TUGAS AKHIR – KM184801

KAJIAN ANALISIS KESTABILAN *SWITCHED LINEAR SYSTEM* KOMUTATIF

ERLIN DHEBORA
NRP 06111640000071

Dosen Pembimbing
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

TUGAS AKHIR – KM184801

KAJIAN ANALISIS KESTABILAN *SWITCHED LINEAR SYSTEM* KOMUTATIF

ERLIN DHEBORA
NRP 06111640000071

Dosen Pembimbing
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

FINAL PROJECT – KM184801

A STUDY ON STABILITY ANALYSIS OF COMMUTING SWITCHED LINEAR SYSTEMS

ERLIN DHEBORA
NRP 06111640000071

Supervisors
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

DEPARTMEN OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

KAJIAN ANALISIS KESTABILAN *SWITCHED LINEAR SYSTEM* KOMUTATIF

A STUDY ON STABILITY ANALYSIS OF COMMUTING SWITCHED LINEAR SYSTEMS

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
ERLIN DHEBORA
NRP.061 11640000 071

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I,

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si
NIP. 19830517 200812 1 003

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS

Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, …

KAJIAN ANALISIS KESTABILAN *SWITCHED LINEAR SYSTEM* KOMUTATIF

Nama : **Erlin Dhebora**
NRP : **06111640000071**
Departemen : **Matematika**
Dosen Pembimbing : **Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si**

ABSTRAK

Switched systems merupakan bagian dari sistem hibrid dimana terdapat subsistem kontinu dan diskrit di dalamnya. *Switched systems* ini terbagi menjadi *switched linear systems* dan *switched nonlinear systems.* Kestabilan pada *switched linear systems* lebih sulit diperoleh daripada kestabilan sistem linier. Maka pada penelitian ini, akan dibahas mengenai kestabilan *switched linear systems.* Fokus utama pada sistem ini adalah pada bagian yang kontinu. Sedangkan, untuk bagian yang diskrit biasanya dibuat lebih umum untuk menghindari model yang rumit dari sistem tersebut. Di tugas akhir ini akan dikaji lebih lanjut tentang konsep kestabilan *switched system* yang bersifat komutatif dan akan diberikan beberapa contoh terkait sistem ini.

Kata Kunci *: Kestabilan, switched linear systems, commuting system.*

A STUDY ON STABILITY ANALYSIS OF COMMUTING SWITCHED LINEAR SYSTEMS

Name	***: Erlin Dhebora***
NRP	***: 06111640000071***
Department	***: Mathematics***
Supervisor	***: Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si***

ABSTRACT

Switched systems are part of hybrid systems where there are continuous and discrete subsystems in it. Switched systems are divided into switched linear systems and switched nonlinear systems. . The stability of switched linear systems is more difficult to obtain than the stability of linear systems. then in this study, we will discuss the stability of switched linear systems. The main focus on this system is on a continuous part. Meanwhile, for the discrete parts are usually made more general to avoid complicated models of the system. In this final project, we will study further about the concept of a commutative switched system stability and some examples will be given regarding this system.

Keywords *: Stability switched linear systems, commuting system.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin. Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmatNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

KAJIAN ANALISIS KESTABILAN *SWITCHED LINEAR SYSTEM* KOMUTATIF

Sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik atas bantuan, dukungan, serta doa dari berbagai pihak. Suatu kehormatan bagi penulis untuk menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Orang tua penulis, Ibu dan Ayah yang telah memberikan dukungan dan doa untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya yang telah memberikan dukungan dan bimbingan selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
3. Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing atas segala saran, arahan,

dukungan, dan motivasinya kepada penulis, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.

4. Bapak Komar Baihaqi, M. Si, dan Bapak Didik Khusnul Arif, S. Si, M, Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, MT selaku sekretaris Program Studi Sarjana Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberikan arahan akademik.
6. Seluruh Bapak dan Ibu dosen serta staff Tata Usaha Departemen Matematika FSAD ITS.
7. Adik penulis, Dhea atas dukungan dan semangat yang telah diberikan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
8. Sepupu penulis, Kak Ririn atas bantuan dan saran yang telah diberikan sehingga Tugas Akhir ini terselesaikan.
9. Teman-teman HEHEHE, Annisa, Bunga, Vivien, Masha, Jinan, Hasna, Kirmad, Kirbek, Aufa, dan Zane yang senantiasa memberikan semangat dan motivasi.
10. Teman-teman LEMNISCATE yang selalu memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis.
11. Seluruh pihak yang belum disebutkan yang telah memberikan saran, dukungan, dan motivasi dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat diharapkan oleh penulis. Akhirnya penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Jambi, Juni 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang menjadi latar belakang dan mendasari penulisan Tugas Akhir ini. Dari latar belakang tersebut disusun ke dalam suatu rumusan masalah dan batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Banyak sistem yang dijumpai dalam praktiknya melibatkan hubungan antara sistem dinamik kontinu dan diskrit atau yang biasa disebut dengan sistem hibrid. Sistem hibrid merupakan bidang penelitian yang relatif baru dan sangat aktif. Sistem tersebut memberikan tantangan teoritis dan praktis yang menarik dan penting dalam banyak masalah di dunia nyata. Karena sifatnya yang bersifat interdisipliner, bidang ini telah menarik perhatian orang-orang dengan beragam latar belakang, terutama ilmu komputer dan matematika terapan. Salah satu bagian dari sistem hibrid adalah *switched system*[1].

Sistem hibrid yang menggabungkan berbagai perilaku dinamis seperti dinamika waktu kontinu dan diskrit, dinamika yang digerakkan oleh peristiwa, *switching,* dan fenomenal lompatan yang saat ini merupakan masalah besar [2]-[5]. Khususnya, *switched system* yang mencakup sistem struktur variabel dan sistem multimodal adalah kategori penting dari sistem hibrid. Perilaku kualitatif *m-switched system* yang terdiri dari subsistem *m*-linear dianalisis oleh Peleties dan DeCarlo [3] menggunakan beberapa fungsi Lyapunov. Selain itu, Branicky [2] mengusulkan analisis stabilitas dari *switched system* yang terdiri dari banyak subsistem berkelanjutan nonlinier.

