



TUGAS AKHIR - KM184801

**SIMULASI GREEKS PADA OPSI TIPE EROPA
MENGUNAKAN METODE BINOMIAL-TREE**

**FARADILLA DAYINTA RAHMAYANI
0611164000016**

Dosen Pembimbing :
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Daryono Budi Utomo, MSi

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



FINAL PROJECT - KM184801

GREEKS SIMULATION OF AN EUROPEAN OPTION USING BINOMIAL TREE METHOD

**FARADILLA DAYINTA RAHMAYANI
0611164000016**

Supervisors :
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Daryono Budi Utomo, MSi

DEPARTEMENT MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Sepuluh Nopember Institute Technology
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

**SIMULASI *GREEKS* PADA OPSI TIPE EROPA
MENGUNAKAN METODE BINOMIAL *TREE***

***GREEKS SIMULATION OF AN EUROPEAN
OPTION USING BINOMIAL TREE METHOD***

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

FARADILLA DAYINTA RAHMAYANI
NRP. 06111640000016

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si

NIP. 19610822 198701 2

Dosen Pembimbing I,



Endah Rokhmati M.P., Ph.D

NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS



Subchan, Ph.D

NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, 19 Agustus 2020

SIMULASI *GREEKS* PADA OPSI TIPE EROPA MENGGUNAKAN METODE BINOMIAL *TREE*

Nama Mahasiswa : Faradilla Dayinta Rahmayani
NRP : 06111640000016
Jurusan : Matematika FSAD-ITS
Pembimbing : 1. Endah Rokhmati M.P.,Ph.D
2. Drs. Daryono Budi Utomo, MSi

Abstrak

Salah satu masalah yang sering dijumpai pada perdagangan opsi saham yaitu fluktuasi harga saham. Bagi pemegang opsi terutama opsi tipe Eropa perlu melakukan perlindungan nilai akibat dari permasalahan ini. Perlindungan nilai dapat dilakukan dengan menghitung Greeks. Greeks merupakan istilah yang menggambarkan aspek kerugian opsi. Metode binomial Tree merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan harga opsi sekaligus dengan Greeks. Penelitian ini membahas mengenai simulasi Greeks pada opsi tipe Eropa menggunakan metode binomial Tree. Asumsi yang digunakan berdasarkan dua perubahan harga underlying asset yaitu naik dan turun. Selanjutnya, simulasi yang diperoleh dibandingkan dengan hasil analitik Greeks menggunakan model Black-Scholes. Perbandingan ini membuktikan, semakin banyak langkah yang diambil dalam metode binomial Tree menghasilkan nilai error yang kecil. Hal ini menunjukkan bahwa metode binomial Tree konvergen terhadap model Black-Scholes.

Kata kunci : *opsi , opsi tipe Eropa, binomial Tree, Greeks*

GREEKS SIMULATION OF AN EUROPEAN OPTION USING BINOMIAL TREE METHOD

Name : Faradilla Dayinta Rahmayani
NRP : 06111640000016
Department : Mathematics FSAD-ITS
Supervisors : 1. Endah Rokhmati M.P.,Ph.D
2. Drs. Daryono Budi Utomo, MSi

Abstract

A problem that is often found in stock option trading is fluctuation in stock prices. For European option holders need to protect the value of the consideration of this dispute. Hedging can be done by calculating Greeks. Greeks is a term revised by the option loss aspect. The binomial Tree method is method that can be used to determine the price of an option with the Greeks. This study discusses the simulation of Greeks on European type option using the binomial Tree method. The assumptions used are based on two changes in price underlying assets, namely up and down. Furthermore, the simulation obtained is compared with the analytic results Greeks using the Black-Scholes model. This comparison proves, the more steps taken in the binomial Tree method produce a small error value. This shows that the binomial Tree method converges to the Black-Scholes model.

Keyword : *option , European option, binomial Tree, Greeks*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena berkah, rahmat dan ridho-Nya, penulis dapat menyelesaikan Penelitian Tugas Akhir yang berjudul *SIMULASI GREEKS PADA OPSI TIPE EROPA MENGGUNAKAN METODE BINOMIAL TREE* yang merupakan salah satu syarat akademis untuk menyelesaikan Program Sarjana Strata Tingkat 1 Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat doa, kerja sama, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak. Sehubungan dengan hal tersebut, penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Subchan, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika ITS dan Ibu Dr. Dwi Ratna S.,MT selaku sekretaris Departemen I Matematika ITS yang telah membantu dan memberi dukungan selama perkuliahan hingga terselesaikannya tugas akhir ini.
2. Ibu Endah Rokhmati M.P.,Ph.D dan Bapak Drs. Daryono Budi Utomo, MSi selaku dosen pembimbing, berkat bimbingan dan dukungan, saya mampu menyelesaikan tugas akhir ini dengan lancar.
3. Dra. Wahyu Fistia Doctorina, M.Si selaku Dosen Wali penulis sejak semester 5 sampai semester 8 yang telah memberikan bimbingan dan motivasi selama penulis menjalani perkuliahan di Departemen Matematika ITS
4. Seluruh Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika ITS yang telah memberikan ilmu, bimbingan, dan motivasi kepada penulis selama kuliah di Departemen Matematika ITS.

5. Seluruh Staff Departemen Matematika ITS yang telah memberikan pelayanan dan membantu penulis selama kuliah di Departemen Matematika ITS.
6. Kedua orang tua, kakek, nenek yang tidak pernah berhenti memberi semangat, motivasi dan tidak lupa memberikan doa kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir.
7. Teman-teman istimewa, Kirana, Hasna, Rizka, Farida, Islah, dan Novia yang sudah memberikan dukungan, nasihat, bantuan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir dengan lancar.
8. Teman SMA teristimewa, Aldit, Hilman, Nuzula, Mira dan teman lainnya yang telah memberikan hiburan maupun dukungan, mendengarkan keluh-kesah penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
9. Teman-teman terbaik Kabinet Bahtera Cipta, Ario, Fafa, Rani, Adli, Alvaro, Chandra, Yuda, Ghani, Dian, Wildan, Mifta, Alvia yang telah mengajarkan banyak hal kepada penulis selama berada di Departemen Matematika ITS.
10. Fachri dan Firman yang telah memberikan bantuan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir dikala kesibukannya.
11. Teman-Teman angkatan 16 'Lemniscate', yang telah menemani penulis senang maupun sedih selama berada di Departemen Matematika ITS.
12. Semua pihak yang belum disebutkan yang telah membantu dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Penulis juga mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak untuk perbaikan isi Tugas Akhir ini. Segala kritik dan saran akan penulis terima dan akan disambut dengan senang hati.

Surabaya, 5 Agustus 2020

Faradilla Dayinta Rahmayani

DAFTAR ISI

	Halaman
DAFTAR ISI	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Opsi	6
2.3 Opsi Beli	7
2.4 Opsi Jual	7
2.5 Opsi Tipe Eropa	7
2.6 Metode Binomial <i>Tree</i>	8
2.6.1 Parameter u , d dan p	11
2.7 Istilah <i>Greeks</i>	12

2.7.1	Delta (Δ)	12
2.7.2	Theta (θ)	13
2.7.3	Gamma (Γ)	14
2.7.4	Vega (ν)	14
2.7.5	Rho (ρ)	15
2.8	Hubungan Delta, Gamma dan Theta	16
2.9	MAPE (Mean Absolute Percentage Error)	16
2.10	Teorema Limit Sentral	17
BAB III	METODE PENELITIAN	19
3.1	Tahapan Penelitian	19
3.2	Diagram Alir	21
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	23
4.1	Solusi Analitik Persamaan Black-Scholes	23
4.2	Solusi Analitik <i>Greeks</i> dengan Persamaan Black-Scholes	28
4.3	Solusi Numerik Persamaan Black-Scholes Menggunakan Metode Binomial <i>Tree</i>	36
4.3.1	Model Binomial <i>Tree</i>	36
4.3.2	Menentukan Parameter u , d dan p	37
4.4	Solusi Numerik <i>Greeks</i> Persamaan Black-Scholes Menggunakan Metode Binomial <i>Tree</i>	43
4.4.1	Delta	43
4.4.2	Theta	44
4.4.3	Gamma	46
4.4.4	Vega	47
4.4.5	Rho	48
4.5	Simulasi <i>Greeks</i> menggunakan Metode Binomial <i>Tree</i>	49
4.5.1	Harga Opsi	51
4.5.2	Delta	53
4.5.3	Theta	56
4.5.4	Gamma	59

4.5.5	Vega	62
4.5.6	Rho	65
BAB V	KESIMPULAN DAN SARAN	69
5.1	Kesimpulan	69
5.2	Saran	70
DAFTAR PUSTAKA		71
BIODATA PENULIS		73

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Tabel <i>Range</i> Nilai MAPE	17
Gambar 3.1	Diagram Alir Metode Penelitian	21
Gambar 4.1	Skema Binomial <i>Tree</i> Harga <i>Underlying Asset</i> $dt = 2$	44
Gambar 4.2	Skema Binomial <i>Tree</i> Harga Opsi $dt =$ 2	45
Gambar 4.3	Skema Penentuan Vega	48
Gambar 4.4	Skema Penentuan Rho	48
Gambar 4.5	Hasil Simulasi <i>Greeks</i> dengan Metode Binomial <i>Tree</i>	49
Gambar 4.6	Hasil Simulasi <i>Greeks</i> dengan Model Black-Scholes	50
Gambar 4.7	Tabel Hasil MAPE Harga Opsi Langkah ke-n	51
Gambar 4.8	Grafik Perbandingan Harga Opsi	52
Gambar 4.9	Grafik Error Harga Opsi	52
Gambar 4.10	Grafik Perbandingan Jumlah Langkah Metode Binomial <i>Tree</i> dengan Delta	53
Gambar 4.11	Grafik Error Delta	54
Gambar 4.12	Grafik Perbandingan Delta dengan Perubahan Harga <i>Underlying Asset</i>	55
Gambar 4.13	Grafik Perbandingan Jumlah Langkah Metode Binomial <i>Tree</i> dengan Theta	56
Gambar 4.14	Grafik Error Theta	57
Gambar 4.15	Grafik Perbandingan Theta dengan Perubahan Harga <i>Underlying Asset</i>	58

Gambar 4.16 Grafik Perbandingan Jumlah Langkah Metode Binomial <i>Tree</i> dengan Gamma	59
Gambar 4.17 Grafik Error Gamma	60
Gambar 4.18 Grafik Perbandingan Gamma dengan Perubahan Harga <i>Underlying Asset</i>	61
Gambar 4.19 Grafik Perbandingan Jumlah Langkah Metode Binomial <i>Tree</i> dengan Vega	62
Gambar 4.20 Grafik Error Vega	63
Gambar 4.21 Grafik Perbandingan Vega dengan Perubahan Harga <i>Underlying Asset</i>	64
Gambar 4.22 Grafik Perbandingan Jumlah Langkah Metode Binomial <i>Tree</i> dengan Rho	65
Gambar 4.23 Grafik Error Rho	66
Gambar 4.24 Grafik Perbandingan Rho dengan Perubahan Harga <i>Underlying Asset</i>	66

Daftar Simbol

$V(S, t)$	Harga opsi beli
S	Harga aset dasar
K	Harga yang disepakati dalam kontrak
r	Tingkat bunga bebas risiko
T	Tanggal jatuh tempo
t	Waktu
σ	Volatilitas
Δ	Delta
θ	Theta
Γ	Gamma
ν	Vega
ρ	Rho
f	Harga opsi binomial <i>Tree</i>
S	Harga aset dasar pada binomial <i>Tree</i>
u	Faktor perubahan naik binomial <i>Tree</i>
d	Faktor perubahan turun binomial <i>Tree</i>
p	Peluang perubahan naik
dt	<i>Time step</i>
M	Jumlah step binomial <i>Tree</i>

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring berjalannya waktu, perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi semakin pesat. Perkembangan ini semakin memudahkan manusia dalam segala bidang mulai dari permasalahan umum hingga di bidang yang memerlukan ilmu pengetahuan tinggi. Salah satu perkembangan ilmu pengetahuan yaitu di bidang Matematika. Perkembangan matematika seringkali memungkinkan penerapan ilmu matematika yang baru pada bidang ilmu lain. Salah satu aplikasi ilmu matematika adalah pada masalah investasi. Investasi menurut Tandelilin (2010) merupakan komitmen atas sejumlah dana atau sumber daya lainnya yang dilakukan pada saat ini, dengan tujuan memperoleh sejumlah keuntungan di masa mendatang. Investasi memiliki banyak bentuk seperti investasi pada aset real yaitu tanah, rumah dan lain-lain, juga dapat investasi pada aset finansial yang kompleks seperti opsi, ekuitas internasional dan sebagainya. [1]

Salah satu contoh aset finansial yang kompleks adalah opsi. Menurut Bursa Efek Indonesia, opsi atau kontrak opsi saham merupakan hak yang dimiliki oleh pihak untuk membeli (*call option*) dan atau menjual (*put option*) kepada pihak lain atas sejumlah saham (*underlying stock*) pada harga (*strike price*) dan dalam waktu tertentu. Berdasarkan jenis hak nya opsi dibedakan menjadi dua yaitu opsi jual dan opsi beli. Opsi jual merupakan opsi yang memberikan pemilik nya hak untuk menjual saham dalam jumlah tertentu kepada

pembeli opsi tersebut dalam harga dan jangka waktu yang sudah ditentukan, berlaku sama untuk opsi beli. Opsi yang berdasarkan periode waktu pemakaiannya dibedakan menjadi dua yaitu opsi tipe Eropa dan tipe Amerika. Opsi tipe Amerika yaitu opsi yang dapat digunakan setiap saat sebelum waktu yang ditentukan, berbanding terbalik dengan opsi tipe Eropa yang hanya dapat digunakan ketika tepat pada waktu yang sudah ditentukan. Untuk opsi tipe Eropa jika terjadi perubahan signifikan terhadap nilai saham, pemilik tidak bisa menggunakan opsi tersebut sebelum waktu yang telah ditentukan.[2]

