are some systems that involve discrete and continuous parts, which are commonly called hybrid systems. Hybrid systems are a relatively new field of research of applied mathematics. Switched system is a part of hybrid system where the discrete parts are simple. Displacement events in switched systems can be divided into two types, namely state-dependent switching (movement based on state) and time-dependent switching (movement based on time). Switched systems are also divided into switched linear systems and switched nonlinear systems. Therefore, it is very important to study switched systems as well as stability analysis.

This final project discuss the stability analysis of switched linear systems by constructing the common quadratid Lyapunov functions. Then the stability of switched linear systems is implemented in the PWM-Driven Boost Converter. On the PWM model the discrete part is the active system, while the continuous part is the solution to the differential equation.

The result of this final project is the PWM-Driven Boost Converter model is Globally Uniformly Exponentially Stable (GUES). This result proved by 3 proven steps, these are

determining the equilibrium point of each subsystem, determining stability by checking the eigen value, and completing the LMI equation. In addition, it is also indicated by a solution graph that leads to the origin $x = 0$.

Keywords: *stability, switched linear systems, common Lyapunov quadratic function, PWM-Driven Boost Converter*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin, segala puji syukur bagi Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan baik. Shalawat serta salam semoga selalu dilimpahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW, keluarga, sahabat dan umat muslim yang senantiasa meneladani beliau.

Tugas Akhir ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan guna menyelesaikan pendidikan Sarjana pada Program Sarjana, Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya yang berjudul:

"ANALISIS KESTABILAN *SWITCHED LINEAR SYSTEMS* DENGAN FUNGSI *COMMON* LYAPUNOV DAN APLIKASINYA PADA PWM-*DRIVEN BOOST CONVERTER*"

Dalam Tugas Akhir ini dianalisis sistem *switched* linier pada *Pulse Width Modulation* (PWM) *Driven Boost Converter* menggunakan fungsi *common* Lyapunov kuadratik sehingga mencapai kestabilan. Suatu kebahagiaan dan kewajiban bagi penulis untuk menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung atas terselesainya Tugas Akhir ini kepada:

1. Bapak Subchan, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika FSAD ITS.
2. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si dan Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing Tugas Akhir yang telah memberikan segala bimbingan dan motivasi.
3. Ibu Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, MT selaku Sekretaris I Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberikan arahan akademik dan menyusun jadwal.

4. Bapak Dr. Budi Setiyono, MT selaku Sekretaris II Departemen Matematika FSAD ITS.
5. Bapak Iis Herisman, M.Si, Ibu Dr. Tahiyatul Asfihani, S.Si., M.Si, dan Bapak Amirul Hakam, S.Si., M.Si selaku dosen penguji atas semua saran dan masukan yang diberikan.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staff Departemen Matematika FSAD ITS.
7. Kedua orang tua serta saudara kandung penulis, Mama, Papa, Mas Rizky dan Mbak Amira serta keluarga atas dukungan dan semangat yang telah diberikan.
8. Teman penulis dan Green House squad yang sudah membantu penulis selama menjadi mahasiswa di ITS.
9. Sahabat penulis, Coh, Vun, Ana, Hafizh, Beni, Yanuar, Rozy yang selalu memberikan dukungan dan doa kepada penulis.
10. Ilham Muhammad yang telah memberikan motivasi, dukungan, dan semangat.
11. Semua pihak yang belum disebutkan yang telah membantu dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari dan memohon maaf atas segala kekurangan pada Tugas Akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat dalam pengembangan ilmu di kemudian hari bagi banyak pihak.

Surabaya, Juni 2020

Penulis

Daftar Isi

Abstrak vii
Abstract x
Kata Pengantar xiii
Daftar Isi xvi
Daftar Gambar xviii
BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Batasan Masalah 3
1.4 Tujuan 4
1.5 Manfaat 4
1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir 4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA
2.1 Penelitian Terdahulu 7
2.2 Sistem Dinamik dan Titik Setimbang 9
2.3 Kestabilan Titik Setimbang 9
2.4 Fungsi Lyapunov 12
2.5 *Switched Systems* 13
2.6 Konsep Kestabilan *Uniform* 16
2.7 Fungsi *Common* Lyapunov 17
2.8 *Linear Matrix Inequalities* (LMI) 18
2.9 PWM-*Driven Boost Converter* 19

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tahap Penelitian 23

3.2 Diagram Alir 24

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Kestabilan *Switched Linear Systems* 27

4.2 Implementasi Analisis Kestabilan PWM-*Driven Boost Converter* 29

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan 39

5.2 Saran 40

DAFTAR PUSTAKA 41

LAMPIRAN 43

DAFTAR GAMBAR

2.1 Hubungan Kestabilan Titik Setimbang 11

2.2 *Switched Systems* 13

2.3 *State-dependent Switching* 14

2.4 *Time-dependent Switching* 15

2.5 *Boost Converter* 19

2.6 *Pulse Width Modulation* (PWM) 20

2.7 PWM-*Driven Boost Converter* 20

3.1 Diagram Alir 25

4.1 Nilai matriks *P* 34

4.2 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 1 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 5 detik..... 36

4.3 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 1 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 10 detik..... 36

4.4 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 1 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 50 detik..... 37

4.5 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 2 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 5 detik..... 38

4.6 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 2 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 10 detik..... 38

4.7 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 2 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 50 detik..... 39

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini diuraikan tentang latar belakang yang mendasari tugas akhir. Di dalamnya mencakup identifikasi permasalahan dan beberapa informasi tentang penelitian terdahulu yang berhubungan dengan topik tugas akhir. Uraian ini bersifat umum yang menjelaskan secara ringkas hal-hal yang akan dilakukan pada tugas akhir ini. Dari informasi tersebut, kemudian dirumuskan permasalahan yang akan dibahas, batasan masalah, tujuan, dan manfaat dari tugas akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Sebagian besar permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari dapat dimodelkan sebagai sistem dinamik. Sistem dinamik merupakan suatu model untuk mendeskripsikan suatu fenomena yang dinamis (bergantung waktu). Pemodelan sistem dinamik digunakan sebagai representasi suatu masalah dalam dunia nyata menggunakan model matematika agar lebih sederhana dan mudah diselesaikan. Perilaku yang unik dan sederhana diperlihatkan ketika keadaan awal suatu sistem berada di titik setimbang atau titik tetap. Pada kasus ini, keadaannya tidak mengalami perubahan sama sekali. Salah satu permasalahan yang banyak dikaji adalah: apakah perubahan kecil pada kondisi awal juga akan mengakibatkan perubahan kecil pada perilaku penyelesaian sistem.

Sedangkan, pada teori kestabilan mengkaji pertanyaan-pertanyaan berikut: apakah penyelesaian akan selalu dekat dengan titik setimbang ketika keadaan awalnya dekat dengan titik setimbang. Apakah penyelesaian akan konvergen ke titik setimbang saat keadaan awalnya dekat dengan titik setimbang. Ketika kondisi yang pertama dipenuhi, maka titik setimbangnya disebut stabil dan ketika kondisi yang kedua dipenuhi, maka titik setimbangnya disebut stabil asimtotik [1].

Banyak sistem yang dijumpai dalam praktiknya melibatkan hubungan antara sistem dinamik kontinu dan diskrit atau yang biasa disebut dengan sistem hibrid. Sistem hibrid merupakan bidang penelitian yang relatif baru dan sangat aktif. Sistem tersebut memberikan tantangan teoritis dan praktis yang menarik dan penting dalam banyak masalah di dunia nyata. Karena sifatnya yang bersifat interdisipliner, bidang ini telah menarik perhatian orang-orang dengan beragam latar belakang, terutama ilmu komputer dan matematika terapan. Salah satu bagian dari sistem hibrid adalah *switched systems.*

Switched systems merupakan bagian dari sistem hibrid yang bagian diskritnya sederhana. Oleh karena itu, fokus utama pada *switched systems* adalah pada bagian yang kontinu. Sedangkan, untuk bagian yang diskrit biasanya dibuat lebih umum (memuat model yang sebenarnya) untuk menghindari bagian diskrit yang rumit. Salah satu contoh penyederhanaan bagian diskrit adalah pada perpindahan gigi kendaraan. Pada kenyataannya, gigi kendaraan hanya bisa berpindah dari satu ke dua, dua ke satu, dua ke tiga, dan seterusnya. Ketika proses ini dimodelkan, maka akan menghasilkan suatu model yang rumit. Untuk menyederhanakan model ini, dianggap dari setiap gigi, kita dapat pindah langsung ke gigi yang lain [1].

Permasalahan kestabilan pada *switched systems* dapat diselesaikan dengan fungsi *common* Lyapunov. Beberapa jurnal juga pernah membahas mengenai kestabilan *switched systems* dengan fungsi *common* Lyapunov. Diantaranya Robert N.S dan Kumpati S.N [2] membahas tentang eksistensi fungsi *common* Lyapunov kuadratik untuk *switched linear systems.* Paolo dan Ugo [3] membahas *switched linear systems* pada fungsi *common polynomial* Lyapunov dan masalah stabil asimtotik untuk strategi *arbitrary switching.* Linh Vu dan D. Liberzon [4] mengkonstruksi fungsi *common* Lyapunov lokal dan global pada himpunan berhingga sistem nonlinier yang stabil asimtotik global dan komutatif. Yuan Gong, Long Wang dan Guangming [5] membahas masalah fungsi *delay-dependent common* Lyapunov

(DCLF) pada *switched linear systems* dengan *mode-dependent delays* berdasarkan pendekatan sistem *descriptor* dan Teknik Linear Matrix Inequalities (LMI). Xingwen Liu [6] membahas masalah kestabilan *switched systems* positif waktu diskrit dengan metode Lyapunov. Gu Ze-quan, Liu He-ping, dan Liao Fu-cheng [7] membahas tentang eksistensi fungsi *common* Lyapunov pada *switched descriptor systems* dengan syarat matriks bersifat komutatif.

