TUGAS AKHIR – KM184801

KONTROL OPTIMAL MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MERS-CoV DENGAN PENGATURAN DOSIS OBAT DAN PENYULUHAN KESEHATAN

NOVIA HADIATNI ROHMI
06111640000022

Dosen Pembimbing
Dr. Dra. Mardlijah, MT

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

TUGAS AKHIR – KM184801

KONTROL OPTIMAL MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MERS-CoV DENGAN PENGATURAN DOSIS OBAT DAN PENYULUHAN KESEHATAN

NOVIA HADIATNI ROHMI
06111640000022

Dosen Pembimbing
Dr. Dra. Mardlijah, MT

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

“*Halaman ini sengaja dikosongkan*”

FINAL PROJECT – KM184801

CONTROL OPTIMAL THE SPREAD OF MERS-CoV DISEASE WITH DRUG DOSAGE SETTINGS AND HEALTH EDUCATION

NOVIA HADIATNI ROHMI
06111640000022

Supervisors
Dr. Dra. Mardlijah, MT

Departement of Mathematics
Faculty of Science and Analitic Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

“*Halaman ini sengaja dikosongkan*”

LEMBAR PENGESAHAN

KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN PENYAKIT MERS-CoV DENGAN PENGATURAN DOSIS OBAT DAN PENYULUHAN KESEHATAN

CONTROL OPTIMAL THE SPREAD MERS-CoV DISEASE WITH DRUG DOSAGE SETTINGS AND HEALTH EDUCATION

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
Novia Hadiatni Rohmi
NRP. 06111640000022

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I

Dr. Dra. Mardlijah, MT
NIP. 19670114 199102 2 001

Mengetahui,
Ketua Departemen Matematika FSAD-ITS

Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, 19 Agustus 2020

KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN PENYAKIT MERS-CoV DENGAN PENGATURAN DOSIS OBAT DAN PENYULUHAN KESEHATAN

Nama : Novia Hadiatni Rohmi
NRP : 06111640000022
Departemen : Matematika FSAD
Pembimbing : 1. Dr. Dra. Mardlijah, MT

ABSTRAK

Pemodelan matematika dapat merepresentasikan suatu permasalahan di dunia nyata. Salah satu contoh pemodelan matematika adalah penyebaran penyakit. *Middle East Respiratory Syndrome* merupakan penyakit penapasan menular yang pertama kali diidentifikasi di Arab Saudi. Penyakit MERS-CoV tercatat ada 2.494 kasus dengan 858 kematian. Penyakit MERS-CoV ini disebabkan oleh virus corona yang berasal dari hewan. Sampai sekarang belum ada vaksin yang khusus dalam penyakit MERS-CoV tetapi sudah ada pengobatan pada umumnya. Sementara kasus terkena penyakit MERS-CoV dari waktu ke waktu terus bertambah sehingga dibutuhkan penanganan yang benar dalam pengaturan dosis pengobatan agar dapat mengurangi kematian pasien dan penyuluhan kesehatan dalam pencegahan penyebaran penyakit MERS-CoV. Dalam penelitian ini dilakukan kontrol optimal berupa pengaturan dosis obat dan penyuluhan kesehatan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Hasil analisis menunjukkan menurunnya populasi terinfeksi, menurunnya populasi rawat inap, dan meningkatnya populasi sembuh setelah pemberian kontrol.

Kata kunci : ***Middle East Respiratory Syndrome, pengaturan dosis pengobatan, penyuluhan kesehatan, Prinsip Maksimum Pontryagin.***

“*Halaman ini sengaja dikosongkan*”

CONTROL OPTIMAL THE SPREAD MERS-CoV DISEASE WITH DRUG DOSAGE SETTINGS AND HEALTH EDUCATION

Name : *Novia Hadiatni Rohmi*
NRP : *06111640000022*
Departemen : *Matematika FSAD*
Supervisors : *1. Dr. Dra. Mardlijah, MT*

ABSTRACT

Mathematical modeling can represent a problem in the real life. One example of mathematical modeling is the spread of disease. Middle East Respiratory Syndrome is an infectious respiratory disease that was first identified in Saudi Arabia. MERS-CoV disease recorded 2,494 cases with 858 deaths. MERS-CoV disease is caused by corona virus that comes from animals. Until now there is no specific vaccine in MERS-CoV disease, but there is general treatment. While cases of MERS-CoV disease continue to increase from time to time so that the right handling of medication dosage is needed in order to reduce patient deaths and health education in preventing the spread of MERS-CoV disease. In this study, optimal control with drug dosage settings and health education will be analyzed using Pontryagin Maximum Principles. The result of the analysis showed a decrease in infected population, decrease in hospitalized population and an increase in recovery population after giving the control.

Keywords : Middle East Respiratory Syndrome, drug dosage settings, health education, Pontryagin's Maximum Principle.

“*Halaman ini sengaja dikosongkan*”

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur saya panjatkan atas ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan taufik dan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN PENYAKIT MERS-CoV DENGAN PENGATURAN DOSIS OBAT DAN PENYULUHAN KESEHATAN"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Kedua orang tua penulis, dan keluarga besar penulis yang tak henti-hentinya memberikan doa, motivasi serta dukungan kepada penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika FSAD ITS.
3. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, MT selaku dosen pembimbing Tugas Akhir atas segala waktu dan bimbingan yang diberikan kepada penulis.
4. Ibu Dr. Dwi Ratna S., S. Si, MT selaku Sekdep Bidang Akademik S1 yang telah banyak memberikan bantuan dalam proses pengumpulan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Dra. Wahyu Fistia Doctorina, M. Si selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik.

6. Bapak Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D, Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si, dan Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik, saran dan masukan pada penulisan Tugas Akhir.
7. Seluruh dosen dan karyawan di Departemen Matematika ITS yang telah memberikan banyak ilmu, pengalaman dan bantuan kepada penulis selama menempuh proses perkuliahan.
8. Rahmatika Aulian, Jihadna Prima Santika, Wildan Zakky yang selalu menemani memberikan semangat, menghibur, dan menjadi tempat berkeluh kesah penulis.
9. Madhila, Enok, Eqi, Sinta, dan Alif yang selalu memberikan motivasi kepada penulis.
10. Mayga, Faradilla, Rini, Shafira, Ferisa, dan Farida yang menjadi teman bermain dan berdiskusi selama penulis merantau.
11. Teman-teman Kabinet Satu Aksi dan Kabinet Cipta yang telah menjadi keluarga dan memberikan banyak pengalaman, kenangan, bantuan selama menempuh proses perkuliahan dan organisasi.
12. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu-satu, terimakasih telah memberikan saran, dukungan, motivasi, dan membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan. Akhirnya penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak. Sekian, terima kasih. Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Surabaya, Juli 2020

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
TITLE PAGE iii
LEMBAR PENGESAHAN v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii
DAFTAR GAMBAR xv
DAFTAR TABEL xvii
DAFTAR SIMBOL xix

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1. Latar Belakang Masalah 1
1.2. Rumusan Masalah 2
1.3. Batasan Masalah 3
1.4. Tujuan 3
1.5. Manfaat 3

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5
2.1. Penelitian Terdahulu 5
2.2. Penyakit MERS-CoV 6
2.3. Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV 9
2.4. Bilangan Reproduksi Dasar 10
2.5. Analisis Sistem 11
2.5.1 Titik Kesetimbangan 11
2.5.2 Analisis Keterkontrolan 11
2.5.3 Analisis Keteramatan 12
2.6. Analisis Kestabilan Kriteria Routh-Hurwitz 13
2.7. Formulasi Masalah Kontrol Optimal 14
2.8. Prinsip Maksimum Pontryagin 15

2.9. Metode Runge-Kutta Orde Empat 16

BAB III METODE PENELITIAN 19
3.1. Studi Literatur 19
3.2. Analisis Sistem Model Penyebaran Penyakit MERS-CoV 19
3.3. Formulasi Masalah Kontrol Optimal 20
3.4. Menentukan Penyelesaian Kontrol Optimal 20
3.5. Simulasi dengan Software Matlab 20
3.6. Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran 20
3.7. Penulisan Laporan Tugas Akhir 21

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN 23
4.1. Analisis Sistem Model Penyebaran Penyakit MERS-CoV 23
4.1.1 Titik Kesetimbangan 26
4.1.2 Analisis Kestabilan 31
4.1.3 Analisis Keterkontrolan 39
4.1.4 Analisis Keteramatan 53
4.2. Masalah Kontrol Optimal dan Penyelesaian Kontrol Optimal 56
4.3. Solusi Numerik dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 59
4.4. Simulasi dan Analisis 62

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 689
5.1. Kesimpulan 69
5.2. Saran 70

DAFTAR PUSTAKA 71
LAMPIRAN 73
BIODATA PENULIS 97

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2. 1 Virus Corona.....7
Gambar 3. 1 Diagram Alir Metodologi Penelitian 21
Gambar 4. 1 Diagram Kompartemen Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV 25
Gambar 4. 2 Diagram Kompartemen Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV dengan Kontrol Optimal.....40
Gambar 4. 3 Grafik Populasi Rentan (*S*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol.....63
Gambar 4. 4 Grafik Populasi Terpapar (E) sebelum dan sesudah diberikan kontrol.....64
Gambar 4. 5 Grafik Populasi Terinfeksi dengan Gejala (*I*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol.....64
Gambar 4. 6 Grafik Populasi Terinfeksi Tanpa Gejala (*A*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol.....65
Gambar 4. 7 Grafik Populasi Rawat Inap (*H*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol.....65
Gambar 4. 8 Grafik Populasi Sembuh (*R*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol.....66

“*Halaman ini sengaja dikosongkan*”

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 4. 1 Keterangan Variabel pada Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV 24

Tabel 4. 2 Nilai Parameter pada Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV 24

Tabel 4. 3 Nilai Awal Sub-populasi untuk kondisi awal .. 28

Tabel 4. 4 Tambahan Parameter pada Model Penyebaran Penyakit MERS-CoV dengan Kontrol..... 41

“*Halaman ini sengaja dikosongkan*”

DAFTAR SIMBOL

N	: Jumlah total populasi
S	: Jumlah populasi manusia rentan
E	: Jumlah populasi manusia terpapar
I	: Jumlah populasi manusia terinfeksi dengan gejala
A	: Jumlah populasi manusia terinfeksi tanpa gejala
H	: Jumlah populasi manusia rawat inap
R	: Jumlah populasi manusia sembuh
β	: *rate* penularan dari manusia ke manusia per satuan waktu (hari)
l	: *rate* penularan pasien rawat inap
k	: *rate* individu yang terpapar menjadi infeksi (gejala atau tanpa gejala)
ρ	: *rate* dari kelas terpapar ke kelas infeksi dengan gejala *I*
γ_a	: *rate* interaksi antara kelas terinfeksi dengan kelas rawat inap
γ_I	: *rate* sembuh tanpa rawat inap
γ_r	: *rate* sembuh dengan rawat inap

“*Halaman ini sengaja dikosongkan*”

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian.

1.1. Latar Belakang Masalah

Perkembangan ilmu pengetahuan khususnya di bidang matematika memberikan peranan penting dalam menggambarkan fenomena penyebaran suatu penyakit. Model yang merepresentasikan suatu permasalahan di dunia nyata ke dalam persamaan matematika dinamakan model matematika. Salah satu contoh model matematika dapat diterapkan dalam penyebaran sebuah penyakit.

Pada tahun 2012, muncul sebuah penyakit menular yang pertama kali diidentifikasi di Arab Saudi yaitu *Middle East Respiratory Syndrome* (MERS). Penyakit menular ini disebabkan oleh virus Corona[1], sehingga penyakit ini lebih dikenal dengan penyakit MERS-CoV (*Middle East Respiratory Syndrome Corona Virus*). Sejak muncul pada tahun 2012, penyakit MERS-CoV telah menjadi masalah kesehatan diberbagai negara beberapa diantaranya; Oman, Arab Saudi, Jordan, Turki, Uni Emirat Arab, Qatar, Kuwait, Iran, dan Lebanon. Berdasarkan data WHO sampai akhir November 2019, total 2.494 kasus MERS-CoV, termasuk 858 kematian yang telah dilaporkan, sebagian besar kasus ini dilaporkan dari Arab Saudi (2173 kasus, termasuk 780 kematian)[2]. Pada tahun 2015 Korea Selatan juga dikejutkan akan muncul penyakit MERS-CoV dan menjadi tempat terbanyak dilaporkan terjadinya penyakit MERS-CoV diluar Timur Tengah dengan 186 kasus[3].

Seperti yang kita tahu bahwa banyak warga negara Indonesia sebagai pekerja migran di Korea Selatan. Pada tahun

2019 jumlah PMI (Pekerja Migran Indonesia) meningkat dibandingkan dari tahun sebelumnya[4]. Penyebaran penyakit menular di antara wilayah yang berbeda adalah fenomena yang melibatkan banyak kompartemen yang berbeda. Untuk mengontrol dan mencegah penyebaran, kita harus memahami bagaimana penyebaran penyakit menular tersebut. Banyak faktor yang mempengaruhi penularan penyakit, misalkan perpindahan populasi, gaya hidup, dan meningkatnya perjalanan internasional. Untuk penyakit menular seperti SARS dan MERS-CoV, faktor perpindahan populasi ini menjadi faktor penting yang mempengaruhi penyebaran penyakit diantara wilayah yang berbeda[5].

Sebelumnya telah dilakukan penelitian terkait penyakit MERS-CoV antara lain, Khusnul Khotimah (2016), yang membahas masalah kontrol optimal dari pengontrolan epidemik penyakit MERS dengan intervensi masker kesehatan, kampanye kesehatan, dan pengobatan. Pada penelitian tersebut menggunakan Prinsip Maksimum/Minimum Pontryagin. Selain itu, telah dilakukan penelitian juga oleh Nurul Dwi Noviyanti (2018) menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin mengenai analisis model matematika penyebaran penyakit MERS serta penerapan kontrol optimal berupa vaksinasi.

Dari penjelasan diatas, penulis akan melakukan penelitian mengenai kontrol optimal model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan pengaturan dosis pengobatan dan penyuluhan kesehatan.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, dapat dirumuskan beberapa rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan model penyebaran penyakit MERS-CoV?
2. Bagaimana kontrol optimal pada model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan pengaturan dosis obat dan penyuluhan kesehatan?
3. Bagaimana simulasi program dari solusi model sebelum dan setelah diberikan kontrol?

1.3. Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dibatasi ruang lingkup sebagai berikut:

1. Model Matematika yang digunakan adalah model matematika yang ditulis oleh Kim Yunhwan, dkk.
2. Menggunakan kontrol optimal yaitu Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Menggunakan solusi numerik Runge-Kutta orde 4.

1.4. Tujuan

Tujuan dalam penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui apakah model penyakit MERS-CoV sistem yang stabil, terkontrol, dan teramati.
2. Mendapatkan kontrol optimal pada model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan pengaturan dosis obat dan penyuluhan kesehatan.
3. Mengetahui pengaruh kontrol terhadap model penyebaran penyakit MERS-CoV sebelum dan setelah diberikan kontrol.

1.5. Manfaat

Manfaat dalam penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh pengetahuan sifat model matematika pada penyebaran penyakit MERS-CoV.
2. Memperoleh pengetahuan dalam penerapan teori kontrol optimal menggunakan dengan pengaturan dosis obat dan penyuluhan kesehatan dalam model penyebaran penyakit MERS-CoV.
3. Sebagai referensi bagi pembaca dalam melakukan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai penelitian terdahulu, penyakit MERS-CoV, bilangan repdroduksi dasar, model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV, analisis sistem yang meliputi analisis keterkontrolan, dan keteramatan di sekitar titik setimbang, formulasi masalah kontrol optimal, analisis kestabilan kriteria Routh Hurwitz, metode Runge-Kutta orde 4, serta Prinsip Maksimum Pontryagin.

2.1. Penelitian Terdahulu

Banyak jurnal penelitian di bidang matematika terkait penyakit MERS-CoV seperti yang ditulis oleh Kim, dkk (2016) dengan judul "The Characteristics of Middle Eastern Respiratory Syndrome Coronavirus Transmission Dynamics in South Korea" merumuskan model matematika untuk dinamika transmisi MERS dan memperkirakan tingkat transmisi. Menggunakan perkiraan tingkat transmisi, bilangan reproduksi dasar diperkirakan dalam dua periode. Bilangan reproduksi dasar sangat besar pada periode pertama, namun bilangan reproduksi dasar periode kedua telah berkurang secara signifikan setelah intervensi intensif[3].

Selain itu, kontrol optimal pada penyakit menular MERS-CoV pernah dibahas sebelumnya dalam penelitian dengan judul "Masalah Kontrol Optimal Pada Penyebaran Penyakit MERS dengan Intervensi Masker Kesehatan, Kampanye Kesehatan, dan Pengobatan" tahun 2016 oleh Khusnul Khotimah[6]. Dalam penelitian tersebut membahas masalah kontrol optimal dari pengontrolan epidemi penyakit MERS dengan intervensi masker kesehatan, kampanye kesehatan, dan pengobatan yang bergantung terhadap waktu dapat mengurangi jumlah infeksi MERS secara

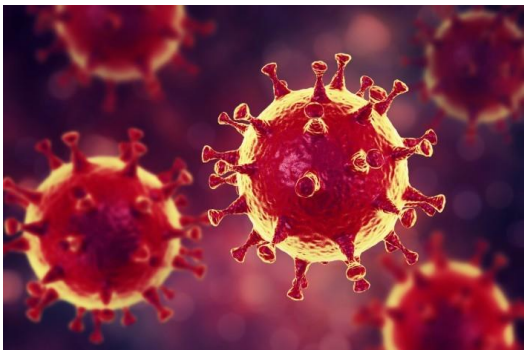
signifikan. Sistem kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum/ Minimum Pontryagin dan diselesaikan secara numerik berdasarkan metode Gradient Descent. Pada tahun 2018, dilakukan penelitian juga oleh Nurul Dwi Noviyanti, dengan judul penelitian "Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Pada Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS" membahas analisis model matematika penyebaran penyakit MERS serta penerapan kontrol optimal berupa vaksinasi yang menunjukkan bahwa pemberian kontrol cukup efektif untuk meminimalkan jumlah populasi laten, rawat inap dan terinfeksi dengan biaya minimal[7].

Beberapa penelitian dengan menggunakan Prinsip Maksimum/Minimum Pontryagin yang pernah dilakukan sebelumnya oleh Nadiya Putri Marizka tahun 2011 dengan judul "Kombinasi Brachytherapy dan Imunoterapi Pada Pengobatan Kanker dengan Metode Prinsip Minimum Pontryagin"[8]. Pada tahun 2016, Khusnul Khotimah dengan judul penelitian "Masalah Kontrol Optimal pada Penyebaran Penyakit MERS dengan Intervensi Masker Kesehatan, Kampanye Kesehatan, dan Pengobatan" menggunakan Prinsip Maksimum/Minimum Pontryagin. Selain itu, Nurul Dwi Noviyanti (2018) dengan judul penelitian "Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Pada Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS" dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

2.2. Penyakit MERS-CoV

Middle East Respiratory Syndrome (MERS) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus Corona, yang pertama kali diidentifikasi di Arab Saudi pada tahun 2012[1]. Penyakit ini disebabkan oleh zoonosis yang dapat ditemukan di beberapa hewan seperti kelelawar dan unta, sehingga penularan penyakit ini dapat ditularkan dari hewan ke manusia[9]. Selain

itu, penularan penyakit ini dapat ditularkan dari manusia ke manusia dengan cara kontak dekat (termasuk pasien rumah sakit yang berbagi kamar, anggota keluarga, dan tenaga medis)[10].



Gambar 2. 1 Virus Corona

Laporan bahwa rata-rata masa inkubasi MERS-CoV adalah 5,2 hari tetapi jangka waktu sampai 12 hari juga telah dilaporkan. Gejala umum penyakit MERS-CoV ini seperti demam, demam dengan menggigil, batuk, sesak napas, mialgia dan biasanya pasien yang memiliki penyakit komorbid. Gejala gastrointestinal juga sering, termasuk diare, muntah dan sakit perut. Pada beberapa pasien, terutama mereka yang memiliki kondisi kesehatan kronis yang mendasari virus dapat menyebabkan penyakit parah, yang menyebabkan kegagalan pernapasan yang membutuhkan ventilasi mekanis dan dukungan di unit perawatan intensif. Sebagian besar kasus asimptomatik ini telah terdeteksi setelah penelusuran kontak agresif dari kasus yang dikonfirmasi di laboratorium[11].

Hingga saat ini belum ada pengobatan antivirus yang khusus yang direkomendasikan untuk infeksi MERS-CoV dan saat ini belum ada vaksin khusus. Tatalaksana saat ini ialah terapi

suportif, namun ada kelompok kesehatan yang telah merekomendasikan pertimbangan menggunakan interferon alfa 2b dengan ribavirin dalam pengelolaan kasus MERS-CoV karena kombinasi obat ini terlihat khasiatnya pada kera dengan MERS[11]. Selain itu, pasien dengan HIV/AIDS dari MERS-CoV pneumonia berhasil sembuh karena diberikan pengobatan dengan interferon β diikuti dengan pemberian interferon α[12].