Perdagangan investasi dalam pelaksanaannya perlu melihat segala aspek resiko yang memungkinkan untuk dapat menentukan keputusan terhadap investasi ini, karena setiap waktu akan mengalami perubahan tidak hanya dalam bidang harga yang dapat naik turun, namun perubahan nilai dari investasi tersebut apakah semakin menguntungkan untuk kedepannya atau merugi. Perlu adanya perhitungan untuk dapat menunjukkan posisi investasi ini berada dalam posisi yang menguntungkan untuk diperdagangkan atau tidak. Istilah *Greeks* dalam masalah investasi, merupakan istilah yang digunakan dalam pasar opsi yaitu untuk menggambarkan beberapa jenis dimensi kerugian didalam posisi opsi tersebut. Istilah *Greeks* muncul karena penulisan dari variabel-variabelnya yang menggunakan simbol Yunani. Variabel yang digunakan antara lain Delta, Theta, Gamma, Vega dan Rho. Setiap variabel menggambarkan aspek pada opsi antara lain, harga *underlying assets*, harga opsi, waktu, volatilitas dan sebagainya. Menganalisis dalam kasus ini sangat penting untuk manajemen kerugian seperti yang terdapat pada Hull [2]. Seiring berjalannya waktu, para ilmuwan mengkaji guna menganalisis pasar opsi dengan cara yang lebih efisien yaitu menganalisis *Greeks* menggunakan

metode binomial *Tree* dan kalkulus diskrit *Malliavian* oleh Muroi et al[3] menurut mereka kalkulus *Malliavin* susah diaplikasikan oleh orang awam sehingga mereka mencoba untuk menggunakannya dengan model binomial *Tree*. Dewasa ini, terdapat algoritma efisien untuk menganalisis *Greeks* dalam opsi tipe Eropa menggunakan binomial *Tree* yang mana mereka memberikan 3 poin keuntungan dalam menggunakan binomial *Tree* yaitu yang pertama, menggunakan matematika lebih mudah dibandingkan dengan pendekatan kalkulus *Malliavin* kontinu. Kedua, dapat mengkonstruksi algoritma sederhana untuk memperoleh *Greeks* untuk opsi tipe Amerika. Ketiga, algoritma sangat efisien karena dapat menghitung harga dan *Greeks* sekaligus.[4]

Berdasarkan hasil penjelasan dan penelitian diatas maka dapat disimpulkan bahwa sangat perlu dilakukan perlindungan nilai terhadap opsi dengan menghitung *Greeks*, karena *Greeks* dapat menggambarkan berbagai aspek kerugian dalam opsi. Sisi lain dari *Greeks* sangat diperlukan, menggunakan metode binomial *Tree* juga dirasa efisien karena dapat menentukan harga opsi sekaligus *Greeks*-nya. Maka tugas akhir ini membandingkan hasil solusi numerik *Greeks* menggunakan metode binomial *Tree* dengan solusi analitik *Greeks* dari model Black-Scholes.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut dapat disusun rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana penerapan *Greeks* menggunakan metode binomial *Tree* pada opsi tipe Eropa?
2. Bagaimana hasil simulasi dari penerapan *Greeks* dengan menggunakan metode binomial *Tree* pada opsi tipe Eropa?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas akan dibatasi ruang lingkup pembahasannya, antara lain :

1. Opsi yang digunakan opsi tipe Eropa berjenis *call option* yang non-dividen.
2. *Greeks* yang akan digunakan adalah Delta, Theta, Gamma, Rho dan Vega.
3. Metode yang akan digunakan yaitu metode binomial *Tree*.
4. Software yang digunakan untuk simulasi yaitu MATLAB.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Untuk mengetahui penerapan *Greeks* menggunakan metode binomial *Tree* pada opsi tipe Eropa.
2. Untuk mengetahui hasil simulasi penerapan *Greeks* menggunakan metode binomial *Tree* pada opsi tipe Eropa.

1.5 Manfaat

Manfaat yang akan diperoleh dari penelitian ini yaitu :

1. Hasil simulasi dapat dijadikan referensi sebagai implementasi pada opsi tipe Eropa.
2. Memberikan hasil perbandingan antara solusi analitik dan solusi numerik dari model *Black-Scholes*.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terdahulu

Diawali penelitian oleh *Cox et al* berjudul ” *Option Pricing : A Simplified Approach*” [6], penelitian ini menyajikan model waktu-diskrit sederhana untuk menilai opsi. Penelitian ini melakukan penentuan harga opsi menggunakan pendekatan metode binomial, jika harga saham bergerak sesuai dengan proses diskrit binomial sehingga dapat langsung menentukan harga opsi sendiri. Seiring berjalannya waktu, penelitian yang dilakukan oleh Antoon Pelsser, Ton Vorst (1994) berjudul ” *The Binomial Model and The Greeks*” [7], penelitian ini membandingkan dua alternatif untuk menghitung rasio lindung nilai menggunakan model binomial penentuan harga opsi. Penelitian ini ditunjukkan bahwa, diferensiasi numerik tidak hanya memperlambat dibandingkan dengan alternatif yang diberikan yaitu menggunakan metode binomial, namun kurang akurat dalam perhitungan Gamma. Data yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan opsi beli tipe Eropa non-dividen, yaitu dianggap dapat membandingkan hasil pendekatan derivatif dengan nilai sebenarnya dari derivatif model Black-Scholes. Hasil yang didapatkan dari penelitian ini disebutkan bahwa metode perluasan binomial yang digunakan tidak hanya cepat namun cocok dibandingkan dengan metode diferensiasi numerik untuk menghitung Delta dan Gamma dari opsi tersebut.

Kemudian penelitian selanjutnya dilakukan oleh Chung, San-lin dan Shackleton, Mark (2002) berjudul ” *The Binomial Black-Scholes Model and The Greeks*” [5], penelitian ini

kembali mengangkat pilihan untuk menghitung rasio lindung nilai opsi yang sebelumnya telah dibahas oleh Pelsser dan Vorst (1994). Mereka mendemonstrasikan diferensiasi numerik dari model binomial dibandingkan secara kurang baik, terhadap perluasan metode yang telah mereka konstruksikan. Penelitian ini menunjukkan bahwa metode Binomial-Black Scholes tidak mengalami permasalahan yang sama namun lebih efektif dalam perhitungan *Greeks*. Hasil dari penelitian ini membuktikan bahwa metode binomial Black-Scholes oleh Broadie dan Detemple (1996) tidak hanya berguna dalam penentuan harga opsi, namun bagi perhitungan *Greeks* dengan diferensiasi numerik. Selanjutnya penelitian oleh Muroi, Yoshifumi dan Suda, Shintaro (2017) berjudul " *Computation of Greeks Using Binomial Tree*" [4], penelitian ini menyajikan algoritma yang efisien untuk menghitung *Greeks* pada opsi menggunakan metode binomial Tree dan menunjukkan bahwa, *Greeks* pada opsi tipe Eropa asimtotik ekuivalen terhadap versi diskrit dari *Mallivian Greeks*. Tidak hanya untuk opsi tipe Eropa, namun penelitian ini juga menghasilkan algoritma efisien untuk menghitung *Greeks* pada opsi tipe Amerika dimana akurat dan efisien juga.

2.2 Opsi

Opsi menurut (Lishang Jiang 2005) merupakan kontrak berisikan hak bagi pemegangnya untuk membeli atau menjual sebuah aset yang mendasari kontrak tersebut dengan waktu dan harga yang sudah ditentukan. Opsi terdiri dari dua nilai dasar yaitu nilai *intrinsic* dan nilai *extrinsic*. Nilai *intrinsic* terdiri dari harga *underlying asset* dan *strike price*. Nilai *extrinsic* terdiri dari volatilitas, waktu dan tingkat suku bunga. Kedua nilai ini merupakan nilai dasar pembentukan opsi. Pemegang opsi memiliki hak dan kewajiban untuk melaksanakan perjanjian yang tertera pada kontrak. Harga yang sudah ditentukan biasa disebut dengan *strike price*,

untuk waktu yang ditentukan disebut dengan *maturity date*. Berdasarkan fungsinya, opsi dibedakan menjadi dua yaitu opsi jual dan opsi beli. Kontrak hak membeli disebut dengan *call option* sedangkan kontrak hak menjual disebut *put option*. Pembeli dari opsi disebut dengan *taker* dan penerbit dari opsi tersebut ialah *writer*.

2.3 Opsi Beli

Opsi beli merupakan kontrak yang berisikan hak membeli sebuah aset yang mendasari (*underlying assets*) pada waktu dan harga yang sudah di tentukan. Opsi beli biasa disebut dengan *call option*. Opsi beli didefinisikan sebagai berikut

$$V(S, T) = (S_T - K)^+, \quad (2.1)$$

dengan $V(S, T)$ merupakan nilai opsi pada saat *expired date*, S_T sebagai harga aset yang mendasari, untuk K merupakan harga yang sudah disepakati dalam kontrak (*strike price*) dan T merupakan *expired date*.

2.4 Opsi Jual

Opsi jual merupakan kontrak yang berisikan hak menjual sebuah aset yang mendasari (*underlying assets*) pada waktu dan harga yang sudah di tentukan. Opsi jual biasa disebut dengan *put option*. Opsi jual didefinisikan sebagai berikut

$$V(S, T) = (K - S_T)^+, \quad (2.2)$$

dengan $V(S, T)$ merupakan nilai opsi pada saat *expired date*, S_T sebagai harga aset yang mendasari, untuk K merupakan harga yang sudah disepakati dalam kontrak (*strike price*) dan T merupakan *expired date*.

2.5 Opsi Tipe Eropa

Opsi dibedakan menjadi dua berdasarkan waktu pelaksanaannya yaitu opsi tipe Eropa dan Amerika.

Penamaan ini tidak berdasarkan wilayah yang mana terdapat opsi tipe Eropa yang diperjualbelikan pada Amerika. *American option* merupakan opsi yang waktu pemakaiannya yaitu di semua waktu hingga batas habis kontrak tersebut (*expired date*), sedangkan untuk *European option* merupakan opsi yang waktu pemakaiannya yaitu hanya pada waktu kontrak tersebut habis. Opsi ini juga terdapat *put option* dan *call option*. Penentuan harga *European Option* menggunakan model matematika yaitu model Black-Scholes.

Model Black-Scholes pertama kali di perkenalkan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1970 yang dipergunakan untuk menentukan harga opsi tipe Eropa. Model ini memiliki pengaruh besar terhadap harga perdagangan dan dalam penentuan lindung nilai dari opsi tersebut. Model Black-Scholes didefinisikan sebagai berikut

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial V}{\partial S} + rV = 0. \quad (2.3)$$

2.6 Metode Binomial Tree

Teknik penentuan harga opsi yang di perkenalkan oleh *Cox et al*[6] yang telah di publikasikan melalui buku Hull [2] merupakan teknik yang menggunakan metode binomial Tree. Diagram binomial *Tree* dapat merepresentasikan alur perubahan harga opsi yaitu berubah naik maupun berubah turun. Setiap perubahan terdapat probabilitas yang mengikuti, yaitu terdapat probabilitas naik atau turun.

Mempertimbangkan saham dengan harga S_0 dan harga opsi saat ini yaitu f . Asumsikan bahwa opsi berlangsung dalam kurun waktu T dan pada kurun waktu tersebut harga saham dapat naik dari harga S_0 ke satu tingkat di atasnya S_0u dengan $u > 1$, yang mana u merupakan faktor perubahan naik. Selanjutnya harga saham dapat turun menjadi S_0d dengan $d < 1$ yang mana d merupakan faktor

perubahan turun. Presentase kenaikan harga saham ketika terdapat pergerakan naik yaitu $u - 1$ namun ketika mengalami pergerakan menurun presentase menjadi $1 - d$. Ketika harga saham naik hingga S_0u diasumsikan imbal balik dari opsi tersebut f_u , berlaku juga jika harga saham menurun hingga S_0d mengasumsikan imbal balik dari opsi tersebut f_d . Seperti yang kita ketahui portofolio terdiri dari *long position* pada Δ dan pada *short position* pada satu opsi. Maka dengan menghitung nilai dari Δ yang dapat mengurangi resiko, jika terdapat perubahan harga saham, nilai portofolio dari opsi di akhir menjadi

$$S_0u\Delta - f_u, \quad (2.4)$$

jika terdapat perubahan menurun pada harga saham, nilai menjadi

$$S_0d\Delta - f_d. \quad (2.5)$$

Asumsi yang digunakan dalam pemodelan metode binomial *Tree* ini yaitu :

1. Harga S_0 , sebagai harga awal, selama setiap periode waktu t hanya dapat berubah dalam dua kemungkinan yaitu naik menjadi S_u atau turun menjadi S_d dengan $0 < d < u$. Parameter u dan d masing-masing merupakan faktor perubahan naik dan turun yang konstan untuk setiap dt .
2. Peluang perubahan naik adalah p , $P(\text{naik}) = p$. Sehingga $P(\text{turun}) = 1 - p$.
3. Ekspektasi harga saham secara acak kontinu, dengan suku bunga bebas resiko r , dari S_i pada waktu t_i menjadi S_{i+1} pada waktu t_{i+1} ,

sehingga dari persamaan (2.6) dan (2.7) didapatkan

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0U - S_0d}. \quad (2.6)$$

Pada kasus ini, portofolio bebas risiko dan tanpa adanya arbitrase. Persamaan (2.8) menunjukkan bahwa Δ merupakan rasio perubahan harga opsi terhadap perubahan harga *underlying asset* setiap melakukan perpindahan langkah pada waktu T .