Analisis terkait kestabilan *switched linear systems* dengan fungsi *common* Lyapunov ini masih sedikit ilmuwan matematika yang melakukan penelitian lebih lanjut. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini dikaji konsep kestabilan *switched linear systems* dengan fungsi *common* Lyapunov dan diimplementasikan untuk menganalisis kestabilan pada model *PWM-Driven Boost Converter*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diberikan pada sub bab sebelumnya, diperoleh beberapa rumusan masalah pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana langkah-langkah untuk menentukan kestabilan eksponensial global pada *switched linear systems* dengan fungsi *common* Lyapunov.
2. Bagaimana mengimplementasikan analisis kestabilan pada PWM-*Driven Boost Converter* dengan fungsi *common* Lyapunov.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. *Switched systems* mempunyai solusi dan solusinya harus tunggal.
2. Tidak mengkaji tentang perilaku zeno (perilaku yang terjadi saat suatu sistem hibrid melakukan perpindahan tak berhingga kali dalam waktu yang berhingga) dan perilaku

chattering (perilaku yang terjadi saat suatu sistem hibrid melakukan perpindahan tak berhingga kali dalam waktu yang tak berhingga).

3. Kejadian perpindahan pada *switched systems* menggunakan *time-dependent switching* (perpindahan berdasarkan waktu).

1.4 Tujuan

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah tersebut, tujuan Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Menyelesaikan permasalahan kestabilan eksponensial global pada *switched linear systems* dengan fungsi *common* Lyapunov.
2. Menganalisis kestabilan pada PWM-*Driven Boost Converter* dengan fungsi *common* Lyapunov.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat dari Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Sebagai bahan acuan pembelajaran kestabilan eksponensial global pada *switched linear systems* dengan fungsi *common* Lyapunov.
2. Sebagai referensi analisis kestabilan pada PWM-*Driven Boost Converter* dengan fungsi *common* Lyapunov.

1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Sistematika penulisan dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. BAB I : PENDAHULUAN
   Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan Tugas Akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan laporan Tugas Akhir.

2. BAB II : TINJAUAN PUSTAKA
   Bab ini menjelaskan tentang penelitian-penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan kestabilan *switched systems* kemudian dijelaskan mengenai sistem dinamik baik

yang linier maupun nonlinier, titik setimbang, kestabilan titik setimbang, fungsi Lyapunov, kestabilan *uniform*, fungsi *common* Lyapunov, *switched systems* dan *Linear Matrix Inequalities* (LMI).

3. BAB III : METODOLOGI
   Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
4. BAB IV : ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Pada bab ini, dijelaskan langkah-langkah untuk memeriksa kestabilan eksponensial global pada *switched linear systems* berdasarkan metode fungsi *common* Lyapunov, kemudian langkah-langkah tersebut diterapkan pada sistem PWM-*Driven Boost Converter* dengan menggunakan software Matlab.
5. BAB V : PENUTUP
   Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas penelitian-penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan kestabilan *switched systems* kemudian akan dijelaskan mengenai sistem dinamik baik yang linier maupun nonlinier, titik setimbang, kestabilan titik setimbang, fungsi *common* Lyapunov, *switched systems*, dan *Linear Matrix Inequalities* (LMI).

2.1 Penelitian Terdahulu

Tidak sedikit ilmuwan matematika yang menganalisis tentang kestabilan sistem baik sistem yang linier maupun nonlinier. Dalam penelitian ini, penulis merujuk pada beberapa penelitian sebelumnya yang sesuai dengan topik Tugas Akhir ini. Penelitian-penelitian yang mendasari dan melatarbelakangi penelitian ini adalah penelitian yang dilakukan oleh Robert N.S dan Kumpati S.N [2] yang menunjukkan bahwa matriks-matriks yang diberikan pada paper tersebut dapat ditransformasikan menjadi matriks segitiga secara simultan oleh suatu matriks transformasi non-singular *T* yang merupakan syarat cukup untuk eksistensi fungsi *common quadratic* Lyapunov pada *switched linear systems*. Kemudian didiskusikan beberapa kondisi yang menjamin eksistensi matriks transformasi tersebut. Selain itu, Paolo dan Ugo [3] membahas *switched linear systems* pada fungsi *common polynomial* Lyapunov dan masalah stabil asimtotik untuk strategi *arbitrary switching* yaitu *Uniformly Asymptotically Stable* (UAS). Pertama, dibuktikan bahwa pada sistem yang UAS selalu dimungkinkan untuk mengkonstruksi fungsi *common polynomial* Lyapunov. Hasil utamanya adalah derajat pada fungsi *common polynomial* Lyapunov tidak terbatas secara seragam terhadap semua sistem yang UAS. Selanjutnya, Linh Vu dan D. Liberzon [4] juga membahas tentang konstruksi fungsi *common* Lyapunov lokal dan global pada himpunan berhingga sistem nonlinear yang stabil asimtotik global dan komutatif.

Konstruksinya berdasarkan prosedur iteratif yang setiap langkahnya menggunakan teorema *converse* Lyapunov untuk salah satu sistemnya. Hasil pada paper ini merupakan perluasan dari penelitian sebelumnya yang mensyaratkan bahwa *vector field* nya stabil eksponensial. Selain itu, Yuan Gong, Long Wang dan Guangming [5] dengan pendekatan sistem *descriptor* dan Teknik Linear Matrix Inequalities (LMI), membahas masalah fungsi *delay-dependent common* Lyapunov (DCLF) pada *switched linear systems* dengan *mode-dependent delays*. Kontribusi utamanya adalah hubungan antara fungsi *delay-dependent common* Lyapunov pada *switched delay systems* dengan fungsi *common* Lyapunov untuk sistem tanpa penundaan. Kemudian Xingwen Liu [6] membahas masalah kestabilan *switched systems* positif waktu diskrit dengan metode baru yaitu fungsi *switched linear copositive* Lyapunov (SLCLF) untuk mengurangi kriteria kestabilan yang diperoleh melalui fungsi *common linear copositive* Lyapunov. Kondisi perlu dan kondisi cukup ditetapkan untuk asumsi adanya *switching* pada fungsi *copositive* Lyapunov. Ia menggunakan contoh numerik untuk menunjukkan keunggulan dari hasil yang diperoleh. Selanjutnya, Gu Ze-quan, Liu He-ping, dan Liao Fu-cheng [7] membahas tentang eksistensi fungsi *common* Lyapunov pada *switched descriptor systems* dengan syarat matriks bersifat komutatif. Pertama dikonstruksi suatu fungsi Lyapunov dan ditunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi *common* Lyapunov untuk dua subsistem. Kemudian akan diperluas ke kasus multi-subsistem dengan menggunakan metode yang sama. Syarat cukup untuk eksistensi fungsi *common* Lyapunov pada *switched linear descriptor systems* dibahas. Hal tersebut memastikan sistem stabil asimtotik berdasarkan strategi *arbitrary switching.*

Berdasarkan penelitian terdahulu, pada penelitian ini ditentukan kestabilan eksponensial global pada *switched linear systems* dengan fungsi *common* Lyapunov beserta implementasinya pada PWM-*Driven Boost Converter*.

2.2 Sistem Dinamik dan Titik Setimbang

Banyak permasalahan nyata yang dapat dimodelkan sebagai suatu sistem dinamik. Salah satu bentuk sistem dinamik yang banyak dipelajari berbentuk persamaan diferensial biasa. Terdapat dua bentuk persamaan diferensial biasa yaitu linier dan nonlinier. Dengan kata lain, sistem dinamik dapat berupa sistem nonlinier dan sistem linier. Bentuk umum sistem yang nonlinier dapat dinyatakan [1]:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

dengan $x \in R^n$. Sedangkan untuk sistem dinamik yang linier dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x} = Ax \tag{2.2}$$

Pada bab ini, dikaji sistem (2.1) yang mempunyai penyelesaian tunggal. Suatu titik $x_e \in R^n$ dikatakan titik setimbang dari suatu sistem dinamik jika memenuhi $\dot{x} = 0$ (untuk sistem linier berlaku $Ax_e = 0$, sedangkan untuk sistem nonlinier berlaku $f(x_e) = 0$). Pada bab ini, diasumsikan titik asal $x = 0$ merupakan salah satu titik setimbang dan titik setimbang yang terisolasi.

2.3 Kestabilan Titik Setimbang

Sistem dinamik yang dibahas pada bab ini bersifat invarian waktu. Oleh sebab itu, dimisalkan pada persamaan (2.1) dan (2.2) memiliki waktu awal $t_0 = 0$. Kestabilan titik setimbang dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1 **[1]**

Titik asal $x = 0$ *disebut sebagai titik setimbang yang stabil jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian hingga* $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \geq 0$.

Definisi 2.3.1 menyatakan bahwa suatu titik setimbang dikatakan stabil jika trayektori (penyelesaian) dari sistem bisa dibuat

sedekat mungkin dengan titik setimbang dengan cara memilih keadaan awal yang sesuai.

Definisi 2.3.2 **[1]**

Titik asal $x = 0$ adalah titik setimbang yang stabil asimtotik jika titik setimbang tersebut stabil dan terdapat suatu δ yang memenuhi kondisi: $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow x(t) \longrightarrow 0$ pada saat $t \longrightarrow \infty$.