Karena belum ada vaksin khusus, bila ingin bepergian ke wilayah yang terjangkit MERS dapat melakukan pencegahan seperti[13]:

1. Mencuci tangan dengan sabun dan air atau oleskan larutan alkohol.
2. Tutup mulut dan hidung dengan tisu saat batuk atau bersin.
3. Hindari tangan menyentuh mulut, hidung dan mata.
4. Hindari kontak dengan pasien gejala pernapasan.
5. Hindari kontak dengan hewan peliharaan atau binatang liar (misal unta).
6. Hindari kontak dengan sekresi (misal urin, feses).
7. Hindari konsumsi susu yang tidak dipasteurisasi (khususnya dari unta), atau daging yang tidak dimasak dengan benar.
8. Hindari konsumsi buah dan sayuran yang tidak dicuci atau dikupas sendiri.
9. Jika mengalami gejala pernapasan apapun selama perjalanan, segera dapatkan bantuan medis, laporkan perjalanan terakhir dan tunda kepulangan dari perjalanan hingga sembuh sepenuhnya.
10. Setelah kembali dari negara-negara Timur Tengah, jika dalam 14 hari terserang demam 38 C atau lebih dan gejala pernapasan (batuk, sesak napas, dll) segera mencari

pertolonga medis dan memberi tahu dokter tentang perjalanan destinasi terakhir.

11. Jika seorang peziarah yang bepergian untuk Haji dan Umrah dan berusia di atas 65 tahun, atau jika menderita penyakit kronis (misal jantung, penyakit ginjal atau pernapasan, diabetes, defisiensi imun bawaan atau didapat, keganasan atau penyakit terminal, atau jika wanita hamil atau anak-anak <12 tahun), harus menunda pelaksanaan ibadah haji dan umrah demi keamanan sendiri.

2.3. Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV

Model-model matematika merupakan alat yang berguna untuk mempelajari dinamika penyebaran penyakit menular. Pada penelitian ini, model matematika yang digunakan mengacu pada model yang dibentuk Kim Yunhwan, dkk mengenai penyebaran penyakit MERS-CoV di Korea Selatan. Model ini dibagi menjadi enam kelas, yaitu [3]; kelas rentan (S), kelas terpapar (E), kelas terinfeksi dengan gejala (I), kelas terinfeksi tanpa gejala (A), kelas rawat inap (H), dan kelas sembuh (R). Diasumsikan bahwa kelas A tidak dapat menginfeksi kelas lainnya. Berikut ini adalah model matematika:

$$\frac{dS}{dt} = -S\frac{\beta(I + lH)}{N} \tag{2.1}$$

$$\frac{dE}{dt} = S\frac{\beta(I + lH)}{N} - kE \tag{2.2}$$

$$\frac{dI}{dt} = k\rho E - (\gamma_a + \gamma_I)I \tag{2.3}$$

$$\frac{dA}{dt} = k(1 - \rho)E \tag{2.4}$$

$$\frac{dH}{dt} = \gamma_a I - \gamma_r H \quad (2.5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_I I + \gamma_r H, \quad (2.6)$$

dimana β *rate* penularan dari manusia ke manusia per satuan waktu (hari), dan *l rate* penularan pasien rawat inap; *k rate* individu yang terpapar menjadi infeksi (gejala atau tanpa gejala); ρ *rate* dari kelas terpapar ke kelas infeksi dengan gejala *I*, dan (1-ρ) *rate* dari kelas terpapar ke kelas tanpa gejala *A*; γ_a *rate* interaksi antara kelas terinfeksi dengan kelas rawat inap; γ_I *rate* sembuh tanpa rawat inap; γ_r *rate* sembuh dengan rawat inap.

Dalam banyak model epidemiologi, bilangan reproduksi dasar adalah salah satu nilai penting yang dapat memprediksi penyakit menular akan menyebar ke suatu populasi atau mati. Bilangan reproduksi dasar untuk model di atas sebagai berikut[3]:

$$R_0 = \rho\beta\left(\frac{1}{\gamma_a+\gamma_I} + \frac{\gamma_a l}{\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}\right)$$

2.4. Bilangan Reproduksi Dasar

Untuk mengetahui dinamika penyebaran suatu penyakit, diperlukan bilangan reproduksi dasar (R_0) yang digunakan sebagai ukuran untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi endemi atau tidak. Menurut Berihun, bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menyatakan bertambahnya jumlah individu *infective* terhadap berkurangnya jumlah individu *susceptible* ketika satu individu *infective* dimasukkan ke dalam populasi yang sepenuhnya *susceptible*[16].

Jika R_0 < 1, maka rata-rata individu yang terinfeksi menghasilkan kurang dari satu individu terinfeksi baru selama periode menular. Sebaliknya jika R_0 > 1, maka setiap individu yang terinfeksi memproduksi rata-rata lebih dari satu infeksi baru [17].

2.5. Analisis Sistem

Analisis dinamik model dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem pada model. Pada penelitian ini dianalisis mengenai kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan sistem.

Diberikan persamaan differensial sebagai berikut[14]:

$$\dot{x} = f(x(t)) \qquad (2.7)$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$, penyelesaian dengan keadaan awal $x(0) = x_0$ dinotasikan oleh $x(t, x_0)$.

2.5.1 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Sistem persamaan dikatakan titik setimbang dengan mengacu pada definisi sebagai berikut[14]:

Definisi 2.5.1. Pada Sistem persamaan (2.7), vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut suatu titik setimbang.

2.5.2 Analisis Keterkontrolan

Untuk menstabilkan sistem diperlukan suatu kontrol sehingga perlu dianalisa keterkontrolan sistem. Selain itu, solusi dari suatu permasalahan kontrol optimal mungkin tidak akan diperoleh jika sistem yang bersangkutan tidak terkontrol. Sistem persamaan (2.7) dikatakan terkontrol mengacu pada definisi sistem sebagai berikut[14].

Definisi 2.5.2. *Sistem (2.7) dikatakan terkontrol bila untuk setiap keadaan sebarang $x(0) = x_0$ ada masukan $u(t)$ yang tidak dibatasi mentransfer keadaan x_0 ke sebarang keadaan akhir $x(t_1)$ dengan waktu akhir t_1 hingga.*

Dari pengertian sistem terkontrol yang diberikan dalam definisi diatas, hal ini berarti bahwa bila diberikan sebarang keadaan awal $x(0)$ dan sebarang keadaan akhir $x(t_1)$ akan selalu

ada pengontrol $u(t)$ yang akan mentransfer keadaan awal $x(0)$ ke keadaan akhir yang diinginkan $x(t_1)$dalam waktu yang berhingga t_1 [14].

Selanjutnya diberikan suatu pernyataan dalam suatu teorema berikut ini yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu sistem terkontrol[14].

Teorema 2.5.1.

Syarat perlu dan cukup sistem terkontrol adalah:
$Matriks\ M_c = ([B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad \dots \quad A^{n-1}B])$
mempunyai rank yang sama dengan n.

2.5.3 Analisis Keteramatan

Berikut ini akan diberikan definisi dari keteramatan yang merupakan *dual* dari keterkontrolan.

Definisi 2.5.3. *Bila setiap keadaan awal $x(0) = x_0$ secara tunggal dapat diamati dari setiap pengukuran keluaran sistem (2.7) dari waktu $t = 0$ ke $t = 1$, maka sistem dikatakan "teramati".*

Istilah *dual* diatas, kata 'terkontrol' diganti dengan 'teramati' masukan $u(t)$ diganti dengan keluaran $y(t)$, yaitu dalam terminologi keterkontrolan sebarang keadaan awal x_0 dikontrol dengan suatu masukan $u(t)$ ke sebarang keadaan akhir x_1 dimana $0 \leq \mathrm{t} \leq t_1$, sedangkan dalam terminologi keteramatan sebarang keadaan awal x_0 lewat sebarang pengukuran keluaran $y(t)$ diamati pada interval waktu $0 \leq \mathrm{t} \leq t_1$[14].

Selanjutnya, diberika suatu pernyataan dalam suatu teorema berikut ini yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu sistem teramati[14].

Teorema 2.5.2. *Syarat suatu sistem teramati jika matriks keteramatan*

$$M_0 = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

mempunyai rank yang sama dengan n.

2.6. Analisis Kestabilan Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat dipakai untuk mengecek langsung kestabilan melalui koefisien a_i tanpa menghitung akar-akar dari polinomial yang ada. yaitu dengan melakukan penabelan dan suatu aturan penghitungan dari koefisien a_i akan diketahui bahwa apakah polinomial yang diberikan oleh persamaan (2.8) dengan $a_n \neq 0$ semua akar-akarnya bagian realnya adalah negatif[14].
Diberikan suatu polinomial

$$p(s) = \det(sI - A) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (2.8)$$

susun tabel sebagai berikut:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	
$\vdots$	$\vdots$			
s^0	q			

dimana $b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$ dan q secara rekursif didapat dari:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \ldots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a b_2 a_{n-1}}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}, \ldots$$

Kriteria Routh-Hurwitz menyimpulkan bahwa: banyaknya perubahan tanda dalam kolom pertama pada tabel diatas sama dengan banyaknya akar-akar polinomial $p(s)$ yang bagian realnya positif. Jadi bila pada kolom pertama dalam tabel tidak ada perubahan tanda (semuanya bertanda positif atau semuanya bertanda negatif), maka semua akar polinomial $p(s)$ bagian realnya adalah tak positif, bila polinomial ini merupakan polinomial akar-akar karakteristik dari matriks A dimana $\dot{x} = Ax(t)$, maka sistem ini adalah stabil[14].

2.7. Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Pada prinsipnya, tujuan dari pengendalian optimal adalah menentukan signal atau kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi beberapa konstrain atau kendala, dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J) yang sesuai[15].

Pada umumnya, masalah kendali optimal dalam bentuk ungkapan matematik dapat diformulasikan sebagai berikut, dengan tujuan mencari kontrol $u(t)$ yang mengoptimalkan fungsi tujuan.

$$J(x) = \varphi\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t) dt \qquad (2.9)$$

dengan sistem dinamik yang dinyatakan oleh

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad (2.10)$$

dan kondisi batas

$$x(t_0) = x_0, x\big(t_f\big) = x_f \qquad (2.11)$$

2.8. Prinsip Maksimum Pontryagin

Penyelesaian masalah kendali optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Berdasarkan prinsip maksimum/minimum pontryagin, kondisi perlu dari masalah kontrol optimal yang harus diselesaikan adalah persamaan stasioner, *state* dan *costate* serta kondisi *transversality*.

Langkah-langkah penyelesaian dari masalah kontrol optimal yang diformulasikan oleh sistem persamaan (2.9)-(2.11) adalah sebagai berikut[15]:

1. Bentuk Hamiltonian
   $H(x(t), u(t), \lambda(t), t) =$
   $V(x(t), u(t), t + \lambda'(t) f(x(t), u(t), t)$
2. Minimumkan H terhadap $u(t)$ yaitu dengan cara $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ sehingga diperoleh kondisi stasioner
   $u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$
3. Dengan menggunakan $u^*(t)$ yang telah dihasilkan pada langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamiltonian baru yang optimal, $H^*(t)$, yaitu:
   $H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t) = H(x^*(t), \lambda^*(t), t)$
4. Selesaikan persamaan *state* dan *costate*
   $\dot{x}(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda}$ dan $\lambda^*(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$
   dengan kondisi batas yang diberikan oleh keadan awal dan keadaan akhir yang disebut kondisi *transversality*, yaitu:
   $$\left(H^* \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t_f} \delta_{t_f} + \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right)'_{t_f} \delta x_f = 0$$
   dengan φ adalah bentuk Meyer dari fungsi tujuan *J*, *H* adalah persamaan Hamiltonian, δ menunjukkan variasi

dan tanda $*$ menunjukkan keadaan saat variabel kontrolnya stationer.

5. Untuk mendapatkan kontrol optimal, hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 disubstitusikan ke dalam persamaan $u^*(t)$ pada langkah 2.

2.9. Metode Runge-Kutta Orde Empat

Dalam penelitian ini akan digunakan metode numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial yang dikenal dengan metode Runge-Kutta orde 4 karena penyelesaian persamaan diferensial dengan error yang jauh lebih teliti. Misal diberikan persamaan differensial sebagai berikut[15]:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \quad (2.12)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \quad (2.13)$$

Dengan titik awal $x(t) = x_0, y(t) = y_0$. Secara iterasi penyelesaian Runge-Kutta orde empat adalah sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x}) \quad (2.14)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y}) \quad (2.15)$$

dengan,

$h = \frac{tf - t0}{n}$

$k_{1,x} = f(t_n, x_n, y_n)$

$k_{1,y} = g(t_n, x_n, y_n)$

$k_{2,x} = f(t_n + \frac{h}{2},\ x_n + \frac{k_1}{2},\ y_n + \frac{k_1}{2})$

$k_{2,y} = g\left(t_n + \frac{h}{2},\ x_n + \frac{k_1}{2},\ y_n + \frac{k_1}{2}\right)$

$k_{3,x} = f(t_n + \frac{h}{2},\ x_n + \frac{k_2}{2},\ y_n + \frac{k_2}{2})$

$k_{3,y} = g(t_n + \frac{h}{2},\ x_n + \frac{k_2}{2},\ y_n + \frac{k_2}{2})$

$$k_{4,x} = f(t_n + h\,,\ x_n + k_3,\ y_n + k_3)$$
$$k_{4,y} = g(t_n + h\,,\ x_n + k_3,\ y_n + k_3)$$

"*Halaman ini sengaja dikosongkan*"

BAB III
METODE PENELITIAN

Dalam bab ini, langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Kegiatan terdiri atas studi literatur, analisis sistem model penyakit MERS-CoV, formulasi masalah kontrol optimal, menentukan penyelesaian kontrol optimal, simulasi dengan software MATLAB, penarikan kesimpulan dan pemberian saran, serta penulisan laporan Tugas Akhir.

3.1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan studi literatur dari beberapa buku, jurnal, penelitian, *paper*, maupun artikel dari internet mengenai referensi penyakit MERS-CoV, model matematika penyakit MERS-CoV, analisis sistem yang meliputi kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan, kriteria Routh-Hurwitz, metode Runge-Kutta orde empat serta teori kontrol optimal dengan penyelesaian menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

3.2. Analisis Sistem Model Penyebaran Penyakit MERS-CoV

Pada tahap ini akan dianalisis mengenai model matematika pada sistem penyebaran penyakit MERS meliputi kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan sistem. Langkah pertama yang dilakukan dalam analisis sistem adalah mencari titik setimbang. Kemudian dilakukan pelinieran hingga terbentuk matriks Jacobian yang selanjutnya dapat dianalisis sistem tersebut stabil atau tidak berdasarkan nilai eigen yang didapatkan. Untuk menganalisis keterkontrolannnya dapat dilakukan dengan membentuk matriks keterkontrolan dan menentukan jumlah rank dari matriks tersebut. Selanjutnya, untuk menganalisis keteramatan suatu sistem dengan

membentuk matriks keteramatan kemudian menentukan jumlah rank dari matriks tersebut.

3.3. Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Pada tahap ini dilakukan perancangan masalah kontrol optimal dari model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV yang meliputi fungsi objektif syarat batas yang harus dipenuhi, kontrol berupa pengaturan dosis obat (u_1) dan penyuluhan kesehatan (u_2).

3.4. Menentukan Penyelesaian Kontrol Optimal

Pada tahap ini dilakukan penyelesaian kontrol optimal dari model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap ini sebagai berikut:

1. Membentuk fungsi Hamiltonian
2. Menentukan persamaan *state* dan *costate*
3. Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi
4. Menentukan kontrol optimal

3.5. Simulasi dengan Software Matlab

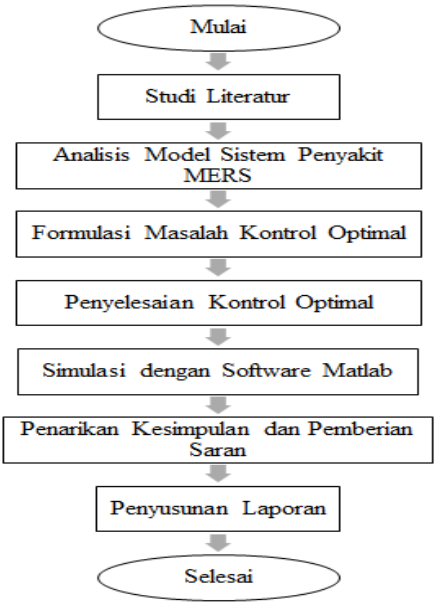
Pada tahap ini, dicari solusi numerik dari permasalahan kontrol optimal pada model sistem penyebaran penyakit MERS-CoV dengan memanfaatkan persamaan *state, costate*, persamaan kontrol optimal serta kondisi-kondisi yang harus terpenuhi. Kemudian disimulasikan untuk melihat pengaruh kontrol sistem pada grafik yang dihasilkan dengan menggunakan software MATLAB. Kemudian dilakukan analisa kembali terhadap hasil pemberian kontrol sistem untuk menentukan bahwa terdapat pengaruh setelah diberikan kontrol.

3.6. Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

Dari hasil pada tahap-tahap sebelumnya, maka penarikan kesimpulan dari penelitian ini dapat dilakukan sekaligus pemberian saran guna perbaikan dan pengembangan untuk penelitian selanjutnya.

3.7. Penulisan Laporan Tugas Akhir

Pada tahap ini dilakukan penyusunan laporan setelah mendapatkan penyelesaian dan simulasi serta penarikan kesimpulan dari topik ini.



Gambar 3. 1 Diagram Alir Metodologi Penelitian

"*Halaman ini sengaja dikosongkan*"

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini dibahas analisis perilaku sistem model penyebaran penyakit MERS-CoV. Dari model tersebut akan dibahas meliputi titik kesetimbangan, analisis kestabilan, analisis keterkontrolan, dan analisis keteramatan. Selanjutnya, dibahas model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dengan kontrol optimal menggunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin dan hasilnya disimulasikan dengan aplikasi MATLAB.

4.1. Analisis Sistem Model Penyebaran Penyakit MERS-CoV

Pada subbab ini dibahas analisis sistem model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV meliputi titik kesetimbangan, analisis kestabilan, analisis keterkontrolan, dan analisis keteramatan. Model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV terdapat enam kelas (subpopulasi). Populasi manusia dibagi menjadi enam subpopulasi, yaitu

1. $S(t)$: Populasi manusia rentan pada saat t
2. $E(t)$: Populasi manusia terpapar pada saat t
3. $I(t)$: Populasi manusia terinfeksi dengan adanya gejala pada saat t
4. $A(t)$: Populasi manusia terinfeksi tanpa adanya gejala pada saat t
5. $H(t)$: Populasi manusia rawat inap pada saat t
6. $R(t)$: Populasi manusia sembuh dari penyakit pada saat t

Selanjutnya keenam subpopulasi tersebut ditulis dengan S, E, I, A, H dan R.

Pendefinisian variabel dan nilai parameter yang digunakan dalam model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 berikut.

Tabel 4. 1 Keterangan Variabel pada Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV

Variabel	**Keterangan**
$S(t)$	Jumlah populasi manusia rentan pada saat t
$E(t)$	Jumlah populasi manusia terpapar pada saat t
$I(t)$	Jumlah populasi manusia terinfeksi dengan gejala pada saat t
$A(t)$	Jumlah populasi manusia terinfeksi tanpa gejala pada saat t
$H(t)$	Jumlah populasi manusia rawat inap pada saat t
$R(t)$	Jumlah populasi manusia sembuh pada saat t
$N(t)$	Jumlah total populasi manusia pada saat t

Tabel 4. 2 Nilai Parameter pada Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV (Kim Yunhwan, dkk)

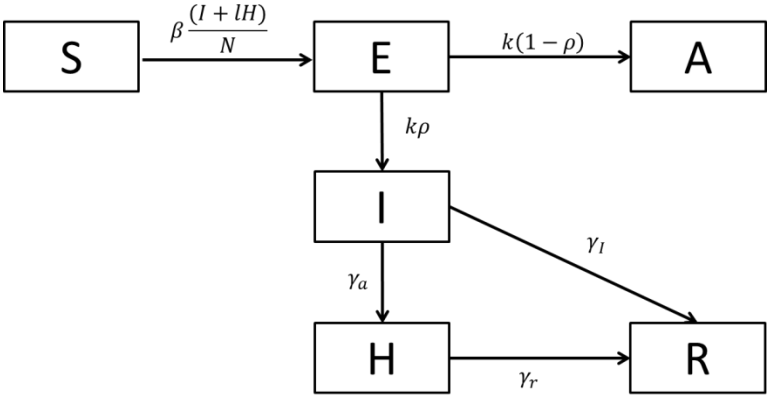
Parameter	Nilai Awal	Sumber
β	0,0835	*rate* penularan dari manusia ke manusia per satuan waktu (hari)
l	22	*rate* penularan pasien rawat inap
k	1/(6,6)	*rate* individu yang terpapar menjadi infeksi (gejala atau tanpa gejala)
ρ	0,585	*rate* dari kelas terpapar ke kelas infeksi dengan gejala *I*
γ_a	0,6403	*rate* interaksi antara kelas terinfeksi dengan kelas rawat inap
γ_I	1/5	*rate* sembuh tanpa rawat inap
γ_r	1/7	*rate* sembuh dengan rawat inap

Karena S, E, I, A, H, R dan N merupakan jumlah individu masing-masing subpopulasi, maka $S, E, I, A, H, R, N \geq 0$. Selain itu, untuk setiap parameter $\beta, l, k, \rho, \gamma_a, \gamma_I, \gamma_r > 0$.