Jika tingkat bunga bebas risiko kita simbolkan r , maka nilai saat ini dari portofolio menjadi

$$(S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}.$$

Selanjutnya bentuk lain dari nilai saat ini portofolio adalah

$$S_0 \Delta - f.$$

Akibatnya

$$S_0 \Delta - f = (S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT},$$

atau

$$f = S_0 \Delta (1 - u) e^{-rT} + f_u e^{-rT}.$$

Selanjutnya substitusikan Δ dengan persamaan (2.8) sehingga persamaan diatas menjadi

$$f = S_0 \left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \right) (1 - u) e^{-rT} + f_u e^{-rT}.$$

Asumsikan $p = \frac{(e^{rT} - d)}{u - d}$ sehingga harga opsi menggunakan metode binomial *Tree* satu langkah menjadi

$$f = e^{-rT} (p f_u + (1 - p) f_d). \quad (2.7)$$

2.6.1 Parameter u , d dan p

Parameter u , d dan p merupakan parameter yang digunakan dalam menggunakan metode binomial *Tree*. Seperti yang diketahui sebelumnya, parameter u merupakan faktor perubahan naik, sedangkan parameter d merupakan faktor perubahan turun. Parameter p merupakan probabilitas naik, untuk probabilitas turun dinotasikan $1-p$. Parameter u , d dan p merupakan parameter yang dipilih untuk memberikan metode binomial *Tree* memiliki karakteristik yang sama dengan aset yang akan dimodelkan. Hal ini dapat diasumsikan bahwa dalam aset yang akan dimodelkan memiliki ekspektasi *return* pada aset yang mendasari yaitu μ dan volatilitasnya σ .

Ekspektasi harga aset yang mendasari pada akhir langkah satu oleh aset yang akan dimodelkan adalah $S_0 e^{\mu dt}$. Sedangkan ekspektasi harga aset yang mendasari metode binomial *Tree* pada waktu yang sama yaitu

$$pS_0u + (1-p)S_0d.$$

Untuk menyamakan ekspektasi *return* pada aset yang mendasari dengan parameter yang terdapat pada metode binomial *Tree*, didapatkan sebagai berikut

$$pS_0u + (1-p)S_0d = S_0 e^{\mu dt}.$$

Volatilitas σ dari harga aset yang mendasari didefinisikan sehingga $\sigma\sqrt{dt}$ merupakan standar deviasi dari *return* harga aset yang mendasari pada periode waktu dt . Hal ini menyebabkan varians dari *return* menjadi $\sigma^2\sqrt{dt}$. Varians dengan metode binomial *Tree* didapatkan sebagai berikut

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2.$$

Untuk menyamakan volatilitas harga aset yang mendasari dengan parameter yang terdapat pada metode binomial *Tree*, didapatkan sebagai berikut

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - [pu + (1 - p)d]^2 = \sigma^2 \sqrt{dt}.$$

2.7 Istilah *Greeks*

Istilah *Greeks* dalam masalah investasi merupakan istilah yang digunakan dalam pasar opsi yaitu menggambarkan beberapa jenis dimensi kerugian didalam posisi opsi tersebut. Istilah *Greeks* muncul karena penulisan dari variabel-variabelnya menggunakan simbol Yunani. Variabel yang digunakan antara lain sebagai berikut

2.7.1 Delta (Δ)

Delta yaitu tingkat perubahan harga opsi dengan harga aset yang mendasari (*underlying assets*). Delta merupakan kemiringan kurva antara harga opsi dengan harga aset yang mendasari. Harga opsi terletak pada sumbu Y sedangkan harga aset pada sumbu X. Jika suatu opsi memiliki nilai Delta 0,6 maka ketika terdapat perubahan harga aset maka harga opsi tersebut berubah 60 persen dari harga. Delta didefinisikan sebagai berikut

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad (2.8)$$

dengan V merupakan harga dari *call option* dan S merupakan harga aset.

Delta pada opsi beli tipe Eropa didefinisikan sebagai berikut

$$\Delta(\text{call}) = N(d_1), \quad (2.9)$$

dengan d_1 yang didefinisikan pada (2.5) dan $N(x)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif. Delta pada opsi jual tipe Eropa

didefinisikan sebagai berikut

$$\Delta(\text{put}) = N(d_1) - 1, \quad (2.10)$$

Delta dari opsi jual bernilai negatif yang berarti bahwa *long position* pada opsi jual perlu lindung nilai dengan *long position* pada *underlying asset* berlaku juga pada *short position*.

2.7.2 Theta (θ)

Theta merupakan tingkat perubahan pada nilai portofolio berdasarkan berjalannya waktu. *Theta* didefinisikan sebagai berikut

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (2.11)$$

dengan V merupakan harga dari *call option* dan t merupakan waktu. Pada suatu kasus *Theta* disebut penyusutan waktu pada portofolio. Untuk *European Call Option* pada pembayaran stok non-dividen dapat ditunjukkan dari rumus Black-Scholes sebagai berikut

$$\theta(\text{call}) = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - rK e^{-rT} N(d_2), \quad (2.12)$$

dan

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (2.13)$$

merupakan peluang fungsi kepadatan untuk distribusi normal standar.

Untuk *European put option* pada saham

$$\theta(\text{put}) = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} + rK e^{-rT} N(-d_2), \quad (2.14)$$

karena $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$, *Theta* dari *put option* melampaui dari *Theta* yang seharusnya oleh $rK e^{-rT}$ pada persamaan ini, waktu dihitung berdasarkan tahun. Ketika *theta* dengan

petik, waktu yang dimasukkan berdasarkan harian, sehingga Theta merupakan perubahan pada nilai portofolio ketika hari pertama berlalu. Theta bernilai negatif dikarenakan seiring dengan berjalannya waktu suatu opsi akan berkurang nilainya.

2.7.3 Gamma (Γ)

Gamma dari portofolio opsi pada aset yang mendasari merupakan tingkat perubahan dari portofolio Delta berdasarkan harga dari aset yang mendasari. Gamma merupakan turunan kedua dari portofolio berdasarkan harga aset sebagai berikut

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad (2.15)$$

dengan V merupakan harga dari *call option* dan S merupakan harga aset. Jika Gamma bernilai kecil maka Delta berubah secara perlahan. Sebaliknya, jika Gamma bernilai tinggi positif maupun negatif maka Delta sensitif terhadap harga *underlying asset*. Ketika harga *underlying asset* bergerak dari S ke S' , Delta memberikan asumsi bahwa perubahan harga opsi bergerak dari V ke V' namun pada kenyataannya terdapat perubahan dari V' ke V'' . Perbedaan antara V' dan V'' mengakibatkan error pada lindung nilai. Gamma menghitung besarnya error pada lindung nilai tersebut.

Untuk *European call or put option* pada saham non dividen didefinisikan Gamma sebagai berikut

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}, \quad (2.16)$$

dengan d_1 didefinisikan pada (2.5). Gamma pada posisi beli selalu bernilai positif dan berubah dengan nilai dari S_0 .

2.7.4 Vega (ν)

Asumsikan bahwa volatilitas dari derivatif aset yang mendasari yaitu konstan. Pada kenyataannya, volatilitas

berubah sepanjang waktu. Dapat diartikan bahwa nilai dari derivatif dapat berubah karena pergerakan pada volatilitas dan juga dikarenakan perubahan harga aset dan berjalannya waktu. Vega merupakan tingkat perubahan nilai dari portofolio berdasarkan volatilitas dari *underlying asset* didefinisikan sebagai berikut

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad (2.17)$$

dengan V merupakan harga dari *call option* dan σ merupakan volatilitas. Jika nilai vega sepenuhnya tinggi, nilai portofolio sangat sensitif terhadap perubahan kecil pada volatilitas. Jika nilai dari Vega rendah, volatilitas relatif berubah dengan efek yang rendah juga.

Sebuah posisi pada aset yang mendasari memiliki "zero Vega". Namun, Vega dari sebuah portofolio dapat diubah dengan cara menambah posisi pada opsi dagang. Jika ν merupakan Vega dari portofolio dan ν_T merupakan Vega dari opsi dagang, sehingga posisi dari $\frac{-\nu}{\nu_T}$ pada opsi dagang secara instan menjadikan portofolio menjadi Vega netral. Vega pada opsi jual tipe Eropa yang non-dividen didefinisikan sebagai berikut

$$\nu = S_0 \sqrt{T} N'(d_1). \quad (2.18)$$

2.7.5 Rho (ρ)

Rho pada opsi merupakan tingkat perubahan dari nilai portofolio dengan berdasarkan tingkat bunga

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad (2.19)$$

dengan V merupakan harga opsi dan r merupakan tingkat bunga. Hasil Rho dari sebuah *call option* yaitu positif, karena tingkat bunga yang tinggi mereduksi nilai saat ini (*present*

value)) dari harga yang telah disepakati. Akibatnya, harga dari *call option* menjadi tinggi.

Untuk *European call option* yang non-dividen didefinisikan Rho sebagai berikut

$$\rho = KT e^{-rT} N(d_2). \quad (2.20)$$

Selanjutnya untuk *European put option* akan bernilai negatif didefinisikan

$$\rho = -KT e^{-rT} N(-d_2). \quad (2.21)$$

2.8 Hubungan Delta, Gamma dan Theta

Harga dari suatu derivatif bergantung pada saham yang non-dividen dimana memenuhi persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

karena

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \theta = \frac{\partial V}{\partial t},$$

sehingga berlaku

$$\theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rV. \quad (2.22)$$

2.9 MAPE (Mean Absolute Percentage Error)

MAPE merupakan ukuran kesalahan relatif. Pengukuran akurasi ini merupakan rata rata kesalahan mutlak selama periode tertentu yang kemudian dikalikan 100% agar mendapatkan hasil persentase sehingga *MAPE* didefinisikan sebagai berikut

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y - \hat{y}}{\hat{y}} \right| \times 100\%. \quad (2.23)$$

dengan :

- n = banyak data
 y = nilai hasil aktual
 \hat{y} = nilai hasil pendekatan

MAPE berguna sebagai mengindikasikan seberapa besar kesalahan dalam pendekatan yang dibandingkan dengan hasil aktual.

Kemampuan prediksi data dikatakan baik ketika nilai *MAPE* semakin kecil. Gambar Gambar 2.1 menunjukkan tabel *range* klasifikasi nilai *MAPE*.

<i>Range</i> MAPE	Arti
<10%	Kemampuan pendekatan sangat baik
10% - 20%	Kemampuan pendekatan baik
20% - 50%	Kemampuan pendekatan layak
>50%	Kemampuan pendekatan buruk

Gambar 2.1: Tabel *Range* Nilai *MAPE*

2.10 Teorema Limit Sentral

Pada statistik dasar telah dibahas metode umum untuk mendapatkan fungsi distribusi dari variabel acak n adalah $Y_n = u(X_1, \dots, X_n)$. Beberapa permasalahan, PDF dari Y_n dapat diketahui dengan mudah namun terdapat juga yang sukar. Teorema limit sentral merupakan salah satu teorema yang digunakan untuk mendapatkan hasil pendekatan dengan n bernilai besar. Hasil tersebut didasarkan pada dugaan konvergensi dari distribusi limit. Teorema limit Sentral berbunyi sebagai berikut "Misal Y_1, Y_2, \dots adalah barisan variabel acak dengan CDF masing masing $G_1(y), G_2(y), \dots$ dan dengan MGF masing masing $M_1(y), M_2(y), \dots$. Jika $M(t)$

adalah MGF dari CDF $G(y)$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t) = M(t)$$

untuk semua t maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(t) = G(t)$$

untuk semua titik kontinu pada $G(y)$ ".[16]

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Tahapan Penelitian

Secara umum tahapan-tahapan yang akan dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

1. Studi literatur

Pada tahap ini akan dicari referensi yang berkaitan dengan penelitian ini. Referensi yang dicari meliputi opsi tipe Eropa, *Greeks*, metode *Binomial-Tree* dan lain sebagainya yang berhubungan dengan penelitian ini. Referensi yang dicari dapat diperoleh melalui jurnal yang sesuai dengan topik tugas akhir ini. Selain melalui jurnal yang terkait, studi literatur dapat diperoleh melalui buku teks yang berkaitan dengan opsi.

2. Menentukan solusi analitik persamaan Black-Scholes

Setelah mempelajari dan memahami referensi yang ada, pada tahap ini akan dicari solusi analitik dari persamaan Black-Scholes untuk selanjutnya dipakai ke tahap selanjutnya.

3. Menentukan solusi analitik *Greeks*

Pada tahap ini, setelah ditemukan solusi analitik untuk persamaan Black-Scholes maka dapat dicari solusi analitik *Greeks* dengan menggunakan solusi analitik dari persamaan Black-Scholes. Solusi analitik yang akan dicari yaitu Delta, Theta, Gamma, Vega dan Rho.

4. **Menentukan solusi numerik persamaan Black-Scholes dengan metode *Binomial-Tree***

Pada tahap ini, akan dicari solusi numerik dari persamaan Black-Scholes menggunakan metode *Binomial-Tree*

5. **Menentukan solusi numerik *Greeks* dengan metode *Binomial-Tree***

Setelah mendapatkan solusi numerik dari persamaan Black-scholes dapat menentukan solusi numerik untuk *Greeks*. Solusi numerik *Greeks* yang akan dicari yaitu Delta, Theta, Gamma, Vega dan Rho.

6. **Simulasi solusi numerik dengan menggunakan software *MATLAB***

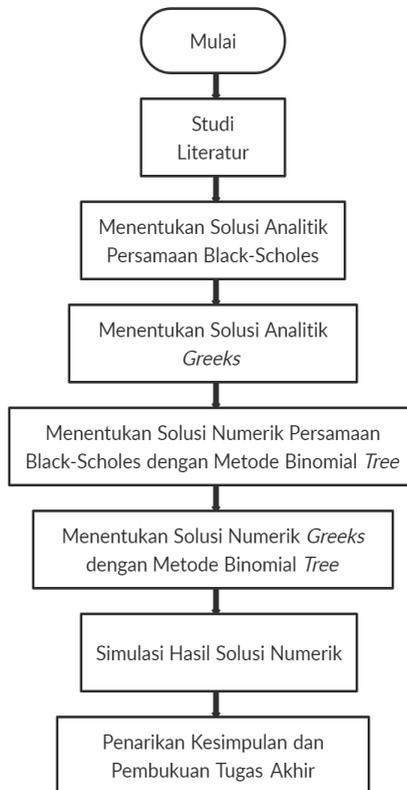
Pada tahap ini akan dilakukan implementasi dari solusi numerik *Greeks* menggunakan metode *Binomial-Tree* dengan program *MATLAB* yang selanjutnya di input dengan menggunakan data yang diambil. Pada tahap ini juga, akan membandingkan antara solusi analitik dan numerik yang sudah didapatkan.