Dalam beberapa tahun terakhir, kajian tentang *switched system* telah mendapatkan perhatian lebih. *switched system* adalah kelas dari sistem hibrid dinamis yang terdiri dari sistem kontinu dan sistem diskrit dengan aturan yang mengatur perpindahan di antara mereka [2]-[6]. Sebuah survey masalah dasar dalam stabilitas dan desain dari *switched system* telah diusulkan baru baru ini [7]. Diantara berbagai macam masalah yang dihadapi dalam praktik, beberapa dapat mempelajari keberadaan aturan *switching* yang memastikan stabilitas *switched system*. Beberapa juga dapat berasumsi bahwa urutan *switching* tidak diketahui apriori dan mencari hasil stabilitas di bawah urutan *switching* yang sembarang.

Pada umumnya sistem kendali bekerja di bawah perubahan diskret dari dinamikanya. Sebagai contoh, perpindahan dari satu manuver terbang pada helikopter model (seperti diam (*hover*), naik, turun, belok kiri, belok kanan, *take-off*, *landing* secara vertikal dan sebagainya) ke manuver lain. dapat digambarkan sebagai sistem diskrit, sedang dinamika helikopter sendiri adalah sistem kontinu. Sistem seperti di atas disebut sistem *switch* (*Switched system*).

Analisis terkait kestabilan *switched system* dengan metode *commuting system* ini masih sedikit ilmuwan matematika yang melakukan penelitian lebih lanjut. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini akan dikaji kembali tentang konsep kestabilan *switched system* yang bersifat komutatif dan akan diberikan beberapa contoh sederhananya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diberikan pada subbab sebelumnya, diperoleh beberapa rumusan masalah pada Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan kestabilan *switched linear system* yang bersifat komutatif.

2. Bagaimana aplikasi analisis kestabilan *switched linear systems* yang komutatif pada contoh sederhana.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada Tugas Akhir ini adalah:

1. Sistem harus ada solusi dan solusinya harus tunggal.
2. Tidak mengkaji tentang perilaku zeno, yaitu perilaku yang terjadi saat suatu sistem hibrid melakukan perpindahan tak berhingga kali dalam waktu yang berhingga.
3. Tidak mengkaji perilaku *chattering*, yaitu perilaku yang terjadi saat suatu sistem hibrid melakukan perpindahan tak berhingga kali dalam waktu yang tak berhingga.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah ada, diperoleh tujuan penulisan Tugas Akhir ini antara lain:

1. Mengkaji bagaimana yang bersifat komutatif dapat menentukan kestabilan *switched linear system*.
2. Mengetahui contoh-contoh *switched linier system* komutatif.

1.5 Manfaat

Manfaat penulisan Tugas Akhir ini antara lain:

1. Sebagai bahan acuan pembelajaran kestabilan *switched linier system* yang bersifat komutatif.
2. Memahami kestabilan yang bersifat komutatif pada *switched linear systems*

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan laporan Tugas Akhir.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Menjelaskan tentang penelitian terdahulu, sistem dinamik dan titik setimbang, kestabilan titik setimbang, Fungsi Lyapunov, dan *Switched systems*.

BAB III METODE PENELITIAN

Menjelaskan tentang langkah-langkah dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Menjelaskan tentang konsep kestabilan *Uniform*, Fungsi *Common Lyapunov*, kestabilan *Switched linear systems* dengan matriks A komutatif, dan studi kasus.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Berisi kesimpulan dari keseluruhan pengerjaan Tugas Akhir ini dan saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas penelitian-penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan kestabilan *switched system* kemudian akan dijelaskan mengenai sistem dinamik baik yang linier maupun yang nonlinier, titik setimbang, kestabilan titik setimbang, dan kriteria kestabilan dengan fungsi Lyapunov.

2.1 Penelitian Terdahulu

Ada beberapa ilmuwan matematika yang menganalisis kestabilan sistem, baik itu sistem linier maupun sistem non-linier. Diantaranya yaitu Zhai dan Yang[8] mempertimbangkan penundaan state dan beralih keterlambatan pengontrol umpan balik, dimana beberapa subsistemnya tidak stabil. Dan mereka juga menyediakan beberapa kondisi eksplisit untuk menjamin kestabilan asimptotik dari sistem loop tertutup dengan kedua penundaan state dan penundaan pengalihan. Guisheng Zhai, Wenzhi Li, Chi Huang, dan Minqing Xiao[9] menyelidiki kestabilan kuadratik *switched system* yang terdiri dari subsistem *affine* yang tidak pasti, dimana apabila kedua matriks subsistem dan vektor *affine* diaktifkan maka tidak ada satu subsistem yang stabil secara kuadratik. Mereka menunjukkan bahwa jika kombinasi linier *convex* dari bagian subsistem yang linier memenuhi kestabilan *convex* dan kemampuan deteksi yang kuat, maka kombinasi *convex* lainnya dari vektor *affine* adalah nol. Jadi mereka merancang *switching law* yang bergantung pada output sehingga seluruh sistem *affine* yang tidak pasti akan stabil kuadratik.Kemudian ada Xingwen Liu[10] membahas masalah kestabilan *switched positive systems* waktu diskrit dengan metode baru *Switched Linear Copositive Lyapunov Function* (SLCLF) untuk mengurangi kriteria kestabilan yang diperoleh melalui *common linear copositive Lyapunov function*. Kondisi perlu dan kondisi cukup ditetapkan untuk asumsi adanya *switching copositive Lyapunov function*. Mereka menggunakan contoh numerik untuk menunjukkan keunggulan dari hasil yang diperoleh. Yuan Chao Qu, Yu-Zhong Liu, Xiao-Qi Zhao, Li-Na Zhang[11] membahas masalah kestabilan dari *linear switched time-delay* *system* yang terdiri dari subsistem tidak stabil. Kondisi kestabilan diturunkan dengan menerapkan transformasi model dan metode matriks berbobot dalam turunan dari fungsi Lyapunov sehingga sistem stabil asimptotik. Mereka memberikan contoh simulasi yang menggambarkan efektivitas metode yang diusulkan. Selanjutnya Yanhao Ju, Xingao Zhu dan Yuangong Sun[12] menganalisis kestabilan *switched system* positif dan mengembangkan suatu metode dalam sistem positif sedemikian hingga sistem stabil asimptotik. Dengan fungsi Lyapunov yang *copositive linier*, mereka menetapkan kondisi cukup untuk *switched system* positif yang stabil asimptotik berdasarkan waktu tinggal minimum, dimana tidak memerlukan fungsi Lyapunov untuk menurun secara seragam. Dan ada pula Kumpati S. Narendra dan Jeyendran Balakrishnan [13] menganalisis tentang fungsi *common quadratic Lyapunov* ada untuk semua sistem linier yang berbentuk $\dot{x} = A_i x,$ $i = 1,2, \dots, N,$ dimana matriks A_i adalah stabil asimptotik dan komutatif.