Beberapa asumsi yang digunakan dalam model matematika penyakit MERS-CoV, yaitu:

1. Tidak dimasukkan laju kematian atau laju kematian diabaikan.
2. *Rate* sembuh tanpa rawat inap yang digunakan lebih besar dari *rate* sembuh dengan rawat inap berdasarkan situasi epidemiologi kluster MERS-CoV tahun 2015 dan implikasinya bagi respo kesehatan masyarakan di Korea Selatan.

Berdasarkan populasi penyebaran penyakit MERS-CoV yang ada serta asumsi-asumsi dan parameter yang telah disebutkan maka dapat dibentuk diagram transmisi populasi penyebaran penyakit MERS-CoV sebagai berikut.



Gambar 4. 1 Diagram Kompartemen Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV

Berdasarkan diagram di atas, model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dapat disajikan dalam sistem persamaan 2.1-2.6 sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = -S\frac{\beta(I+lH)}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = S\frac{\beta(I+lH)}{N} - kE$$

$$\frac{dI}{dt} = k\rho E - (\gamma_a + \gamma_I)I$$

$$\frac{dA}{dt} = k(1-\rho)E$$

$$\frac{dH}{dt} = \gamma_a I - \gamma_r H$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_I I + \gamma_r H,$$

Keterangan variabel dan nilai parameter dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2. Selanjutnya, akan dicari titik kesetimbangan dari model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV.

4.1.1 Titik Kesetimbangan

Titik setimbang pada model penyebaran penyakit MERS-CoV diperoleh dari $\frac{dS}{dt}, \frac{dE}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dA}{dt}, \frac{dH}{dt}$, dan $\frac{dR}{dt}$ saat bernilai nol, sehingga persamaan (2.1) - (2.6) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -S\frac{\beta(I+lH)}{N} = 0 \qquad (4.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = S\frac{\beta(I+lH)}{N} - kE = 0 \qquad (4.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = k\rho E - (\gamma_a + \gamma_I)I = 0 \qquad (4.3)$$

$$\frac{dA}{dt} = k(1-\rho)E = 0 \qquad (4.4)$$

$$\frac{dH}{dt} = \gamma_a I - \gamma_r H = 0 \qquad (4.5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_I I + \gamma_r H = 0. \qquad (4.6)$$

Berdasarkan persamaan (4.1) – (4.6), diperoleh dua titik setimbang yaitu titik setimbang bebas penyakit (non endemik) dan titik setimbang endemik.

a. Titik Setimbang Bebas Penyakit (Non Endemik)

Titik setimbang bebas penyakit (non endemik) merupakan kondisi ketika tidak terdapat penyebaran penyakit MERS-CoV. Titik setimbang tersebut diperoleh pada saat tidak ada individu yang terinfeksi baik itu terinfeksi dengan adanya gejala ($I = 0$) maupun terinfeksi tanpa gejala ($A = 0$). Dengan mensubstitusikan nilai $I = 0$ dan $A = 0$ ke persamaan 4.1, 4.2, 4.5, dan 4.6 sebagai berikut.

Dari Persamaan 4.5, $\frac{dH}{dt} = 0$

$\frac{dH}{dt} = \gamma_a I - \gamma_r H = 0$

$\Leftrightarrow 0 - \gamma_r H = 0$

$\Leftrightarrow H = 0,$

Dari Persamaan 4.6, $\frac{dR}{dt} = 0$

$\frac{dR}{dt} = \gamma_I I + \gamma_r H = 0,$

karena $I = 0$ dan $H = 0$ maka $R = 0,$

Dari Persamaan 4.1, $\frac{dS}{dt} = 0$

$\frac{dS}{dt} = -S\frac{\beta(I+lH)}{N} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{-\beta SI-\beta lSH}{N} = 0$
$\Leftrightarrow S = 0,$
Dari Persamaan 4.2, $\frac{dE}{dt} = 0$
$\frac{dE}{dt} = S\frac{\beta(I+lH)}{N} - kE = 0$
$\Leftrightarrow \frac{-\beta SI-\beta lSH}{N} - kE = 0$
$\Leftrightarrow 0 - kE = 0$
$\Leftrightarrow E = 0,$

Misalkan titik setimbang bebas penyakit (non endemik) dinyatakan dalam $E_0 = (S^0, E^0, I^0, A^0, H^0, R^0)$. Maka titik setimbang bebas penyakit (non endemik) dari model penyebaran penyakit MERS-CoV adalah $E_0 = (0,0,0,0,0,0)$.

Tabel 4. 3 Nilai Awal Sub-populasi untuk Kondisi Awal

Populasi	Nilai Awal	Sumber
$S(0)$	400	Asumsi
$E(0)$	150	Asumsi
$I(0)$	100	Asumsi
$A(0)$	50	Asumsi
$H(0)$	180	Asumsi
$R(0)$	120	Asumsi
N	1000	Asumsi

b. Titik Setimbang Endemik

Titik setimbang endemik merupakan kondisi ketika terdapat individu yang terinfeksi dengan adanya gejala $(I \neq 0)$. Sehingga diperoleh $S, E, I, A, H, R \geq 0$. Misalkan titik setimbang endemik dinyatakan dalam $E_1 = (S^1, E^1, I^1, A^1, H^1, R^1)$. Dari Persamaan 4.1-4.6 didapatkan titik setimbang endemik sebagai berikut:

Dari Persamaan 4.4 $\frac{dA}{dt} = 0$,

$\frac{dA}{dt} = k(1-\rho)E = 0$

$\Leftrightarrow kE - k\rho E = 0$

$\Leftrightarrow k\rho E = kE$

$\Leftrightarrow \rho = 1$,

karena ρ diatas nilainya tidak sama dengan nilai parameter yang diberikan, maka $A^1 = 0$.

Dari Persamaan 4.3 $\frac{dI}{dt} = 0$,

$\frac{dI}{dt} = k\rho E - (\gamma_a + \gamma_I)I = 0$

$\Leftrightarrow (\gamma_a + \gamma_I)I = k\rho E$

$\Leftrightarrow I^1 = \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)}$, dengan $E^1 \neq 0$.

Dari Persamaan 4.5 $\frac{dH}{dt} = 0$,

$\frac{dH}{dt} = \gamma_a I - \gamma_r H = 0$

$\Leftrightarrow \gamma_r H = \gamma_a I$

$\Leftrightarrow H = \frac{\gamma_a I^1}{\gamma_r}$

$\Leftrightarrow H^1 = \frac{\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}$.

Dari Persamaan 4.6 $\frac{dR}{dt} = 0$,

$\frac{dR}{dt} = \gamma_I I + \gamma_r H = 0$

$\Leftrightarrow \gamma_I \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)} + \gamma_r \frac{\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\gamma_I\, k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)} = -\frac{\gamma_a k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)}$

$\Leftrightarrow \gamma_I = -\gamma_a$.

Dari Persamaan 4.2 $\frac{dE}{dt} = 0$,

$\frac{dE}{dt} = S\frac{\beta(I+lH)}{N} - kE = 0$

$\Leftrightarrow \frac{S\beta I}{N} + \frac{S\beta lH}{N} - kE = 0$

$\Leftrightarrow \frac{S\beta k\rho E}{N(\gamma_a+\gamma_I)} + \frac{S\beta l\,\gamma_a k\rho E}{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)} - kE = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\beta\gamma_r k\rho SE}{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)} + \frac{S\beta l\,\gamma_a k\rho E}{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)} - \frac{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)kE}{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)} = 0$

$\Leftrightarrow \beta\gamma_r k\rho SE + S\beta l\,\gamma_a k\rho E - N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)kE = 0$

$\Leftrightarrow kE(\beta\gamma_r\rho S + S\beta l\,\gamma_a\rho - N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)) = 0$

$\Leftrightarrow \beta\gamma_r\rho S + S\beta l\,\gamma_a\rho - N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I) = 0$

$\Leftrightarrow \beta\gamma_r S + S\beta l\,\gamma_a = N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)$

$\Leftrightarrow S(\beta\gamma_r\rho + \beta l\,\gamma_a\rho) = N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)$

$\Leftrightarrow S^1 = \frac{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}{(\beta\gamma_r\rho+\beta l\,\gamma_a\rho)}$,

atau

$\Leftrightarrow kE \neq 0$.

Dari Persamaan 4.1 $\frac{dS}{dt} = 0$,

$\frac{dS}{dt} = -S\frac{\beta(I+lH)}{N} = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{S\beta I}{N} - \frac{S\beta lH}{N} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}{(\beta\gamma_r+\beta l\,\gamma_a)(\gamma_a+\gamma_I)}\frac{k\rho E}{}\beta}{N} = -\frac{\frac{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}{(\beta\gamma_r+\beta l\,\gamma_a)\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}\frac{\gamma_a k\rho E}{}\beta l}{N}$

$\Leftrightarrow \beta = -\frac{\gamma_a\beta l}{\gamma_r}$

$\Leftrightarrow \gamma_r = -\gamma_a l$.

Berdasarkan uraian diatas, diperoleh titik setimbang endemik penyebaran penyakit MERS-CoV yang dinyatakan dalam $E_1 = (S^1, E^1, I^1, A^1, H^1, R^1) = (S^1, E^1, I^1, 0, H^1, R^1)$ sehingga,

$$E_1 = \left(\frac{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}{\beta\gamma_r\rho+\beta l\gamma_a\rho}, E^1, \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)}, 0, \frac{\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}, R^1\right)$$

Selanjutnya, menentukan salah satu titik setimbang dengan memisalkan nilai awal untuk $E^1 = 100$ dan memasukkan nilai parameter pada Tabel 4.2 ke E_1 sehingga diperoleh salah satu titik setimbang $E_1(*) = (173,100,\ 11,0,48,668)$ yang akan digunakan untuk menganalisis kestabilan.

4.1.2 Analisis Kestabilan

Dari persamaan 2.1-2.6 dapat dinyatakan sebagai fungsi dari variabel S, E, I, A, H dan R sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$f_1(S,E,I,A,H,R) = -S\frac{\beta(I+lH)}{N}$$
$$f_2(S,E,I,A,H,R) = S\frac{\beta(I+lH)}{N} - kE$$
$$f_3(S,E,I,A,H,R) = k\rho E - (\gamma_a + \gamma_I)I$$
$$f_4(S,E,I,A,H,R) = k(1-\rho)E$$
$$f_5(S,E,I,A,H,R) = \gamma_a I - \gamma_r H$$
$$f_6(S,E,I,A,H,R) = \gamma_I I + \gamma_r H$$

Model penyebaran penyakit MERS-CoV diatas merupakan sistem non linier sehingga harus dilakukan pelinieran terlebih dahulu disekitar titik setimbangnya dengan membentuk matriks Jacobian. Analisis kestabilan model tersebut dilakukan dengan pendekatan Deret Taylor, yaitu:

$$f_1(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}(S-\bar{S}) + \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}(E-\bar{E}) + \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}(I-\bar{I}) + \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}(A-\bar{A}) + \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}(H-\bar{H}) + \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}(R-\bar{R})$$

$$f_2(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}(S-\bar{S}) + \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}(E-\bar{E}) + \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}(I-\bar{I}) + \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}(A-\bar{A}) + \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}(H-\bar{H}) + \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}(R-\bar{R})$$

$$f_3(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}(S-\bar{S}) + \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}(E-\bar{E}) + \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}(I-\bar{I}) + \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}(A-\bar{A}) + \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}(H-\bar{H}) + \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}(R-\bar{R})$$

$$f_4(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}(S-\bar{S}) + \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}(E-\bar{E}) + \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}(I-\bar{I}) + \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}(A-\bar{A}) + \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}(H-\bar{H}) + \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}(R-\bar{R})$$

$$f_5(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}(S-\bar{S}) + \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}(E-\bar{E}) + \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}(I-\bar{I}) + \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}(A-\bar{A}) + \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}(H-\bar{H}) + \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}(R-\bar{R})$$

$$f_6(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}(S-\bar{S}) + \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}(E-\bar{E}) + \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}(I-\bar{I}) + \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}(A-\bar{A}) + \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}(H-\bar{H}) + \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}(R-\bar{R})$$

Misalkan : $\bar{\bar{S}} = S - \bar{S}$

$$\bar{\bar{E}} = E - \bar{E}$$
$$\bar{\bar{I}} = I - \bar{I}$$
$$\bar{\bar{A}} = A - \bar{A}$$
$$\bar{\bar{H}} = H - \bar{H}$$
$$\bar{\bar{R}} = R - \bar{R}$$

hingga,

$$f_1(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}\bar{\bar{S}} + \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}\bar{\bar{E}} + \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}\bar{\bar{I}} + \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}\bar{\bar{A}} + \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}\bar{\bar{H}} + \frac{\partial f_1(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}\bar{\bar{R}}$$

$$f_2(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}\bar{\bar{S}} + \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}\bar{\bar{E}} + \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}\bar{\bar{I}} + \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}\bar{\bar{A}} + \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}\bar{\bar{H}} + \frac{\partial f_2(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}\bar{\bar{R}}$$

$$f_3(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}\bar{\bar{S}} + \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}\bar{\bar{E}} + \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}\bar{\bar{I}} + \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}\bar{\bar{A}} + \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}\bar{\bar{H}} + \frac{\partial f_3(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}\bar{\bar{R}}$$

$$f_4(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}\bar{\bar{S}} + \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}\bar{\bar{E}} + \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}\bar{\bar{I}} + \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}\bar{\bar{A}} + \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}\bar{\bar{H}} + \frac{\partial f_4(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}\bar{\bar{R}}$$

$$f_5(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}\bar{\bar{S}} + \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}\bar{\bar{E}} + \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}\bar{\bar{I}} + \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}\bar{\bar{A}} + \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}\bar{\bar{H}} + \frac{\partial f_5(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}\bar{\bar{R}}$$

$$f_6(S,E,I,A,H,R) = \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial S}\bar{\bar{S}} + \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial E}\bar{\bar{E}} + \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial I}\bar{\bar{I}} + \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial A}\bar{\bar{A}} + \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial H}\bar{\bar{H}} + \frac{\partial f_6(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{A},\bar{H},\bar{R})}{\partial R}\bar{\bar{R}}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks, adalah:

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{E} \\ \dot{I} \\ \dot{A} \\ \dot{H} \\ \dot{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{E})}{\partial S} & \frac{\partial f_1(\bar{E})}{\partial E} & \frac{\partial f_1(\bar{E})}{\partial I} & \frac{\partial f_1(\bar{E})}{\partial A} & \frac{\partial f_1(\bar{E})}{\partial H} & \frac{\partial f_1(\bar{E})}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2(\bar{E})}{\partial S} & \frac{\partial f_2(\bar{E})}{\partial E} & \frac{\partial f_2(\bar{E})}{\partial I} & \frac{\partial f_2(\bar{E})}{\partial A} & \frac{\partial f_2(\bar{E})}{\partial H} & \frac{\partial f_2(\bar{E})}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3(\bar{E})}{\partial S} & \frac{\partial f_3(\bar{E})}{\partial E} & \frac{\partial f_3(\bar{E})}{\partial I} & \frac{\partial f_3(\bar{E})}{\partial A} & \frac{\partial f_3(\bar{E})}{\partial H} & \frac{\partial f_3(\bar{E})}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4(\bar{E})}{\partial S} & \frac{\partial f_4(\bar{E})}{\partial E} & \frac{\partial f_4(\bar{E})}{\partial I} & \frac{\partial f_4(\bar{E})}{\partial A} & \frac{\partial f_4(\bar{E})}{\partial I} & \frac{\partial f_4(\bar{E})}{\partial R} \\ \frac{\partial f_5(\bar{E})}{\partial S} & \frac{\partial f_5(\bar{E})}{\partial E} & \frac{\partial f_5(\bar{E})}{\partial I} & \frac{\partial f_5(\bar{E})}{\partial A} & \frac{\partial f_5(\bar{E})}{\partial I} & \frac{\partial f_5(\bar{E})}{\partial R} \\ \frac{\partial f_6(\bar{E})}{\partial S} & \frac{\partial f_6(\bar{E})}{\partial E} & \frac{\partial f_6(\bar{E})}{\partial I} & \frac{\partial f_6(\bar{E})}{\partial A} & \frac{\partial f_6(\bar{E})}{\partial H} & \frac{\partial f_6(\bar{E})}{\partial R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\bar{S}} \\ \bar{\bar{E}} \\ \bar{\bar{I}} \\ \bar{\bar{A}} \\ \bar{\bar{H}} \\ \bar{\bar{R}} \end{pmatrix}$$

Dari pendekatan Deret Taylor, dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial A} & \frac{\partial f_1}{\partial H} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial A} & \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial A} & \frac{\partial f_3}{\partial H} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial A} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial E} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial A} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial R} \\ \frac{\partial f_6}{\partial S} & \frac{\partial f_6}{\partial E} & \frac{\partial f_6}{\partial I} & \frac{\partial f_6}{\partial A} & \frac{\partial f_6}{\partial H} & \frac{\partial f_6}{\partial R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\bar{S}} \\ \bar{\bar{E}} \\ \bar{\bar{I}} \\ \bar{\bar{A}} \\ \bar{\bar{H}} \\ \bar{\bar{R}} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & P_{13} & 0 & P_{15} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 & P_{25} & 0 \\ 0 & P_{32} & P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & 0 & P_{55} & 0 \\ 0 & 0 & P_{63} & 0 & P_{65} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\bar{S}} \\ \bar{\bar{E}} \\ \bar{\bar{I}} \\ \bar{\bar{A}} \\ \bar{\bar{H}} \\ \bar{\bar{R}} \end{pmatrix}$$

Dari hasil diatas, dapat ditulis dalam bentuk Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & P_{13} & 0 & P_{15} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 & P_{25} & 0 \\ 0 & P_{32} & P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & 0 & P_{55} & 0 \\ 0 & 0 & P_{63} & 0 & P_{65} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.7)$$

dengan

$P_{11} = \frac{-\beta I - \beta lH}{N},\ P_{13} = -\frac{\beta S}{N},\ P_{15} = -\frac{\beta lS}{N}$

$P_{21} = \frac{\beta I + \beta lH}{N},\ P_{22} = -k,\ P_{23} = \frac{\beta S}{N},\ P_{25} = \frac{\beta lS}{N}$

$P_{32} = k\rho,\ P_{33} = -\gamma_a - \gamma_I$

$P_{42} = k - k\rho$

$P_{53} = \gamma_a,\ P_{55} = -\gamma_r$

$P_{63} = \gamma_I,\ P_{65} = \gamma_r$

a. Kestabilan Pada Titik Setimbang Non Endemik

Sebelumnya diperoleh titik setimbang non endemik $E_0 = (0,0,0,0,0,0)$, maka

$$JE_0 = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & P_{13} & 0 & P_{15} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 & P_{25} & 0 \\ 0 & P_{32} & P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & 0 & P_{55} & 0 \\ 0 & 0 & P_{63} & 0 & P_{65} & 0 \end{pmatrix}$$

dengan

$P_{11} = 0,\ P_{13} = 0,\ P_{15} = 0,$

$P_{21} = 0,\ P_{22} = -k,\ P_{23} = 0,\ P_{25} = 0,$

$P_{32} = k\rho,\ P_{33} = -\gamma_a - \gamma_I,$

$P_{42} = k - k\rho,$

$P_{53} = \gamma_a,\ P_{55} = -\gamma_r,$

$P_{63} = \gamma_I,\ P_{65} = \gamma_r,$

Selanjutnya, dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobi tersebut dengan menggunakan $\det(\lambda I - JE_0) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - P_{11} & 0 & P_{13} & 0 & P_{15} & 0 \\ P_{21} & \lambda - P_{22} & P_{23} & 0 & P_{25} & 0 \\ 0 & P_{32} & \lambda - P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & 0 & \lambda - P_{55} & 0 \\ 0 & 0 & P_{63} & 0 & P_{65} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

kemudian dengan menggunakan ekspansi kofaktor terhadap baris pertama untuk mempermudah perhitungan dapat dilihat pada **Lampiran 1**, sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$\lambda^3(\lambda^3 + m_1\lambda^2 + m_2\lambda + m_3) = 0$$

dengan

$m_1 = k + \gamma_a + \gamma_I + \gamma_r > 0$

$m_2 = \gamma_a\gamma_r + \gamma_I\gamma_r + k\gamma_a + k\gamma_I + k\gamma_r > 0$

$m_3 = k\gamma_a\gamma_r + k\gamma_I\gamma_r > 0$

Dari persamaan karakteristik diperoleh nilai eigen $\lambda_{1,2,3} = 0$ dan yang lainnya adalah akar-akar dari persamaan $\lambda^3 + m_1\lambda^2 + m_2\lambda + m_3$.