7. **Penarikan kesimpulan dan pembukuan tugas akhir**

Pada tahap yang terakhir, akan di tarik kesimpulan dari penelitian yang dilakukan sebelumnya dan akan dilakukan pembukuan tugas akhir.

3.2 Diagram Alir

Secara umum tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini sesuai dengan diagram alir yang ditunjukkan pada



Gambar 3.1: Diagram Alir Metode Penelitian

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Solusi Analitik Persamaan Black-Scholes

Persamaan Black-Scholes didefinisikan sebagai berikut

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (4.1)$$

$$V \Big|_{t=T} = \begin{cases} (S - K)^+, & (\text{call option}) \\ (K - S)^+, & (\text{put option}) \end{cases}, \quad (4.2)$$

dengan $V = V(S, T)$ pada saat jatuh tempo $t = T$, persamaan (4.2) merupakan fungsi nilai *payoff* yaitu nilai yang dibayarkan ketika kadaluarsa tiba. $0 \leq S \leq \infty, 0 \leq t \leq T$, merupakan domain dari persamaan (4.1). Untuk menentukan harga *European call option* maka dilakukan transformasi terhadap

$$x = \ln S, \quad \tau = T - t. \quad (4.3)$$

Selanjutnya setelah di transformasi, substitusi dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \tau} (-1), \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{S}. \end{aligned}$$

Lalu substitusi juga dengan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{\partial V}{\partial S} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} \right] = \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{S} \right],\end{aligned}$$

akibat dari $\frac{\partial}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S}$ maka persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{S} \right] \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{S} \right] \frac{1}{S} \\ &= \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{1}{S} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{S} \right] \frac{1}{S} \\ &= \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{S}.\end{aligned}$$

Persamaan diatas dilanjutkan dengan substitusi akibat dari $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} = e^{-x}$, yang mana pada persamaan transformasi (4.3) $e^{-x} = \frac{1}{S}$ sehingga didapatkan sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \right].$$

Setelah dilakukan transformasi dan substitusi, persamaan (4.1) dan (4.2) dapat direduksi ke permasalahan Cauchy pada persamaan parabolik dengan koefisien yang konstan sehingga didapatkan

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial V}{\partial x} + rV = 0, \quad (4.4)$$

$$V \Big|_{\tau=0} = \begin{cases} (e^x - K)^+, & (\text{call option}) \\ (K - e^x)^+, & (\text{put option}), \end{cases} \quad (4.5)$$

dengan persamaan (4.5) merupakan nilai *payoff* setelah dilakukan transformasi.

Untuk menyelesaikan masalah Cauchy pada persamaan (4.4) dan (4.5) asumsikan

$$V = ue^{\alpha\tau + \beta x}, \quad (4.6)$$

pilih konstanta α, β sehingga persamaan (4.4) dapat direduksi menjadi persamaan panas didapatkan

$$\begin{aligned} V_\tau &= e^{\alpha\tau + \beta x}[u_\tau + \alpha u], \\ V_x &= e^{\alpha\tau + \beta x}[u_x + \beta u], \\ V_{xx} &= e^{\alpha\tau + \beta x}[u_{xx} + 2\beta u_x + \beta^2 u], \end{aligned}$$

substitusi pada persamaan (4.4) dan eliminasi $e^{\alpha\tau + \beta x}$, sehingga

$$U_\tau - \frac{\sigma^2}{2}U_{xx} - [\beta\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2}]U_x + [r - \beta(r - \frac{\sigma^2}{2}) - \frac{\sigma^2}{2}\beta^2 + \alpha]U = 0.$$

Ambil

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}, \\ \alpha &= -r - \frac{1}{2\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

untuk mereduksi persamaan (4.4) sehingga didapatkan persamaan panas

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (4.7)$$

Ambil nilai awal (*call option*)

$$U|_{\tau=0} = e^{-\beta x}V|_{\tau=0} = e^{-\beta x}(e^x - K)^+. \quad (4.8)$$

Solusi dari permasalahan yang Cauchy tepat untuk persamaan (4.7) yang diberikan oleh rumus poisson

$$U(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi,$$

dengan $\varphi(\xi)$ merupakan nilai awal dan $K(x - \xi, \tau)$ merupakan solusi fundamental dari persamaan panas (4.7)

$$K(x - \xi, \tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{2\sigma^2\tau}}.$$

Untuk solusi dari permasalahan Cauchy (4.7) dan (4.8) dapat ditulis

$$U(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{2\sigma^2\tau}} [e^{-\beta x} (e^x - K)^+] d\xi,$$

dengan $\beta = \frac{-1}{\sigma^2} (r - \frac{\sigma^2}{2})$. Untuk fungsi $V(x, \tau)$,

$$V(x, \tau) = U(x, \tau) e^{\alpha\tau + \beta x},$$

$$V(x, \tau) = U(x, \tau) e^{-r\tau - \frac{1}{2\sigma^2} (r - \frac{\sigma^2}{2})^2 \tau - \frac{1}{\sigma^2} (r - \frac{\sigma^2}{2}) x},$$

$$V(x, \tau) = I_1 + I_2,$$

dengan

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2\tau} (x - \xi)^2\right. \\ &+ \left. 2(x - \xi)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2\tau^2 + \xi\right] d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \\ &\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2\tau} [x - \xi + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]^2 + \xi\right] d\xi. \end{aligned}$$

Asumsikan $\eta = x - \xi + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau$ sehingga

$$I_1 = \frac{e^x}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau} e^{-\frac{(\eta + \frac{\sigma^2}{2}\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} d\xi.$$

Asumsikan $\omega = \frac{\eta + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ dan untuk $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$ yang mana $N(x)$ merupakan fungsi distribusi probabilitas kumulatif dari distribusi normal standar sehingga

$$I_1 = e^x N\left(\frac{x - \ln K + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

Hal ini berlaku sama untuk I_2 ,

$$\begin{aligned} I_2 &= -e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[x - \xi + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]^2} d\xi, \\ &= \frac{-e^{-r\tau} K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2\tau}} d\eta, \\ &= -K e^{-r\tau} N\left(\frac{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right). \end{aligned}$$

Akibat dari transformasi dengan (4.3) dikembalikan pada variabel awal yaitu (S, t) didapatkan

$$\begin{aligned} V(S, t) &= SN\left(\frac{\ln S - \ln K + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln S - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right), \end{aligned}$$

ambil

$$d_1 = \frac{\ln S - \ln K + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (4.9)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}, \quad (4.10)$$

sehingga solusi analitik model Black-Scholes penentuan harga *European call option* didapatkan sebagai berikut

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (4.11)$$

dengan :

- V(S,t) = harga *call option*
- S = harga aset yang mendasari
- K = harga yang disepakati dalam kontrak (*strike price*)
- r = tingkat bunga bebas risiko
- T = tanggal jatuh tempo (*expired date*)
- t = waktu
- σ = volatilitas.

4.2 Solusi Analitik *Greeks* dengan Persamaan Black-Scholes

Untuk penentuan harga *call option* pada tipe Eropa didefinisikan sebagai berikut

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (4.12)$$

$$d_1 = \frac{\ln S - \ln K + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t},$$

$$\tau = T - t, \quad (4.13)$$

dengan :

- V(S,t) = harga *call option*
- S = harga aset yang mendasari
- K = harga yang disepakati dalam kontrak (*strike price*)
- r = tingkat bunga bebas risiko
- T = tanggal jatuh tempo (*expired date*)
- t = waktu
- σ = volatilitas.

$N(d_1)$ merupakan fungsi kepadatan kumulatif atau *cumulative density function* sehingga

$$N(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} f(u)du = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (4.14)$$

$$N'(d_1) = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}, \quad (4.15)$$

untuk $N'(d_2)$ berlaku

$$\begin{aligned} N'(d_2) &= \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot e^{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \cdot e^{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \end{aligned}$$

$$N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \frac{S}{K} \cdot e^{r(T-t)}. \quad (4.16)$$

Selain persamaan diatas terdapat beberapa persamaan yang diperlukan untuk menentukan solusi analitik *Greeks* juga yaitu antara lain

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S \cdot \sigma \sqrt{T-t}}. \quad (4.17)$$

Untuk d_1 dan d_2 yang diturunkan oleh $\tau = T - t$ atau diturunkan berdasarkan waktu didapatkan

$$\frac{\partial d_1}{\partial \tau} = \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{\tau}} - \frac{\ln(\frac{S}{K})}{2\sigma\tau^{3/2}} - \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma\sqrt{\tau}}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \frac{S}{K} \cdot e^{r\tau} \left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{2\sigma\tau^{3/2}} - \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma\sqrt{\tau}} \right). \quad (4.19)$$

Untuk d_1 dan d_2 yang diturunkan oleh σ atau diturunkan berdasarkan volatilitas didapatkan

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \frac{\sigma^2\tau^{3/2} - \left(\ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)\tau^{1/2}}{\sigma^2\tau}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{S}{K} e^{r\tau} \frac{-\left(\ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)\tau^{1/2}}{\sigma^2\tau}. \quad (4.21)$$

Untuk d_1 dan d_2 yang diturunkan oleh r atau diturunkan berdasarkan tingkat bunga didapatkan

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}. \quad (4.22)$$

Persamaan diatas digunakan untuk dapat dengan mudah menentukan setiap parameter *Greeks* yang ada, untuk setiap parameter sebagai berikut

1. Delta

Delta merupakan parameter lindung nilai yang menggambarkan tingkat perubahan harga opsi dengan harga aset yang mendasari (*underlying assets*). Untuk menentukan Delta substitusikan persamaan (4.15) ke

dalam persamaan Delta sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{\partial V}{\partial S} \\
 &= \frac{\partial(SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2))}{\partial S} \\
 &= N(d_1) + S \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial S} \\
 &= N(d_1) + S \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} \\
 &\quad - Ke^{-r(T-t)} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \cdot \frac{\partial d_2}{\partial S}.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi persamaan (4.14),(4.16) beserta (4.17) untuk mendapatkan solusi analitik *Greeks* untuk Delta sehingga didapatkan

$$\Delta = N(d_1). \quad (4.23)$$

2. Theta

Theta merupakan parameter lindung nilai yang menggambarkan tingkat perubahan harga opsi berdasarkan waktu. Untuk menentukan Theta substitusi persamaan (4.15) ke persamaan Theta

sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \tau} \\
 &= \frac{\partial(SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2))}{\partial t} \\
 &= -S \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial \tau} - rKe^{-r\tau}N(d_2) + Ke^{r\tau} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial \tau} \\
 &= -S \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial \tau} - rKe^{-r\tau}N(d_2) \\
 &+ Ke^{r\tau} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial \tau}.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi persamaan (4.16) beserta (4.18) dan (4.19) untuk dapat menemukan solusi analitik *Greeks* Theta yang didapatkan sebagai berikut

$$\theta = -\frac{S \cdot \sigma}{2\sqrt{\tau}} N'(d_1) - rKe^{-r\tau}N(d_2). \quad (4.24)$$

3. Gamma

Gamma dari portofolio opsi pada aset yang mendasari merupakan tingkat perubahan dari portofolio Delta berdasarkan harga dari aset yang mendasari. Untuk menentukan Gamma diperlukan proses sebagai berikut

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right).\end{aligned}$$

Sebelumnya telah diketahui pada penurunan Delta yang mana $\frac{\partial V}{\partial S} = N(d_1)$ sehingga persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} \\ &= N'(d_1) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}.\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan diatas, letakkan S menjadi penyebut bersama dengan $\sigma\sqrt{\tau}$ sehingga solusi analitik *Greeks* Gamma didapatkan sebagai berikut

$$\Gamma = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} N'(d_1). \quad (4.25)$$

4. Vega

Vega merupakan tingkat perubahan nilai dari portofolio berdasarkan volatilitas dari *underlying asset*. Solusi dalam menentukan Vega adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \nu &= \frac{\partial V}{\partial \sigma} \\
 &= \frac{\partial(SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2))}{\partial \sigma} \\
 &= S \frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} - Ke^{-r\tau} \frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma} \\
 &= S \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r\tau} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \cdot \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}.
 \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas substitusi persamaan (4.15) dan (4.16) beserta (4.20) dan (4.21) sehingga persamaan menjadi

$$\nu = S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \left(\frac{\sigma^2 \tau^{3/2}}{\sigma^2 \tau} \right).$$

selanjutnya, persamaan di atas dapat disubstitusi kembali dengan persamaan (4.15) sehingga didapatkan solusi analitik *Greeks Vega* sebagai berikut

$$\nu = S\sqrt{\tau} \cdot N'(d_1). \quad (4.26)$$

5. Rho

Rho pada opsi merupakan tingkat perubahan dari nilai portofolio dengan berdasarkan tingkat bunga. Solusi untuk menentukan Rho adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{\partial V}{\partial r} \\
 &= \frac{\partial(SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2))}{\partial r} \\
 &= S \frac{\partial N(d_1)}{\partial r} - (-\tau).K.e^{-r\tau}N(d_2) \\
 &\quad - Ke^{-r\tau} \frac{\partial N(d_2)}{\partial r} \\
 &= S \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial r} + \tau.K.e^{-r\tau}N(d_2) \\
 &\quad - Ke^{-r\tau} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial r}.
 \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan diatas substitusi persamaan (4.15) dan (4.16) beserta (4.22) sehingga menjadi

$$\begin{aligned}
 \rho &= S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \right) + \tau.K.e^{-r\tau}N(d_2) \\
 &\quad - S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \right).
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan saling mengurangi $S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \right)$ maka didapatkan solusi analitik

Greeks Rho sebagai berikut

$$\rho = \tau.K.e^{-r\tau} N(d_2). \quad (4.27)$$

4.3 Solusi Numerik Persamaan Black-Scholes Menggunakan Metode Binomial *Tree*

Bagian ini akan dijelaskan dalam menentukan harga opsi dengan metode binomial *Tree* yang telah diperluas hingga tiga langkah.