2.2 Sistem Dinamik dan Titik Setimbang

Banyak permasalahan nyata yang dapat dimodelkan sebagai suatu sistem dinamik. Salah satu bentuk sistem dinamik yang banyak dipelajari berbentuk persamaan diferensial biasa. Terdapat dua bentuk persamaan diferensial biasa yaitu linier dan nonlinier. Bentuk umum sistem yang nonlinier adalah:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

Pada bab ini, dikaji sistem nonlinier (1) yang mempunyai penyelesaian tunggal. Bentuk umum sistem linier adalah:

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

Suatu titik x_e dikatakan titik setimbang dari suatu sistem dinamik jika memenuhi $\dot{x} = 0$ (untuk sistem linier berlaku $Ax_e = 0$, sedangkan untuk sistem nonlinier berlaku $f(x_e) = 0$). Pada tugas akhir ini, diasumsikan titik asal $x = 0$ merupakan salah satu titik setimbang dan titik setimbang yang terisolasi.

2.3 Kestabilan Titik Setimbang

Setiap sistem memiliki keadaan setimbang yang berbeda-beda. Keadaan setimbang suatu sistem dapat terjadi pada suatu titik yang disebut titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan adalah suatu titik saat sistem tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Sebuah titik $x_e \in \mathbb{R}^n$ adalah sebuah titik kesetimbangan dari sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(x_e) = 0$.

Karena sistem dinamik yang dibahas pada bab ini bersifat invarian waktu yang dimisalkan pada persamaan (1) dan (2) memiliki waktu awal $t_0 = 0$.

***Definisi 2.3.1* [1]**

*Titik asal $x = 0$ adalah titik setimbang yang **stabil** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \tag{3}$$

***Definisi 2.3.2* [1]**

*Titik asal $x = 0$ adalah titik setimbang yang **stabil asimptotik** jika titik setimbang tersebut stabil dan terdapat suatu δ yang memenuhi kondisi berikut*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow x(t) \rightarrow 0 \text{ pada saat } t \rightarrow \infty \tag{4}$$

Himpunan dari semua keadaan awal yang lintasannya konvergen ke titik setimbang disebut *region of attraction*. Jika kondisi pada Definisi 2.3.2 berlaku untuk semua δ (yaitu jika titik asal adalah titik setimbang yang stabil dan *region of attraction*nya adalah keseluruhan *state space*), maka titik setimbang tersebut dinamakan **stabil asimptotik global**.

Definisi 2.3.3 **[1]**

Titik asal $x = 0$ *dinamakan* ***stabil eksponensial*** *jika terdapat konstanta positif* δ, c *dan* λ *sedemikian hingga penyelesaian dengan keadaan awal* $\|x(0)\| < \delta$ *memenuhi persamaan*

$$\|x(t)\| \leq c\|x(0)\|e^{-\lambda t} \qquad (5)$$

Jika penurunan secara eksponensial ini berlaku untuk semua δ, maka titik setimbang tersebut dinamakan **stabil eksponensial global**. Konstanta λ pada persamaan (5) disebut sebagai batas kestabilan.

Teorema berikut memberikan syarat kestabilan dari persamaan diferensial (2), dimana matriks A mempunyai peranan penting, khususnya bagian riil dari nilai karakteristik (nilai eigen) λ dari matriks A yang dinotasikan $Re(\lambda)$.

***Teorema 2.3.1* [14]**

Diberikan persamaan differensial (2) dengan matriks A berukuran $n \times n$ dan mempunyai nilai karakteristik yang berbeda $\lambda_1, \dots, \lambda_k (k \leq n)$.

Titik asal $x = 0$ adalah **stabil asimptotik** jika dan hanya jika semua nilai karakteristik mempunyai bagian real yang negatif, yaitu $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$.

Titik asal $x = 0$ adalah **stabil** jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$ dan untuk semua λ_i dengan $Re(\lambda_i) = 0$ multisiplitas aljabar sama dengan multisiplitas geometrinya.

Titik asal $x = 0$ adalah **tidak stabil** jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, \dots, k$ atau ada λ_i dengan $Re(\lambda_i) = 0$ dan multisiplitas aljabar lebih besar dari multisiplitas geometrinya.