Selanjutnya, untuk memperoleh akar-akar karakteristik (nilai eigen) dari persamaan $\lambda^3 + m_1\lambda^2 + m_2\lambda + m_3$ menggunakan kriteria Routh-Hurwitz maka dapat dibuat tabel sebagai berikut:

λ^3	1	m_2	0	0
λ^2	m_1	m_3	0	0
λ	m_4	0	0	0
λ^0	m_5	0	0	0

Dimana

$m_4 = \frac{m_1m_2 - m_3}{m_1} = \frac{m_1m_2 - m_3}{m_1}$

$m_5 = \frac{m_4m_3 - 0}{m_4} = \frac{m_1m_2m_3 - {m_3}^2}{m_1m_4}$

Nilai eigen yang didapat sebelumnya yaitu $\lambda_{1,2,3} = 0$. Agar sistem stabil, maka nilai-nilai pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz diatas harus bertanda sama. Karena m_1, m_2, m_3 bernilai positif, maka m_4 dan m_5 harus bernilai positif agar sistem stabil. m_4 akan bernilai positif jika $m_1m_2 > 0$ dan $m_1m_2 > m_3$. Jadi

dapat disimpulkan sistem stabil di titik setimbang bebas penyakit jika $m_1 m_2 m_3 > 0$ dan $m_1 m_2 m_3 > {m_3}^2$.

b. Kestabilan Pada Titik Setimbang Endemik

Sebelumnya diperoleh titik setimbang non endemik $E_1 = \left(\frac{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}{\beta\gamma_r\rho+\beta l\gamma_a\rho}, E^1, \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)}, 0, \frac{\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}, R^1\right)$, maka

$$JE_1 = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & P_{13} & 0 & P_{15} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 & P_{25} & 0 \\ 0 & P_{32} & P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & 0 & P_{55} & 0 \\ 0 & 0 & P_{63} & 0 & P_{65} & 0 \end{pmatrix}$$

dengan

$P_{11} = \frac{-\beta I-\beta lH}{N},\ P_{13} = -\frac{\beta S}{N},\ P_{15} = -\frac{\beta lS}{N}$

$P_{21} = \frac{\beta I+\beta lH}{N},\ P_{22} = -k,\ P_{23} = \frac{\beta S}{N},\ P_{25} = \frac{\beta lS}{N}$

$P_{32} = k\rho,\ P_{33} = -\gamma_a - \gamma_I$

$P_{42} = k - k\rho$

$P_{53} = \gamma_a,\ P_{55} = -\gamma_r$

$P_{63} = \gamma_I,\ P_{65} = \gamma_r$

Selanjutnya, dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobi tersebut dengan menggunakan $\det(\lambda I - JE_1) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - P_{11} & 0 & P_{13} & 0 & P_{15} & 0 \\ P_{21} & \lambda - P_{22} & P_{23} & 0 & P_{25} & 0 \\ 0 & P_{32} & \lambda - P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & 0 & \lambda - P_{55} & 0 \\ 0 & 0 & P_{63} & 0 & P_{65} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

kemudian dengan menggunakan ekspansi kofaktor terhadap baris pertama untuk mempermudah perhitungan dapat dilihat pada **Lampiran 1**, sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$\lambda^2(\lambda^4 + m_1\lambda^3 + m_2\lambda^2 + m_3\lambda + m_4) = 0$$

dengan

$m_1 = P_{21} + k + \gamma_a + \gamma_I + \gamma_r > 0$

$m_2 = P_{21}(k + \gamma_a + \gamma_I + \gamma_r) + \gamma_r(\gamma_a + \gamma_I) + k(\gamma_a + \gamma_I + \gamma_r) - P_{23}k\rho > 0$

$m_3 = P_{21}(\gamma_r(\gamma_a + \gamma_I) + (\gamma_a + \gamma_I + \gamma_r) - P_{23}k\rho) + k\gamma_r(\gamma_a + \gamma_I) - P_{23}k\rho\gamma_r + P_{23} > 0$

$m_4 = P_{21}(k\gamma_r(\gamma_a + \gamma_I) - P_{23}k\rho\gamma_r) + P_{23}\gamma_r > 0$

Dari persamaan karakteristik diperoleh nilai eigen $\lambda_{1,2} = 0$ dan yang lainnya adalah akar-akar dari persamaan $\lambda^4 + m_1\lambda^3 + m_2\lambda^2 + m_3\lambda + m_4$.

Selanjutnya, untuk memperoleh akar-akar karakteristik (nilai eigen) dari persamaan $\lambda^4 + m_1\lambda^3 + m_2\lambda^2 + m_3\lambda + m_4$ menggunakan kriteria Routh-Hurwitz maka dapat dibuat tabel sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|cccc} \lambda^4 & 1 & m_2 & m_4 & 0 \\ \lambda^3 & m_1 & m_3 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & m_5 & m_6 & 0 & 0 \\ \lambda & m_7 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^0 & m_8 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dimana

$m_5 = \frac{m_1 m_2 - 1 m_3}{m_1} = \frac{m_1 m_2 - m_3}{m_1}$

$m_6 = \frac{m_1 m_4 - 1.0}{m_1} = m_4$

$m_7 = \frac{m_5 m_3 - m_1 m_6}{m_5} = \frac{m_1 m_2 m_3 - {m_3}^2 - {m_1}^2 m_4}{m_1 m_5}$

$m_8 = \frac{m_7 m_6 - 0}{m_7} = \frac{m_7 m_6}{m_7} = m_6$

Nilai eigen yang didapat sebelumnya yaitu $\lambda_{1,2} = 0$. Agar sistem stabil, maka nilai-nilai pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz diatas harus bertanda sama. Karena m_1, m_2, m_3 dan m_4 bernilai positif, maka $m_5, m_6, m_7 \, dan \, m_8$ harus bernilai positif agar sistem stabil. m_5 akan bernilai positif jika $m_1 m_2 > m_3$. m_7 akan bernilai positif jika $m_1 m_2 m_3 > {m_3}^2 + {m_1}^2 m_4$. Jadi dapat disimpulkan sistem stabil di titik setimbang penyakit jika $m_4 > 0$.

4.1.3 Analisis Keterkontrolan

Analisis keterkontrolan memerlukan sistem yang telah dilinierkan, maka dengan menggunakan dengan menggunakan matriks Jacobian di sekitar titik setimbang pada Persamaan 4.7 dan memasukkan nilai titik kesetimbangan di sekitar $E_1(*)$, maka diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\bar{f_1} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = \frac{-11\beta - 48\beta l}{N} S - \frac{173\beta}{N} I - \frac{173\beta l}{N} H \qquad (4.8)$$

$$\bar{f_2} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{11\beta + 48\beta l}{N} S + \frac{173\beta}{N} I + \frac{173\beta l}{N} H - kE \qquad (4.9)$$

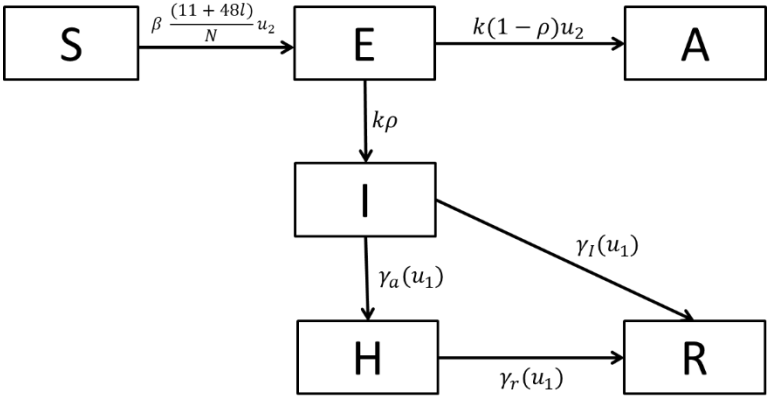
$$\bar{f}_3 = \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} = k\rho E - (\gamma_a + \gamma_I)I \tag{4.10}$$

$$\bar{f}_4 = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = k(1-\rho)E \tag{4.11}$$

$$\bar{f}_5 = \frac{\partial \bar{\bar{H}}}{\partial t} = \gamma_a I - \gamma_r H \tag{4.12}$$

$$\bar{f}_6 = \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} = \gamma_I I + \gamma_r H \tag{4.13}$$

Selanjutnya Persamaan 4.8 – 4.13 diberikan tindakan kontrol yaitu pengaturan dosis obat (u_1) untuk meminimalkan tingkat kematian (menurunkan populasi terinfeksi dengan gejala, menurunkan populasi rawat inap, meningkatkan populasi sembuh) dan penyuluhan kesehatan (u_2) untuk menurunkan populasi terinfeksi dengan gejala dan menurunkan populasi rawat inap. Berdasarkan hal tersebut maka diagram kompartemen model penyebaran penyakit MERS dengan kontrol optimal sebagai berikut:



Gambar 4. 2 Diagram Kompartemen Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV dengan Kontrol Optimal

Berdasarkan diagram kompartemen diatas, model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan kontrol dapat disajikan dalam sistem persamaan differensial sebagai berikut:

$$\bar{f}_1 = \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = \frac{-11\beta - 48\beta l}{N} u_2 S - \frac{173\beta}{N} u_1 I - \frac{173\beta l}{N} u_1 H \quad (4.14)$$

$$\bar{f}_2 = \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{11\beta + 48\beta l}{N} u_2 S + \frac{173\beta}{N} u_1 I + \frac{173\beta l}{N} u_1 H - k u_2 E \quad (4.15)$$

$$\bar{f}_3 = \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} = k\rho E - (\gamma_a + \gamma_I) u_1 I \quad (4.16)$$

$$\bar{f}_4 = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = k u_2 E - k\rho E \quad (4.17)$$

$$\bar{f}_5 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = (\gamma_a I - \gamma_r H) u_1 \quad (4.18)$$

$$\bar{f}_6 = \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} = (\gamma_I I + \gamma_r H) u_1 \quad (4.19)$$

Tabel 4. 4 Tambahan Parameter pada Model Penyebaran Penyakit MERS-CoV dengan Kontrol

Parameter	Keterangan
u_1	Kontrol dengan Pengaturan Dosis Obat
u_2	Kontrol dengan Penyuluhan Kesehatan

Berdasarkan persamaan 4.14-4.19, diperoleh dua titik setimbang model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dengan kontrol optimal yaitu titik setimbang bebas penyakit (non endemik) dan titik setimbang endemik.

a. Titik Setimbang Bebas Penyakit (non endemik) dengan Kontrol Optimal

Titik setimbang bebas penyakit (non endemik) merupakan kondisi ketika tidak terdapat penyebaran penyakit MERS-CoV dengan kontrol optimal. Titik setimbang tersebut diperoleh pada saat tidak ada individu yang terinfeksi baik itu terinfeksi dengan adanya gejala $(I = 0)$ maupun terinfeksi tanpa gejala $(A = 0)$. Dengan mensubstitusikan nilai $I = 0$ dan $A = 0$ ke persamaan 4.14, 4.15, 4.18, dan 4.19 sebagai berikut.

Dari Persamaan 4.18, $\frac{dH}{dt} = 0$

$\frac{dH}{dt} = (\gamma_a I - \gamma_r H)u_1 = 0$

$\Leftrightarrow (0 - \gamma_r H)u_1 = 0$

$\Leftrightarrow H = 0,$

Dari Persamaan 4.19, $\frac{dR}{dt} = 0$

$\frac{dR}{dt} = (\gamma_I I + \gamma_r H)u_1 = 0,$

karena $I = 0$ dan $H = 0\ maka\ R = 0,$

Dari Persamaan 4.14, $\frac{dS}{dt} = 0$

$\frac{dS}{dt} = \frac{-19\beta - 81\beta l}{N} u_2 S - \frac{102\beta}{N} u_1 I - \frac{102\beta l}{N} u_1 H = 0$

$\Leftrightarrow \frac{-19\beta - 81\beta l}{N} u_2 S - 0 - 0 = 0$

$\Leftrightarrow S = 0,$

Dari Persamaan 4.15, $\frac{dE}{dt} = 0$

$\frac{dE}{dt} = \frac{11\beta + 48\beta l}{N} u_2 S + \frac{173\beta}{N} u_1 I + \frac{173\beta l}{N} u_1 H - k u_2 E = 0$

$\Leftrightarrow 0 + 0 + 0 - k u_2 E = 0$

$\Leftrightarrow E = 0,$

Misalkan titik setimbang bebas penyakit (non endemik) dengan kontrol optimal dinyatakan dalam $E_0{}^* = (S^0, E^0, I^0, A^0, H^0, R^0)$. Maka titik setimbang bebas penyakit (non endemik) dari model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan kontrol optimal adalah $E_0{}^* = (0,0,0,0,0,0)$.

b. Titik Setimbang Endemik dengan Kontrol Optimal

Titik setimbang endemik merupakan kondisi ketika terdapat individu yang terinfeksi dengan adanya gejala $(I \neq 0)$. Sehingga diperoleh $S, E, I, A, H, R \geq 0$. Misalkan titik setimbang endemik dinyatakan dalam $E_1{}^* = (S^1, E^1, I^1, A^1, H^1, R^1)$. Dari Persamaan

4.14-4.19 didapatkan titik setimbang endemik dengan kontrol optimal sebagai berikut:

Dari Persamaan 4.17, $\frac{dA}{dt} = 0$,

$\frac{dA}{dt} = ku_2E - k\rho E = 0$

$\Leftrightarrow ku_2E = k\rho E$

$\Leftrightarrow \rho = u_2$,

karena ρ diatas nilainya tidak sama dengan nilai parameter yang diberikan, maka $A^1 = 0$.

Dari Persamaan 4.16, $\frac{dI}{dt} = 0$,

$\frac{dI}{dt} = k\rho E - (\gamma_a + \gamma_I)u_1 I = 0$

$\Leftrightarrow (\gamma_a + \gamma_I)u_1 I = k\rho E$

$\Leftrightarrow I^1 = \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)u_1}$, dengan $E^1 \neq 0$.

Dari Persamaan 4.18, $\frac{dH}{dt} = 0$,

$\frac{dH}{dt} = (\gamma_a I - \gamma_r H)u_1 = 0$

$\Leftrightarrow \gamma_r u_1 H = \gamma_a u_1 I$

$\Leftrightarrow \gamma_r u_1 H = \gamma_a u_1 \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)u_1}$

$\Leftrightarrow \gamma_r u_1 H = \gamma_a \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)}$

$\Leftrightarrow H^1 = \frac{\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r u_1(\gamma_a+\gamma_I)}$.

Dari Persamaan 4.19, $\frac{dR}{dt} = 0$,

$\frac{dR}{dt} = (\gamma_I I + \gamma_r H)u_1 = 0$

$\Leftrightarrow \gamma_I \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)u_1} u_1 + \gamma_r \frac{\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r u_1(\gamma_a+\gamma_I)} u_1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\gamma_I\, k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)} = -\frac{\gamma_a k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)}$

$\Leftrightarrow \gamma_I = -\gamma_a$.

Dari Persamaan 4.15, $\frac{dE}{dt} = 0$,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{11\beta+48\beta l}{N}u_2 S + \frac{173\beta}{N}u_1 I + \frac{173\beta l}{N}u_1 H - ku_2 E = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11\beta+48\beta l}{N}u_2 \frac{\frac{173\beta k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)}+\frac{173\beta l\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}}{(-11\beta-48\beta l)u_2} + \frac{173\beta}{N}u_1 \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)u_1} +$$

$$\frac{173\beta l}{N}u_1 \frac{\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r u_1(\gamma_a+\gamma_I)} - ku_2 E = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{173\beta k\rho E^1}{N(\gamma_a+\gamma_I)} - \frac{173\beta l\gamma_a k\rho E^1}{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)} + \frac{173\beta k\rho E^1}{N(\gamma_a+\gamma_I)} + \frac{173\beta l\gamma_a k\rho E^1}{N\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)} -$$

$$ku_2 E = 0$$

$$\Leftrightarrow ku_2 E \neq 0.$$

Dari Persamaan 4.14, $\frac{dS}{dt} = 0$,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-11\beta-48\beta l}{N}u_2 S - \frac{173\beta}{N}u_1 I - \frac{173\beta l}{N}u_1 H = 0$$

$$\Leftrightarrow (-11\beta - 48\beta l)u_2 S - 173\beta u_1 I - 173\beta l u_1 H = 0$$

$$\Leftrightarrow (-11\beta - 48\beta l)u_2 S =$$

$$173\beta u_1 \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)u_1} + 173\beta l u_1 \frac{\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r u_1(\gamma_a+\gamma_I)}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\frac{173\beta k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)}+\frac{173\beta l\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}}{(-11\beta-48\beta l)u_2}$$

Berdasarkan uraian diatas, diperoleh titik setimbang endemik penyebaran penyakit MERS-CoV dengan kontrol optimal yang dinyatakan dalam $E_1{}^* = (S^1, E^1, I^1, A^1, H^1, R^1) = (S^1, E^1, I^1, 0, H^1, R^1)$ sehingga,

$$E_1{}^* = \left(\frac{\frac{173\beta k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)} + \frac{173\beta l\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r(\gamma_a+\gamma_I)}}{(-11\beta - 48\beta l)u_2}, E^1, \frac{k\rho E^1}{(\gamma_a+\gamma_I)u_1}, 0, \frac{\gamma_a k\rho E^1}{\gamma_r u_1(\gamma_a+\gamma_I)}, R^1 \right)$$

Selanjutnya, menentukan salah satu titik setimbang dengan memisalkan nilai awal untuk $E^1 = 100$ dan memasukkan nilai

parameter pada Tabel 4.2 ke E_1 sehingga diperoleh salah satu titik setimbang $E_1{}^*(*) = \left(0{,}100, \frac{11}{u_1}, 0, \frac{48}{u_1}, 841\right)$

Selanjutnya, persamaan 4.14 – 4.19 dapat dinyatakan sebagai sistem persamaan linear $\dot{x} = Ax + B$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{pmatrix}$$

dengan

$Q_{11} = \frac{-11\beta - 48\beta l}{N} u_1,\ Q_{13} = -\frac{173\beta}{N} u_1,\ Q_{15} = -\frac{173\beta l}{N} u_1$

$Q_{21} = \frac{11\beta + 48\beta l}{N} u_2, Q_{22} = -k u_2, Q_{23} = \frac{173\beta}{N} u_1, Q_{25} = \frac{173\beta l}{N} u_1$

$Q_{32} = k\rho,\ Q_{33} = (-\gamma_a - \gamma_I) u_1$

$Q_{42} = k u_1 - k\rho$

$Q_{53} = \gamma_a u_1,\ Q_{55} = -\gamma_r u_1$

$Q_{63} = \gamma_I u_1,\ Q_{65} = \gamma_r u_1$

Matriks B sebagai berikut:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial u_1} & \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \overline{f_2}}{\partial u_1} & \frac{\partial \overline{f_2}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \overline{f_3}}{\partial u_1} & \frac{\partial \overline{f_3}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \overline{f_4}}{\partial u_1} & \frac{\partial \overline{f_4}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \overline{f_5}}{\partial u_1} & \frac{\partial \overline{f_5}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \overline{f_6}}{\partial u_1} & \frac{\partial \overline{f_6}}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{173\beta}{N} I - \frac{173\beta l}{N} H & \frac{-11\beta - 48\beta l}{N} S \\ \frac{173\beta}{N} I + \frac{173\beta l}{N} H & \frac{11\beta + 48\beta l}{N} S - kE \\ -(\gamma_a + \gamma_I) I & 0 \\ kE & 0 \\ \gamma_a I - \gamma_r H & 0 \\ \gamma_I I + \gamma_r H & 0 \end{pmatrix}$$

Setelah itu disubstitusikan nilai $E_1{}^*(*)$ dan nilai parameter pada Tabel 4.2 ke dalam matrik B sehingga diperoleh matriks B sebagai berikut:

$$B = \begin{pmatrix} -15{,}4133/u_1 & 0 \\ 15{,}4133/u_1 & -15{,}1515 \\ -9{,}2433/u_1 & 0 \\ 15{,}1515/u_1 & 0 \\ 0{,}1862 & 0 \\ 8{,}9668 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & 0 \\ B_{41} & 0 \\ B_{51} & 0 \\ B_{61} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} M_{1,1} & 0 \\ M_{2,1} & M_{2,2} \\ M_{3,1} & 0 \\ M_{4,1} & 0 \\ M_{5,1} & 0 \\ M_{6,1} & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks keterkontrolan M_c dapat disusun sebagai berikut:

$M_c = (B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B)$

$$AB = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & 0 \\ B_{41} & 0 \\ B_{51} & 0 \\ B_{61} & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} M_{1,3} & M_{1,4} \\ M_{2,3} & M_{2,4} \\ M_{3,3} & M_{3,4} \\ M_{4,3} & M_{4,4} \\ M_{5,3} & M_{5,4} \\ M_{6,3} & M_{6,4} \end{pmatrix}$$

$$A^2B = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{pmatrix}^2 x \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & 0 \\ B_{41} & 0 \\ B_{51} & 0 \\ B_{61} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2B = \begin{pmatrix} M_{1,5} & M_{1,6} \\ M_{2,5} & M_{2,6} \\ M_{3,5} & M_{3,6} \\ M_{4,5} & M_{4,6} \\ M_{5,5} & M_{5,6} \\ M_{6,5} & M_{6,6} \end{pmatrix}$$

$$A^3B = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{pmatrix}^3 x \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & 0 \\ B_{41} & 0 \\ B_{51} & 0 \\ B_{61} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3B = \begin{pmatrix} M_{1,7} & M_{1,8} \\ M_{2,7} & M_{2,8} \\ M_{3,7} & M_{3,8} \\ M_{4,7} & M_{4,8} \\ M_{5,7} & M_{5,8} \\ M_{6,7} & M_{6,8} \end{pmatrix}$$

$$A^4B = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{pmatrix}^4 x \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & 0 \\ B_{41} & 0 \\ B_{51} & 0 \\ B_{61} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4B = \begin{pmatrix} M_{1,9} & M_{1,10} \\ M_{2,9} & M_{2,10} \\ M_{3,9} & M_{3,10} \\ M_{4,9} & M_{4,10} \\ M_{5,9} & M_{5,10} \\ M_{6,9} & M_{6,10} \end{pmatrix}$$

$$A^5B = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{pmatrix}^5 x \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & 0 \\ B_{41} & 0 \\ B_{51} & 0 \\ B_{61} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5B = \begin{pmatrix} M_{1,11} & M_{1,12} \\ M_{2,11} & M_{2,12} \\ M_{3,11} & M_{3,12} \\ M_{4,11} & M_{4,12} \\ M_{5,11} & M_{5,12} \\ M_{6,11} & M_{6,12} \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks M_c,

$$M_c = \begin{pmatrix} M_{1,1} & 0 & M_{1,3} & M_{1,4} & M_{1,5} & M_{1,6} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} & M_{2,5} & M_{2,6} \\ M_{3,1} & 0 & M_{3,3} & M_{3,4} & M_{3,5} & M_{3,6} \\ M_{4,1} & 0 & M_{4,3} & M_{4,4} & M_{4,5} & M_{4,6} \\ M_{5,1} & 0 & M_{5,3} & M_{5,4} & M_{5,5} & M_{5,6} \\ M_{6,1} & 0 & M_{6,3} & M_{6,4} & M_{6,5} & M_{6,6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_{1,7} & M_{1,8} & M_{1,9} & M_{1,10} & M_{1,11} & M_{1,12} \\ M_{2,7} & M_{2,8} & M_{2,9} & M_{2,10} & M_{2,11} & M_{2,12} \\ M_{3,7} & M_{3,8} & M_{3,9} & M_{3,10} & M_{3,11} & M_{3,12} \\ M_{4,7} & M_{4,8} & M_{4,9} & M_{4,10} & M_{4,11} & M_{4,12} \\ M_{5,7} & M_{5,8} & M_{5,9} & M_{5,10} & M_{5,11} & M_{5,12} \\ M_{6,7} & M_{6,8} & M_{6,9} & M_{6,10} & M_{6,11} & M_{6,12} \end{pmatrix}$$

dengan

$M_{1,1} = -15{,}3391/u_1; M_{2,1}; M_{1,2} = 0; M_{1,3} = (1{,}373325u_2 + 0{,}073929u_1)/u_1; M_{1,4} = 0; M_{1,5} = (-0{,}122363{u_2}^2 + 1{,}777504{u_1}^2 - 0{,}006587u_2u_1 - 0{,}019665u_1)/u_1;\ M_{1,6} = 0{,}019331u_1; M_{1,7} = (0{,}010903{u_2}^3 - 1{,}756519{u_1}^3 - 0{,}158376u_2u_1 - 0{,}261192{u_1}^2 + 0{,}000587{u_2}^2 + 0{,}006484u_2u_1 - 0{,}000075u_1)/u_1; M_{1,8} = 0{,}256922{u_1}^2 - 0{,}004651u_2u_1; M_{1,9} = -0{,}000971{u_2}^4 + 1{,}513568{u_1}^4 + 0{,}156505u_2{u_1}^3 + 0{,}261446{u_1}^3 + 0{,}014111{u_2}^2{u_1}^2 + 0{,}086121u_2{u_1}^2 + 0{,}001382{u_1}^2 - 0{,}000052{u_2}^3u_1 - 0{,}001451{u_2}^2u_1 + 0{,}000018\,u_2u_1;\ M_{1,10} = 0{,}254927{u_1}^3 - 0{,}061815u_2{u_1}^2 + 0{,}000025{u_1}^2 + 0{,}000858{u_2}^2u_1; M_{1,11} = (0{,}00008{u_2}^5 - 1{,}27722{u_1}^5 - 0{,}1348589u_2{u_1}^4 - 0{,}227607{u_1}^4 - 0{,}013944{u_2}^2{u_1}^3 - 0{,}086324u_2{u_1}^3 + 0{,}03036{u_1}^3 - 0{,}001257{u_2}^3{u_1}^2 - 0{,}019269{u_2}^2{u_1}^2 - 0{,}000324u_2{u_1}^2 - 0{,}000354{u_1}^2 + 0{,}000004{u_2}^4u_1 + 0{,}0002754{u_2}^3u_1 - 0{,}000003u_2u_1\ )/u_1;\ M_{1,12} = 0{,}219793{u_1}^4 + 0{,}061335u_2{u_1}^3 + 0{,}000307{u_1}^3 + 0{,}011404{u_2}^2{u_2}^2 - 0{,}000011u_2{u_1}^2 + 0{,}000348{u_1}^2 - 0{,}000143{u_2}^3u_1$

$M_{2,1} = 15{,}4133/u_1; M_{2,2} = -15{,}1515;$
$M_{2,3} = (-3{,}708440u_2 - 0{,}133104u_1 + 0{,}059174)/u_1;\ M_{2,4} = 2{,}295452u_2; M_{2,5} = (0{,}684192{u_2}^2 - 0{,}008965u_2 + 0{,}111847{u_1}^2 + 0{,}026752u_2u_1 - 1{,}869686u_1)/u_1;\ M_{2,6} = (-0{,}347761{u_2}^2 - 0{,}019331u_1); M_{2,7} = (-0{,}114558{u_2}^3 + 0{,}001358{u_2}^2 - 0{,}093985{u_1}^3 + 0{,}141431u_2{u_1}^2 + 1{,}833810{u_1}^2 - 0{,}004640{u_2}^2u_1 + 0{,}276774u_2u_1 + 0{,}277962u_1)/u_1; M_{2,8} = 0{,}052686{u_2}^3 + 0{,}016244{u_2}^2 + 0{,}007580u_2u_1 - 0{,}273166u_1 M_{2,9} = \ 0{,}018326{u_2}^4 - 0{,}000205{u_2}^3 + 0{,}0789755{u_1}^4 - 0{,}142267u_2{u_1}^3 - 1{,}578373{u_1}^3 - -0{,}035538{u_2}^2{u_1}^2 - 0{,}297084u_2{u_1}^2 - 0{,}278066{u_1}^2 + 0{,}000755{u_2}^3u_1 - 0{,}0404806381541990{u_2}^2u_1 - 0{,}108988u_2u_1 + 0{,}001066u_1;\ M_{2,10} = (-0{,}007981{u_2}^4 - 0{,}013649{u_1}^3 + 0{,}017969u_2{u_1}^2 + 0{,}268552{u_1}^2 - 0{,}002006{u_2}^2u_1 + 0{,}082769u_2u_1; M_{2,11} = (-0{,}002863{u_2}^5 + 0{,}000031{u_2}^4 - 0{,}066363{u_1}^5 + 0{,}122894u_2{u_1}^4 + 1{,}331555{u_1}^4 + 0{,}03549{u_2}^2{u_1}^3 + 0{,}259229u_2{u_1}^3 + 0{,}244032{u_1}^3 + 0{,}006641{u_2}^3{u_1}^2 + 0{,}051942{u_2}^2{u_1}^2 + 0{,}108831u_2{u_1}^2 - 0{,}034402{u_1}^2 - 0{,}000119{u_2}^4u_1 + 0{,}005857{u_2}^3u_1 + 0{,}02885{u_2}^2u_1 - 0{,}000323u_2u_1)/u_1\ ;\ M_{2,12} = 0{,}001209{u_2}^5 + 0{,}011469{u_1}^4 - 0{,}231221u_2{u_1}^3 - 0{,}007857{u_1}^3 - 0{,}081363{u_2}^2{u_1}^2 - 0{,}000697u_2{u_1}^2 + 0{,}000447{u_1}^2 - 0{,}018809{u_2}^3u_1 - 0{,}018809{u_2}^2u_1$
$M_{3,1} = -9{,}2433/u_1; M_{3,2} = 0; M_{3,3} = (7{,}767145u_1 + 1{,}365618)/u_1;\ M_{3,4} = -1.342423; M_{3,5} = (-0{,}328568u_2 - 6{,}526732{u_1}^2 - 1{,}159322u_1 + 0{,}005243)/u_1;\ M_{3,6} = 0{,}203377u_2 + 1{,}128038u_1; M_{3,7} = (0{,}060619{u_2}^2 - 0{,}000794u_2 + 5{,}484413{u_1}^3 + 0{,}984088{u_1}^2 + 0{,}278466u_2u_1 - 0{,}170060u_1)/u_1;\ M_{3,8} = -0{,}030812{u_2}^2 - 0{,}947890{u_1}^2 - 0{,}170898u_2u_1 - 0{,}001713u_1; M_{3,9} = 0{,}010149{u_2}^3 + 0{,}0001203{u_2}^2 - 4{,}608552{u_1}^4 - 0{,}835256{u_1}^3 - 0{,}221464u_2{u_1}^2 + 0{,}305376{u_1}^2 -$

$0{,}051349{u_2}^2 + 0{,}025189u_2u_1 + 0{,}024627u_1\ ;\ M_{3,10} = 0{,}004667{u_2}^3 + 0{,}796512{u_1}^3 + 0{,}143605u_2{u_1}^2 + 0{,}002878{u_1}^2 + 0{,}025891{u_2}^2u_1 + 0{,}000671u_2u_1 - 0{,}024202u_1; M_{3,11} = (0{,}001623{u_2}^4 - 0{,}000018{u_2}^3 + 3{,}872566{u_1}^5 + 0{,}708863{u_1}^4 + 0{,}173491u_2{u_1}^3 - 0{,}396451{u_1}^3 + 0{,}0400003{u_2}^2{u_2}^2 - 0{,}047488u_2{u_1}^2 - 0{,}045331{u_2}^2 + 0{,}008595{u_2}^3u_1 - 0{,}003687{u_2}^2u_1 - 0{,}009656u_2u_1 + 0{,}000094u_1)/u_1\ ;\ M_{3,12} = -0{,}000707{u_2}^4 - 0{,}6693092178423080{u_1}^4 - 0{,}1206716012175520u_2{u_1}^3 - 0{,}003628{u_1}^3 - 0{,}021756{u_2}^2{u_1}^2 + 0{,}001027u_2{u_1}^2 + 0{,}044131{u_1}^2 - 0{,}003922{u_2}^3u_1 - 0{,}00017{u_2}^2u_1 + 0{,}007333u_2u_1$

$M_{4,1} = 15{,}1515/u_1; M_{4,2} = 0; M_{4,3} = (2{,}335115u_1 - 1{,}365618)/u_1;\ M_{4,4} = -2{,}295452u_1 + 1{,}342423; M_{4,5} = (0{,}328568u_2 - 0{,}020165{u_1}^2 - 0{,}561829u_2u_1 + 0{,}020758u_1 - 0{,}005243)/u_1;\ M_{4,6} = -0{,}203377u_1 + 0{,}347761u_2u_1; M_{4,7} = (-0{,}060619{u_2}^2 + 0{,}000794u_2 + 0{,}016945{u_1}^3 + 0{,}004053u_2{u_1}^2 - 0{,}293167{u_2}^2 + 0{,}103655{u_2}^2u_1 - 0{,}003728u_2u_1 + 0{,}165654u_1)/u_1;\ M_{4,8} = 0{,}030812{u_2}^2 - 0{,}002929{u_1}^2 - 0{,}052686{u_2}^2u_1 + 0{,}001713u_1; M_{4,9} = 0{,}010149{u_2}^3 - 0{,}0001203{u_2}^2 - 0{,}014238{u_1}^4 + 0{,}021426u_2{u_1}^3 + 0{,}286149{u_1}^3 - 0{,}000702{u_2}^2{u_1}^2 + 0{,}0294004u_2{u_1}^2 - 0{,}120364{u_1}^2 - 0{,}017355{u_2}^3u_1 + 0{,}000616{u_2}^2u_1 - 0{,}024522u_2u_1 - 0{,}024627u_1\ ;\ M_{4,10} = 0{,}004667{u_2}^3 + 0{,}0024609{u_1}^3 + 0{,}001148u_2{u_1}^2 - 0{,}0428238{u_1}^2 + 0{,}007981{u_2}^3u_1 - 0{,}000671u_2u_1 + 0{,}024202u_1; M_{4,11} = (-0{,}00162{u_2}^4 + 0{,}000018{u_2}^3 + 0{,}011964{u_1}^5 - 0{,}021553u_2{u_1}^4 - 0{,}2461208{u_1}^4 - 0{,}005384{u_2}^2{u_1}^3 - 0{,}032403u_2{u_1}^3 + 0{,}097716{u_1}^3 + 0{,}000114{u_2}^3{u_1}^2 - 0{,}002984{u_2}^2{u_1}^2 + 0{,}009809u_2{u_1}^2 + 0{,}024798{u_1}^2 + 0{,}002776{u_2}^4u_1 - 0{,}000098{u_2}^3u_1 + 0{,}003586{u_2}^2u_1 + 0{,}009656u_2u_1 - 0{,}000094u_1\ )/u_1;\ M_{4,12} = 0{,}0007{u_2}^4 - 0{,}002067{u_1}^4 +$

$0{,}002722u_2{u_1}^3 + 0{,}041895{u_1}^3 - 0{,}000303{u_2}^2{u_1}^2 + 0{,}010947u_2{u_1}^2 - 0{,}023793{u_1}^2 - 0{,}001209{u_2}^4u_1 + 0{,}000177{u_2}^2u_1 - 0{,}007333u_2u_1$

$M_{5,1} = 0{,}1862/u_1; M_{5,2} = 0; M_{5,3} = -5.945093;\ M_{5,4} = 0; M_{5,5} = 5{,}822857u_1 + 0{,}874405;\ M_{5,6} = 0{,}859553u_1; M_{5,7} = -0{,}210382u_2 - 5{,}011153{u_1}^2 - 0{,}867266u_1 + 0{,}003357;\ M_{5,8} = 0{,}845113{u_1}^2 + 0{,}130222u_2u_1; M_{5,9} = 0{,}038814{u_2}^2 - 0{,}000508u_2 + 4{,}227763{u_1}^3 + 0{,}7540439{u_1}^2 + 0{,}208365u_2u_1 - 0{,}109368\,u_1;\ M_{5,10} = -0{,}7277{u_1}^3 - 0{,}128034u_2{u_1}^2 - 0{,}001096{u_1}^2 - 0{,}019728{u_2}^2u_1; M_{5,11} = -0{,}006498{u_2}^3 + 0{,}000077{u_2}^2 - 3{,}555003{u_1}^4 - 0{,}642567{u_1}^3 - 0{,}171578u_2{u_1}^2 + 0{,}211161{u_1}^2 - 0{,}038425{u_2}^2 + 0{,}016201u_2u_1 + 0{,}015768u_1\ ;\ M_{5,12} = 0{,}613995{u_2}^4 + 0{,}110246u_2{u_1}^3 + 0{,}0019997459942196{u_1}^3 + 0{,}019397{u_2}^2{u_1}^2 + 0{,}000429u_2{u_1}^2 - 0{,}015496{u_1}^2 + 0{,}002988{u_2}^3u_1$

$M_{6,1} = 8{,}9668/u_1; M_{6,2} = 0; M_{6,3} = -1.822052;\ M_{6,4} = 0; M_{6,5} = 0{,}703875u_1 + 0{,}273124;\ M_{6,6} = 0{,}268485u_1; M_{6,7} = -0{,}065714u_2 - 0{,}473260{u_1}^2 - 0{,}106912u_1 + 0{,}001049;\ M_{6,8} = 0{,}102777{u_1}^2 + 0{,}040675u_2u_1; M_{6,9} = 0{,}012123{u_2}^2 - 0{,}000158u_2 + 0{,}380788{u_1}^3 + 0{,}072885{u_1}^2 + 0{,}0256295709388155u_2u_1 - 0{,}033532u_1\ ;\ M_{6,10} = -0{,}068811{u_1}^3 - 0{,}015571u_2{u_1}^2 - 0{,}000342{u_1}^2 - 0{,}006162{u_2}^2u_1; M_{6,11} = (-0{,}002029{u_2}^3 + 0{,}000024{u_2}^2 - 0{,}317563{u_1}^4 - 0{,}059298{u_1}^3 - 0{,}014517u_2{u_1}^2 + 0{,}045446{u_1}^2 - 0{,}0047233087095224{u_2}^2u_1 + 0{,}004965u_2u_1 + 0{,}004925u_1)/u_1\ ;\ M_{6,12} = 0{,}055314{u_1}^4 + 0{,}010424u_2{u_1}^3 + 0{,}000418{u_1}^3 + 0{,}002358{u_2}^2{u_1}^2 + 0{,}000134u_2{u_1}^2 - 0{,}004841{u_1}^2 + 0{,}000933{u_2}^3u_1$

Dari matriks diatas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa sistem dinamik bersifat terkontrol, karena terdapat rank matriks M_c yaitu 6. Selanjutnya dilakukan analisis keteramatan.

4.1.4 Analisis Keteramatan

Sama dengan proses analisis keterkontrolan diperlukan sistem yang telah dilinierkan, maka dengan menggunakan dengan menggunakan matriks Jacobian di sekitar titik setimbang.

Matriks C diperoleh berdasarkan fungsi tujuan, maka bentuk matriksnya sebagai berikut:

$$C = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} S \\ E \\ I \\ A \\ H \\ R \end{pmatrix}$$

$$C = (N_{11} \quad N_{12} \quad N_{13} \quad N_{14} \quad N_{15} \quad N_{16})$$

Sehingga,

$$CA = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

$$CA = (N_{21} \quad N_{22} \quad N_{23} \quad N_{24} \quad N_{25} \quad N_{26})$$

$$CA^2 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{bmatrix}^2$$

$$CA^2 = (N_{31} \quad N_{32} \quad N_{33} \quad N_{34} \quad N_{35} \quad N_{36})$$

$$CA^3 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{bmatrix}^3$$

$$CA^3 = (N_{41} \quad N_{42} \quad N_{43} \quad N_{44} \quad N_{45} \quad N_{46})$$

$$CA^4 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{bmatrix}^4$$

$$CA^4 = (N_{51} \quad N_{52} \quad N_{53} \quad N_{54} \quad N_{55} \quad N_{56})$$

$$CA^5 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} & 0 & Q_{15} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{53} & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{63} & 0 & Q_{65} & 0 \end{bmatrix}^5$$

$$CA^5 = (N_{61} \quad N_{62} \quad N_{63} \quad N_{64} \quad N_{65} \quad N_{66})$$

Matriks keteramatan M_o dapat disusun sebagai berikut:

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks M_o,

$$M_o = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} & N_{15} & N_{16} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} & N_{25} & N_{26} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} & N_{35} & N_{36} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} & N_{45} & N_{46} \\ N_{51} & N_{52} & N_{53} & N_{54} & N_{55} & N_{56} \\ N_{61} & N_{62} & N_{63} & N_{64} & N_{65} & N_{66} \end{bmatrix}$$

dengan

$N_{11} = 0; N_{12} = 0; N_{13} = 1; N_{14} = 0; N_{15} = 1; N_{16} = 1$
$N_{21} = 0; N_{22} = 0{,}0886; N_{23} = 0; N_{24} = 0; N_{25} = 0; N_{26} = 0$
$N_{31} = 0{,}00789426u_2; N_{32} = -0{,}0134229u_2; N_{33} = 0{,}00127584u_1; N_{34} = 0; N_{35} = 0{,}02815708; N_{36} = 0$
$N_{41} = -0{,}0018994{u_2}^2; N_{42} = 0{,}0020336{u_2}^2 + 0{,}000113u_1; N_{43} = -0{,}0010721{u_1}^2 - 0{,}00030697u_2u_1 + 0{,}018029u_1; N_{44} = 0; N_{45} = -0{,}0042658u_2 - 0{,}0025088u_2u_1 - 0{,}00402365u_1; N_{46} = 0$
$N_{51} = 0{,}00035042{u_2}^3 + 0{,}00001007u_2u_1; N_{52} = -0{,}00030809{u_2}^3 - 0{,}00009499{u_1}^2 - 0{,}00004432u_2u_1 + 0{,}00159737u_1; N_{53} = 0{,}00090088{u_1}^3 - 0{,}00134844u_2{u_1}^2 - 0{,}01772446{u_1}^2 + 0{,}00005663{u_2}^2u_1 - 0{,}00273139u_2u_1; N_{54} = 0; N_{55} = 0{,}00064627{u_2}^2 + 0{,}00035851u_2{u_1}^2 + 0{,}00057498{u_1}^2 + 0{,}00060362{u_2}^2u_1 + 0{,}00060958u_2u_1 + 0{,}00003592u_1; N_{16} = 0$
$N_{61} = -0{,}0000587{u_2}^4 - 0{,}000008u_2{u_1}^2 - 0{,}0000048{u_2}^2u_1 + 0{,}0001423u_2u_1 =; N_{62} = 0{,}000046{u_2}^4 + 0{,}000079{u_1}^3 - 0{,}000105u_2{u_1}^2 - 0{,}0015704{u_1}^2 + 0{,}0000117{u_2}^2u_1 - 0{,}000484u_2u_1; N_{63} = -0{,}000757{u_1}^4 + 0{,}0013626u_2{u_1}^3 + 0{,}015261{u_1}^3 + 0{,}0003389{u_2}^2{u_1}^2 + 0{,}002684u_2{u_1}^2 + 0{,}000046{u_1}^2 - 0{,}000009{u_2}^3u_1 + 0{,}000413{u_2}^2u_1; N_{64} = 0; N_{65} = -0.0000979{u_1}^3 - 0.000051u_2{u_1}^3 - 0{,}00008{u_1}^3 - 0{,}000086{u_2}^2{u_1}^2 - 0{,}0000903u_2{u_1}^2 - 0{,}000035{u_1}^2 - 0{,}000111{u_2}^3u_1 - 0{,}000092{u_2}^2u_1 - 0{,}000014u_2u_1 + 0{,}0005076u_1; N_{66} = 0.$

Dari matriks diatas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa sistem dinamik bersifat tak teramati, karena didapat rank matriks Mo yaitu 5.