Definisi 2.3.2 menyatakan bahwa suatu titik setimbang dikatakan stabil asimtotik jika titik setimbang tersebut stabil dan jika keadaan awalnya cukup dekat dengan titik setimbang, maka penyelesaian sistem akan konvergen ke titik setimbang. Himpunan dari semua keadaan awal yang lintasannya (atau penyelesaian sistemnya) konvergen ke titik setimbang disebut *region of attraction.* Jika kondisi pada Definisi 2.3.2 berlaku untuk semua δ (yaitu jika titik asal adalah titik setimbang yang stabil dan *region of attraction*nya adalah keseluruhan *state space*), maka titik setimbang tersebut dinamakan stabil asimtotik global.

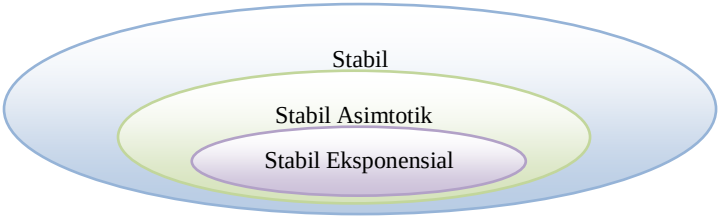
Definisi 2.3.3 **[1]**

Titik asal $x = 0$ dinamakan stabil eksponensial jika terdapat konstanta positif δ, c dan λ sedemikian hingga penyelesaian dengan keadaan awal $\|x(0)\| < \delta$ memenuhi persamaan:

$$\|x(t)\| \leq c\|x(0)\|e^{-\lambda t}, \qquad \forall t \geq 0 \tag{2.3}$$

Definisi 2.3.3 menyatakan bahwa suatu titik setimbang dikatakan stabil eksponensial jika titik setimbang tersebut stabil dan jika keadaan awalnya cukup dekat dengan titik setimbang, maka penyelesaian sistem akan konvergen ke titik setimbang dengan laju eksponensial. Jika penurunan secara eksponensial ini berlaku untuk semua δ, maka titik setimbang tersebut dinamakan stabil eksponensial global. Konstanta λ pada persamaan (2.3) disebut sebagai batas kestabilan.

Hubungan antara titik setimbang yang stabil, stabil asimtotik dan stabil eksponensial dinyatakan dalam Gambar 2.3.1. Setiap titik setimbang yang stabil asimtotik pasti bersifat stabil. Setiap titik setimbang yang stabil eksponensial pasti bersifat stabil asimtotik.



Gambar 2.1 Hubungan Kestabilan Titik Setimbang

Teorema berikut memberikan syarat kestabilan dari persamaan diferensial linier (2.2), dimana matriks A mempunyai peranan penting, khususnya bagian riil dari nilai karakteristik (nilai eigen) λ dari matriks A yang dinotasikan $Re(\lambda)$.

Teorema 2.3.1 **[8]**

Diberikan persamaan diferensial linier (2.2), dimana matriks A berukuran $n \times n$ dan mempunyai nilai karakteristik yang berbeda $\lambda_1, \dots, \lambda_k (k \leq n)$.

1. Titik asal $x = 0$ adalah stabil asimtotik bila dan hanya bila semua nilai karakteristik mempunyai bagian real yang negatif, yaitu $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$.
2. Titik asal $x = 0$ adalah stabil bila dan hanya bila $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$ dan untuk semua λ_i dengan $Re(\lambda_i) = 0$ multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometrinya.
3. Titik asal $x = 0$ adalah tidak stabil bila dan hanya bila $Re(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, \dots, k$ atau ada λ_i dengan $Re(\lambda_i) = 0$ dan multiplisitas aljabar lebih besar dari multiplisitas geometrinya.

Pada sistem yang linier, stabil asimtotik, stabil eksponensial, stabil asimtotik global dan stabil eksponensial global adalah ekivalen.

2.4 Fungsi Lyapunov

Fungsi Lyapunov [1] termasuk dalam kelas C^1 (himpunan semua fungsi yang turunan pertamanya adalah fungsi kontinu) dan fungsi tersebut memetakan setiap *state* ke suatu bilangan real, yaitu $V : R^n \to R$. Suatu fungsi V dinamakan definit positif jika $V(0) = 0$ dan $V(x) > 0$ untuk setiap $x \neq 0$. Jika $V(x) \to \infty$ saat $\|x\| \to \infty$, maka V dinamakan *radially unbounded.* Turunan dari V terhadap waktu sepanjang penyelesaian dari sistem (2.1) adalah:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

Fungsi Lyapunov dapat digunakan untuk menentukan jenis kestabilan suatu titik setimbang. Jenis kestabilan suatu titik setimbang ditentukan berdasarkan nilai dari $\dot{V}$ pada Teorema berikut:

Teorema 2.4.1

(Lyapunov) [9] Jika terdapat fungsi definit positif di C^1 yaitu $V : R^n \to R$ yang turunannya sepanjang solusi dari sistem (2.1) memenuhi:

$$\dot{V} \leq 0 \qquad \forall x,$$

maka sistem (2.1) adalah stabil. Jika turunan dari V memenuhi:

$$\dot{V} < 0 \qquad \forall x \neq 0, \tag{2.4}$$

maka sistem (2.1) adalah stabil asimtotik. Jika turunan dari V memenuhi:

$$\dot{V} \leq -\alpha V \qquad \forall x \text{ dan } \alpha > 0. \tag{2.5}$$

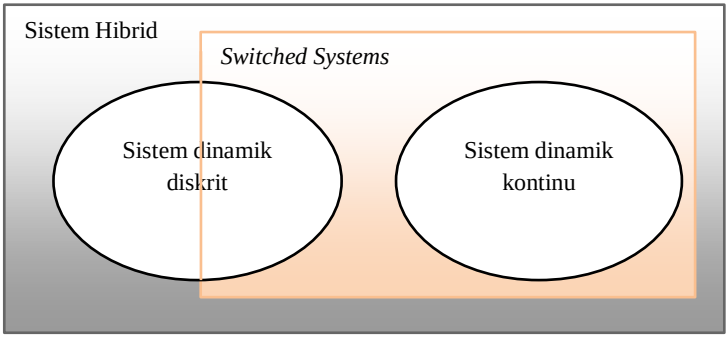
maka sistem (2.1) adalah stabil eksponensial.

Jika pada persamaan (2.4) dan (2.5) V juga bersifat *radially unbounded*, maka sistem (2.1) berturut-turut adalah stabil asimtotik global dan stabil eksponensial global.

Sampai saat ini, masih belum ada suatu metode untuk mengkonstruksi suatu fungsi Lyapunov untuk sebarang sistem nonlinier. Ketika sistemnya linier, maka fungsi Lyapunov mempunyai bentuk kuadratik $V = x^T Px$, dengan P merupakan suatu matriks simetri yang definit positif. Agar $\dot{V} = -x^T Qx < 0$ untuk semua $x \neq 0$ (atau matriks Q adalah matriks simetri yang definit positif), maka matriks P diperoleh dengan menyelesaikan persamaan Lyapunov $A^T P + PA = -Q$, dengan Q sebarang matriks simetri yang definit positif. Salah satu alternatif untuk Q adalah matriks identitas dengan ukuran sama dengan matriks A.

2.5 *Switched Systems*

Switched systems merupakan salah satu bagian dari sistem hibrid dan sistem hibrid merupakan kombinasi dari sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskrit terdiri dari dua bagian, yaitu bagian yang sederhana dan kompleks. Pada *switched systems*, sistem dinamik yang diskrit termasuk bagian yang sederhana. Oleh karena itu, fokus utama pada *switched systems* adalah pada bagian yang kontinu (Gambar 2.2).



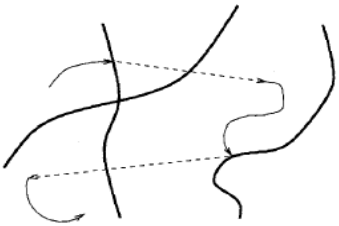
Gambar 2.2 *Switched Systems*

Switched systems merupakan sistem waktu kontinu dengan kejadian perpindahan yang diskrit (*discrete switching events*). Kejadian perpindahan pada *switched systems* dibedakan menjadi dua macam, yaitu *state-dependent switching* (perpindahan berdasarkan *state*) dan *time-dependent switching* (perpindahan berdasarkan waktu).

2.5.1 *State-dependent Switching*

State-dependent switching adalah sebuah sistem yang kejadian perpindahannya bergantung pada *state*. Pada kasus ini, *state space* yang kontinu dipartisi menjadi sejumlah daerah dengan menggunakan permukaan *switching* atau *guards.* Pada masing-masing daerah ini, sistem dinamik dengan waktu kontinu (dideskripsikan oleh persamaan diferensial, dengan atau tanpa kontrol) diberikan. Setiap kali trayektori sistem menyentuh permukaan *switching*, maka *state*-nya melompat secara langsung ke nilai baru yang ditentukan oleh *reset map*. Singkatnya, sistem ditentukan oleh :

1. Sekumpulan permukaan *switching* dan beberapa daerah yang dihasilkan
2. Untuk setiap daerah, terdapat subsistem dengan waktu kontinu
3. *Reset map*



Gambar 2.3 *State-dependent Switching* [1]

Pada Gambar 2.3, garis yang tebal menunjukkan permukaan *switching*, tanda panah menunjukkan bagian kontinu dari lintasan, dan garis putus-putus menunjukkan lompatan pada *switched systems* berdasarkan reset map.