2.4 Fungsi Lyapunov

Fungsi Lyapunov [15] termasuk dalam kelas C^1 (himpunan semua fungsi yang turunan pertamanya adalah fungsi kontinu) dan fungsi tersebut memetakan setiap state ke suatu bilangan real, yaitu $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Suatu fungsi dinamakan definit positif jika $V(0) = 0$ dan $V(x) > 0$ untuk setiap $x \neq 0$. Jika $V(x) \to \infty$ saat $\|x\| \to \infty$, maka V dinamakan *radially unbounded*. Turunan dari V terhadap waktu sepanjang solusi dari sistem (1) adalah:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x). \tag{6}$$

***Teorema 2.4.1* [15]**

(Lyapunov) Jika terdapat fungsi definit positif di C^1 yaitu $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yang turunannya sepanjang solusi dari sistem (1) memenuhi:

$$\dot{V} \leq 0 \qquad \forall x, \tag{7}$$

maka sistem (1) adalah **stabil.** Jika turunan dari V memenuhi:

$$\dot{V} < 0 \qquad \forall x, \tag{8}$$

maka sistem (1) adalah **stabil asimptotik.** Jika turunan dari V memenuhi:

$$\dot{V} \leq -\alpha V \qquad \forall x \text{ dan } \alpha > 0 \tag{9}$$

maka sistem (1) adalah **stabil eksponensial.**

Jika pada persamaan (8) dan (9) V juga *radially unbounded*, maka sistem (1) berturut-turut adalah **stabil asimptotik global dan stabil eksponensial global.**

2.5 Switched Systems

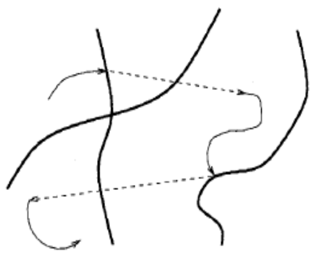
Switched Systems [1] merupakan salah satu bagian dari sistem hibrid yang bagian diskritnya sederhana. *Switched systems* merupakan sistem waktu kontinu dengan kejadian perpindahan yang diskrit (*discrete switching events*). Kejadian perpindahan pada *switched system* dibedakan menjadi dua macam, yaitu *state-dependent switching* dan *time-dependent switching.*

2.5.1 State-dependent Switching

State-dependent switching adalah sebuah sistem yang kejadian perpindahannya bergantung pada *state*. Misalkan *state space* yang kontinu dipartisi menjadi sejumlah daerah dengan menggunakan permukaan *switching* atau *guards.* Pada masing-

masing daerah ini, sistem dinamik dengan waktu kontinu (dideskripsikan oleh persamaan diferensial, dengan atau tanpa kontrol) diberikan. Setiap kali trayektori sistem menyentuh permukaan *switching*, maka *state*-nya melompat secara langsung ke nilai baru yang ditentukan oleh *reset map*. Singkatnya, sistem ditentukan oleh:

1. Sekumpulan permukaan *switching* dan beberapa daerah yang dihasilkan
2. Untuk setiap daerah, terdapat subsistem dengan waktu kontinu
3. *Reset map*



Gambar 1. State-dependent switching [15]

Pada gambar 1, garis yang tebal menunjukkan permukaan *switching*, tanda panah menunjukkan bagian kontinu dari lintasan, dan garis putus-putus menunjukan lompatan pada sistem.

2.5.2 Time-dependent Switcing

Time-dependent switching adalah sebuah sistem yang kejadian perpindahannya bergantung pada waktu. Misal diberikan $f_p,\ p \in P$ fungsi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^n$, dimana P adalah banyaknya subsistem. Sehingga, *switched systems* dapat dituliskan sebagai berikut:

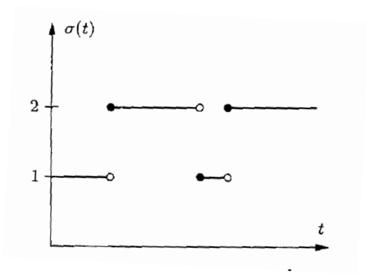
$$\dot{x} = f_p(x), \qquad p \in P \tag{10}$$

dengan $\mathbb{R}^n$ sebagai state space. Ketika sistemnya linier, maka penyelesaiannya lebih mudah dihitung:

$$f_p(x) = A_p x, \qquad A_p \in \mathbb{R}^{n \times n},\ p \in P \tag{11}$$

dan jumlah anggota dari P adalah berhingga, yaitu $P = \{1,2, \dots, m\}$.

Untuk mendefinikan *switched system* yang dihasilkan, kita butuh sebuah notasi dari *switching signal* dengan fungsi sepotong-sepotong yang konstan, yaitu $\sigma : [0, \infty) \to P$. Sedemikian hingga, fungsi σ memiliki titik diskontinu yang banyaknya berhingga yang disebut *switching times*. Diantara dua *switching times* yang berurutan, fungsi σ bernilai konstan.



Gambar 2. Time-dependent switching[15]

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan langkah-langkah dalam penyelesaian masalah tentang kestabilan *switched linier systems* yang bersifat komutatif. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Metode Penelitian

Penulis melakukan penelitian pada Tugas Akhir ini berdasarkan langkah-langkah sebagai berikut:

1. **Studi Literatur**

   Pada tahap ini akan dicari referensi yang berkaitan dengan kestabilan sistem dengan fungsi Lyapunov. Referensi yang dicari meliputi definisi kestabilan, sistem linier, sistem nonlinier, titik setimbang, kestabilan titik setimbang, *switched linier systems*, dan hal lain yang berhubungan dengan penelitian ini. Referensi-referensi yang dicari dapat diperoleh melalui jurnal-jurnal yang sesuai dengan topik tugas akhir ini. Selain melalui jurnal-jurnal yang terkait, studi literatur dapat diperoleh melalui buku teks yang berkaitan dengan kestabilan *switched linier systems* yang bersifat komutatif.

2. **Mengkaji sistem linier, sistem nonlinier, titik setimbang, dan kestabilan titik setimbang**

   Selanjutnya adalah mengkaji sistem linier, sistem nonlinier dan titik setimbang dalam sebuah sistem untuk mengetahui apakah suatu titik setimbang stabil atau tidak stabil. Dan mengkaji jenis-jenis kestabilan titik setimbang untuk mengetahui jenis kestabilan dari suatu titik setimbang yang diperoleh sekaligus menjawab rumusan masalah.

3. Mengkaji analisis kestabilan *switched linier system* yang bersifat komutatif dan mengkontruksi contoh *switched linear systems* yang komutatif.