4.3.1 Model Binomial *Tree*

Langkah-langkah yang sama akan dilakukan dalam menentukan harga opsi pada metode binomial *Tree* satu periode maka untuk metode binomial *Tree* dengan dua periode, diperoleh

$$f_u = e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}), \quad (4.28)$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}(pf_{ud} + (1-p)f_{dd}). \quad (4.29)$$

dengan f_u merupakan Substitusikan persamaan (4.28) dan (4.29) kedalam persamaan (2.10) diperoleh harga opsi *call* dengan metode binomial *Tree* dua periode adalah

$$\begin{aligned} f &= e^{-r\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d) \\ f &= e^{-r\Delta t}(pe^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}) \\ &\quad + (1-p)e^{-r\Delta t}(pf_{ud} + (1-p)f_{dd})) \\ f &= e^{-r\Delta t}(e^{-r\Delta t}(p^2f_{uu} + (1-p)f_{ud})) \\ &\quad + e^{-r\Delta t}(p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2f_{dd}) \end{aligned}$$

$$f = e^{-2r\Delta t}(p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}). \quad (4.30)$$

Menentukan metode binomial *Tree* dengan tiga periode digunakan langkah-langkah seperti yang dilakukan seperti diatas, maka diperoleh

$$f_{uu} = e^{-r\Delta t}(pf_{uuu} + (1-p)f_{uud}), \quad (4.31)$$

$$f_{ud} = e^{-r\Delta t}(pf_{uud} + (1-p)f_{udd}), \quad (4.32)$$

$$f_{dd} = e^{-r\Delta t}(pf_{udd} + (1-p)f_{ddd}), \quad (4.33)$$

substitusikan persamaan (4.31),(4.32) dan (4.33) kedalam persamaan (4.30) diperoleh harga opsi *call* dengan metode binomial *Tree* tiga periode adalah

$$f = e^{-2r\Delta t}(p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd})$$

$$f = e^{-2r\Delta t}(p^2 e^{-r\Delta t}(pf_{uuu} + (1-p)f_{uud})$$

$$+ 2p(1-p)e^{-r\Delta t}(pf_{uud} + (1-p)f_{udd})$$

$$+ (1-p)^2 f_{dd} = e^{-r\Delta t}(pf_{udd} + (1-p)f_{ddd}))$$

$$f = e^{-3r\Delta t}(p^3 f_{uuu} + 3p(1-p)f_{uud} + 3p(1-p)^2 f_{udd} + (1-p)^3 f_{ddd}). \quad (4.34)$$

4.3.2 Menentukan Parameter u , d dan p

Parameter u , d dan p merupakan parameter yang digunakan dalam menentukan harga opsi menggunakan metode binomial *Tree*. Parameter u merupakan faktor perubahan naik harga opsi maupun harga *underlying asset*. Untuk parameter d merupakan faktor perubahan turun harga opsi maupun harga *underlying asset*. Sedangkan parameter p merupakan peluang perubahan naik dari metode ini. Untuk

menentukan parameter u , d dan p dibutuhkan tiga persamaan yaitu :

1. Menyamakan ekspektasi harga saham model diskrit dengan model kontinu.
2. Menyamakan variansi harga saham model diskrit dengan model kontinu.
3. Setelah mendapatkan nilai p , samakan nilai p dan dimana $u.d = 1$.

Akibat dari asumsi 1 dan 2 pada metode binomial *Tree* sebelumnya, maka didapatkan persamaan ekspektasi model diskrit sebagai berikut

$$E(S_{i+1}) = pS_iu + (1 - p)S_id = S_i(pu + (1 - p)d), \quad (4.35)$$

untuk ekspektasi model kontinu didapatkan

$$E(S_{i+1}) = S_i e^{r\Delta t} \quad (4.36)$$

Untuk memenuhi syarat awal dalam penentuan parameter u , d dan p yaitu menyamakan ekspektasi harga saham model diskrit dengan model kontinu didapatkan dengan menyamakan persamaan (4.35) dan(4.36)

$$S_i e^{r\Delta t} = S_i(pu + (1 - p)d)$$

$$e^{r\Delta t} = (pu + (1 - p)d)$$

$$e^{r\Delta t} = (p(u - d) + d)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (4.37)$$

Karena p merupakan peluang maka harus memenuhi $0 \leq p \leq 1$ maka $e^{r\Delta t} - d \leq u - d$ atau $e^{r\Delta t} \leq u$ dan $u - d > 0$ atau $d \leq u$ maka $d \leq e^{r\Delta t} \leq u$.

Dari persamaan (4.36) dapat di perluas menjadi

$$E(S_{i+1}^2) = S_i^2 e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}. \quad (4.38)$$

Menentukan variansi dari model kontinu yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (4.36) dan (4.38) kedalam persamaan penentuan variansi sebagai berikut

$$Var(S_{i+1}) = E(S_{i+1}^2) - (E(S_{i+1}))^2$$

$$Var(S_{i+1}) = S_i^2 e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - S_i^2 e^{2r\Delta t}$$

$$Var(S_{i+1}) = S_i^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2\Delta t} - 1). \quad (4.39)$$

Untuk variansi model diskrit substitusi persamaan (4.35) kedalam persamaan penentuan variansi

$$Var(S_{i+1}) = E(S_{i+1}^2) - (E(S_{i+1}))^2$$

$$Var(S_{i+1}) = S_i^2 (pu^2 + (1-p)d^2) - (S_i e^{r\Delta t})^2$$

$$Var(S_{i+1}) = S_i^2 (pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\Delta t}). \quad (4.40)$$

Setelah mendapatkan persamaan dari kedua model, selanjutnya menyamakan variansi dari model diskrit maupun kontinu untuk memenuhi asumsi kedua penentuan parameter didapatkan

$$\begin{aligned}
S_i^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) &= S_i^2 (pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\Delta t}) \\
e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) &= (pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\Delta t}) \\
e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} &= pu^2 + (1-p)d^2 \\
e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} &= p(u^2 - d^2) + d^2 \\
p &= \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - d^2}{u^2 - d^2}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan nilai p yang, maka dapat memenuhi asumsi ketiga yaitu menyamakan nilai p pada persamaan (4.37) dan (4.41) yang didapatkan dan dengan memenuhi syarat $u.d = 1$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} &= \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - d^2}{u^2 - d^2} \\
(u + d)(e^{r\Delta t} - d) &= e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - d^2 \\
ue^{r\Delta t} - ud + de^{r\Delta t} - d^2 &= e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - d^2 \\
e^{r\Delta t}(u + d) - 1 &= e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk menyelesaikan persamaan diatas yaitu dengan membangkitkan $e^{\Delta t}$ pada sisi kanan sehingga persamaan menjadi

$$\begin{aligned}
e^{r\Delta t}(u + d - e^{-r\Delta t}) &= e^{(r+\sigma^2)\Delta t} e^{r\Delta t} \\
u + d - e^{-r\Delta t} &= e^{(r+\sigma^2)\Delta t}.
\end{aligned}$$

Untuk memenuhi syarat $u.d = 1$ maka substitusi variabel d dengan $d = \frac{1}{u}$ dan dengan memindah persamaan sisi kiri ke sisi kanan, sehingga didapatkan persamaan berikut

$$u^2 - u(e^{-r\Delta t} - e^{(r+\sigma^2)\Delta t}) + 1 = 0. \quad (4.42)$$

Asumsikan bahwa $\beta = \frac{1}{2}(e^{-r\Delta t} + e^{-r\Delta t} - e^{(r+\sigma^2)\Delta t})$ sehingga persamaan (4.42) menjadi

$$u^2 - 2\beta u + 1 = 0.$$

Menggunakan akar-akar $u = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$ dimana $\beta^2 - 1 > 0$ karena $d < u$ maka $u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$ didapatkan parameter u , d , dan p sebagai berikut

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad d = \frac{1}{u}, \quad p = \frac{e^{-r\Delta t - d}}{u - d}.$$

Akibat dari aproksimasi bilangan eksponensial dimana $e^x \approx 1 + x$ akan diperoleh

$$\beta = \frac{1}{2}(e^{-r\Delta t} + e^{-r\Delta t} - e^{(r+\sigma^2)\Delta t})$$

$$\beta = \frac{1}{2}(1 - r\Delta t + 1 + (r + \sigma^2)\Delta t)$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t. \quad (4.43)$$

Untuk mendapatkan nilai u substitusikan persamaan (4.43) kedalam persamaan u sebagai berikut

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$u = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)^2 - 1}$$

$$u \approx 1 + \sigma\sqrt{\Delta t}.$$

Akibat dari aproksimasi bilangan eksponensial dimana $e^x \approx 1 + x$ akan diperoleh

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \quad (4.44)$$

Akibat persamaan (4.44) didapatkan parameter p sebagai berikut

$$p = \frac{e^{-r\Delta t} - d}{u - d}$$

$$p = \frac{e^{-r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}.$$

Selanjutnya, persamaan diatas dikalikan dengan $\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}$ sehingga menjadi

$$p = \frac{e^{r\sqrt{\Delta t} + \sigma\sqrt{\Delta t}} - 1}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1}.$$

Akibat dari aproksimasi bilangan eksponensial dimana $e^x \approx 1 + x$ akan diperoleh

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta t} + 1\right). \quad (4.45)$$

4.4 Solusi Numerik *Greeks* Persamaan Black-Scholes Menggunakan Metode Binomial *Tree*

Bagian ini akan dijelaskan bagaimana solusi menentukan parameter lindung nilai yaitu *Greeks* dengan menggunakan metode binomial *Tree* yang mengansumsikan perubahan harga naik maupun turun.

4.4.1 Delta

Seperti yang diketahui pada bab 2 bahwa Delta merupakan salah satu parameter lindung nilai yang menggambarkan perubahan antara harga opsi dengan harga *underlying asset*-nya. Didefinisikan pada persamaan (2.11) yaitu diturunkan berdasarkan S atau harga *underlying asset*.

Menentukan Delta pada asumsi metode binomial *Tree* diketahui terdapat perubahan harga naik maupun turun baik harga opsi maupun *underlying asset* yang tidak sama, sehingga ambil rata-rata perubahan sebagai nilai awal untuk dapat menentukan Delta, sebagai berikut :

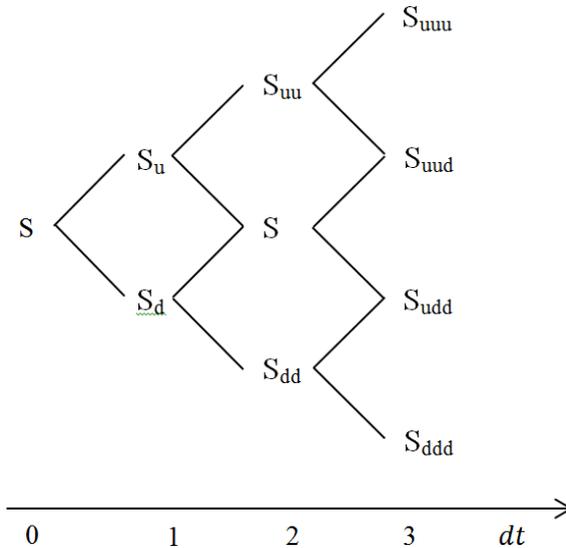
$$\partial V = \frac{(f_u - f) + (f - f_d)}{2}, \quad \partial S = \frac{(S_u - S) + (S - S_d)}{2}. \quad (4.46)$$

Substitusikan persamaan (4.46) ke dalam persamaan (2.11) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial V}{\partial S} \\ \Delta &= \frac{\frac{(f_u - f) + (f - f_d)}{2}}{\frac{(S_u - S) + (S - S_d)}{2}} \\ \Delta &= \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.4.2 Theta

Theta merupakan parameter lindung nilai yang menggambarkan posisi opsi berdasarkan tingkat perubahan harga opsi berdasarkan perubahan waktu. Theta mengukur perubahan harga opsi tanpa melihat efek dari harga *underlying asset* yang didefinisikan pada persamaan (2.14).



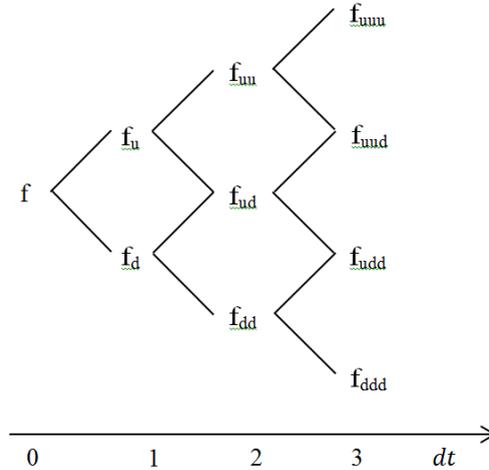
Gambar 4.1: Skema Binomial *Tree* Harga *Underlying Asset* $dt = 2$

Solusi menentukan Theta dengan menggunakan metode binomial *Tree* diperlukan asumsi seperti pada Gambar4.1 yaitu harga *underlying asset* sama dengan harga *underlying asset* pada *time step* $dt = 2$ sebagai berikut

$$S = S_{ud}. \quad (4.48)$$

Berlaku juga untuk harga opsi seperti pada Gambar4.2, harga

opsi pada *time step* $dt = 0$ sama dengan *time step* $dt = 2$ sebagai berikut



Gambar 4.2: Skema Binomial *Tree* Harga Opsi $dt = 2$

$$f = f_{ud}. \quad (4.49)$$

Jika asumsi (4.48) dan (4.49) dipenuhi maka Theta langsung dapat diestimasi sebagai berikut

$$\Theta = \frac{f_{ud} - f}{2dt}. \quad (4.50)$$

Namun pada kenyataannya, asumsi diatas belum cukup sesuai dengan keadaan sehingga untuk menentukan Theta dapat digunakan persamaan hubungan Delta, Theta dan Gamma yang didefinisikan pada persamaan (2.25)

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rV,$$

sehingga Theta dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\Theta = rV - rS\Delta - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma. \quad (4.51)$$