2.5.2 *Time-dependent Switching*

Time-dependent switching adalah sebuah sistem yang kejadian perpindahannya bergantung pada waktu. Misal diberikan $f_p, p \in \mathcal{P}$ fungsi dari R^n ke R^n, dimana $\mathcal{P}$ adalah banyaknya subsistem. Sehingga, secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

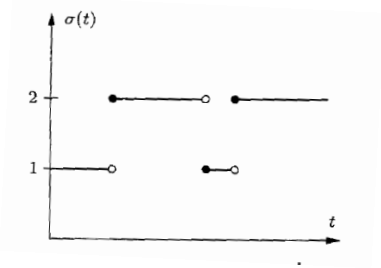
$$\dot{x} = f_p(x), p \in \mathcal{P} \tag{2.6}$$

dengan R^n sebagai *state space*. Ketika sistemnya linier, maka fungsi f_p merupakan suatu pemetaan linier yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_p(x) = A_p x, A_p \in R^{n \times n}, p \in \mathcal{P} \tag{2.7}$$

dan jumlah anggota dari $\mathcal{P}$ adalah berhingga, $\mathcal{P} = \{1,2, \dots, m\}$.

Pendefinisian *switched systems* dibutuhkan notasi dari sinyal perpindahan (*switching signal*) dengan fungsi sepotong-sepotong yang konstan, yaitu $\sigma: [0, \infty) \to \mathcal{P}$. Sedemikian hingga, fungsi σ memiliki titik diskontinu yang banyaknya berhingga atau disebut dengan waktu perpindahan (*switching times*) dan bernilai konstan pada setiap interval antara dua waktu perpindahan (*switching times*) yang berurutan. Kegunaan dari fungsi σ adalah untuk menentukan pada setiap waktu t, indeks $\sigma(t) \in \mathcal{P}$ yang menyatakan subsistem yang aktif pada persamaan (2.6). Contoh dari *switching signal* untuk kasus $\mathcal{P} = \{1,2\}$ digambarkan [1]:



Gambar 2.4 *Time-dependent Switching*

sehingga, *switched systems* pada *time-dependent switching* dapat dituliskan dengan persamaan:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}\big(x(t)\big)$$

dan untuk *switched linear systems*, persamaannya menjadi:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t).$$

Argumen waktu pada persamaan diatas dapat dihilangkan untuk menyederhanakan notasi, sehingga *switched systems* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f_{\sigma}x \tag{2.8}$$

untuk sistem yang nonlinier dan

$$\dot{x} = A_{\sigma}x \tag{2.9}$$

untuk sistem yang linier.

2.6 Konsep Kestabilan *Uniform*

Dari sistem (2.6) yang diberikan, akan dikaji kondisi yang harus dipenuhi agar *switched systems* (2.8) stabil asimtotik untuk setiap *switching signal* σ. Diasumsikan bahwa setiap subsistem memiliki titik asal sebagai titik setimbang: $f_p(0) = 0$ untuk setiap $p \in \mathcal{P}$. Jelas, syarat yang diperlukan untuk kestabilan asimtotik berdasarkan *arbitrary switching* [1] adalah semua subsistem harus stabil asimtotik. Jika sistem ke-p tidak stabil untuk beberapa $p \in \mathcal{P}$, maka *switched systems* tidak stabil saat $\sigma(t) \equiv p$. Oleh karena itu, akan diasumsikan bahwa semua subsistem stabil asimtotik. Ketika semua subsistem bersifat stabil asimtotik, belum tentu *switched system* dengan *arbitrary switching* bersifat stabil asimtotik. Oleh karena itu, perlu menentukan syarat tambahan pada sistem (2.6) agar *switched system* dengan *arbitrary switching* bersifat stabil asimtotik.

Definisi 2.6.1

Titik asal $x = 0$ *adalah titik setimbang yang stabil asimtotik uniform jika titik setimbang tersebut stabil dan untuk setiap switching signal* σ *terdapat suatu* δ *yang memenuhi kondisi berikut :*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow x(t) \longrightarrow 0 \text{ pada saat } t \longrightarrow \infty \qquad (2.10)$$

Definisi 2.6.2

Titik asal $x = 0$ *dinamakan stabil eksponensial uniform jika terdapat konstanta positif* δ, c *dan* λ *sedemikian hingga untuk setiap switching signal* σ *penyelesaian dengan keadaan awal* $\|x(0)\| < \delta$ *memenuhi persamaan:*

$$\|x(t)\| \leq c\|x(0)\|e^{-\lambda t}, \forall t \geq 0 \qquad (2.11)$$

Jika persamaan (2.10) dan (2.11) berlaku untuk semua *switching signal* σ dan semua kondisi awal dari sistem, maka sistem (2.8) berturut-turut disebut *Globally Uniformly Asymptotically Stable* (GUAS) dan *Globally Uniformly Exponentially Stable* (GUES).

2.7 Fungsi *Common* Lyapunov

Berdasarkan Teorema kestabilan Lyapunov (Teorema 2.4.1) dapat dikembangkan untuk mempelajari kestabilan uniform dari *switched systems* (2.8). Pengembangan ini diperoleh dengan mendapatkan suatu fungsi Lyapunov tunggal yang turunannya sepanjang solusi dari sistem di persamaan (2.6) memenuhi pertidaksamaan yang sesuai. Kemudian akan diperoleh kondisi untuk fungsi Lyapunov agar titik setimbang bersifat *Globally Uniformly Exponentially Stable* (GUES).

Diberikan suatu fungsi yang definit positif dan turunan pertamanya adalah fungsi kontinu (kelas C^1) $V: R^n \rightarrow R$. Fungsi tersebut dikatakan fungsi *common* Lyapunov [1] jika terdapat suatu fungsi definit positif yang kontinu pada sistem (2.4), dinotasikan $W: R^n \rightarrow R$ sedemikian hingga:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_p(x) \leq -W(x) \qquad \forall x, \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Jika fungsi *common* Lyapunov berhasil dibentuk untuk suatu titik setimbang maka titik setimbang tersebut bersifat *Uniformly Exponentially Stable* (UES). Ketika fungsi *common* Lyapunov bersifat *radially unbounded*, maka *switched systems* adalah *Globally Uniformly Exponentially Stable* (GUES).

2.8 *Linear Matrix Inequalities*

Linear Matrix Inequalities (LMI) [10] merupakan suatu permasalahan yang berhubungan dengan pertidaksamaan matriks. Pertidaksamaan matriks menyatakan bahwa matriks tersebut adalah definit positif, semi definit positif, definit negatif atau semi definit negatif. Berikut merupakan definisi dari matriks definit positif, semi definit positif, definit negatif dan semi definit negatif:

Definisi 2.8.1
Suatu matriks A dikatakan definit positif yang dinotasikan $A > 0$ *jika memenuhi* $x^T Ax > 0, \forall x \neq 0, x \epsilon R^n$.

Definisi 2.8.2
Suatu matriks A dikatakan semi definit positif yang dinotasikan $A \geq 0$ *jika memenuhi* $x^T Ax \geq 0, \forall x \neq 0, x \epsilon R^n$.

Definisi 2.8.3
Suatu matriks A dikatakan definit negatif yang dinotasikan $A < 0$ *jika memenuhi* $x^T Ax < 0, \forall x \neq 0, x \epsilon R^n$.

Definisi 2.8.4
Suatu matriks A dikatakan semi definit negatif yang dinotasikan $A \leq 0$ *jika memenuhi* $x^T Ax \leq 0, \forall x \neq 0, x \epsilon R^n$.

Permasalahan yang diselesaikan dalam LMI adalah menentukan nilai dari beberapa variabel, sedemikian hingga suatu matriks yang elemen-elemennya memuat variabel tersebut menjadi definit positif atau definit negatif. Berikut merupakan definisi formal dari *Linear Matrix Inequalities* (LMI):

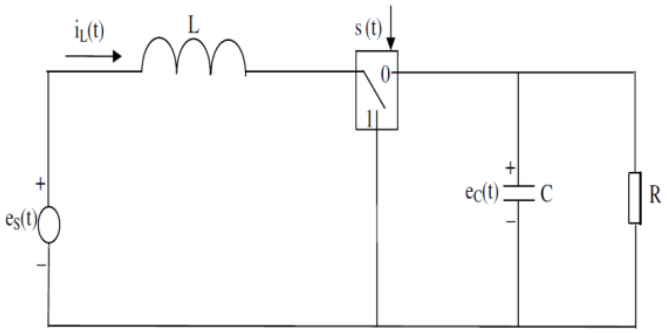
Definisi 2.8.5
Linear Matrix Inequalities (LMI) memiliki bentuk:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0$$

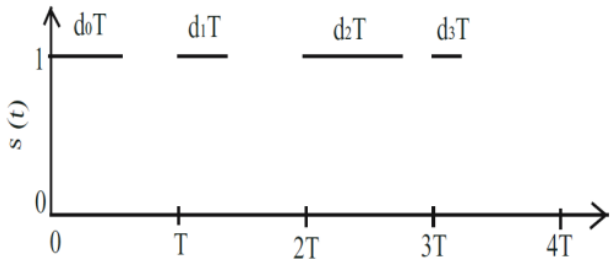
dimana $x \in R^m$ adalah variabel dan $F_i \in R^{nxn}$ adalah matriks simetri.

2.9 PWM-*Driven Boost Converter*

Pulse Width Modulation (PWM) merupakan suatu teknik modulasi yang mengubah lebar pulsa (*pulse width*) dengan nilai frekuensi dan amplitudo yang tetap. PWM digunakan untuk menghasilkan sinyal analog dari perangkat digital [11].



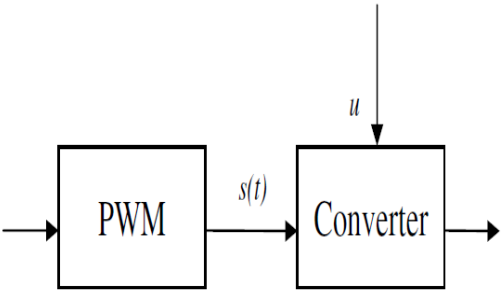
Gambar 2.5 *Boost Converter*



Gambar 2.6 *Pulse Width Modulation* (PWM)

Diilustrasikan pemodelan *boost converter* yang digerakkan oleh PWM seperti pada gambar diatas. Pada skema Gambar 2.5, L adalah induktor, C adalah kapasitor, R adalah muatan resistor dan $e_s(t)$ adalah sumber tegangan. Konverter tersebut memungkinkan untuk mengubah sumber tegangan $e_s(t)$ menjadi tegangan yang lebih tinggi $e_C(t)$ diatas muatan resistor (R).