4.2. Masalah Kontrol Optimal dan Penyelesaian Kontrol Optimal

Pada tahap ini, akan dilakukan formulasi masalah kontrol optimal model penyebaran penyakit MERS dengan pengaturan dosis obat dan penyuluhan kesehatan. Untuk menganalisis hasil simulasi digunakan metode Runge-Kutta orde empat dalam menyelesaikan numeriknya. Selanjutnya, penyelesaian kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

Fungsi objektif untuk model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan pengaturan dosis obat dan penyuluhan kesehatan yaitu:

$$J(u_1, u_2) = min \int_{t_0}^{t_f} \left[I(t) + H(t) + R(t) + \frac{W_1}{2} {u_1}^2(t) + \frac{W_2}{2} {u_2}^2(t) \right] dt,$$

dimana W_1 adalah bobot untuk pengaturan dosis obat dan W_2 adalah bobot untuk penyuluhan kesehatan. ${W_1}{u_1}^2$ adalah biaya untuk kontrol pengaturan dosis obat dan ${W_2}{u_2}^2$ adalah biaya untuk kontrol penyuluhan kesehatan.

Fungsi objektif untuk meminimalkan jumlah individu terinfeksi dengan gejala, jumlah individu rawat inap, dan meningkatkan jumlah individu sembuh.

Selanjutnya, untuk menyelesaikan kontrol optimal harus ditentukan fungsi Lagrangian dan fungsi Hamiltonian. Lagrangian dari masalah ini, yaitu: $L = I(t) + H(t) + R(t) + \frac{W_1}{2} {u_1}^2(t) + \frac{W_2}{2} {u_2}^2(t)$. Kemudian akan dicari Hamiltonian $\left(H_p\right)$ sebagai berikut:

$$H_p = \left(I(t) + H(t) + R(t) + \frac{W_1}{2}{u_1}^2(t) + \frac{W_2}{2}{u_2}^2(t)\right) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i$$

$$= \left(I(t) + H(t) + R(t) + \frac{W_1}{2}{u_1}^2(t) + \frac{W_2}{2}{u_2}^2(t)\right) + \lambda_1 \left(\frac{-11\beta-48\beta l}{N} u_2 S - \frac{173\beta}{N} u_1 I - \frac{173\beta l}{N} u_1 H\right) + \lambda_2 \left(\frac{11\beta+48\beta l}{N} u_2 S + \frac{173\beta}{N} u_1 I + \frac{173\beta l}{N} u_1 H - kE u_2\right) + \lambda_3(k\rho E - u_1\gamma_a I - u_1\gamma_I I) + \lambda_4(kE u_2 - k\rho E) + \lambda_5\left((\gamma_a I - \gamma_r H)u_1\right) + \lambda_6((\gamma_I I + \gamma_r H)u_1)$$

Untuk mendapatkan persamaan *state* dan *costate* yang optimal dilakukan dengan menurunkan persamaan parsial fungsi Hamiltonian (H_p) seperti berikut:

a. State

$$S^*(t) = \frac{\partial H_p}{\partial \lambda_1} = \frac{-11\beta-48\beta l}{N} u_2 S - \frac{173\beta}{N} u_1 I - \frac{173\beta l}{N} u_1 H$$

$$E^*(t) = \frac{\partial H_p}{\partial \lambda_2} = \frac{11\beta+48\beta l}{N} u_2 S + \frac{173\beta}{N} u_1 I + \frac{173\beta l}{N} u_1 H - k u_2 E$$

$$I^*(t) = \frac{\partial H_p}{\partial \lambda_3} = k\rho E - (\gamma_a + \gamma_I) u_1 I$$

$$A^*(t) = \frac{\partial H_p}{\partial \lambda_4} = k u_2 E - k\rho E$$

$$H^*(t) = \frac{\partial H_p}{\partial \lambda_5} = (\gamma_a I - \gamma_r H) u_1$$

$$R^*(t) = \frac{\partial H_p}{\partial \lambda_6} = (\gamma_I I + \gamma_r H) u_1$$

b. Costate

$$\lambda_1' = -\frac{\partial H_p}{\partial S} = -\left(\lambda_1 \left(\frac{-11\beta-48\beta l}{N} u_2\right) + \lambda_2 \left(\frac{11\beta+48\beta l}{N} u_2\right)\right)$$

$$\lambda_2' = -\frac{\partial H_p}{\partial E} = -(-\lambda_2(k u_2) + \lambda_3(k\rho) + \lambda_4(k u_2 - k\rho)$$

$$\lambda_3' = -\frac{\partial H_p}{\partial I} = -\left(1 + \lambda_1\left(-\frac{173\beta}{N}u_1\right) + \lambda_2\left(\frac{173\beta}{N}u_1\right) - \lambda_3(\gamma_a u_1 + \gamma_I u_1) + \lambda_5(\gamma_a u_1) + \lambda_6(\gamma_I u_1)\right)$$

$$\lambda_4' = -\frac{\partial H_p}{\partial A} = 0$$

$$\lambda_5' = -\frac{\partial H_p}{\partial H} = -\left(1 + \lambda_1\left(-\frac{173\beta l}{N}u_1\right) + \lambda_2\left(\frac{173\beta l}{N}u_1\right) - \lambda_5(\gamma_r u_1) + \lambda_6(\gamma_r u_1)\right)$$

$$\lambda_6' = -\frac{\partial H_p}{\partial R} = -1$$

Dengan kondisi *transfersality* yaitu:

$$\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = \lambda_5(t_f) = \lambda_6(t_f) = 0$$

Selanjutnya, menentukan kondisi optimal dengan cara menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap u_1 dan u_2. Berdasarkan prinsip optimal, maka $\frac{\partial H_p}{\partial u_1} = 0$ dan $\frac{\partial H_p}{\partial u_2} = 0$, sehingga diperoleh karakteristik kontrol optimal u_1 dan u_2 sebagai berikut:

1. Kontrol ${u_1}^*$

   $\frac{\partial H_p}{\partial u_1} = 0$

   $W_1 u_1 + \lambda_1\left(-\frac{172\beta}{N}I - \frac{173\beta l}{N}H\right) + \lambda_2\left(\frac{173\beta}{N}I + \frac{173\beta l}{N}H\right) + \lambda_3(-\gamma_a I - \gamma_I I) + \lambda_5(\gamma_a I - \gamma_r H) + \lambda_6(\gamma_I I + \gamma_r H) = 0$

   ${u_1}^* = \frac{\lambda_1\left(\frac{173\beta}{N}I + \frac{173\beta l}{N}H\right) - \lambda_2\left(\frac{173\beta}{N}I + \frac{173\beta l}{N}H\right) - \lambda_3(\gamma_a I + \gamma_I I) - \lambda_5(\gamma_a I - \gamma_r H) - \lambda_6(\gamma_I I + \gamma_r H)}{W_1}$

2. Kontrol ${u_2}^*$

   $\frac{\partial H_p}{\partial u_2} = 0$

   $W_2 u_2 + \lambda_1\left(\frac{-11\beta - 48\beta l}{N}S\right) + \lambda_2\left(\frac{11\beta + 48\beta l}{N}S - kE\right) + \lambda_4(kE) = 0$

$$u_2{}^* = \frac{\lambda_1\left(\frac{11\beta+48\beta l}{N}S\right) - \lambda_2\left(\frac{11\beta+48\beta l}{N}S - kE\right) - \lambda_4(kE)}{W_2}$$

Karena nilai kontrolnya dibatasi yaitu: $0 \le u_1 \le 1$ dan $0 \le u_2 \le 1$, sehingga

$$u_1{}^* = max\left\{1, min\left(0, \frac{\lambda_1\left(\frac{173\beta}{N}I + \frac{173\beta l}{N}H\right) - \lambda_2\left(\frac{173\beta}{N}I + \frac{173\beta l}{N}H\right)}{W_1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{+\lambda_3(\gamma_a I + \gamma_I I) - \lambda_5(\gamma_a I - \gamma_r H) - \lambda_6(\gamma_I I + \gamma_r H)}{W_1}\right)\right\}, \quad (4.20)$$

$$u_2{}^* = max\left\{1, min\left(0, \frac{\lambda_1\left(\frac{11\beta+48\beta l}{N}S\right) - \lambda_2\left(\frac{11\beta+48\beta l}{N}S - kE\right) - \lambda_4(kE)}{W_2}\right)\right\}, \quad (4.21)$$

Untuk menunjukkan bahwa H_p mempunyai nilai minimum di u_1 dan u_2, maka diuji pada turunan kedua yaitu:

$$\frac{\partial^2 H_p}{\partial {u_1}^2} = \frac{\partial\left(W_1 u_1 + \lambda_1\left(-\frac{173\beta}{N}I - \frac{173\beta l}{N}H\right) + \lambda_2\left(\frac{173\beta}{N}I + \frac{173\beta l}{N}H\right)\right.}{\partial u_1}$$
$$\left.\frac{+\lambda_3(-\gamma_a I - \gamma_I I) + \lambda_5(\gamma_a I - \gamma_r H) + \lambda_6(\gamma_I I + \gamma_r H)}{\partial u_1}\right) = W_1 > 0$$

$$\frac{\partial^2 H_p}{\partial {u_2}^2} = \frac{\partial\left(W_2 u_2 + \lambda_1\left(\frac{-11\beta-48\beta l}{N}S\right) + \lambda_2\left(\frac{11\beta+48\beta l}{N}S - kE\right) + \lambda_4(kE)\right)}{\partial u_2} =$$
$$W_2 > 0$$

Hasil dari turunan kedua H_p semuanya lebih dari 0 atau bernilai positif, maka terbukti bahwa H_p memiliki nilai minimum di u_1 dan u_2.

4.3. Solusi Numerik dengan Metode Runge-Kutta Orde 4

Fungsi dari Persamaan (4.9)-(4.12) dapat diselesaikan dengan cara numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Persamaan yang diselesaikan secara numerik adalah persamaan state dan costate. Diketahui bahwa *state* merupakan nilai awal, maka dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *forward sweep* dan diketahui bahwa *costate* merupakan nilai awal, maka

dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *backward sweep*. Langkah-langkah penyelesaian metode Runge-Kutta orde 4 yaitu:

1. Memberikan inisialisasi nilai awal $n = 100, t_0 = 0, t_f = 30$.
2. Menggunakan nilai awal $S1(0) = SO, E1(0) = EO, I1(0) = IO, A1(0) = AO, H1(0) = HO,$ dan $R1(0) = RO$.
3. Melakukan iterasi numerik persamaan *state* secara *forward sweep*.

   $S1_{n+1} = S1_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,S1} + 2k_{2,S1} + 2k_{3,S1} + k_{4,S1}\right)$

   $E1_{n+1} = E1_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,E1} + 2k_{2,E1} + 2k_{3,E1} + k_{4,E1}\right)$

   $I1_{n+1} = I1_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,I1} + 2k_{2,I1} + 2k_{3,I1} + k_{4,I1}\right)$

   $A1_{n+1} = A1_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,A1} + 2k_{2,A1} + 2k_{3,A1} + k_{4,A1}\right)$

   $H1_{n+1} = H1_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,H1} + 2k_{2,H1} + 2k_{3,H1} + k_{4,H1}\right)$

   $R1_{n+1} = R1_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,R1} + 2k_{2,R1} + 2k_{3,R1} + k_{4,R1}\right)$

   Uraian lengkap proses mencari $k_{1,S1}$, $k_{1,E1}$, $k_{1,I1}$, $k_{1,A1}$, $k_{1,H1}$, $k_{1,R1}$, $k_{2,S1}$, $k_{2,E1}$, $k_{2,I1}$, $k_{2,A1}$, $k_{2,H1}$, $k_{2,R1}$, $k_{3,S1}$, $k_{3,E1}$, $k_{3,I1}$, $k_{3,A1}$ $k_{3,H1}$, $k_{3,R1}$, $k_{4,S1}$, $k_{4,E1}$, $k_{4,I1}$, $k_{4,A1}$, $k_{4,H1}$, $k_{4,R1}$ bisa dilihat pada **Lampiran 2.**
4. Melakukan iterasi numerik persamaan co*state* secara *backward sweep*

   $\lambda_{1_{n-1}} = \lambda_{1_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_1} + 2k_{2,\lambda_1} + 2k_{3,\lambda_1} + k_{4,\lambda_1}\right)$

   $\lambda_{2_{n-1}} = \lambda_{2_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_2} + 2k_{2,\lambda_2} + 2k_{3,\lambda_2} + k_{4,\lambda_2}\right)$

   $\lambda_{3_{n-1}} = \lambda_{3_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_3} + 2k_{2,\lambda_3} + 2k_{3,\lambda_3} + k_{4,\lambda_3}\right)$

   $\lambda_{4_{n-1}} = \lambda_{4_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_4} + 2k_{2,\lambda_A} + 2k_{3,\lambda_A} + k_{4,\lambda_A}\right)$

   $\lambda_{5_{n-1}} = \lambda_{5_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_5} + 2k_{2,\lambda_5} + 2k_{3,\lambda_5} + k_{4,\lambda_5}\right)$

$$\lambda_{6_{n-1}} = \lambda_{6_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_6} + 2k_{2,\lambda_6} + 2k_{3,\lambda_6} + k_{4,\lambda_6}\right)$$

Uraian lengkap proses mencari k_{1,λ_1}, k_{1,λ_2}, k_{1,λ_3}, k_{1,λ_4}, k_{1,λ_5}, k_{1,λ_6}, k_{2,λ_1}, k_{2,λ_2}, k_{2,λ_3}, k_{2,λ_4}, k_{2,λ_5}, k_{2,λ_6}, k_{3,λ_1}, k_{3,λ_2}, k_{3,λ_3}, k_{3,λ_4}, k_{3,λ_5}, k_{3,λ_6}, k_{4,λ_1}, k_{4,λ_2}, k_{4,λ_3}, k_{4,λ_4}, k_{4,λ_5}, k_{4,λ_6} bisa dilihat pada **Lampiran 2.**

Persamaan *state* dan *costate* yang digunakan adalah persamaan yang masih mengandung u_1 dan u_2. Hal ini dilakukan karena u_1 dan u_2 mengandung variabel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5,$ dan λ_6. Persamaan *state* akan diselesaikan dengan metode *forward swepp*, sedangkan persamaan *costate* akan diselesaikan dengan metode *backward sweep*.

1. Memberikan inisialisasi nilai awal $n = 100, t_0 = 0, t_f = 30$.
2. Menggunakan nilai awal $S(0) = SO, E(0) = EO, I(0) = IO, A(0) = AO, H(0) = HO,$ dan $R(0) = RO$.
3. Menghitung nilai ${u_1}^*$ pada persamaan (4.20) dan ${u_2}^*$ pada persamaan (4.21).
4. Melakukan iterasi numerik persamaan *state* secara *forward sweep*.

$$S_{n+1} = S_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S}\right)$$

$$E_{n+1} = E_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,E} + 2k_{2,E} + 2k_{3,E} + k_{4,E}\right)$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I}\right)$$

$$A_{n+1} = A_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,A} + 2k_{2,A} + 2k_{3,A} + k_{4,A}\right)$$

$$H_{n+1} = H_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,H} + 2k_{2,H} + 2k_{3,H} + k_{4,H}\right)$$

$$R_{n+1} = R_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,R} + 2k_{2,R} + 2k_{3,R} + k_{4,R}\right)$$

Uraian lengkap proses mencari $k_{1,S}$, $k_{1,E}$, $k_{1,I}$, $k_{1,A}$, $k_{1,H}$, $k_{1,R}$, $k_{2,S}$, $k_{2,E}$, $k_{2,I}$, $k_{2,A}$, $k_{2,H}$, $k_{2,R}$, $k_{3,S}$, $k_{3,E}$, $k_{3,I}$, $k_{3,A}$,

$k_{3,H}$, $k_{3,R}$, $k_{4,S}$, $k_{4,E}$, $k_{4,I}$, $k_{4,A}$, $k_{4,H}$, $k_{4,R}$ bisa dilihat pada **Lampiran 2.**

5. Melakukan iterasi numerik persamaan co*state* secara *backward sweep*

$$\lambda_{1_{n-1}} = \lambda_{1_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_1} + 2k_{2,\lambda_1} + 2k_{3,\lambda_1} + k_{4,\lambda_1}\right)$$
$$\lambda_{2_{n-1}} = \lambda_{2_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_2} + 2k_{2,\lambda_2} + 2k_{3,\lambda_2} + k_{4,\lambda_2}\right)$$
$$\lambda_{3_{n-1}} = \lambda_{3_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_3} + 2k_{2,\lambda_3} + 2k_{3,\lambda_3} + k_{4,\lambda_3}\right)$$
$$\lambda_{4_{n-1}} = \lambda_{4_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_4} + 2k_{2,\lambda_A} + 2k_{3,\lambda_A} + k_{4,\lambda_A}\right)$$
$$\lambda_{5_{n-1}} = \lambda_{5_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_5} + 2k_{2,\lambda_5} + 2k_{3,\lambda_5} + k_{4,\lambda_5}\right)$$
$$\lambda_{6_{n-1}} = \lambda_{6_n} - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_6} + 2k_{2,\lambda_6} + 2k_{3,\lambda_6} + k_{4,\lambda_6}\right)$$

Uraian lengkap proses mencari k_{1,λ_1}, k_{1,λ_2}, k_{1,λ_3}, k_{1,λ_4}, k_{1,λ_5}, k_{1,λ_6}, k_{2,λ_1}, k_{2,λ_2}, k_{2,λ_3}, k_{2,λ_4}, k_{2,λ_5}, k_{2,λ_6}, k_{3,λ_1}, k_{3,λ_2}, k_{3,λ_3}, k_{3,λ_4}, k_{3,λ_5}, k_{3,λ_6}, k_{4,λ_1}, k_{4,λ_2}, k_{4,λ_3}, k_{4,λ_4}, k_{4,λ_5}, k_{4,λ_6} bisa dilihat pada **Lampiran 2.**

6. Memperbarui nilai u_1 dan u_2 dengan mensubstirusi nilai kemudian $S, E, I, A, H, R, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5,$ dan λ_6 yang baru kedalam karakterisasi kontrol optimal pada Persamaan (4.20) dan (4.21).

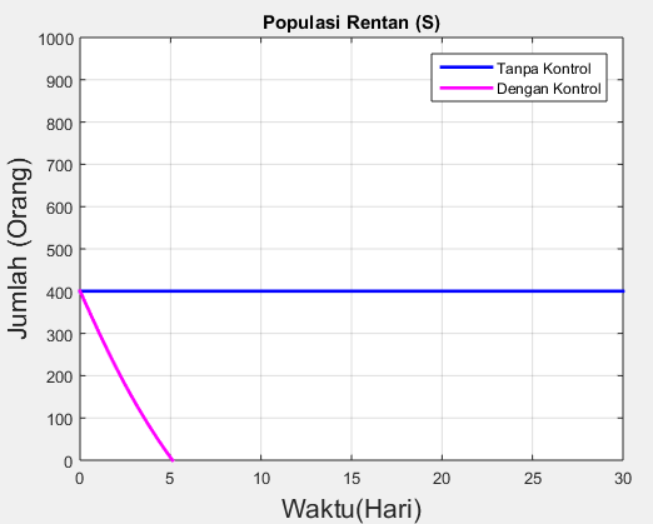
4.4. Simulasi dan Analisis

Pada subbab ini, dilakukan simulasi dengan menggunakan parameter pada Tabel 4.2 dan simulasi dengan nilai awal pada Tabel 4.3 sebagai berikut:

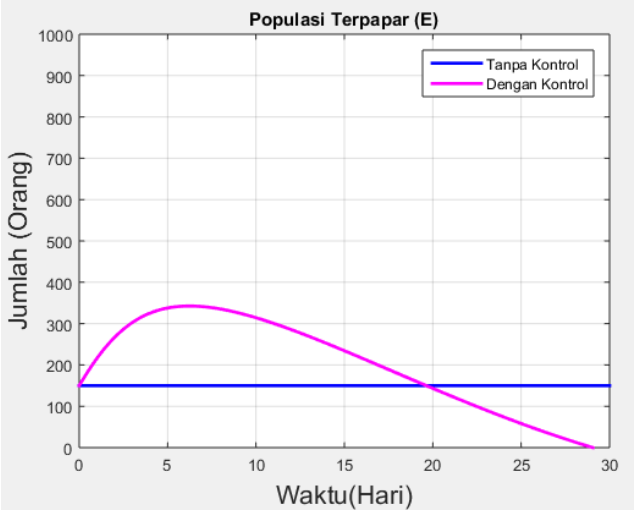
$S(0) = 400$; $E(0) = 150$; $I(0) = 100$
$A(0) = 50$; $H(0) = 180$; $R(0) = 120$
dengan waktu akhir adalah 30 hari.

Diasumsikan nilai $u_1 = u_2 = 0$ saat sebelum diberikan kontrol pada model penyebaran MERS-CoV.