Setelah mempelajari dan memahami referensi yang ada, pada tahap ini akan dikaji pengertian dari kestabilan *switched linier system* dan jenis-jenisnya. Kemudian mengembangkan dan mengkonstruksi beberapa contoh yang dilengkapi dengan pembuktian kestabilan titik setimbangnya.

4. Penarikan kesimpulan

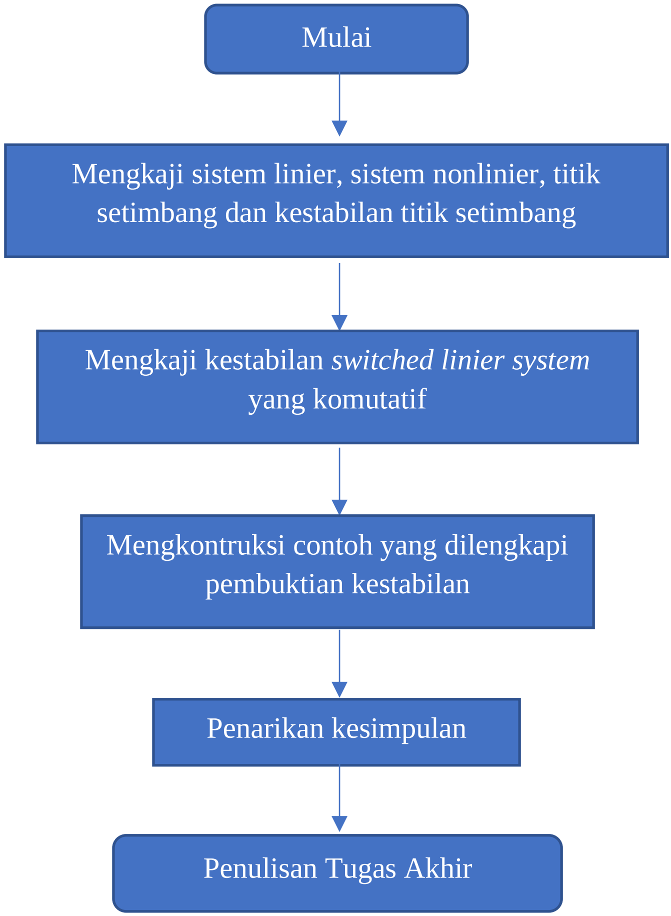
Pada tahap yang terakhir, akan ditarik kesimpulan dari penelitian yang dilakukan sebelumnya untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

5. Penulisan Tugas Akhir

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penyusunan Tugas Akhir.

3.2 Diagram Alir Penelitian

Langkah-langkah penelitian pada Tugas Akhir disajikan dalam diagram sebagai berikut:



Gambar 3. Diagram Alir

BAB IV
ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai analisis kestabilan *switched linear system* komutatif. Setelah itu akan dilakukan simulasi dengan menggunakan *software* MATLAB.

4.1 Konsep Kestabilan Uniform

Diberikan sistem pada (10). Akan ditentukan kondisi yang harus dipenuhi agar *switched system* stabil asimptotis untuk semua *switching signal* σ. Kita asumsikan bahwa semua subsistem memiliki titik asal sebagai titik setimbang, yaitu $f_p(0) = 0$ untuk semua $p \in \mathcal{P}$. Jika subsistem ke-p tidak stabil untuk suatu $p \in \mathcal{P}$, maka *switched system* untuk *switching signal* $\sigma(t) \equiv p$ tidak stabil. Sehingga syarat perlu bagi suatu *switched system* agar stabil (asimptotik) di bawah *arbitrary switching*, yaitu bahwa semua subsistem individu juga harus stabil (asimptotik).

Oleh karena itu, di tugas akhir ini akan diasumsikan bahwa semua subsistem stabil asimptotik. Pada bagian sebelumnya, sudah dibahas bahwa kondisi ini tidak cukup untuk mejamin bahwa *switched system* stabil asimptotik di bawah *arbitrary switching.* Sehingga, perlu untuk menentukan persyaratan tambahan pada sistem (10) agar bersifat stabil asimptotik.

Pada tugas akhir ini, akan dikaji kestabilan *switched system* bukan untuk suatu *switching signal*, melainkan stabil asimptotik atau eksponensial untuk semua *switching signal*. Oleh karena itu, akan diberikan beberapa definisi kestabilan yang berlaku untuk semua *switching signal*.

Titik asal $x = 0$ adalah titik setimbang yang **stabil uniform** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \qquad (12)$$

dipenuhi untuk setiap *switching signal*.

Titik asal $x = 0$ adalah titik setimbang yang **stabil asimptotik uniform** jika titik setimbang tersebut stabil uniform dan terdapat suatu δ yang memenuhi kondisi berikut

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow x(t) \rightarrow 0 \text{ pada saat } t \rightarrow \infty \qquad (13)$$

untuk setiap *switching signal*.

Himpunan dari semua keadaan awal yang lintasannya konvergen ke titik setimbang disebut *region of attraction*. Jika kondisi tersebut berlaku untuk semua δ (yaitu jika titik asal adalah titik setimbang yang stabil dan *region of attraction*nya adalah keseluruhan *state space*), maka titik setimbang tersebut dinamakan **stabil asimptotik uniform global**.

Titik asal $x = 0$ dinamakan **stabil eksponensial uniform** jika terdapat konstanta positif δ, c dan λ sedemikian hingga penyelesaian dengan keadaan awal $\|x(0)\| < \delta$ memenuhi persamaan

$$\|x(t)\| \leq c\|x(0)\|e^{-\lambda t} \qquad (14)$$

untuk setiap *switching signal*.

Jika penurunan secara eksponensial ini berlaku untuk semua δ, maka titik setimbang tersebut dinamakan **stabil eksponensial uniform global**. Konstanta λ pada persamaan (14) disebut sebagai batas kestabilan.