Switch $s(t)$ dikontrol oleh perangkat PWM. Diasumsikan *switch* memiliki dua *state*, yaitu 0 dan 1 yang dapat dinotasikan menjadi $s(t) \in \{0,1\}$. Dengan kata lain, $s(t)$ dapat berpindah paling banyak satu kali dalam setiap periode. Pada Gambar 2.6 dinotasikan T sebagai periode dan $d_0, \dots, d_3$ adalah *pulse width* relatif, dimana $d_i \in [0,1]$.



Gambar 2.7 PWM-*Driven Boost Converter*

Keterangan :

$\dot{e}_C$ dan $\dot{i}_L$	: Variabel *state*
e_s	: Variabel *input*
R, C_1, L_1	: Parameter (tidak bergantung waktu)
s	: Parameter (bergantung waktu)

Variabel yang dinormalisasi yaitu $\tau = \frac{t}{T}, L_1 = \frac{L}{T}$, dan $C_1 = \frac{C}{T}$, sedangkan persaman diferensial untuk *boost converter* adalah sebagai berikut [11]:

$$\dot{e}_C(\tau) = -\frac{1}{RC_1} e_C(\tau) + \big(1 - s(\tau)\big)\frac{1}{C_1} i_L(\tau)$$

$$\dot{i}_L(\tau) = -\big(1 - s(\tau)\big)\frac{1}{L_1} e_C(\tau) + s(\tau)\frac{1}{L_1} e_S(\tau). \qquad (2.12)$$

dengan $s(\tau) \in \{0,1\}$ dan pemisalan $x_1 = e_C, x_2 = i_L, u = e_s$, $\sigma = s + 1$.

Apabila sistem yang aktif adalah subsistem 1 maka pada persamaan (2.12) disubstitusi $s(\tau) = 0$. Diperoleh bentuk matriks dari subsistem 1 adalah:

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, apabila sistem yang aktif adalah subsistem 2 maka pada persamaan (2.12) disubstitusi $s(\tau) = 1$. Sehingga, diperoleh bentuk matriks dari subsistem 2 adalah:

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}.$$

Sehingga, persamaan (2.12) dapat dinyatakan sebagai:

$$\dot{x} = \bar{A}_\sigma x + B_\sigma u \qquad \sigma \in \{1,2\}.$$

yang berbentuk *switched linear systems* dengan $\sigma(t)$ menyatakan subsistem yang aktif pada waktu t.

Pada model PWM-*Driven Boost Converter*, bagian diskritnya adalah sistem yang aktif, sedangkan untuk bagian yang kontinu adalah penyelesaian dari persamaan diferensial.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah dalam Tugas Akhir. Di samping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Tahap Penelitian

Untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. **Studi Literatur**

   Pada tahap ini akan dicari referensi umum yang berkaitan dengan topik tugas akhir. Referensi-referensi diperoleh melalui jurnal dan buku teks yang terkait kestabilan *switched linear system*s dengan fungsi *common* Lyapunov.

2. **Kontruksi fungsi *common* Lyapunov kuadratik**

   Metode yang dipelajari pada tahap sebelumnya menunjukkan bahwa fungsi *common* Lyapunov kuadratik dapat digunakan untuk menunjukkan kestabilan *switched linear systems*. Oleh karena itu, akan dikontruksi fungsi *common* Lyapunov kuadratik untuk suatu *switched linear systems*. Fungsi *common* Lyapunov kuadratik diperoleh dengan menyelesaikan suatu permasalahan LMI.

3. **Menganalisis kestabilan pada model PWM-*Driven Boost Converter***

   Pada tahap ini akan dilakukan analisis kestabilan dari model PWM-*Driven Boost Converter* dengan mengkontruksi suatu fungsi *common* Lyapunov kuadratik.

4. **Simulasi model PWM-*Driven Boost Converter***

   Selanjutnya akan dilakukan simulasi pada Matlab untuk mengetahui perilaku PWM-*Driven Boost Converter* untuk beberapa keadaan awal dan sinyal perpindahan yang berbeda-beda.

5. Penarikan kesimpulan

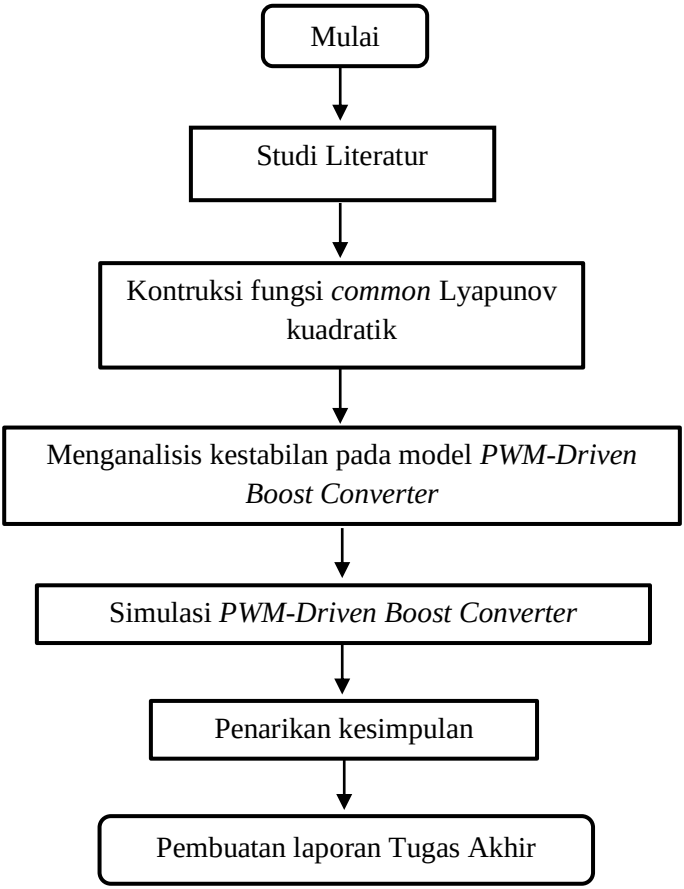
Pada tahap ini akan ditarik kesimpulan dari penelitian yang dilakukan sebelumnya untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

6. Penyusunan Laporan Tugas Akhir

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penyusunan laporan tugas akhir.

3.2 Diagram Alir

Secara umum tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini ditampilkan dalam diagram alir penelitian pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram Alir

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan tentang analisis kestabilan *switched linear systems* menggunakan fungsi *common* Lyapunov kuadratik yang akan diterapkan pada PWM-*Driven Boost Converter*. Kemudian dilakukan simulasi PWM-*Driven Boost Converter* menggunakan software Matlab.

4.1 Kestabilan *Switched Linear Sytems*

Pada subbab ini, dibahas kestabilan *switched linear systems*, yaitu *switched systems* yang semua subsistemnya linier untuk sinyal *switching* yang tidak dibatasi (*arbitrary switching*). Diasumsikan bahwa setiap subsistem memiliki titik asal sebagai titik setimbang, yaitu $f_p(0) = 0$ untuk setiap $p \in \mathcal{P}$. Syarat yang diperlukan agar suatu *switched linear systems* stabil (asimtotik) berdasarkan *arbitrary switching* adalah semua subsistem stabil (secara asimtotik). Jika subsistem ke-p tidak stabil untuk beberapa $p \in \mathcal{P}$, maka *switched systems* tidak stabil pada saat subsistem yang aktif selalu subsistem yang ke-p, yaitu $\sigma(t) \equiv p$. Oleh karena itu, diasumsikan bahwa semua subsistem stabil asimtotik. Akan tetapi ketika semua subsistem stabil asimtotik, belum ada jaminan bahwa *switched systems* bersifat stabil asimtotik. Oleh sebab itu, perlu ditentukan syarat tambahan pada sistem (2.9) agar *switched systems* bersifat stabil asimtotik.

Untuk membuktikan bahwa suatu *switched system* bersifat GUES, maka salah satu caranya adalah mengkonstruksi fungsi *common* Lyapunov yang telah dibahas dan didefinisikan pada subbab 2.7. Ketika sistemnya berupa *switched linear systems*, maka kondisi dari $\dot{V}_p \leq -W$ dapat diganti dengan kondisi $\dot{V}_p < 0$ untuk semua $p \in \mathcal{P}$, dengan $V(x) = x^T P x$ adalah fungsi *common* Lyapunov kuadratik. Agar fungsi *common* Lyapunov bersifat definit positif, maka matriks P haruslah definit positif, yang dinotasikan $P > 0$. Dapat diketahui bahwa $\dot{V}_p$ menyatakan turunan dari fungsi *common* Lyapunov terhadap waktu, jika

subsistem yang aktif adalah subsistem yang ke-p. Sistem dinamik pada subsistem yang ke-p dinotasikan $\dot{x} = A_p x$, untuk $p \in \mathcal{P}$. Selanjutnya, diturunkan bentuk dari $\dot{V}_p$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{V}_p = \frac{d}{dt}V_p = \frac{d}{dt}(x^T P x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= \left(A_p x\right)^T P x + x^T P\left(A_p x\right) \\ &= x^T A_p^T P x + x^T P A_p x \\ &= x^T\left(A_p^{\mathrm{T}} P + P A_p\right)x.\end{aligned}$$

Dari penurunan di atas, diperoleh $\dot{V}_p = x^T\left(A_p^{\mathrm{T}} P + P A_p\right)x$. Sehingga kondisi $\dot{V}_p < 0$ dapat dituliskan $x^T\left(A_p^{\mathrm{T}} P + P A_p\right)x < 0$ untuk semua $x \neq 0$. Kondisi tersebut ekivalen dengan bentuk $A_p^{\mathrm{T}} P + P A_p < 0$, yaitu matriks $A_p^{\mathrm{T}} P + P A_p$ definit negatif. Dari pembahasan sebelumnya, untuk mendapatkan matriks P, maka persamaan yang harus diselesaikan:

$$P > 0$$

$$A_p^T P + P A_p < 0, \qquad \forall p \in \mathcal{P}. \tag{4.1}$$

Terlihat bahwa persamaan (4.1) merupakan sistem dari *Linear Matrix Inequalities* (LMI) dalam variabel *P* dan terdapat metode yang efisien untuk menyelesaikan sistem tersebut secara numerik.