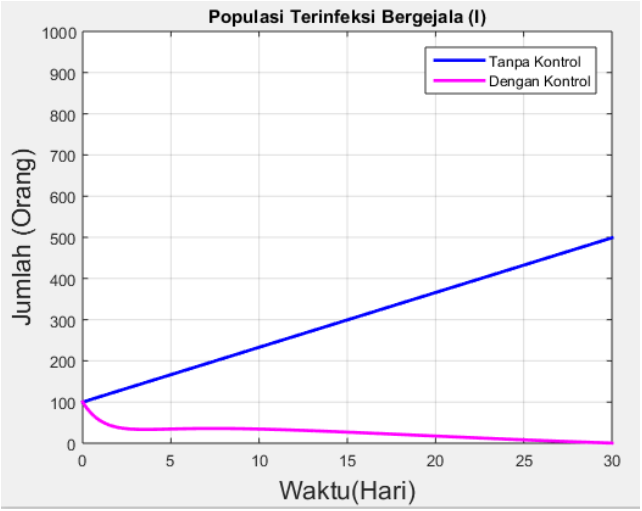
Dalam Tugas Akhir ini dilakukan simulasi dengan pemberian kontrol u_1 dan u_2 secara bersamaan untuk mengoptimalkan fungsi objektif. Hasil simulasinya sebagai berikut:



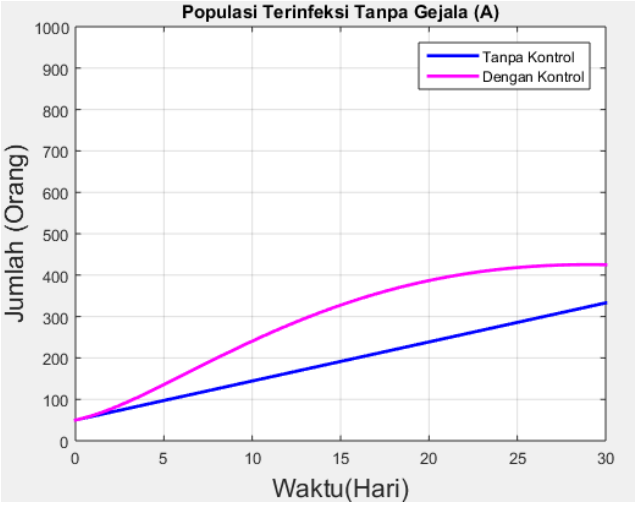
Gambar 4. 3 Grafik Populasi Rentan (*S*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol



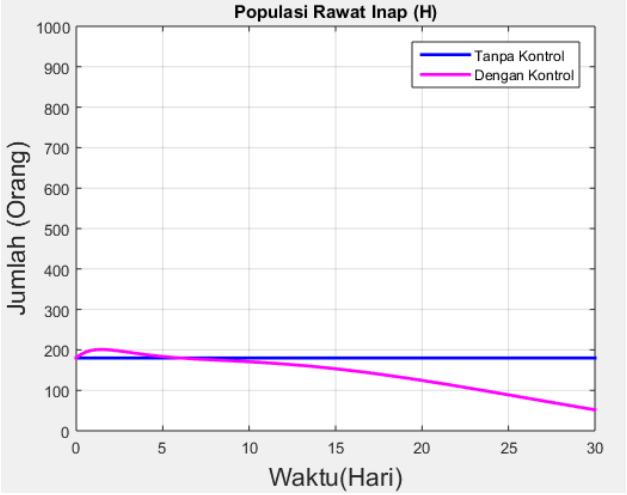
Gambar 4. 4 Grafik Populasi Terpapar (*E*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol



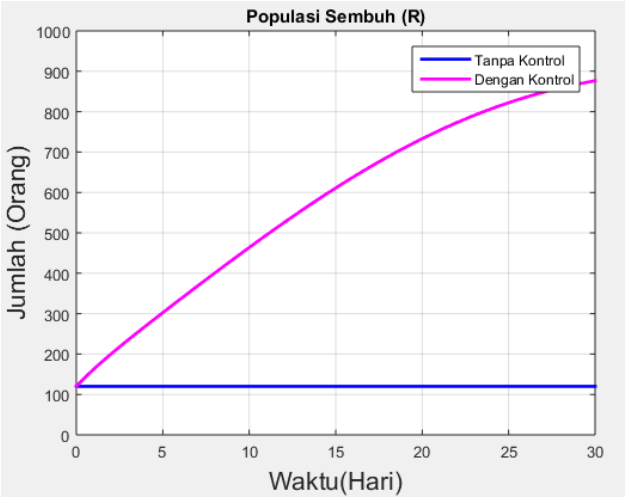
Gambar 4. 5 Grafik Populasi Terinfeksi dengan Gejala (*I*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol



Gambar 4. 6 Grafik Populasi Terinfeksi Tanpa Gejala (*A*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol



Gambar 4. 7 Grafik Populasi Rawat Inap (*H*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol



Gambar 4. 8 Grafik Populasi Sembuh (*R*) sebelum dan sesudah diberikan kontrol

Penjelasan Gambar 4.3 – 4.8:

Gambar 4.3, menunjukkan populasi rentan (*R*) yang diberikan kontrol u_2 sebesar satu mengalami penurunan. Kontrol u_2 merupakan penyuluhan kesehatan secara maksimal pada populasi rentan (*R*). Hal ini mengakibatkan penurunan pada populasi terinfeksi dengan gejala (*I*) dan populasi rawat inap (*H*). Populasi rentan (*S*) berkurang sampai di $t = 5$ dan kemudian menjadi populasi terpapar (*E*).

Gambar 4.4 menunjukkan populasi terpapar (*E*) di $t < 6$ mengalami peningkatan berasal dari populasi rentan (*S*). Setelah populasi terpapar (*E*) yang diberikan kontrol u_2 sebesar satu mengalami penurunan. Kontrol u_2 merupakan penyuluhan kesehatan secara maksimal pada populasi terpapar (*E*). Hal ini mengakibatkan penurunan pada populasi terinfeksi dengan gejala (*I*) dan populasi rawat inap (*H*).

Gambar 4.5 menunjukkan populasi terinfeksi dengan gejala (*I*) diberikan kontrol u_1 sebesar satu mengalami penurunan. Kontrol u_1 merupakan pengaturan dosis obat dengan tepat. Selain itu, pemberian kontrol u_2 memberikan dampak penurunan pada populasi terinfeksi dengan gejala (*I*). Penurunan populasi terinfeksi dengan gejala (*I*) mengakibatkan peningkatan pada populasi sembuh (*R*).

Gambar 4.6 menunjukkan terjadi peningkatan pada populasi terinfeksi tanpa gejala (*A*) sampai di hari ke-30. Setelah $t > 30$ grafik menunjukkan populasi terinfeksi tanpa gejala (*A*) menurun, hal ini disebabkan karena adanya pemberian kontrol u_2.

Gambar 4.7 menunjukkan populasi rawat inap (*H*) diberikan kontrol u_1 sebesar satu mengalami penurunan. Kontrol u_1 merupakan pengaturan dosis obat dengan tepat. Hal ini mengakibatkan peningkatan pada populasi sembuh (*R*).

Gambar 4.8 menunjukkan peningkatan populasi sembuh (*R*). Dikarenakan pemberian kontrol u_1 (pengaturan dosis obat) yang tepat pada populasi terinfeksi dengan gejala (*I*) dan populasi rawat inap (*H*).

Dari hasil simulasi, diperoleh kontrol u_1 sebesar satu artinya kontrol berupa pengaturan dosis obat harus diberikan secara tepat dan kontrol u_2 sebesar satu artinya kontrol berupa penyuluhan kesehatan harus diberikan secara maksimal. Selain itu, didapatkan nilai fungsi objektif (J) setelah diberikan kontrol sebesar 13.494.

"*Halaman ini sengaja dikosongkan*"

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari Tugas Akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1. Kesimpulan

1. Dari hasil penelitian Tugas Akhir ini diperoleh sistem yang stabil, terkontrol, dan tidak teramati.
2. Dari hasil simulasi, saat diberikan kontrol u_1 (pengaturan dosis obat) sebesar satu grafik menunjukkan populasi terinfeksi dengan gejala (*I*) menurun, populasi rawat inap (*H*) menurun dan populasi rawat inap (*R*) meningkat. Sehingga kontrol u_1 dapat digunakan dalam mengontrol populasi terinfeksi dengan gejala (*I*), populasi rawat inap (*H*) dan populasi rawat inap (*R*). Dan saat diberikan kontrol u_2 (penyuluhan kesehatan) sebesar satu grafik menunjukkan populasi rentan (*S*) menurun, populasi terpapar (*E*) menurun, dan populasi terinfeksi tanpa gejala (*A*) menurun. Sehingga kontrol u_2 dapat digunakan dalam mengontrol populasi rentan (*S*), populasi terpapar (*E*), dan populasi terinfeksi tanpa gejala (*A*).
3. Dari hasil simulasi, diperoleh nilai kontrol u_1 sebesar satu artinya pengaturan dosis obat yang tepat pada populasi terinfeksi dengan gejala (*I*) dan populasi rawat inap (*H*). Dan diperoleh nilai kontrol u_2 sebesar satu artinya pemberian penyuluhan kesehatan secara maksimal pada populasi rentan (*S*) dan populasi terpapar (*E*). Populasi terinfeksi (*I*) sebelum diberikan kontrol dengan kondisi awal $I(0)=100$ menurun menjadi 0 setelah diberikan kontrol. Populasi rawat inap (*H*) sebelum diberikan kontrol dengan kondisi awal

$H(0)$=180 menurun menjadi 51 setelah diberikan kontrol. Populasi sembuh (R) sebelum diberikan kontrol dengan kondisi awal $R(0)$=120 meningkat menjadi 876 setelah diberikan kontrol. Dengan pemberian kontrol u_1 dan kontrol u_2 pada model penyebaran penyakit MERS-CoV dapat bekerja dengan baik.

5.2. Saran

Adapun saran yang diberikan oleh penulis untuk penelitian berikutnya adalah mengembangkan desain kontrol dengan menggunakan model yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Hyunsun, Lee., 2019. "Stochastic and spatio-temporal analysis of the Middle East Respiratory Syndrome outbreak in South Korea, 2015". **Infectious Disease Modelling**, 4(1):227-238.

[2] WHO, 2019. **Middle East Respiratory Syndrome Coronavirus (MERS-CoV)**. <URL:http://www.who.int/emergencies/mers-cov/en/>.

[3] Yunhwan, Kim., Lee Sunmi, Chu Chaesin, Choe Seoyun, Hong Saeme, dan Shin Yongseo. (2016). "The Characteristics Of Middle Eastern Respiratory Syndrome Coronavirus Transmission Dynamics South Korea". **Osong Public Health Res Perspect**, 7(1): 49-55.

[4] BNP2TKI., 2020. **"Laporan Data Penempatan dan Perlindungan PMI"**. Pusat Penelitian Pengembangan dan Informasi. Jakarta.

[5] Yong, Benny., dan L. Owen. 2015. "Model Penyebaran Penyakit Menular MERS-CoV: Suatu Langkag Antisipasi Untuk Calon Jamaah Umrah/Haji Indonesia". **Universitas Katolik Parahyangan**.

[6] Khotimah, K. (2016). "Masalah Kontrol Optimal Pada Penyebaran Penyakit MERS dengan Intervensi Masker Kesehatan, Kampanye Kesehatan, dan Pengobatan". *Skripsi.* **Jakarta: Universitas Indonesia**.

[7] Noviyanti, N. Dwi. (2018). "ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT MERS". *Skripsi*. **Surabaya: Universitas Airlangga**.

[8] Marizka, N. Putri. (2011). "Kombinasi *Brachytherapy* dan *Imunoterapi* Pada Pengobatan Kanker dengan Metode

Prinsip Minimum Pontryagin". *Skripsi*. **Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.**

[9] Cauchemez, *et al*., 2014. "Middle East Respiratory Syndrome Coronavirus: Quantification of The Extent of The Epidemic, Surveillance Biases, and Transmissibility". **The Lancet Infectious Diseases**, 14(1): 50–56.

[10] Memish, *et al*., 2013. "Middle East Respiratory Syndrome Coronavirus in Bats, Saudi Arabia*"*. **Emerging Infectious Diseases**, 11(11).

[11] Rampengan, Novie H., 2016. "Middle East Respiratory Syndrome". **Jurnal Biomedik (JBM)**, 8(1):17-26.

[12] Shalhoub, *et al*., 2015. "Successful recovery of MERS CoV pneumonia in a patientwith acquired immunodeficiency syndrome: A case report". **Journal of Clinical Virology**, 62:69–71.

[13] Pavli, A., Sotirios Tsiodras, dan Helena C. Maltezou. (2014). "Middle East respiratory syndrome coronavirus (MERS-CoV): Prevention in travelers". **Travel Medicine and Infectious Disease**, 12(6):602–608.

[14] Subiono, 2016. **Sistem Linier dan Kontrol Optimal**. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[15] Naidu, D.S., 2002. **Optimal Control Systems**. USA:CRC Pres LLC.

[16] Berihun, Z. A., 2009. "*Nonlinier Incidence and the Dynamic of Infectious Disease Models"*. **South Africa: African Institute of Mathematical Science**.

[17] Driessche, P. v., dan Wetmough, J. (2002). "Reproduction Numbers and Sub Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission". **Mathematical Biosciences**, 180:29-48.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Perhitungan Persamaan Karakteristik Analisis Kestabilan Non Endemik dan Endemik

a. Persamaan Karakteristik Analisis Kestabilan Non Endemik

$$\begin{vmatrix} \lambda - P_{11} & 0 & P_{13} & 0 & P_{15} & 0 \\ P_{21} & \lambda - P_{22} & P_{23} & 0 & P_{25} & 0 \\ 0 & P_{32} & \lambda - P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & 0 & \lambda - P_{55} & 0 \\ 0 & 0 & P_{63} & 0 & P_{65} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dengan

$P_{11} = 0,\ P_{13} = 0,\ P_{15} = 0,$

$P_{21} = 0,\ P_{22} = -k,\ P_{23} = 0,\ P_{25} = 0,$

$P_{32} = k\rho,\ P_{33} = -\gamma_a - \gamma_I,$

$P_{42} = k - k\rho,$

$P_{53} = \gamma_a,\ P_{55} = -\gamma_r,$

$P_{63} = \gamma_I,\ P_{65} = \gamma_r,$

sehingga dapat ditulis sebagai berikut,

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - (-k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k\rho & \lambda - (-\gamma_a - \gamma_I) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k - k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_a & 0 & \lambda - (-\gamma_r) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Matriks deteminan diatas diselesaikan dengan metode ekspansi kofaktor baris pertama.

Lampiran 1. Lanjutan

$$\Leftrightarrow \lambda \begin{vmatrix} \lambda+k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k\rho & \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ k-k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = 0 \ldots . (Pers.\ I)$$

Selanjutnya, $\begin{vmatrix} \lambda+k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k\rho & \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ k-k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$ diselesaikan juga dengan metode ekspansi baris.

I. $(\lambda+k)\begin{vmatrix} \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} -$

$k\rho\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} + (k-k\rho)$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = 0$

Matriks $\begin{vmatrix} \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$

diselesaikan juga dengan metode ekspansi baris.

Lampiran 1. Lanjutan

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+\gamma_a+$$

$$\gamma_I)\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} - 0 + \gamma_a \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} -$$

$$\gamma_I \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+\gamma_a+\gamma_I)(\lambda^3+\gamma_r\lambda^2)$$

$$= \lambda^4+\gamma_a\lambda^3+\gamma_I\lambda^3+\gamma_r\lambda^3+\gamma_a\gamma_r\lambda^2+\gamma_I\gamma_r\lambda^2$$

$$= \lambda^4+(\gamma_a+\gamma_I+\gamma_r)\lambda^3+(\gamma_a\gamma_r+\gamma_I\gamma_r)\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = 0 - 0 + \gamma_a \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} -$$

$$\gamma_I \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda+\gamma_a & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = 0 - (\lambda+\gamma_a+$$

$$\gamma_I)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} + \gamma_a \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} -$$

$$\gamma_I \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Lampiran 1. Lanjutan
diperoleh,

$$\mathbf{I}.\,(\lambda+k)\begin{vmatrix}\lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0\\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+\mathrm{k})[\lambda^4+(\gamma_a+\gamma_r+\gamma_I)\lambda^3+(\gamma_a\gamma_r+\gamma_I\gamma_r)\lambda^2]$$

$$= \lambda^5+(\gamma_a+\gamma_r+\gamma_I)\lambda^4+(\gamma_a\gamma_r+\gamma_I\gamma_r)\lambda^3+k\lambda^4+(k\gamma_a+k\gamma_r+k\gamma_I)\lambda^3+(k\gamma_a\gamma_r+k\gamma_I\gamma_r)\lambda^2$$

$$= \lambda^5+(k+\gamma_a+\gamma_r+\gamma_I)\lambda^4+(\gamma_a\gamma_r+\gamma_I\gamma_r+k\gamma_a+k\gamma_r+k\gamma_I)\lambda^3+(k\gamma_a\gamma_r+k\gamma_I\gamma_r)\lambda^2$$

$misal$:
$m_1 = k+\gamma_a+\gamma_r+\gamma_I$
$m_2 = \gamma_a\gamma_r+\gamma_I\gamma_r+k\gamma_a+k\gamma_r+k\gamma_I$
$m_3 = k\gamma_a\gamma_r+k\gamma_I\gamma_r$

Sehingga,
$= \lambda^5+m_1\lambda^4+m_2\lambda^3+m_3\lambda^2$

Persamaan $\lambda^5+m_1\lambda^4+m_2\lambda^3+m_3\lambda^2$ disubstitusikan ke (*Pers. I*) sehingga diperoleh persamaan karakteriktik sebagai berikut,

$$\lambda^3(\lambda^3+m_1\lambda^2+m_2\lambda+m_3)=0$$

Lampiran 1. Lanjutan

b. Persamaan Karakteristik Analisis Kestabilan Non Endemik

$$\begin{vmatrix} \lambda - P_{11} & 0 & P_{13} & 0 & P_{15} & 0 \\ P_{21} & \lambda - P_{22} & P_{23} & 0 & P_{25} & 0 \\ 0 & P_{32} & \lambda - P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & 0 & \lambda - P_{55} & 0 \\ 0 & 0 & P_{63} & 0 & P_{65} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dengan

$P_{11} = \frac{-\beta I - \beta lH}{N},\ P_{13} = -\frac{\beta S}{N},\ P_{15} = -\frac{\beta lS}{N}$

$P_{21} = \frac{\beta I + \beta lH}{N},\ P_{22} = -k,\ P_{23} = \frac{\beta S}{N},\ P_{25} = \frac{\beta lS}{N}$

$P_{32} = k\rho,\ P_{33} = -\gamma_a - \gamma_I$

$P_{42} = k - k\rho$

$P_{53} = \gamma_a,\ P_{55} = -\gamma_r$

$P_{63} = \gamma_I,\ P_{65} = \gamma_r$

Sehinggan dapat ditulis sebagai berikut,

$$\begin{vmatrix} \lambda - (\frac{-\beta I - \beta lH}{N}) & 0 & -\frac{\beta S}{N} & 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ \frac{\beta I + \beta lH}{N} & \lambda - (-k) & \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta lS}{N} & 0 \\ 0 & k\rho & \lambda - (-\gamma_a - \gamma_I) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k - k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_a & 0 & \lambda - (-\gamma_r) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_I & & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} =$$

0

Matriks determinan diatas diselesaikan dengan metode ekspansi kofaktor baris pertama.

Lampiran 1. Lanjutan

$$\Leftrightarrow \left(\lambda + \frac{\beta I + \beta lH}{N}\right)\begin{vmatrix} \lambda + k & \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta lS}{N} & 0 \\ k\rho & \lambda + \gamma_a + \gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ k - k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_a & 0 & \lambda + \gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} -$$

$$\left(\frac{\beta I + \beta lH}{N}\right)\begin{vmatrix} 0 & -P_{13} & 0 & -P_{15} & 0 \\ k & \lambda + \gamma_a + \gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ k - k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_a & 0 & \lambda + \gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} =$$

0 ... $(Pers.I)$.

Selanjutnya, $\begin{vmatrix} \lambda + k & \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta lS}{N} & 0 \\ k\rho & \lambda + \gamma_a + \gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ k - k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_a & 0 & \lambda + \gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$ dan

$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\beta S}{N} & 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ k & \lambda + \gamma_a + \gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ k - k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_a & 0 & \lambda + \gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$ diselesaikan juga dengan metode ekspansi baris.

Lampiran 1. Lanjutan

$$\boldsymbol{I}.\begin{vmatrix} \lambda+k & \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta lS}{N} & 0 \\ k\rho & \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ k-k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda +$$

$$k)\begin{vmatrix} \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} -$$

$$k\rho\begin{vmatrix} \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta lS}{N} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} +$$

$$(k-k\,\rho)\begin{vmatrix} \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta lS}{N} & 0 \\ \lambda+\gamma_a & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$$

Matriks $\begin{vmatrix} \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta lS}{N} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$, dan $\begin{vmatrix} \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta lS}{N} & 0 \\ \lambda+\gamma_a & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$ diselesaikan juga dengan metode ekspansi baris.