4.2 Fungsi Common Lyapunov

Untuk membuktikan kestabilan suatu *switched system* dengan menggunakan definisi kestabilan, prosesnya tidak mudah untuk dilakukan. Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk menunjukkan bahwa suatu *switched system* bersifat stabil asimptotik uniform global (GUAS), adalah dengan mengkonstruksi fungsi common Lyapunov. Fungsi *common Lyapunov* merupakan pengembangan dari fungsi Lyapunov.

Diberikan fungsi definit positif yang turunan pertamanya adalah fungsi kontinu (C^1) $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ini disebut *common Lyapunov function* untuk semua sistem (10) jika terdapat fungsi definit positif kontinu $W: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_p(x) \leq -W(x) \qquad \forall x, \quad \forall p \in P \tag{15}$$

Fungsi common Lyapunov dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa suatu *switched system* bersifat stabil. Untuk menunjukkan bahwa *switched linear system* bersifat stabil, menggunakan fungsi *common Lyapunov* kuadratik. Bentuk umum dari fungsi *common Lyapunov* kuadratik adalah $V(x) = x^T P x$ [1].

Teorema 4.2.1 [1]

Jika semua sistem (10) mempunyai fungsi Lyapunov yang sama dan fungsi Lyapunov bersifat *radially unbounded* maka *switched system* $\dot{x} = f_\sigma(x)$ bersifat stabil asimptotik uniform global (*GUAS).*

4.3 Kestabilan *Switched Linear Systems* dengan matriks A komutatif

Bentuk umum dari *switched linear system* adalah $\dot{x} = A_\sigma x$, dengan σ menyatakan sinyal perpindahan (*switching signal*). Untuk saat ini, diasumsikan ada dua subsistem $\mathcal{P} = \{1,2\}$ dan matriks A_1 dan A_2 komutatif, yaitu $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Kondisi komutatif dapat dinyatakan sebagai $[A_1, A_2] = 0$, dimana *Lie bracket* $[.,.]$, didefinisikan sebagai

$$[A_1 A_2] \coloneqq A_1 A_2 - A_2 A_1 \tag{16}$$

Pertama, akan dibuktikan bahwa $e^{A_1}e^{A_2} = e^{A_2}e^{A_1}$ dengan menggunakan definisi matriks eksponensial atau bisa juga kita sebut deret taylor sebagai berikut:

$$\begin{aligned} e^A &= \frac{I}{0!} + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \\ &= \frac{A^0}{0!} + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi matriks eksponensial tersebut, maka $e^{A_1}e^{A_2}$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$e^{A_1}e^{A_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_2^l}{l!}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_1^k}{k!} \frac{A_2^l}{l!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_2^l}{l!} \frac{A_1^k}{k!} \end{aligned}$$

Karena matriks A_1 dan A_2 komutatif, maka persamaan di atas dapat ekivalen dengan persamaan berikut:

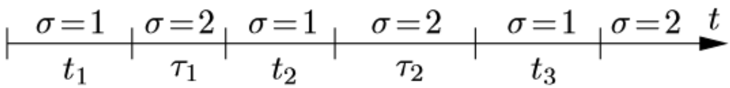
$$\begin{aligned} e^{A_1}e^{A_2} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_2^l}{l!} \frac{A_1^k}{k!} \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_2^l}{l!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k}{k!}\right) \end{aligned}$$

$$= e^{A_2} e^{A_1}$$

Perumuman dari persamaan sebelumnya yaitu

$$e^{A_1 t} e^{A_2 \tau} = e^{A_2 \tau} e^{A_1 t} \qquad \forall t, \tau > 0. \tag{17}$$

Persamaan di atas menyatakan penyelesaian dari dua subsistem individu $\dot{x} = A_1 x$ dan $\dot{x} = A_2 x$ komutatif. Makna dari penyelesaian yang komutatif akan dibahas secara lebih detil.



Gambar 4. Perpindahan antara dua subsistem

Sekarang dikonstruksi suatu sinyal perpindahan sebarang (*an arbitrary switching signal*) σ. Variabel t_i dan τ_i menyatakan panjang dari interval waktu dimana σ sama dengan 1 dan 2, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4. Solusi dari sistem yang dihasilkan dari *switching signal* ini adalah

$$x(t) = \cdots e^{A_2 \tau_2} e^{A_1 t_2} e^{A_2 \tau_1} e^{A_1 t_1} x(0)$$

Berdasarkan persamaan (17), maka persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai persamaan berikut

$$x(t) = \cdots e^{A_2 \tau_2} e^{A_2 \tau_1} \ldots e^{A_1 t_2} e^{A_1 t_1} x(0) \tag{18}$$

Fakta lain yang dibutuhkan adalah

$$[A, B] = 0 \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}.$$

Ini merupakan konsekuensi dari rumus *Baker-Campbell-Hausdorff*

$$e^{A}e^{B}=e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]]+[B,[A,B]])+\cdots}.$$

Perkalian dengan skalar dari matriks yang sama jelas bersifat komutatif antara satu sama lain, maka persamaan (18) dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$x(t)=e^{A_2(\tau_1+\tau_2+\cdots)}\,e^{A_1(t_1+t_2+\cdots)}x(0) \qquad (19)$$

Dapat disimpulkan bahwa deret $t_1+\tau_1+t_2+\tau_2+\cdots$ konvergen ke ∞ pada saat $t\to\infty$. Oleh karena itu, setidaknya salah satu dari deret $t_1+t_2+\cdots$ dan $\tau_1+\tau_2+\cdots$ konvergen ke ∞ dengan $t\to\infty$, matriks eksponensial akan konvergen ke nol karena kestabilan dari A_1 dan A_2. Pada bagian awal bab ini, masing-masing subsistem diasumsikan bersifat stabil asimptotik. Telah dibuktikan bahwa $x(t)\to 0$ untuk sebarang sinyal perpindahan (*arbitrary switching signal*). Hasil ini dapat diperumum ke kasus ketika $\mathcal{P}$ memiliki lebih dari dua anggota. Argumen diatas menunjukkan untuk setiap *switching signal*, trayektorinya akan konvergen ke titik asal. Sehingga titik asal bersifat atraktif global. Untuk menunjukkan bahwa *switched system* bersifat GUES, akan digunakan Teorema 4.3.1. Kesimpulan akhirnya dituliskan dalam Teorema 4.3.2 yang menyatakan bahwa suatu *switched linear systems* yang komutatif bersifat GUES jika matriks dari setiap subsistem adalah Hurwitz.