4.4.3 Gamma

Gamma merupakan parameter lindung nilai kedua yang menggambarkan perubahan Delta opsi terhadap harga *underlying asset*-nya. Salah satu parameter lindung nilai Gamma, didefinisikan pada persamaan (2.18). Gamma pada asumsi binomial *Tree* dapat diestimasi langsung sebagai berikut

$$\Gamma = \frac{\Delta_u - \Delta_d}{S_u - S_d}. \quad (4.52)$$

Persamaan Gamma pada (4.52) dengan metode binomial *Tree* ketika harga *underlying asset* naik maka Delta mengalami perubahan menjadi Δ_u , sebaliknya jika turun menjadi Δ_d sehingga kedua Delta didapatkan sebagai berikut

$$\Delta_u = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}}, \quad \Delta_d = \frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}}. \quad (4.53)$$

Untuk menentukan Gamma menggunakan metode binomial *Tree* dilakukan hal yang sama dengan menentukan Delta, yaitu dengan menggunakan rata-rata antara perubahan naik maupun turun dan juga diperlukan perluasan pohon hingga waktu menjadi $\Delta t = 2$ sehingga didapatkan persamaan awal

$$\Delta_u - \Delta_d = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} \right) - \left(\frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} \right) \right), \quad (4.54)$$

$$S_u - S_d = \frac{1}{4} \left((S_{uu} - S_u) + (S_u - S_{ud}) + (S_{ud} - S_d) + (S_d - S_{dd}) \right). \quad (4.55)$$

Untuk mendapatkan Gamma substitusi persamaan (4.54) dan

(4.55) ke persamaan (4.52) didapatkan

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{\Delta_u - \Delta_d}{S_u - S_d} \\ \Gamma &= \frac{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} \right) - \left(\frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} \right) \right)}{\frac{1}{4} \left((S_{uu} - S_u) + (S_u - S_{ud}) + (S_{ud} - S_d) + (S_d - S_{dd}) \right)} \\ \Gamma &= \frac{\left(\left(\frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} \right) - \left(\frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} \right) \right)}{\frac{1}{2} (S_{uu} - S_{dd})}.\end{aligned}\quad (4.56)$$

4.4.4 Vega

Vega merupakan parameter lindung nilai yang menggambarkan posisi opsi berdasarkan perubahan harga opsi tersebut terhadap perubahan volatilitas-nya. Telah diketahui dari awal mengansumsikan bahwa suatu volatilitas bernilai konstan, sehingga menentukan Vega dengan menggunakan metode binomial *Tree* sulit untuk dilakukan karena volatilitas termasuk hal dasar dalam konstruksi harga opsi dalam metode ini. Akibatnya jika merubah volatilitas-nya maka akan berubah juga harga opsi nya.

Menentukan Vega menggunakan metode binomial *Tree* perlu suatu asumsi. Asumsi yang dimaksud yaitu dengan skema perubahan harga opsi langsung yang dapat di lihat pada Gambar 4.3 yaitu mengansumsikan perubahan volatilitas dari σ menjadi $\Delta\sigma + \sigma$, akibatnya untuk harga opsi dengan volatilitas terbaru menjadi $f_{\Delta\sigma + \sigma}$, sehingga dapat di estimasi untuk menentukan Vega adalah sebagai berikut

$$\nu = \frac{f_{\Delta\sigma + \sigma} - f_{\sigma}}{\Delta\sigma}.\quad (4.57)$$

$$f_{\sigma} \xrightarrow{\Delta\sigma} f_{\sigma+\Delta\sigma}$$

Gambar 4.3: Skema Penentuan Vega

4.4.5 Rho

Parameter kedua yang tidak dapat langsung di estimasi menggunakan metode binomial *Tree* ialah Rho. Rho merupakan parameter lindung nilai yang menggambarkan posisi opsi berdasarkan perubahan harga opsi terhadap perubahan tingkat bunga. Hal yang sama dilakukan dengan penentuan Vega, dalam parameter Rho juga sulit dilakukan karena termasuk ke dalam hal dasar dalam konstruksi metode binomial *Tree* dan membuat baru konstruksi metode binomial *Tree* yang disesuaikan dengan keadaan dalam parameter ini.

Menentukan Rho menggunakan metode binomial *Tree* perlu suatu asumsi. Asumsi yang dimaksud yaitu dengan skema perubahan harga opsi langsung yang dapat di lihat pada Gambar 4.4 yaitu mengansumsikan perubahan tingkat

$$f_r \xrightarrow{\Delta r} f_{r+\Delta r}$$

Gambar 4.4: Skema Penentuan Rho

bunga dari r menjadi $\Delta r + r$, lalu untuk harga opsi dengan

tingkat bunga terbaru menjadi $f_{\Delta r+r}$, sehingga dapat di estimasi untuk menentukan Rho adalah sebagai berikut

$$\rho = \frac{f_{\Delta r+r} - f_r}{\Delta r}. \quad (4.58)$$

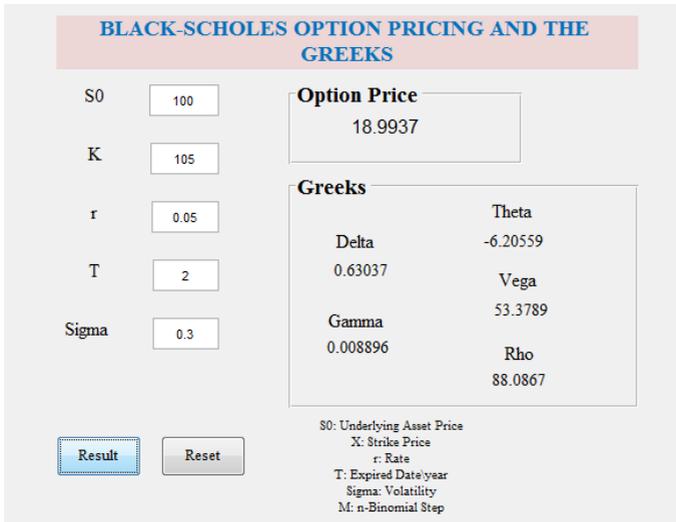
4.5 Simulasi *Greeks* menggunakan Metode Binomial Tree

Pada bagian ini akan diberikan hasil solusi numerik dengan menggunakan metode binomial *Tree* untuk menentukan harga opsi beserta dengan rasio lindung nilai atau *Greeks*. Menentukan harga opsi dan rasio lindung nilai diperlukan data masukan sebagai berikut, $S_0 = 100$, $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan $M = 250$. Hasil simulasi metode binomial *Tree* dari data masukan diatas menggunakan MATLAB disajikan pada Gambar 4.5 Simulasi dengan model Black-



Gambar 4.5: Hasil Simulasi *Greeks* dengan Metode Binomial *Tree*

Scholes disajikan pada Gambar 4.6. Kedua hasil simulasi



Gambar 4.6: Hasil Simulasi *Greeks* dengan Model Black-Scholes

menggunakan MATLAB didapatkan hasil tidak hanya harga opsi namun beserta *Greeks*-nya yang mana hasil dengan menggunakan metode binomial *Tree* konvergen dengan model Black-Scholes.

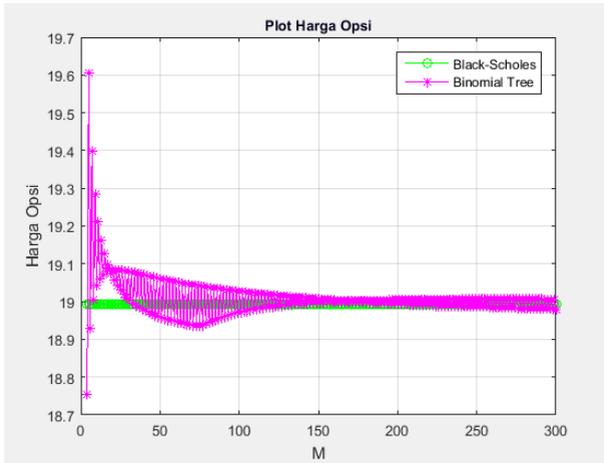
4.5.1 Harga Opsi

Bagian ini diberikan hasil grafik perbandingan antara harga opsi dengan banyaknya step yang digunakan dalam metode binomial *Tree*. Grafik juga menunjukkan dua hasil yaitu hasil dengan solusi analitik yaitu Black-Scholes dan solusi numerik menggunakan metode binomial *Tree*. Sebelum melakukan simulasi diperlukan data masukan sebagai berikut $S_0 = 100$, $K = 105$, $r = 0.05$ $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk step pada metode binomial *Tree* akan dilakukan dalam jangkauan dari $M = 4$ hingga $M = 300$. Hasil disajikan pada Gambar 4.8 Hasil simulasi ini mendapatkan nilai MAPE

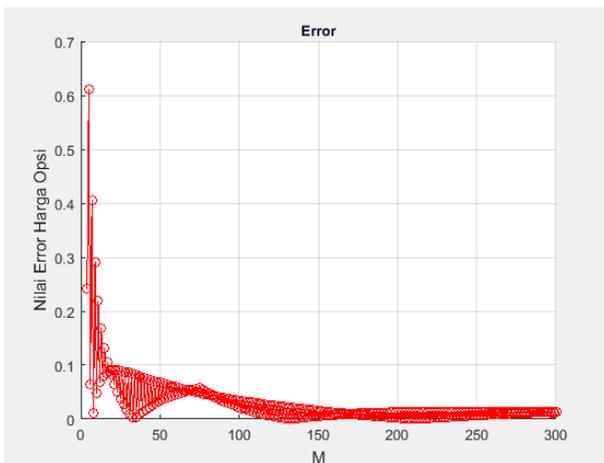
Banyak langkah ke-n	Nilai MAPE (%)
100	0.194857
200	0.120605
300	0.085635

Gambar 4.7: Tabel Hasil MAPE Harga Opsi Langkah ke-n

sebesar 0.085635% seperti pada Gambar 4.7 yang mana menunjukkan semakin banyak langkah metode binomial *Tree* memiliki nilai *error* yang kecil sejalan dengan grafik error pada Gambar 4.9 yang menampilkan grafik semakin turun dengan meningkatnya jumlah langkah pada metode binomial *Tree*. Sehingga dengan menggunakan teorema limit sentral yang didefinisikan pada bab 2 dapat disimpulkan bahwa semakin banyak langkah atau $n \rightarrow \infty$ dalam metode binomial *Tree* maka harga opsi semakin mendekati atau konvergen dengan hasil menggunakan Black-Scholes.



Gambar 4.8: Grafik Perbandingan Harga Opsi



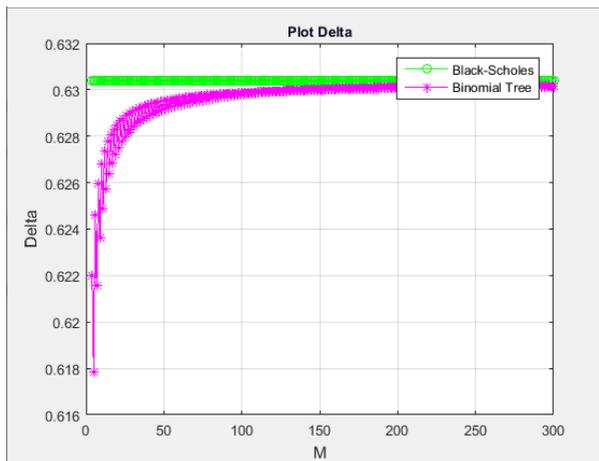
Gambar 4.9: Grafik Error Harga Opsi

4.5.2 Delta

Bagian ini diberikan hasil grafik perbandingan antara banyaknya step pada metode binomial *Tree* dengan hasil Delta yang didapatkan serta memberikan hasil grafik perbandingan nilai Delta dengan perubahan harga *underlying asset*. Grafik ini menyajikan dari kedua hasil yaitu menggunakan metode binomial *Tree* dan model Black-Scholes.

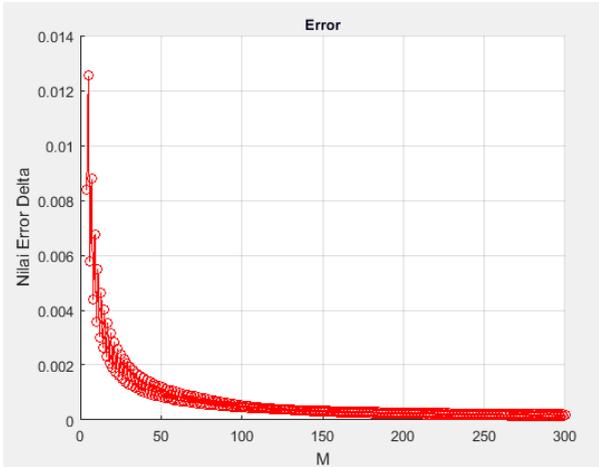
Simulasi yang pertama menunjukkan hasil perbandingan dengan banyaknya step menggunakan data masukan sebagai berikut $S_0 = 100$, $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk step dilakukan dalam jangkauan dari $M = 4$ hingga $M = 300$. Hasil disajikan pada Gambar 4.10.

Hasil simulasi ini menunjukkan nilai MAPE sebesar



Gambar 4.10: Grafik Perbandingan Jumlah Langkah Metode Binomial *Tree* dengan Delta

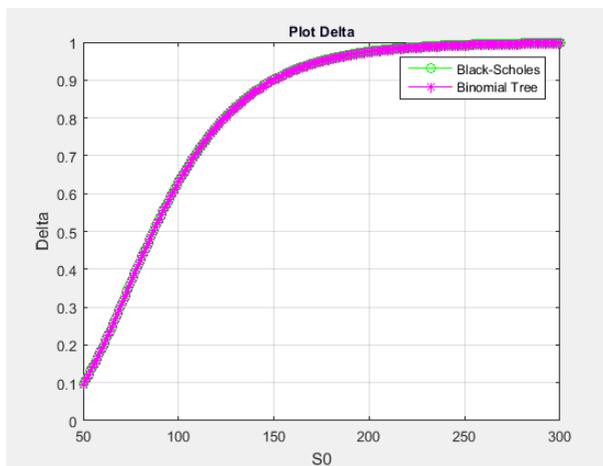
0.11611% dengan grafik error yang disajikan pada Gambar 4.11 yang menunjukkan bahwa metode binomial *Tree* memiliki nilai *error* yang kecil sejalan dengan hasil grafik *error* yang



Gambar 4.11: Grafik Error Delta

menampilkan grafik semakin turun seiring bertambahnya langkah pada metode binomial *Tree*.