Berdasarkan pembahasan diatas, untuk menunjukkan bahwa suatu *switched linear systems* bersifat GUES dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan titik setimbang dari setiap subsistem dengan menyelesaikan persamaan $A_p x = 0$. Diasumsikan pada setiap subsistem, titik $x = 0$ merupakan salah satu titik setimbang.
2. Menentukan kestabilan dari setiap subsistem dengan memeriksa nilai eigennya. Jika semua subsistem bersifat stabil asimtotik, maka menuju ke langkah berikutnya. Jika

ada salah satu subsistem yang tidak stabil asimtotik, maka bisa dipastikan *switched linear system* tidak bersifat GUES.

3. Menyelesaikan LMI pada persamaan (4.1). Jika LMI tersebut mempunyai penyelesaian, maka *switched linear systems* bersifat GUES. Jika LMI tersebut tidak mempunyai penyelesaian, maka *switched linear systems* tidak bersifat GUES.

4.2 Implementasi Analisis Kestabilan PWM-*Driven Boost Converter*

Pada subbab ini dilakukan analisis kestabilan pada model PWM-*Driven Boost Converter* (2.12), namun model tersebut mengandung variabel input u yang disebut sistem *nonautonomous*. Pada tugas akhir ini, sistem yang akan dibahas adalah sistem yang tidak mengandung input atau disebut sistem *autonomous*. Sehingga pada persamaan 2.12 agar sistem *closed loop*nya stabil asimtotik, maka disubstitusi $u = -x_2$ ke (2.12) sebagai berikut:

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [-x_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} [-x_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan diatas, model PWM-*Driven Boost Converter* (2.12) menjadi:

$$\dot{x} = \bar{A}_\sigma x \qquad \sigma \in \{1,2\} \tag{4.2}$$

sehingga dapat ditulis:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Misal diberikan nilai dari masing-masing parameter $R = 10$, $L_1 = 1{,}25$ dan $C_1 = 0{,}5$ maka diperoleh nilai:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 2 \\ -0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dilakukan analisis kestabilan sistem yang dinyatakan pada persamaan (4.2) dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1: Menentukan titik setimbang dari dua subsistem yang diperoleh yaitu:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 2 \\ -0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}8 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan subbab 2.2, untuk mendapatkan titik setimbang kita perlu memenuhi $\dot{x} = 0$.

- Ditinjau subsistem pertama $A_1 = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 2 \\ -0{,}8 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -0{,}2 & 2 \\ -0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad -0{,}2x_1 + 2x_2 = 0 \ldots (1)$$

$$-0{,}8x_1 = 0$$
$$x_1 = 0 \ldots (2)$$

Substitusi persamaan (2) ke persamaan (1):

$$-0{,}2(0) + 2x_2 = 0$$
$$0 + 2x_2 = 0$$
$$x_2 = 0.$$

Sehingga, diperoleh $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Ditinjau subsistem kedua $A_2 = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad -0{,}2x_1 = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$-0{,}8x_2 = 0$$
$$x_2 = 0$$

Hal diatas juga dapat ditinjau berdasarkan persamaan (4.2). Pada sistem linier titik asal merupakan salah satu titik setimbang. Karena titik setimbang pada model PWM harus memenuhi $\dot{x} = 0$ maka kondisi yang harus dipenuhi adalah $A_\sigma x = 0$ yang salah satu penyelesaiannya adalah $x = 0$.

Kesimpulannya, titik asal $(0{,}0)$ merupakan titik setimbang dari subsistem 1 dan subsistem 2. Jadi, sistem tersebut memenuhi persyaratan pada Langkah 1.

Langkah 2: Menentukan kestabilan dari setiap subsistem dengan memeriksa nilai eigennya.

- Tinjau subsistem 1:

$$[A_1 - \lambda I] = \begin{bmatrix} -0{,}2 - \lambda & 2 \\ -0{,}8 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} - \lambda & 2 \\ -\frac{4}{5} & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Mendapatkan nilai eigen dengan mencari penyelesaian dari determinan $|A_1 - \lambda I| = 0$.

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} - \lambda & 2 \\ -\frac{4}{5} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda\left(-\frac{1}{5} - \lambda\right) - \left(-\frac{8}{5}\right) = 0$$

$$-\lambda\left(-\frac{1}{5} - \lambda\right) + \frac{8}{5} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{5}\lambda + \frac{8}{5} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{1}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 4.1.\frac{8}{5}}}{2.1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-159}}{2.5}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-159}}{10}$$

Sehingga, nilai $\lambda_1 = -0{,}1 + 1{,}261i$ dan $\lambda_2 = -0{,}1 - 1{,}261i$.

- Tinjau subsistem 2:

$$[A_2 - \lambda I] = \begin{bmatrix} -0{,}2 - \lambda & 0 \\ 0 & -0{,}8 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} - \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Mendapatkan nilai eigen dengan mencari penyelesaian dari determinan $|A_2 - \lambda I| = 0$.

$$\det (A_2 - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} - \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{5} - \lambda\right)\left(-\frac{4}{5} - \lambda\right) = 0$$

Sehingga, nilai $\lambda_1 = -0{,}2$ dan $\lambda_2 = -0{,}8$.

Karena semua bagian real dari nilai eigen bernilai negatif untuk semua subsistem maka subsistem 1 dan 2 bersifat stabil asimtotik (Langkah 2 terpenuhi). Selanjutnya, akan dilakukan Langkah 3.

Langkah 3: Menyelesaikan persamaan LMI pada persamaan (4.1) yang dibentuk oleh setiap subsistem. Persamaan yang harus diselesaikan adalah:

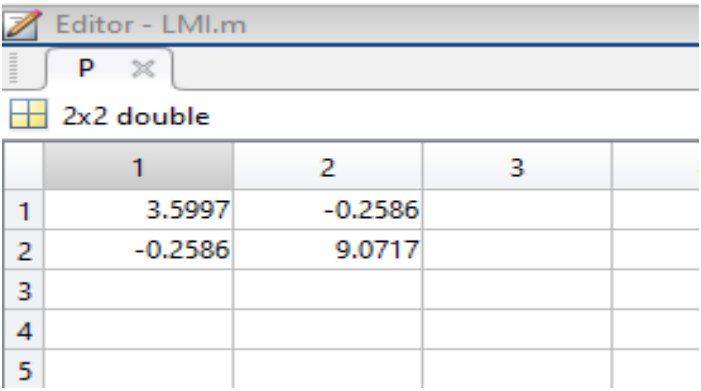
$$P > 0 \tag{4.3}$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}2 & -0{,}8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} -0{,}2 & 2 \\ -0{,}8 & 0 \end{bmatrix} < 0 \tag{4.4}$$

$$\begin{bmatrix} -0,2 & 0 \\ 0 & -0,8 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} -0,2 & 0 \\ 0 & -0,8 \end{bmatrix} < 0 \qquad (4.5)$$

Persamaan (4.4) dibentuk dari subsistem 1 dan persamaan (4.5) dibentuk dari subsistem 2. Penyelesaian dari LMI diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (4.3) – (4.5) secara bersamaan dengan program Matlab. Diperoleh penyelesaian sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 3,5997 & -0,2586 \\ -0,2586 & 9,0717 \end{bmatrix}.$$



	1	2	3
1	3.5997	-0.2586	
2	-0.2586	9.0717	
3			
4			
5			

Gambar 4.1 Nilai matriks *P*

Dari hasil Matlab tersebut, terlihat bahwa matriks P memiliki penyelesaian dan penyelesaiannya berbentuk matriks simetri. Kemudian akan dibuktikan bahwa matriks P definit positif $(P > 0)$ dengan mencari determinan berikut:

$$D_1 = |3,5997| = 3,5997 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3,5997 & -0,2586 \\ -0,2586 & 9,0717 \end{vmatrix} = 32,6553 - 0,0668$$

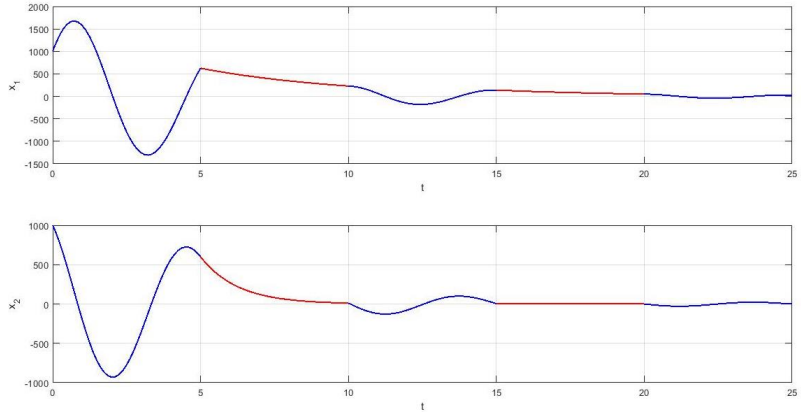
$$= 32,5885 > 0$$

Karena semua determinan bernilai positif maka matriks *P* definit positif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa fungsi *common* Lyapunov kuadratik yang diperoleh yaitu $V(x) = x^T Px$. Hal ini menunjukkan bahwa model PWM-*Driven Boost Converter* bersifat GUES.