Teorema 4.3.1 [1]

Switched linear system $\dot{x}=A_\sigma x$ *adalah Globally Uniformly Exponentially Stable (GUES) jika dan hanya jika setiap switching signalnya locally attractive.*

Teorema 4.3.2 [1]

Jika $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ *adalah himpunan berhingga dari matriks Hurwitz yang komutatif, maka switched linear system* $\dot{x} = A_\sigma x$ *bersifat Globally Uniformly Exponentially Stable (GUES).*

Berikutnya dibahas prosedur untuk mengkonstruksi fungsi *common Lyapunov*, yang telah dijelaskan di [13]. Misalkan $A_1, A_2, \dots, A_m$ adalah himpunan matriks Hurwitz yang komutatif. Karena A_1 Hurwitz, maka terdapat suatu matriks definit positif dan simetri P_1 yang menjadi penyelesaian dari persamaan Lyapunov berikut

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I$$

Matriks definit negatif dan simetri yang lain juga bisa digunakan di ruas kanan untuk menggantikan $-I$. Untuk $i = 1, \dots, m$, misalkan matriks positif definit dan simetri P_i adalah dari persamaan Lyapunov berikut:

$$A_i^T P_i + P_i A_i = -P_{i-1}$$

Maka fungsi

$$V(x) = x^T P_m x \tag{20}$$

adalah fungsi *common Lyapunov* kuadratik untuk *switched linear systems* yang komutatif.

Akan ditunjukkan bahwa $V(x)$ pada persamaan (20) merupakan fungsi *common Lyapunov*. Secara lebih spesifik, akan dibuktikan bahwa $V(x)$ merupakan fungsi Lyapunov untuk semua subsistem. Ambil sebarang $i \in \{1, \dots, m\}$, akan ditunjukkan bahwa

$V(x)$ merupakan fungsi Lyapunov untuk subsistem ke-i. Pertama, perhatikan bahwa matriks P_m dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P_m = \int_0^\infty e^{A_m^T t_m} \dots (\int_0^\infty e^{A_1^T t_1} e^{A_1 t_1} dt_1) \dots e^{A_m t_m} dt_m$$

Karena matriks eksponensial dalam persamaan diatas bersifat komutatif, persamaan tersebut dapat diatur sehingga matriks eksponensial yang berada di paling kiri dan paling kanan berkaitan dengan subsistem ke-i. Matriks P_m dapat dinyatakan sebagai

$$P_m = \int_0^\infty e^{A_i^T t_i} Q_i e^{A_i t_i} dt_i \tag{21}$$

dengan Q_i merupakan suatu ekspresi yang terdiri dari $m - 1$ intergral. Matriks Q_i dapat diperoleh dengan menggunakan prosedur sebelumnya kecuali pada langkah ke i, sehingga matriks Q_i bersifat definit positif. Perhatikan bahwa persamaan (21) ekivalen dengan $A_i^T P_m + P_m A_i = -Q_i$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $V(x)$ yang diberikan oleh (20) adalah fungsi Lyapunov untuk subsistem ke-i. Dari rumus di atas dapat dilihat bahwa perubahan pada urutan matriks $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ tidak mempengaruhi matriks P_m yang diperoleh.

4.4 Studi Kasus

Diberikan contoh matriks komutatif A_1 dan A_2, yaitu memenuhi $A_1 A_2 = A_2 A_1$, sebagai berikut :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Karena A_1 dan A_2 adalah matriks diagonal dapat dipastikan bahwa kedua matriks tersebut adalah komutatif. Selain itu, dapat ditunjukkan bahwa matriks A_1 dan A_2 adalah Hurwitz karena bagian real dari kedua nilai eigennya adalah negatif. Berdasarkan Teorema 4.3.2, maka *switched linear systems* bersifat *Globally Uniformly Exponentially Stable* (GUES). Perlu kita ketahui bahwa titik setimbang dari sistem tersebut adalah (0,0) dimana titik setimbangnya sama dengan titik asal. Hal ini dapat dipastikan karena pada bab 2 sudah diasumsikan bahwa titik titik asal $x = 0$ merupakan salah satu titik setimbang dan titik setimbang yang terisolasi. Jika titik setimbang bukan titik asal, maka kita bisa menggunakan transformasi koordinat sehingga titik setimbang adalah titik asal. Dari titik setimbang ini kita bisa tahu bahwa subsistem tersebut merupakan stabil asimptotik yang juga sudah diasumsikan pada awal bab ini.

Cara lainnya ialah dengan mengkontruksi fungsi *common Lyapunov* untuk *switched linear systems* tersebut. Seperti penjelasan pada subbab sebelumnya, langkah pertama adalah menentukan penyelesaian dari persamaan Lyapunov $A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I$. Penyelesaian dari persamaan Lyapunov tersebut adalah matriks P_1 yang simetri dan definit positif. Kemudian akan dihitung penyelesaian dari persamaan Lyapunov $A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -P_1$, dengan P_1 adalah matriks yang diperoleh dari penyelesaian persamaan Lyapunov yang pertama.