Simulasi kedua menampilkan grafik perbandingan antara hasil Delta dengan perubahan harga *underlying asset* menggunakan data masukan sebagai berikut $M = 300$, $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk harga *underlying asset* dilakukan dalam jangkauan dari $S_0 = 50$ hingga $S_0 = 300$. Hasil disajikan pada gambar Gambar 4.12 Hasil grafik pada Gambar 4.12 menunjukkan bahwa semakin harga *underlying asset* tinggi hingga lebih dari harga *strike price*, nilai Delta yang dihasilkan juga semakin tinggi. Hal ini juga berlaku sebaliknya. Ambil contoh harga *underlying asset* $S_0 = 150$ yang mana melebihi dari harga *strike price* dan menunjukkan nilai Delta yang tinggi. Ketika terjadi hal ini, para pemegang *call option* disarankan untuk mengeksekusi opsi yang dimiliki karena akan mendapatkan keuntungan dari opsi tersebut. Hasil grafik ini juga menunjukkan bahwa nilai



Gambar 4.12: Grafik Perbandingan Delta dengan Perubahan Harga *Underlying Asset*

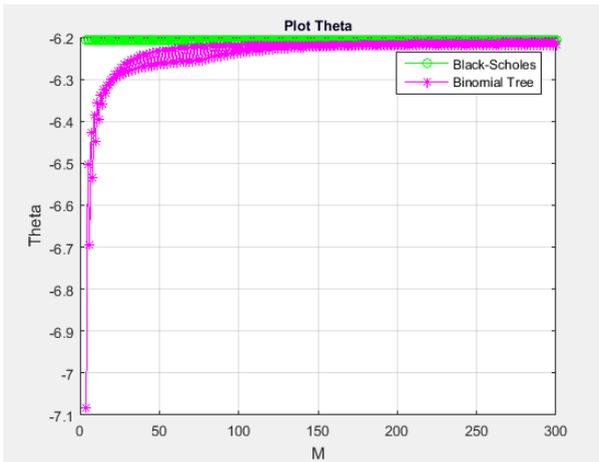
Delta yang dihasilkan menggunakan metode binomial *Tree* mendekati atau sejalan dengan menggunakan model Black-Scholes.

Hasil kedua simulasi ini, dengan menggunakan teorema limit sentral yang didefinisikan pada bab 2 dapat disimpulkan bahwa semakin banyak langkah atau $n \rightarrow \infty$ dalam metode binomial *Tree* maka harga opsi semakin mendekati atau konvergen dengan hasil menggunakan Black-Scholes.

4.5.3 Theta

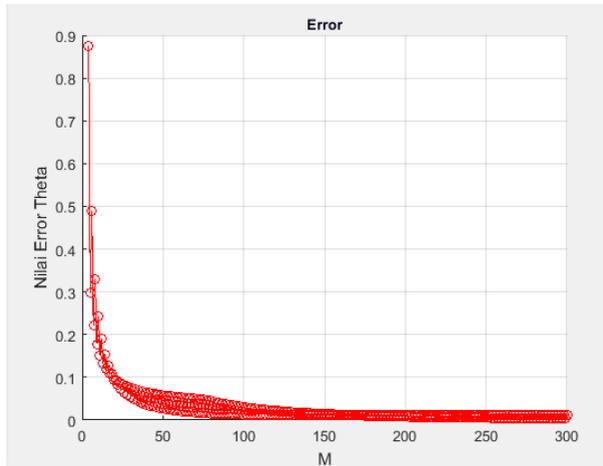
Bagian ini diberikan hasil grafik perbandingan antara banyaknya step pada metode binomial *Tree* dengan hasil Delta yang didapatkan serta memberikan hasil grafik perbandingan nilai Delta dengan perubahan harga *underlying asset*. Grafik ini menyajikan dari kedua hasil yaitu menggunakan metode binomial *Tree* dan model Black-Scholes.

Simulasi yang pertama menunjukkan hasil perbandingan dengan banyaknya step menggunakan data masukan sebagai berikut $S_0 = 100$ $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk step dilakukan dalam jangkauan dari $M = 4$ hingga $M = 300$. Hasil disajikan pada Gambar 4.13.



Gambar 4.13: Grafik Perbandingan Jumlah Langkah Metode Binomial *Tree* dengan Theta

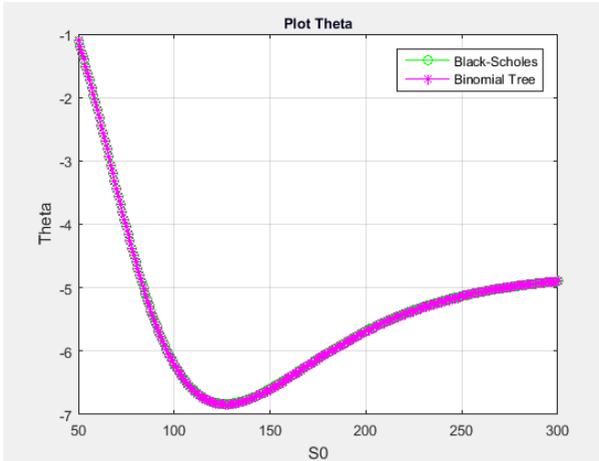
Hasil simulasi ini menunjukkan nilai MAPE sebesar 0.513618% dengan grafik error yang disajikan pada Gambar 4.14 yang menunjukkan bahwa metode binomial *Tree* memiliki nilai *error* yang kecil sejalan dengan hasil grafik *error* yang



Gambar 4.14: Grafik Error Theta

menampilkan grafik semakin turun seiring bertambahnya langkah pada metode binomial *Tree*.

Simulasi kedua menampilkan grafik perbandingan antara hasil Theta dengan perubahan harga *underlying asset* menggunakan data masukan sebagai berikut $M = 300$, $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk harga *underlying asset* dilakukan dalam jangkauan dari $S_0 = 50$ hingga $S_0 = 300$. Hasil disajikan pada gambar Gambar 4.15. Hasil grafik pada Gambar 4.15 menunjukkan bahwa terdapat penurunan yang signifikan ketika harga *underlying asset* menuju sama dengan *strike price*, nilai Theta yang dihasilkan tinggi atau semakin negatif. Namun sebaliknya, jika harga *underlying asset* jauh lebih tinggi atau lebih rendah dibandingkan dengan *strike price* maka nilai Theta yang dihasilkan lebih rendah. Ambil contoh harga *underlying asset* $S_0 = 105$ yang mana sama dengan dari harga *strike price* dan menunjukkan nilai Theta yang tinggi. Hal ini terjadi karena nilai *intrinsic*



Gambar 4.15: Grafik Perbandingan Theta dengan Perubahan Harga *Underlying Asset*

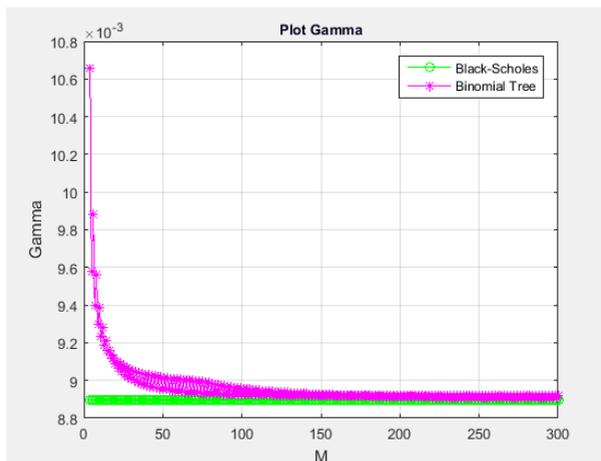
kecil dan nilai *extrinsic* besar yang mana Theta bekerja hanya pada nilai *extrinsic* dan Theta mengukur seberapa besar perubahan nilai opsi berdasarkan waktu. Hasil grafik ini juga menunjukkan bahwa nilai Theta yang dihasilkan menggunakan metode binomial *Tree* mendekati atau sejalan dengan menggunakan model Black-Scholes.

Hasil kedua simulasi ini, dengan menggunakan teorema limit sentral yang didefinisikan pada bab 2 dapat disimpulkan bahwa semakin banyak langkah atau $n \rightarrow \infty$ dalam metode binomial *Tree* maka nilai Theta semakin mendekati atau konvergen dengan hasil menggunakan Black-Scholes.

4.5.4 Gamma

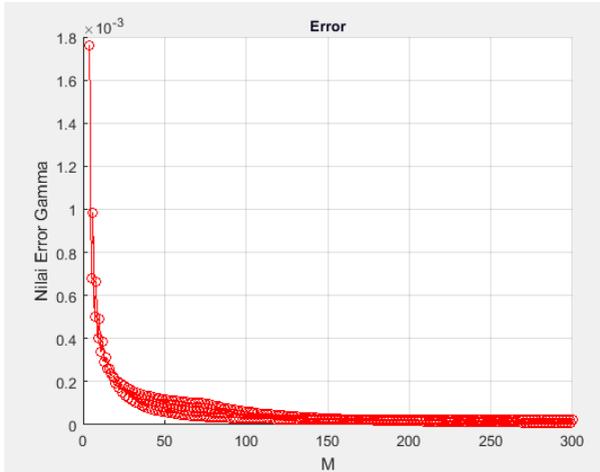
Pada bagian ini diberikan hasil grafik perbandingan antara banyaknya step pada binomial *Tree* dengan hasil Gamma yang didapatkan serta memberikan hasil grafik perbandingan nilai Gamma dengan perubahan harga *underlying asset*. Grafik ini juga menyajikan hasil Gamma menggunakan metode binomial *Tree* dan juga dengan model Black-Scholes.

Simulasi yang pertama menunjukkan hasil perbandingan dengan banyaknya step menggunakan data masukan sebagai berikut $S_0 = 100$ $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk step dilakukan dalam jangkauan dari $M = 4$ hingga $M = 300$. Hasil disajikan pada Gambar 4.16.



Gambar 4.16: Grafik Perbandingan Jumlah Langkah Metode Binomial *Tree* dengan Gamma

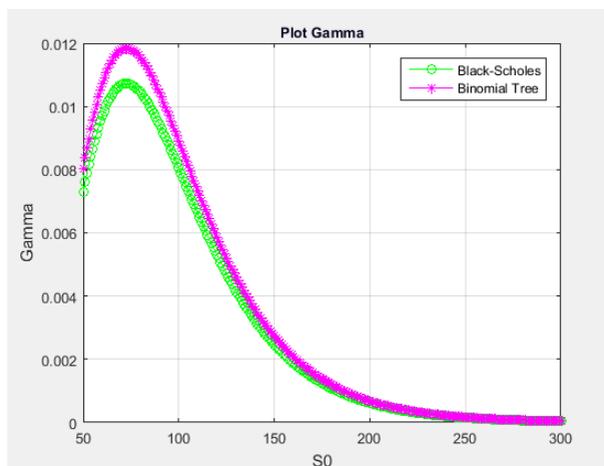
Hasil simulasi ini menunjukkan nilai MAPE sebesar 0.749381% dengan grafik error yang disajikan pada Gambar 4.17 yang menunjukkan bahwa, metode binomial *Tree* memiliki nilai *error* yang kecil sejalan dengan hasil grafik *error* yang



Gambar 4.17: Grafik Error Gamma

menampilkan grafik semakin turun seiring bertambahnya langkah pada metode binomial *Tree*.

Simulasi kedua menampilkan grafik perbandingan antara hasil Gamma dengan perubahan harga *underlying asset* menggunakan data masukan sebagai berikut $M = 300$, $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk harga *underlying asset* dilakukan dalam jangkauan dari $S_0 = 50$ hingga $S_0 = 300$. Hasil disajikan pada gambar Gambar 4.12 Hasil grafik pada Gambar 4.18 menunjukkan ketika harga *underlying asset* mendekati *strike price* menunjukkan kenaikan nilai Gamma yang signifikan. Gamma menghitung perubahan nilai Delta maka pada saat hal ini terjadi nilai Delta berada di ambang batas yaitu dapat berubah naik menuju fase dimana harga *underlying asset* lebih tinggi dari *strike price* atau berubah turun menuju fase dimana harga *underlying asset* lebih rendah dari *strike price*. Ambil contoh pada saat $S_0 = 100$ memiliki nilai Gamma yang cukup tinggi sehingga dapat diartikan juga



Gambar 4.18: Grafik Perbandingan Gamma dengan Perubahan Harga *Underlying Asset*

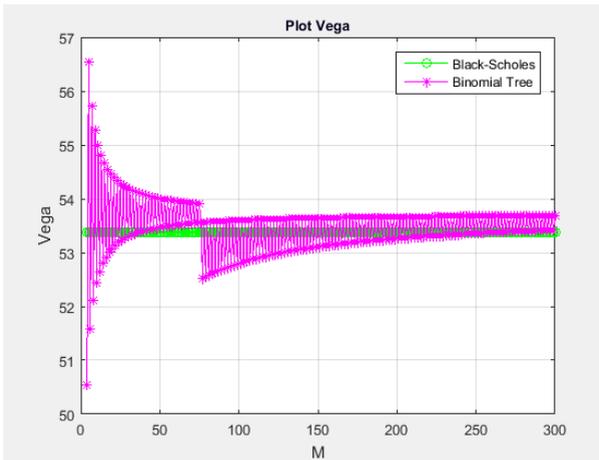
memiliki nilai Delta yang tinggi juga, sehingga para pemegang *call option* dapat mengesekusi opsi yang dimiliki karena dapat memberikan keuntungan. Hasil grafik ini juga menunjukkan bahwa nilai Gamma yang dihasilkan menggunakan metode binomial *Tree* mendekati atau sejalan dengan menggunakan model Black-Scholes

Hasil kedua simulasi ini, dengan menggunakan teorema limit sentral yang didefinisikan pada bab 2 dapat disimpulkan bahwa semakin banyak langkah atau $n \rightarrow \infty$ dalam metode binomial *Tree* maka nilai Gamma semakin mendekati atau konvergen dengan hasil menggunakan Black-Scholes.