Selanjutnya untuk menunjukkan performansi bahwa model PWM-*Driven Boost Converter* bersifat GUES, perlu dilakukan analisis solusi model yang dapat ditunjukkan melalui simulasi grafik solusi. Pada model PWM-*Driven Boost Converter* tersebut tidak diketahui konstanta untuk keadaan awal, waktu perpindahan (*switching time*), dan sistem yang pertama kali aktif $\{1,2\}$. Untuk itu pada simulasi ini dilakukan dengan inputan keadaan awal (dalam vektor kolom) sebesar $[1000,1000]$. Tujuannya adalah untuk mengetahui apakah *state* akan menuju ke titik asal $(x = 0)$ apabila waktu perpindahannya (*switching time*) berubah-ubah. Berdasarkan waktu perpindahan (*switching time*), pada tugas akhir ini akan dibagi menjadi 2 kasus. Kasus 1 pada saat sistem yang pertama kali aktif adalah subsistem 1 dan kasus 2 saat sistem yang pertama kali aktif adalah subsistem 2.

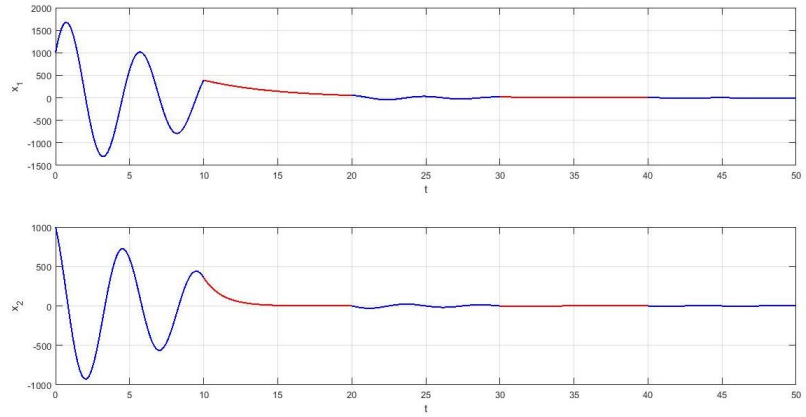
- Kasus 1

Pada kasus ini dilakukan simulasi saat sistem yang pertama kali aktif adalah subsistem 1. Simulasi pertama diambil pada saat waktu perpindahannya (*switching time*) setiap 5 detik, sehingga dihasilkan grafik sebagai berikut:



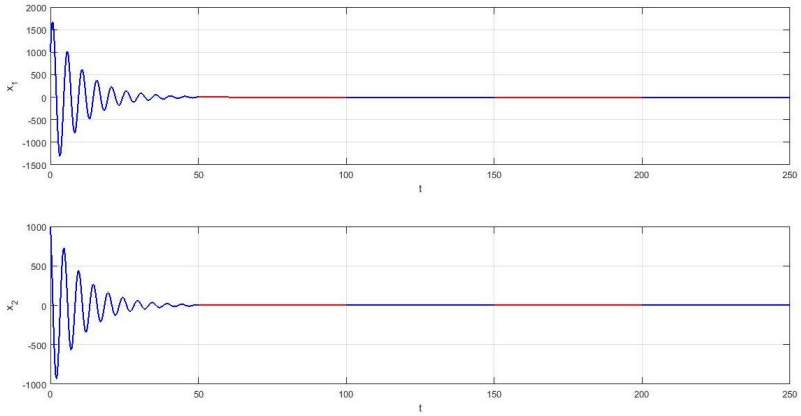
Gambar 4.2 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 1 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 5 detik.

Simulasi selanjutnya diambil pada saat waktu perpindahannya setiap 10 detik dan diperoleh:



Gambar 4.3 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 1 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 10 detik.

Pada simulasi yang terakhir pada kasus satu diambil pada saat waktu perpindahannya setiap 50 detik, diperoleh hasil:

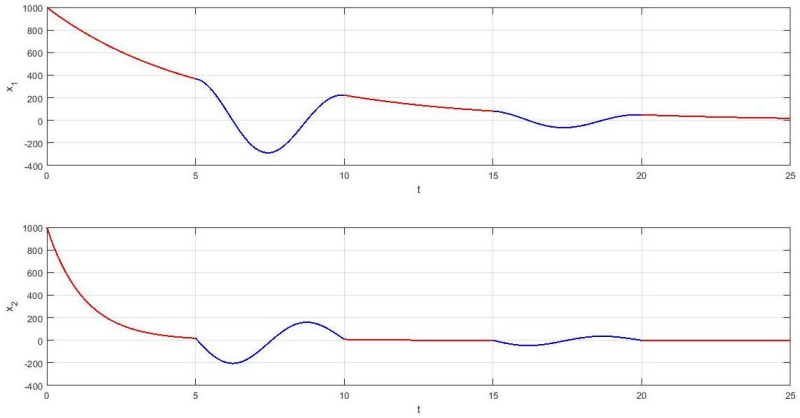


Gambar 4.4 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 1 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 50 detik.

Pada kasus 1 Gambar 4.2 sampai dengan Gambar 4.4 merupakan hasil simulasi untuk sinyal perpindahan (*switching time*) yang berpindah setiap 5-50 detik dengan lama simulasi 25-250 detik dengan sistem yang pertama kali aktif adalah subsistem 1. Keadaan awal yang digunakan adalah $[1000,1000]^T$. Dari gambar tersebut, terlihat bahwa semakin lama nilai x_1 dan x_2 akan semakin dekat dengan titik setimbang $[0,0]^T$. Grafik yang berwarna biru menyatakan bahwa sistem yang pertama kali aktif adalah subsistem 1, sedangkan grafik yang berwarna merah menyatakan bahwa sistem yang aktif adalah subsistem 2.

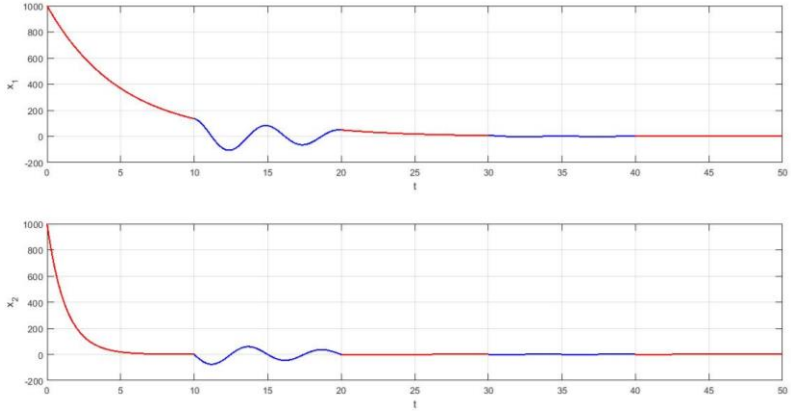
- Kasus 2

  Pada kasus ini dilakukan simulasi saat sistem yang pertama kali aktif adalah subsistem 2. Waktu perpindahan (*switching time*) diambil setiap 5 detik dan diperoleh hail sebagai berikut:



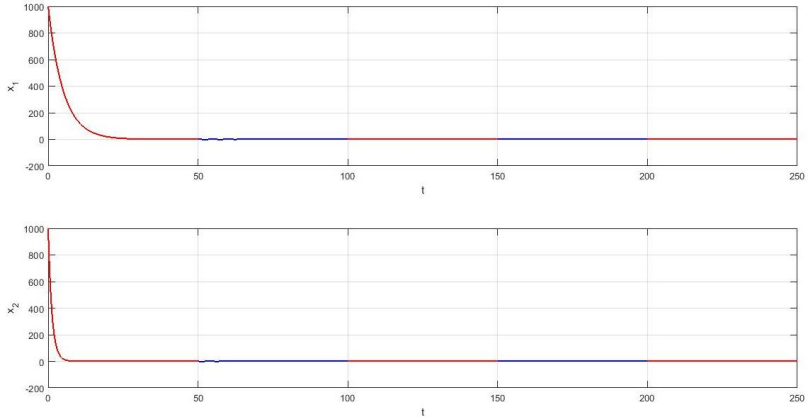
Gambar 4.5 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 2 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 5 detik.

Selanjutnya, simulasi diambil pada saat waktu perpindahan (*switching time*) diambil setiap 10 detik dan diperoleh:



Gambar 4.6 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 2 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 10 detik.

Simulasi terakhir diambil pada saat waktu perpindahan (*switching time*) setiap 50 detik, diperoleh hasil:



Gambar 4.7 Simulasi PWM-*Driven Boost Converter* dengan subsistem 2 pertama kali aktif dan waktu perpindahan 50 detik.

Pada Gambar 4.5 sampai Gambar 4.7 merupakan hasil simulasi untuk sinyal perpindahan yang berpindah setiap 5-50 detik dengan lama simulasi 25-250 detik dan sistem yang pertama kali aktif adalah subsistem 2. Keadaan awal yang digunakan adalah $[1000,1000]^T$. Sama seperti kasus sebelumnya, dari gambar tersebut terlihat bahwa semakin lama nilai x_1 dan x_2 akan semakin dekat dengan titik setimbang $[0,0]^T$.