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -p_{11} & -p_{12} \\ -2p_{12} & -2p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{11} & -2p_{12} \\ -p_{12} & -2p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_{11} & -3p_{12} \\ -3p_{12} & -4p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-2p_{11} = -1 \qquad -3p_{12} = 0 \qquad -4p_{22} = -1$$
$$p_{11} = \tfrac{1}{2} \qquad p_{12} = 0 \qquad p_{22} = \tfrac{1}{4}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -P_1$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4p_{11} & -4p_{12} \\ -2p_{12} & -2p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4p_{11} & -2p_{12} \\ -4p_{12} & -2p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8p_{11} & -6p_{12} \\ -6p_{12} & -4p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$-8p_{11} = -\tfrac{1}{2} \qquad -6p_{12} = 0 \qquad -4p_{22} = -\tfrac{1}{4}$$
$$p_{11} = \tfrac{1}{16} \qquad p_{12} = 0 \qquad p_{22} = \tfrac{1}{16}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

Untuk menghitung matriks P_1 dan P_2, dapat pula menggunakan toolbox MATLAB . Matriks yang diperoleh adalah

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0 \\ 0 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

Dari penjelasan pada subbab sebelumnya, dapat disimpulkan fungsi $V(x) = x^T P_2 x$ adalah fungsi *common Lyapunov* kuadratik untuk *switched linear systems* yang komutatif.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dalam Tugas Akhir ini diperoleh langkah-langkah mengetahui apakah suatu *switched linear system* yang komutatif bersifat *Globally Uniformly Exponentially Stable* (GUES) sebagai berikut:

1. Memeriksa apakah *switched linear systems* bersifat komutatif. Jika *switched linear systems* bersifat komutatif maka dilanjutkan ke langkah berikutnya. Jika tidak komutatif maka berhenti.
2. Menentukan titik setimbang dari setiap subsistem. Titik asal harus menjadi titik setimbang dari setiap subsistem. Jika ada subsistem yang tidak memenuhi, maka berhenti.
3. Menentukan kestabilan dari setiap subsistem. Jika setiap subsistem stabil asimptotik, maka *switched linear systems* bersifat *Globally Uniformly Exponential Stable* (GUES). Jika terdapat salah satu subsistem yang tidak stabil asimptotik, maka *switched linear systems* tidak bersifat GUES.

5.2 Saran

Ketika suatu *switched linear systems* tidak bersifat stabil asimptotik untuk sebarang *switching signal*, maka dapat ditentukan kondisi yang harus dipenuhi oleh *switching signal* agar *switched linear systems* bersifat stabil asimptotik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Liberzon, D. (2003). Switching in System and Control. Urbana. Birkhauser.

[2] Branicky,M.S.(1998).Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *43* (pp.475-482).

[3] Peleties, P., & DeCarlo, R. (1991). Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions. *Proceedings of the American control conference,* Boston (pp. 1679-1684).

[4] Ye, H., Michel, A. N., & Hou, L. (1996). Stability analysis of switched systems. *Proceedings of the 35th conference on decision and control*, Kobe, Japan (pp. 1208-1212).

[5] Pettersson, S. & Lennartson, B. (1997) Lmi for stability and robustness of hybrid systems. *Proc. Amer. Control Conf*, (pp. 1714–1718).

[6] DeCarlo, R., Branicky, M., Pettersson, S., & Lennartson, B. (2000) Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proc. IEEE* (pp. 1069–1082).

[7] Liberzon, D., & Morse, A. S. (1999). Basic problems in stability and design of switched system. *IEEE Control Syst. Mag*., vol. 19, no. 5 (pp. 59–70).

[8] Shidong, Z., & Yang, X. S. (2011). Stability Analysis of Switched Linear Systems with Switched Time-Delay Feedback Controller. *IET Proc. Control Theory Appl* (pp. 629-632).

[9] Zhai, G., Li, W., Huang, C., & Xiao, M. (2018). Quadratic Stabilization of Uncertain Switched Affine Systems: An Observer-Based Approach. *Society of Instrument and Control Engineers of Japan* (pp. 362-367).

[10] Liu, X. (2008). Stability Analysis of Switched Positive Systems: A Switched Linear Copositive Lyapunov Function Method. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 56(5). (pp. 414-418).

[11] Qu, Y., Liu, Y., Zhao, X., & Zhang, L. (2011). Stability Analysis for Linear Switched Time-Delay Systems with Unstable Subsystems. *IEEE* (pp. 2251-2255).

[12] Ju, Y., Zhu, X., & Sun, Y. (2018). Stability Analysis of Continuous-Time Positive Switched Linear Systems. *International Conference on Control, Automation and Systems* (pp. 1062-1065).

[13] Narendra, K. S., & Balakrishan, J. (1994). A Common Lyapunov Function for Stable LTI Systems with Commuting A-Matrices. *IEE Transaction On Automatic Control, Vol. 39, No. 12*. (pp. 2469-2471)

[14] Subiono. (2016). Sistem Linear dan Kontrol Optimal. Surabaya. Subiono.

[15] stanford.edu. (2008). Lecture 12 Basic Lyapunov theory. Diakses pada 3 Februari 2020, dari https://stanford.edu/class/ee363/lrcture/lyap.pdf

BIODATA PENULIS

ERLIN, lahir pada 17 Agustus 1998 di Jambi. Memiliki nama lengkap Erlin Dhebora. Pernah menempuh pendidikan formal di SDN 47 Kota Jambi, SMPN 7 Kota Jambi, dan Sampoerna Academy Boarding School Bogor. Selepas SMA hingga saat ini masih menempuh pendidikan di Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya. Di Departemen Matematika ITS ini, penulis mengambil rumpun pemodelan. Selama kuliah, penulis juga aktif dalam kegiatan non akademik pada tahun 2018-2019 dengan menjadi Staff Dewan Perwakilan Mahasiswa Fakultas (DPMF) ITS, menjadi ketua BPDK dalam pemilu ITS 2019 dan menjadi ketua Dewan Perwakilan Mahasiswa Fakultas (DPMF) pada tahun 2019-2020. Selain itu penulis juga mengikuti kepanitiaan lain seperti Great Event of MIPA (GEMPA), dan Olimpiade Matematika ITS (OMITS). Pada tahun 2019 akhir penulis mengikuti program *student excursion* ke Jepang selama dua minggu.

Penulis berharap banyak untuk perkembangan penelitian matematika di Departemen Matematika ITS, maka dari itu apabila ada yang ingin memberikan saran, kritik dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini, bisa dilakukan melalui email erlin.dhebora@gmail.com.