4.5.5 Vega

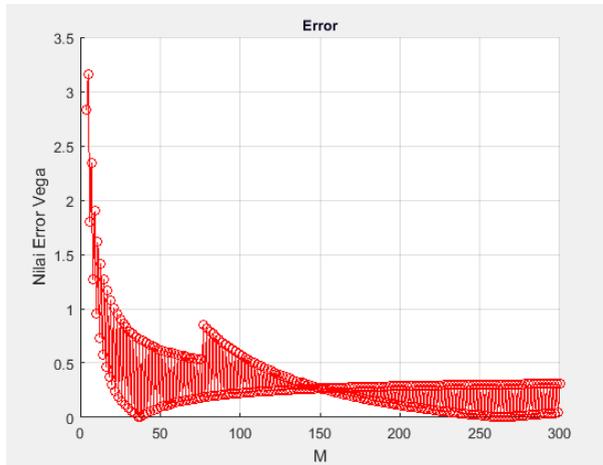
Pada bagian ini diberikan hasil grafik perbandingan jumlah step pada binomial *Tree* dengan hasil Vega yang didapatkan serta memberikan hasil grafik perbandingan nilai Vega dengan perubahan harga *underlying asset*. Grafik ini juga menyajikan hasil Vega menggunakan metode binomial *Tree* dan juga dengan model Black-Scholes.

Simulasi yang pertama menunjukkan hasil perbandingan dengan banyaknya step menggunakan data masukan sebagai berikut $S_0 = 100$ $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk step dilakukan dalam jangkauan dari $M = 4$ hingga $M = 300$. Hasil disajikan pada Gambar 4.19.



Gambar 4.19: Grafik Perbandingan Jumlah Langkah Metode Binomial *Tree* dengan Vega

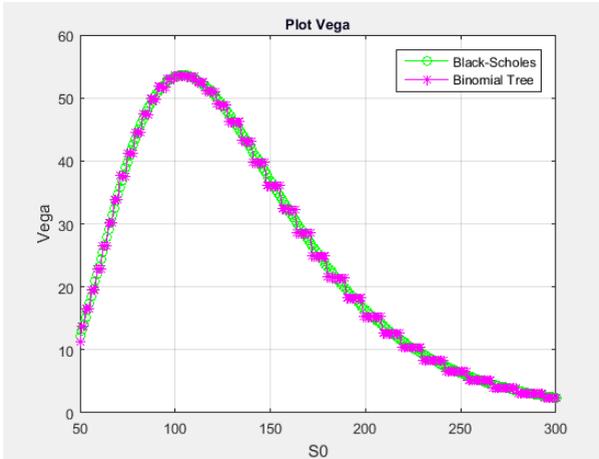
Hasil simulasi ini menunjukkan nilai MAPE sebesar 0.198216% dengan grafik error yang disajikan pada Gambar 4.20 yang menunjukkan bahwa, metode binomial *Tree* memiliki nilai *error* yang kecil sejalan dengan hasil grafik *error*



Gambar 4.20: Grafik Error Vega

yang menampilkan grafik semakin turun seiring bertambahnya langkah pada metode binomial *Tree*.

Simulasi kedua menampilkan grafik perbandingan antara hasil Vega dengan perubahan harga *underlying asset* menggunakan data masukan sebagai berikut $M = 300$, $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk harga *underlying asset* dilakukan dalam jangkauan dari $S_0 = 50$ hingga $S_0 = 300$. Hasil disajikan pada gambar Gambar 4.12. Hasil grafik pada Gambar 4.21 menunjukkan bahwa terdapat perubahan naik yang signifikan ketika harga *underlying asset* bernilai sama dengan *strike price* sehingga nilai Vega tinggi. Hal ini terjadi diakibatkan oleh nilai *extrinsic* yang tinggi dan Vega bekerja pada nilai *extrinsic*. Namun sebaliknya, ketika harga *underlying asset* jauh lebih tinggi atau rendah mengakibatkan nilai vega menjadi rendah. Ambil contoh pada saat harga *underlying asset* $S_0 = 110$ akan memiliki nilai Vega yang cukup tinggi yaitu kurang lebih 53,5, yang berarti setiap



Gambar 4.21: Grafik Perbandingan Vega dengan Perubahan Harga *Underlying Asset*

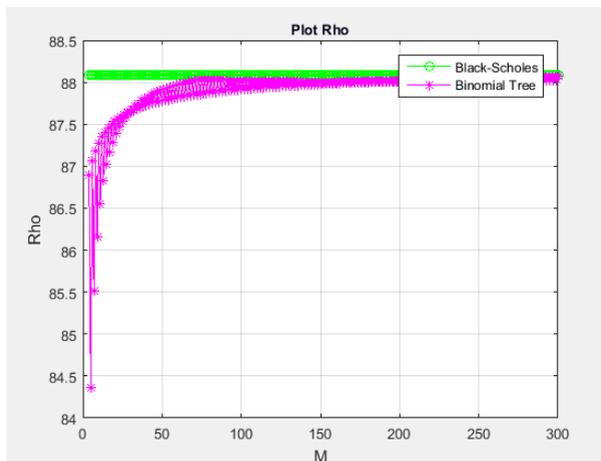
persen kenaikan volatilitas, harga opsi akan naik sebesar 0.535 dari harga awal. Bagi para pemegang *call option*, ketika nilai Vega tinggi yang dapat diartikan memiliki tingkat volatilitas tinggi akan sangat menguntungkan ketika mengeksekusi opsi yang dimiliki karena harga *underlying asset* berpeluang tinggi untuk naik.

Hasil kedua simulasi ini, dengan menggunakan teorema limit sentral yang didefinisikan pada bab 2 dapat disimpulkan bahwa semakin banyak langkah atau $n \rightarrow \infty$ dalam metode binomial *Tree* maka nilai Vega semakin mendekati atau konvergen dengan hasil menggunakan Black-Scholes.

4.5.6 Rho

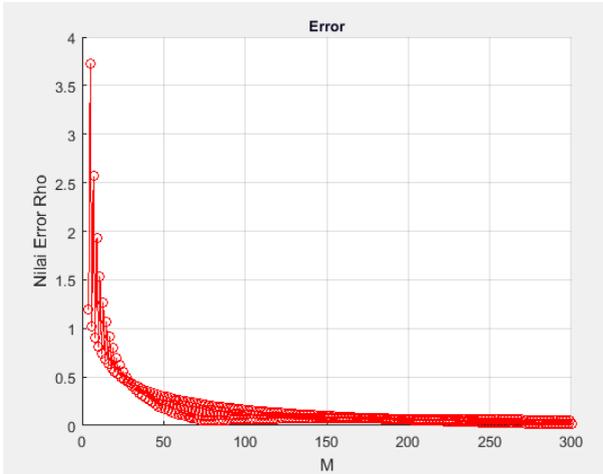
Pada bagian ini diberikan hasil grafik perbandingan antara jumlah step pada binomial *Tree* dengan hasil Rho yang didapatkan serta memberikan hasil grafik perbandingan nilai Rho dengan perubahan harga *underlying asset*. Grafik ini juga menyajikan hasil Rho menggunakan metode *Binomial-Tree* dan juga dengan model Black-Scholes.

Simulasi yang pertama menunjukkan hasil perbandingan dengan banyaknya step menggunakan data masukan sebagai berikut $S_0 = 100$ $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk step dilakukan dalam jangkauan dari $M = 4$ hingga $M = 300$. Hasil disajikan pada Gambar 4.22.

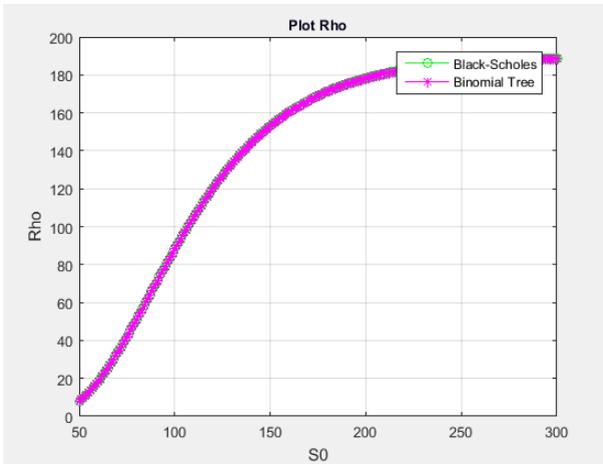


Gambar 4.22: Grafik Perbandingan Jumlah Langkah Metode *Binomial Tree* dengan Rho

Hasil simulasi ini menunjukkan nilai MAPE sebesar 0.20302% dengan grafik error yang disajikan pada Gambar 4.23 yang menunjukkan bahwa, metode *binomial Tree* memiliki nilai *error* yang kecil sejalan dengan hasil grafik



Gambar 4.23: Grafik Error Rho



Gambar 4.24: Grafik Perbandingan Rho dengan Perubahan Harga *Underlying Asset*

error yang menampilkan grafik semakin turun seiring bertambahnya langkah pada metode binomial *Tree*. Simulasi kedua menampilkan grafik perbandingan antara hasil Rho dengan perubahan harga *underlying asset* menggunakan data masukan sebagai berikut $M = 300$, $K = 105$, $r = 0.05$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ dan untuk harga *underlying asset* dilakukan dalam jangkauan dari $S_0 = 50$ hingga $S_0 = 300$. Hasil disajikan pada gambar Gambar 4.24. Hasil grafik pada Gambar 4.24 menunjukkan semakin tinggi harga *underlying asset* dibandingkan dengan *strike price*, nilai dari Rho juga menunjukkan tinggi. Hasil kedua simulasi ini, dengan menggunakan teorema limit sentral yang didefinisikan pada bab 2 dapat disimpulkan bahwa semakin banyak langkah atau $n \rightarrow \infty$ dalam metode binomial *Tree* maka nilai Rho semakin mendekati atau konvergen dengan hasil menggunakan Black-Scholes.

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan pada bab sebelumnya serta saran untuk pengembangan penelitian ini.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan simulasi dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa

1. Hasil nilai MAPE untuk harga opsi sebesar 0.085635%. Untuk parameter *Greeks* menghasilkan nilai MAPE, Delta sebesar 0.11611%, Theta sebesar 0.513618%, Gamma sebesar 0.749381%, Vega sebesar 0.198216% dan Rho sebesar 0.20302%. Dari hasil MAPE menunjukkan angka yang relatif kecil. Hasil ini menunjukkan bahwa metode binomial *Tree* dapat dijadikan salah satu alternatif untuk menghitung harga opsi maupun rasio lindung nilai atau *Greeks* karena mengandung asumsi perubahan harga *underlying asset* yang sesuai dengan realita yang ada
2. Banyaknya step pada metode binomial *Tree* sangat berpengaruh pada ketepatan harga opsi beserta *Greeks*, semakin banyak step yang digunakan semakin konvergen terhadap model Black-Scholes. Hal ini dapat dibuktikan dengan teorema limit sentral.

5.2 Saran

Saran yang diberikan untuk penelitian selanjutnya yaitu

1. Melakukan simulasi menggunakan *software* lain selain yang sudah digunakan oleh penulis.
2. Menghitung parameter *Greeks* lainnya yang jarang digunakan agar dapat memperkuat posisi suatu opsi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Tandelilin, E. (2010). Portofolio dan Investasi : Teori dan Aplikasi
- [2] Hull, J.C. (2009). Options, Futures, and Other Derivatives
- [3] Muroi, Y & Suda, S. (2012). Discrete Malliavin Calculus and Computations of Greeks in the Binomial Tree.
- [4] Muroi, Y & Suda, S. (2017). Computation of Greeks Using Binomial Tree
- [5] Chung, S & Shackleton, M. (2002). The Binomial Black-Scholes Model and The Greeks.
- [6] Cox, J.C, Ross, S.A. & Rubinstein, M. (1979) Option Pricing : A Simplified Approach.
- [7] Pelsser, A. & Vorst, T. (1994) The Binomial Model and the Greeks.
- [8] Jiang, L. (2003) Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing
- [9] Kwok, Y. (2008) Mathematical Models of Financial Derivatives
- [10] Gilli, M., Maringer, D. & Schumann, E. (2019) Numerical Methods and Optimization in Finance

- [11] Rouah, F.D & Vainberg, G. (2007) Option Pricing Models an Volatility Using Excel-VBA
- [12] Aziz, A. (2009) Empat Model Aproksimasi Binomial Harga Saham Model Black-Scholes
- [13] Hull, J.C. (2012) Options, Futures, and Other Derivatives
- [14] Chriss, N. (1997) Black-Scholes and Beyond : Option Pricing Models
- [15] Chen, H.-Y, Lee, C.-F & Shih, W. (2010) Derivation and Application of Greek Letters : Review and Integration
- [16] Bain, Lee.J & Engelhardt, M. (1992) Introduction To Probability and Mathematical Statistics
- [17] Hutasuhut, A.H, Anggraeni, W. & Tyasnurita, R. (2014) Pembuatan Aplikasi Pendukung Keputusan untuk Peramalan Persediaan Bahan Baku Produksi Plasting Blowing dan Inject Menggunakan Metode Arima di CV.Asia

BIODATA PENULIS



Nama lengkap penulis Faradilla Dayinta Rahmayani, lahir di Malang pada tanggal 01 Oktober 1997. Sebelum menempuh bangku perkuliahan, penulis memulai pendidikan formal mulai dari TK Permata Bunda (2003-2004), SDN Percobaan 1 Malang (2004-2010), SMP Negeri 1 Malang (2010-2013), SMAN 1 Malang (2013-2016). Pada tahun 2016, penulis meneruskan pendidikan ke jenjang strata-1 di Departemen

Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), melalui jalur SNMPTN dengan nomor registrasi peserta (NRP) 06111640000016. Dimasa perkuliahan penulis aktif dalam organisasi yaitu HIMATIKA ITS sebagai staf External Affair Departemen (2018-2019) dan Wakil Ketua HIMATIKA ITS (2019-2020). Penulis juga memiliki pengalaman mengikuti berbagai kepanitiaan antara lain .

Selama di Departemen Matematika, Penulis saat menjalani kuliah lebih dominan mengambil Bidang Studi Riset Operasi. Adapun informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email faradilladayinta@gmail.com