Dari hasil simulasi grafik solusi dapat ditunjukkan bahwa model PWM-*Driven Boost Converter* dengan keadaan awal yang digunakan adalah $[1000,1000]^T$ dan *switching time* yang berubah-ubah (sistem yang aktif bergantian $\{1,2\}$), maka semakin lama nilai x_1 dan x_2 akan semakin dekat dengan titik setimbang $[0,0]^T$. Sehingga dari hal tersebut, dapat disimpulkan bahwa model PWM-*Driven Boost Converter* bersifat *Globally Uniformly Exponentially Stable* (GUES).

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari Tugas Akhir dan saran yang dapat dijadikan sebagai rekomendasi untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan dalam Tugas Akhir ini dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. *Switched linear systems* akan bersifat *Globally Uniformly Exponentially Stable* (GUES) apabila dapat mengkontruksi fungsi *common* Lyapunov kuadratik. Langkah-langkah yang dapat dilakukan adalah:
   - Menentukan titik setimbang dari setiap subsistem dengan menyelesaikan persamaan $A_p x = 0$. Diasumsikan pada setiap subsistem, titik $x = 0$ merupakan salah satu titik setimbang.
   - Menentukan kestabilan dari setiap subsistem dengan memeriksa nilai eigen dari matriks *state*-nya. Jika semua subsistem bersifat stabil asimtotik, maka menuju ke langkah berikutnya. Jika ada salah satu subsistem yang tidak stabil asimtotik, maka bisa dipastikan *switched linear system* tidak bersifat GUES.
   - Menyelesaikan LMI pada persamaan (4.1). Jika LMI tersebut mempunyai penyelesaian, maka *switched linear systems* bersifat GUES. Jika LMI tersebut tidak mempunyai penyelesaian, maka *switched linear systems* tidak bersifat GUES.

2. Hasil analisis kestabilan pada PWM-*Driven Boost Converter* adalah stabil asimtotik, karena ketiga syarat diatas dipenuhi maka sistem tersebut bersifat GUES.

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya adalah mengembangkan analisis kestabilan *switched systems* untuk *switching* yang dibatasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Liberzon, D. (2003). **Switching in System and Control**. Urbana. Birkhauser.

[2] Shorten, R., & Narendra, K. (1998). "On the Stability and Existence of Common Lyapunov Functions for Stable Linear Switching Systems". **Technical report, Center for Systems Science**, Hal. 3723-3274.

[3] Mason, P., & Boscain, U. (2004, April). "Common Lyapunov Functions for Linear Switched Systems". **SIAM Journal on Control and Opimization**, doi:10.1137/040613147

[4] Vu, L., & Liberzon, D. (2005). "Common Lyapunov Functions for Families of Commuting Nonlinear Systems". **Systems & Control Letters Vol. 54**, Hal. 405-416.

[5] Sun, G.Y., Wang, L., & Xie, G. (2006). "Stability of Switched Systems with Time-Varying Delays: Delay-Dependent Common Lyapunov Functional Approach". **IEEE**, Hal. 1544-1549.

[6] Liu, X. (2008). "Stability Analysis of Switched Positive Systems: A Switched Linear Copositive Lyapunov Function Method". **IEEE Transactions on Circuits and Systems Vol. 56**, Hal. 414-418.

[7] Ze-quan, G., He-ping L., & Fu-cheng, L. (2009). "A Common Lyapunov Function for a Class of Switched Descriptor Systems". **IEEE**, Hal. 29-31. doi:10.1109/CAR.2009.13

[8] Subiono. 2016. **Sistem Linear dan Kontrol Optimal**. Surabaya. Subiono.

[9] stanford.edu. (2008). Lecture 12 Basic Lyapunov theory. Diakses pada 23 Januari 2020, dari https://stanford.edu/class/ee363/lrcture/lyap.pdf

[10] VanAntwerp, J.G., & Braatz, R.D. (2000). "A Tutorial on Linear and Bilinear Matrix Inequalities". **Journal of Process Control 110**, Hal. 363-385.

[11] Sun, Z., & Ge. S. (2005). **Switched Linear Systems Control and Design**. London. Springer-Verlag.

LAMPIRAN 1
Program Matlab

1. Menyelesaikan LMI

```
setlmis([])      %inisialisasi pembentukan LMI
p = lmivar(1,[2 1]);     %mendefinisikan matriks
P yang simetri & berukuran 2x2

A1 = [-0.2 2; -0.8 0];
A2 = [-0.2 0; 0 -0.8];

lmiterm([1 1 1 p],1,A1,'s');     %LMI A1
lmiterm([2 1 1 p],1,A2,'s');     %LMI A2
lmiterm([-4 1 1 p],1,1);     %mendefinisikan LMI
P>0

lmis = getlmis;

[tmin,xfeas] = feasp(lmis);      %mencari sol LMI
dalam lmis. Hasilnya disimpan di xfeas. ( LMI
memiliki penyelesaian jika tmin <=0)

P = dec2mat(lmis,xfeas,p);       %mencari matriks
P pada LMI (konstruksi ke CLF)

options = [0,0,10,0,0];
[tmin,xfeas] = feasp(lmis,options,-1);

P = dec2mat(lmis,xfeas,p);
e = eig(P);
```

2. Simulasi PWM-*Driven Boost Converter*

- Fungsi PWM pada subsistem 1

```
function dxdt = pwm1(t,x)
dxdt = [-0.2*x(1)+2*x(2);-0.8*x(1)];
```

- Fungsi PWM pada subsistem 2

```
function dxdt = pwm2(t,x)
dxdt = [-0.2*x(1);0];
```

- Source code

```
clear
clc

x0 = input('masukkan keadaan awal (dlm vektor
kolom): ');
switching_times = input('masukkan waktu
perpindahan (dlm vektor baris): ');
active_init = input('masukkan sistem yang
pertama kali aktif (1 atau 2): ');

% menambahkan nol, karena simulasi dimulai dari
t=0
switching_times = [0 switching_times];

if active_init == 1
    % sistem yang pertama kali aktif adalah
subsistem pertama
    for i = 1:length(switching_times)-1
        if mod(i,2) == 1
            % ganjil -> subsistem 1
            [t,x] =
ode45(@pwm1,switching_times(i:i+1),x0);
            % plot hasilnya
            figure(1)
            subplot(2,1,1); plot(t,x(:,1),'b');
xlabel('t'); ylabel('x_1'); hold on
            subplot(2,1,2); plot(t,x(:,2),'b');
xlabel('t'); ylabel('x_2'); hold on
            figure(2)
            plot(x(:,1),x(:,2),'b');
xlabel('x_1'); ylabel('x_2'); hold on
```

```
            % update x0 untuk subsistem
berikutnya
            x0 = x(end,:)';
        else
            % genap -> subsistem 2
            [t,x] =
ode45(@pwm2,switching_times(i:i+1),x0);
            % plot hasilnya
            figure(1)
            subplot(2,1,1); plot(t,x(:,1),'r');
xlabel('t'); ylabel('x_1'); hold on
            subplot(2,1,2); plot(t,x(:,2),'r');
xlabel('t'); ylabel('x_2'); hold on
            figure(2)
            plot(x(:,1),x(:,2),'r');
xlabel('x_1'); ylabel('x_2'); hold on
            % update x0 untuk subsistem
berikutnya
            x0 = x(end,:)';
        end
    end
else
    % sistem yang pertama kali aktif adalah
subsistem kedua
    for i = 1:length(switching_times)-1
        if mod(i,2) == 1
            % ganjil -> subsistem 2
            [t,x] =
ode45(@pwm2,switching_times(i:i+1),x0);
            % plot hasilnya
            figure(1)
            subplot(2,1,1); plot(t,x(:,1),'r');
xlabel('t'); ylabel('x_1'); hold on
            subplot(2,1,2); plot(t,x(:,2),'r');
xlabel('t'); ylabel('x_2'); hold onn
            figure(2)
            plot(x(:,1),x(:,2),'r');
xlabel('x_1'); ylabel('x_2'); hold on
```

```
            % update x0 untuk subsistem
berikutnya
            x0 = x(end,:)';
        else
            % genap -> subsistem 1
            [t,x] =
ode45(@pwm1,switching_times(i:i+1),x0);
            % plot hasilnya
            figure(1)
            subplot(2,1,1); plot(t,x(:,1),'b');
xlabel('t'); ylabel('x_1'); hold on
            subplot(2,1,2); plot(t,x(:,2),'b');
xlabel('t'); ylabel('x_2'); hold on
            figure(2)
            plot(x(:,1),x(:,2),'b');
xlabel('x_1'); ylabel('x_2'); hold on
            % update x0 untuk subsistem
berikutnya
            x0 = x(end,:)';
        end
    end
end
```

BIODATA PENULIS

Penulis bernama lengkap Adelia Triana Pamungkas, lahir di Mojokerto, 5 April 1998. Pendidikan formal yang pernah ditempuh yaitu TK ‘Aisyiyah Bustanul Athfal IX, SDN Sooko 1, SMPN 1 Kota Mojokerto, dan SMAN 1 Puri Mojokerto. Pada saat ini penulis menempuh Pendidikan S1 di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya Departemen Matematika. Selama sekolah dan kuliah, penulis aktif mengikuti kegiatan dan organisasi, diantaranya OSIS&MPK SMAN 1 Puri Mojokerto, Paskibraka SMAN 1 Puri, Gus dan Yuk Kabupaten Mojokerto 2013, Paduan Suara Mahasiswa ITS sebagai staff (2017) dan Kepala Biro Job (2018), serta Himpunan Mahasiwa Matematika ITS Departemen Sport and Art sebagai staff (2017) dan Kepala Biro Art (2018). Penulis ikut aktif dalam *big event* OMITS 2017 di regional Mojokerto dan OMITS 2018 sebagai *Event Crew.*
Demikian biodata tentang penulis. Jika membutuhkan informasi berkaitan dengan Tugas Akhir ini, maka dapat menghubungi penulis melalui email di adeliaatp1@gmail.com