Lampiran 1. Lanjutan

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+\gamma_a+$$

$$\gamma_I)\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} - 0 + \gamma_a \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} -$$

$$\gamma_I \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+\gamma_a+\ \gamma_I)(\lambda^3+\gamma_r\lambda^2)$$

$$= \lambda^4+\gamma_a\lambda^3+\gamma_I\lambda^3+\gamma_I\lambda^3+\gamma_r\lambda^3+\gamma_a\gamma_r\lambda^2+\gamma_I\gamma_r\lambda^2$$

$$= \lambda^4+(\gamma_a+\gamma_I+\gamma_r)\lambda^3+(\gamma_a\gamma_r+\ \gamma_I\gamma_r)\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta I S}{N} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = \frac{\beta S}{N}\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\ \gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} - 0 +$$

$$\gamma_a \begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta I S}{N} & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} - \gamma_I \begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta I S}{N} & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\ \gamma_r & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\beta S}{N}(\lambda^3+\gamma_r\lambda^2)$$

$$= \frac{\beta S}{N}\lambda^3 + P_{23}\gamma_r\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta I S}{N} & 0 \\ \lambda+\gamma_a & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\ \gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Lampiran 1. Lanjutan

sehingga diperoleh,

$$\boldsymbol{I}.\begin{vmatrix} \lambda+k & \frac{\beta S}{N} & 0 & \frac{\beta lS}{N} & 0 \\ k\rho & \lambda+\gamma_a+\ \gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ k-k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+\mathrm{k})[\lambda^4 +$$

$$(\gamma_a+\gamma_I+\gamma_r)\,\lambda^3+(\gamma_a\gamma_I+\gamma_I\gamma_r)\lambda^2]-k\rho\left[\frac{\beta S}{N}\lambda^3+\right.$$

$$\left.\frac{\beta S}{N}\gamma_r\lambda^2\right]$$

$$=\lambda^5+(k+\gamma_a+\ \gamma_I+\gamma_r)\lambda^4+\left[\gamma_a\gamma_r+\ \gamma_I\gamma_r+k\gamma_a+\right.$$

$$\left.k\,\gamma_I+k\gamma_r-\frac{\beta S}{N}k\rho\right]\lambda^3+\left[k\gamma_{a\gamma_r}+k\,\gamma_I\gamma_r-\frac{\beta S}{N}\gamma_r\right]\lambda^2$$

Selanjutnya,

$$\boldsymbol{II}.\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\beta S}{N} & 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ k\rho & \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ k-k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = 0 -$$

$$k\rho\begin{vmatrix} -\frac{\beta S}{N} & 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}+$$

$$(k-k\rho)\begin{vmatrix} -\frac{\beta S}{N} & 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$$

Lampiran 1. Lanjutan

Matriks $\begin{vmatrix} -\frac{\beta S}{N} & 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$ dan

$\begin{vmatrix} -\frac{\beta S}{N} & 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix}$ diselesaikan juga dengan metode ekspansi baris.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{\beta S}{N} & 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = -\frac{\beta S}{N}\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} - 0 +$$

$$\gamma_a \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_r & \gamma_r \end{vmatrix} - \gamma_I \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\beta S}{N}(\lambda^3 + \gamma_r\lambda^2)$$

$$= -\frac{\beta S}{N}\lambda^3 - \frac{\beta S}{N}\gamma_r\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{\beta S}{N} & 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Lampiran 1. Lanjutan

sehingga diperoleh,

$$\boldsymbol{II}.\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\beta S}{N} & 0 & -\frac{\beta lS}{N} & 0 \\ k\rho & \lambda+\gamma_a+\gamma_I & 0 & 0 & 0 \\ k-k\rho & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_a & 0 & \lambda+\gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_I & 0 & \gamma_r & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-\frac{\beta S}{N}\lambda^3 - \frac{\beta S}{N}\gamma_r\lambda^2)$$

$dari\ \boldsymbol{I}-\boldsymbol{II}$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}-\boldsymbol{II} &= \left(\tfrac{\beta I+\beta lH}{N}+\lambda\right)\Big[\lambda^5+(k+\gamma_a+\gamma_I+\gamma_r)\lambda^4+ \\
&\quad \left(\gamma_a\gamma_b+\gamma_I\gamma_r+k\gamma_a+k\gamma_I+k\gamma_r-\tfrac{\beta S}{N}k\rho\right)\lambda^3+ \\
&\quad \left(k\gamma_a\gamma_b+k\gamma_I\gamma_r-\tfrac{\beta S}{N}k\rho\gamma_r\right)\lambda^2\Big]-\left(-\tfrac{\beta S}{N}\lambda^3-\tfrac{\beta S}{N}\gamma_r\lambda^2\right) \\
&= \tfrac{\beta I+\beta lH}{N}\lambda^5+(k+\gamma_a+\gamma_I+\gamma_r)\tfrac{\beta S}{N}\lambda^4+\left(\gamma_a\gamma_b+\gamma_I\gamma_r+\right. \\
&\quad \left. k\gamma_a+k\gamma_I+k\gamma_r-\tfrac{\beta S}{N}k\rho\right)\tfrac{\beta I+\beta lH}{N}\lambda^3+\left(k\gamma_a\gamma_b+k\gamma_I\gamma_r-\right. \\
&\quad \left.\tfrac{\beta S}{N}k\rho\gamma_r\right)\tfrac{\beta I+\beta lH}{N}\lambda^2+\lambda^6+(k+\gamma_a+\gamma_I+\gamma_r)\lambda^5+ \\
&\quad \left(\gamma_a\gamma_b+\gamma_I\gamma_r+k\gamma_a+k\gamma_I+k\gamma_r-\tfrac{\beta S}{N}k\rho\right)\lambda^4+ \\
&\quad \left(k\gamma_a\gamma_b+k\gamma_I\gamma_r-\tfrac{\beta S}{N}k\rho\gamma_r\right)\lambda^3+\tfrac{\beta S}{N}\lambda^3+\tfrac{\beta S}{N}\gamma_r\lambda^2 \\
&= \lambda^6+\left(\tfrac{\beta I+\beta lH}{N}+k+\gamma_a+\gamma_I+\gamma_r\right)\lambda^5+\left(\tfrac{\beta I+\beta lH}{N}(k+\right. \\
&\quad \left.\gamma_a+\gamma_I+\gamma_r)+\gamma_a\gamma_r+\gamma_I\gamma_r+k\gamma_a+k\gamma_I+k\gamma_r-\right. \\
&\quad \left.\tfrac{\beta S}{N}k\rho\right)\lambda^4+\Big[\Big(\gamma_a\gamma_r+\gamma_I\gamma_r+k\gamma_a+k\gamma_I+k\gamma_r- \\
&\quad \tfrac{\beta S}{N}k\rho\Big)\tfrac{\beta I+\beta lH}{N}+k\gamma_a\gamma_r+k\gamma_I\gamma_r-\tfrac{\beta S}{N}k\rho\gamma_r+\tfrac{\beta S}{N}\Big]\lambda^3+ \\
&\quad [(k\gamma_a\gamma_r+k\gamma_I\gamma_r-\tfrac{\beta S}{N}k\rho\gamma_r)\tfrac{\beta I+\beta lH}{N}+\tfrac{\beta I+\beta lH}{N}\gamma_r]\lambda^2 \\
&= \lambda^6+(P_{21}+k+\gamma_a+\gamma_I+\gamma_r)\lambda^5+(P_{21}(k+\gamma_a+\gamma_I+ \\
&\quad \gamma_r)+\gamma_a\gamma_r+\gamma_I\gamma_r+k\gamma_a+k\gamma_I+k\gamma_r-P_{23}k\rho)\lambda^4+ \\
&\quad [(\gamma_a\gamma_r+\gamma_I\gamma_r+k\gamma_a+k\gamma_I+k\gamma_r-P_{23}k\rho)P_{21}+k\gamma_a\gamma_r+ \\
&\quad k\gamma_I\gamma_r-P_{23}k\rho\gamma_r+P_{23}]\lambda^3+[(k\gamma_a\gamma_r+k\gamma_I\gamma_r- \\
&\quad P_{23}k\rho\gamma_r)P_{21}+P_{21}\gamma_r]\lambda^2
\end{aligned}$$

Lampiran 1. Lanjutan

$misal$:

$m_1 = P_{21} + k + \gamma_a + \gamma_I + \gamma_r$

$m_2 = P_{21}(k + \gamma_a + \gamma_I + \gamma_r) + \gamma_r(\gamma_a + \gamma_I) + k(\gamma_a + \gamma_I + \gamma_r) - P_{23}k\rho$

$m_3 = P_{21}(\gamma_r(\gamma_a + \gamma_I) + (\gamma_a + \gamma_I + \gamma_r) - P_{23}k\rho) + k\gamma_r(\gamma_a + \gamma_I) - P_{23}k\rho\gamma_r + P_{23}$

$m_4 = P_{21}(k\gamma_r(\gamma_a + \gamma_I) - P_{23}k\rho\gamma_r) + P_{23}\gamma_r$

dengan

$P_{21} = \frac{\beta I + \beta lH}{N}$,

$P_{23} = \frac{\beta S}{N}$,

Sehingga diperoleh,

$= \lambda^6 + m_1\lambda^5 + m_2\lambda^4 + m_3\lambda^3 + m_4\lambda^2$

Persamaan karakteriktik $\lambda^6 + m_1\lambda^5 + m_2\lambda^4 + m_3\lambda^3 + m_4\lambda^2$ dapat dituliskan sebagai berikut,

$\lambda^2(\lambda^4 + m_1\lambda^3 + m_2\lambda^2 + m_3\lambda + m_4) = 0$

Lampiran 2. Persamaan state secara *forward seep* persamaan co*state* secara *backward seep*

a. Mencari $k_{1,S}$, $k_{1,E}$, …., $k_{1,R}$

$$k_{1,S} = g_1(S_n, E_n, I_n, A_n, H_n, R_n, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \frac{-11\beta-48\beta l}{N} u_2 S_n - \frac{173\beta}{N} u_1 I_n - \frac{173\beta l}{N} u_1 H_n$$
$$k_{1,E} = g_2(S_n, E_n, I_n, A_n, H_n, R_n, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \frac{11\beta+48\beta l}{N} u_2 S_n + \frac{173\beta}{N} u_1 I_n + \frac{173\beta l}{N} u_1 H_n - k u_2 E_n$$
$$k_{1,I} = g_3(S_n, E_n, I_n, A_n, H_n, R_n, u_1(t), u_2(t))$$
$$= k\rho E_n - (\gamma_a + \gamma_I) u_1 I_n$$
$$k_{1,A} = g_4(S_n, E_n, I_n, A_n, H_n, R_n, u_1(t), u_2(t))$$
$$= k u_2 E_n - k\rho E_n$$
$$k_{1,H} = g_5(S_n, E_n, I_n, A_n, H_n, R_n, u_1(t), u_2(t))$$
$$= (\gamma_a I_n - \gamma_r H_n) u_1$$
$$k_{1,R} = g_6(S_n, E_n, I_n, A_n, H_n, R_n, u_1(t), u_2(t))$$
$$= (\gamma_I I_n + \gamma_r H_n) u_1$$

b. Mencari $k_{2,S}$, $k_{2,E}$, …., $k_{2,R}$

$$k_{2,S} = g_1\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{1,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{1,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= \frac{-11\beta-48\beta l}{N} u_2\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}h\right) - \frac{173\beta}{N} u_1\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}h\right) - \frac{173\beta l}{N} u_1\left(H_n + \frac{k_{1,H}}{2}h\right)$$
$$k_{2,E} = g_2\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{1,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{1,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= \frac{11\beta+48\beta l}{N} u_2\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}h\right) + \frac{173\beta}{N} u_1\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}h\right) + \frac{173\beta l}{N} u_1\left(H_n + \frac{k_{1,H}}{2}h\right) - k u_2\left(E_n + \frac{k_{1,E}}{2}h\right)$$
$$k_{2,I} = g_3\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{1,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{1,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= k\rho\left(E_n + \frac{k_{1,E}}{2}h\right) - (\gamma_a + \gamma_I) u_1\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}h\right)$$
$$k_{2,A} = g_4\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{1,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{1,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= k u_2\left(E_n + \frac{k_{1,E}}{2}h\right) - k\rho\left(E_n + \frac{k_{1,E}}{2}h\right)$$

$$k_{2,H} = g_5(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{1,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{1,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \left(\gamma_a \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}h\right) - \gamma_r \left(H_n + \frac{k_{1,H}}{2}h\right)\right) u_1$$
$$k_{2,R} = g_6(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{1,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{1,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \left(\gamma_I \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}h\right) + \gamma_r \left(H_n + \frac{k_{1,H}}{2}h\right)\right) u_1$$

c. Mencari $k_{3,S}$, $k_{3,E}$, …., $k_{3,R}$

$$k_{3,S} = g_1(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{2,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{2,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \frac{-11\beta - 48\beta l}{N} u_2 \left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}h\right) - \frac{173\beta}{N} u_1 \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}h\right) -$$
$$\frac{173\beta l}{N} u_1 \left(H_n + \frac{k_{2,H}}{2}h\right)$$
$$k_{3,E} = g_2(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{2,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{2,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \frac{11\beta + 48\beta l}{N} u_2 \left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}h\right) + \frac{173\beta}{N} u_1 \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}h\right) +$$
$$\frac{173\beta l}{N} u_1 \left(H_n + \frac{k_{2,H}}{2}h\right) - k u_2 \left(E_n + \frac{k_{2,E}}{2}h\right)$$
$$k_{3,I} = g_3(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{2,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{2,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= k\rho \left(E_n + \frac{k_{2,E}}{2}h\right) - (\gamma_a + \gamma_I) u_1 \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}h\right)$$
$$k_{3,A} = g_4(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{2,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{2,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= k u_2 \left(E_n + \frac{k_{2,E}}{2}h\right) - k\rho \left(E_n + \frac{k_{2,E}}{2}h\right)$$
$$k_{3,H} = g_5(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{2,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{2,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \left(\gamma_a \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}h\right) - \gamma_r \left(H_n + \frac{k_{2,H}}{2}h\right)\right) u_1$$
$$k_{3,R} = g_6(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}h, E_n + \frac{k_{2,E}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{2,R}}{2}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \left(\gamma_I \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}h\right) + \gamma_r \left(H_n + \frac{k_{2,H}}{2}h\right)\right) u_1$$

d. Mencari $k_{4,S}$, $k_{4,E}$, …., $k_{4,R}$

$$k_{4,S} = g_1(S_n + k_{3,S}h, E_n + k_{3,E}h, \dots, R_n + k_{3,R}h, u_1(t), u_2(t))$$

$$= \frac{-11\beta-48\beta l}{N} u_2\left(S_n + k_{3,S}h\right) - \frac{173\beta}{N} u_1\left(I_n + k_{3,I}h\right) - \frac{173\beta l}{N} u_1\left(H_n + k_{3,H}h\right)$$

$$k_{4,E} = g_2(S_n + k_{3,S}h, E_n + k_{3,E}h, \dots, R_n + k_{3,R}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \frac{11\beta+48\beta l}{N} u_2\left(S_n + k_{3,S}h\right) + \frac{173\beta}{N} u_1\left(I_n + k_{3,I}h\right) + \frac{173\beta l}{N} u_1\left(H_n + k_{3,H}h\right) - ku_2\left(E_n + k_{3,E}h\right)$$

$$k_{4,I} = g_3(S_n + k_{3,S}h, E_n + k_{3,E}h, \dots, R_n + k_{3,R}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= k\rho\left(E_n + k_{3,E}h\right) - (\gamma_a + \gamma_I)u_1\left(I_n + k_{3,I}h\right)$$

$$k_{4,A} = g_4(S_n + k_{3,S}h, E_n + k_{3,E}h, \dots, R_n + k_{3,R}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= ku_2\left(E_n + k_{3,E}h\right) - k\rho\left(E_n + k_{3,E}h\right)$$

$$k_{4,H} = g_5(S_n + k_{3,S}h, E_n + k_{3,E}h, \dots, R_n + k_{3,R}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \left(\gamma_a\left(I_n + k_{3,I}h\right) - \gamma_r\left(H_n + k_{3,H}h\right)\right)u_1$$

$$k_{4,R} = g_6(S_n + k_{3,S}h, E_n + k_{3,E}h, \dots, R_n + k_{3,R}h, u_1(t), u_2(t))$$
$$= \left(\gamma_I\left(I_n + k_{3,I}h\right) + \gamma_r\left(H_n + k_{3,H}h\right)\right)u_1$$

e. Mencari $k_{1,\lambda_1}, k_{1,\lambda_2}, k_{1,\lambda_3}, k_{1,\lambda_4}, k_{1,\lambda_5}, k_{1,\lambda_6}$

$$k_{1,\lambda_1} = r_1\left(\lambda_{1_n}, \lambda_{2_n}, \dots, \lambda_{6_n}, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= -\left(\lambda_{1_n}\left(\left(\frac{-11\beta-48\beta l}{N}\right)u_2\right) + \lambda_{2_n}\left(\left(\frac{11\beta+48\beta l}{N}\right)u_2\right)\right)$$

$$k_{1,\lambda_2} = r_2\left(\lambda_{1_n}, \lambda_{2_n}, \dots, \lambda_{6_n}, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= -\left(-\lambda_{2_n}(ku_2) + \lambda_{3_n}(k\rho) + \lambda_{4_n}(ku_2 - k\rho)\right)$$

$$k_{1,\lambda_3} = r_3\left(\lambda_{1_n}, \lambda_{2_n}, \dots, \lambda_{6_n}, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= -\left(1 + \lambda_{1_n}\left(-\frac{173\beta}{N}u_1\right) + \lambda_{2_n}\left(\frac{173\beta}{N}u_1\right) - \lambda_{3_n}(\gamma_a + \gamma_I)u_1 + \lambda_{5_n}(\gamma_a u_1) + \lambda_{6_n}(\gamma_I u_1)\right)$$

$$k_{1,\lambda_4} = r_4\left(\lambda_{1_n}, \lambda_{2_n}, \dots, \lambda_{6_n}, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= 0$$

$$k_{1,\lambda_5} = r_5\left(\lambda_{1_n}, \lambda_{2_n}, \dots, \lambda_{6_n}, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= -\left(1 + \lambda_{1_n}\left(-\frac{173\beta l}{N}u_2\right) + \lambda_{2_n}\left(\frac{173\beta l}{N}u_2\right) - \lambda_{5_n}(\gamma_r u_1) + \lambda_{6_n}(\gamma_r u_1)\right)$$
$$k_{1,\lambda_6} = r_6\left(\lambda_{1_n}, \lambda_{2_n}, \dots, \lambda_{6_n}\right)$$
$$= -1$$

f. Mencari $k_{2,\lambda_1}, k_{2,\lambda_2}, k_{2,\lambda_3}, k_{2,\lambda_4}, k_{2,\lambda_5}, k_{2,\lambda_6}$

$$k_{2,\lambda_1} = r_1\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{1,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= -\left(\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}h\right)\left(\left(\frac{-11\beta - 48\beta l}{N}\right)u_2\right) + \left(\lambda_{2_n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}h\right)\left(\left(\frac{11\beta + 48\beta l}{N}\right)u_2\right)\right)$$

$$k_{2,\lambda_2} = r_2\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{1,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= -\left(-\left(\lambda_{2_n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}h\right)(ku_2) + \left(\lambda_{3_n} - \frac{k_{1,\lambda_3}}{2}h\right)(k\rho) + \left(\lambda_{4_n} - \frac{k_{1,\lambda_4}}{2}h\right)(ku_2 - k\rho)\right)$$

$$k_{2,\lambda_3} = r_3\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{1,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$
$$= -\left(1 + \left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}h\right)\left(-\frac{173\beta}{N}u_1\right) + \left(\lambda_{2_n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}h\right)\left(\frac{173\beta}{N}u_1\right) - \left(\lambda_{3_n} - \frac{k_{1,\lambda_3}}{2}h\right)(\gamma_a + \gamma_I)u_1 + \left(\lambda_{5_n} - \frac{k_{1,\lambda_5}}{2}h\right)(\gamma_a u_1) + \left(\lambda_{6_n} - \frac{k_{1,\lambda_6}}{2}h\right)(\gamma_I u_1)\right)$$

$$k_{2,\lambda_4} = r_4\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{1,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= 0$$

$$k_{2,\lambda_5} = r_5\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{1,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -\left(1 + \left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}h\right)\left(-\frac{173\beta l}{N}u_2\right) + \left(\lambda_{2_n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}h\right)\left(\frac{173\beta l}{N}u_2\right) - \left(\lambda_{5_n} - \frac{k_{1,\lambda_5}}{2}h\right)(\gamma_r u_1) + \left(\lambda_{6_n} - \frac{k_{1,\lambda_6}}{2}h\right)(\gamma_r u_1)\right)$$

$$k_{2,\lambda_6} = r_6\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{1,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -1$$

g. Mencari $k_{3,\lambda_1}, k_{3,\lambda_2}, k_{3,\lambda_3}, k_{3,\lambda_4}, k_{3,\lambda_5}, k_{3,\lambda_6}$

$$k_{3,\lambda_1} = r_1\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{2,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -\left(\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}h\right)\left(\left(\frac{-11\beta - 48\beta l}{N}\right)u_2\right) + \left(\lambda_{2_n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}h\right)\left(\left(\frac{11\beta + 48\beta l}{N}\right)u_2\right)\right)$$

$$k_{3,\lambda_2} = r_2\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{2,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -\left(-\left(\lambda_{2_n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}h\right)(ku_2) + \left(\lambda_{3_n} - \frac{k_{2,\lambda_3}}{2}h\right)(k\rho) + \left(\lambda_{4_n} - \frac{k_{2,\lambda_4}}{2}h\right)(ku_2 - k\rho)\right)$$

$$k_{3,\lambda_3} = r_3\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{2,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -\left(1 + \left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}h\right)\left(-\frac{173\beta}{N}u_1\right) + \left(\lambda_{2_n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}h\right)\left(\frac{173\beta}{N}u_1\right) - \left(\lambda_{3_n} - \frac{k_{2,\lambda_3}}{2}h\right)(\gamma_a + \gamma_I)u_1 + \left(\lambda_{5_n} - \frac{k_{2,\lambda_5}}{2}h\right)(\gamma_a u_1) + \left(\lambda_{6_n} - \frac{k_{2,\lambda_6}}{2}h\right)(\gamma_I u_1)\right)$$

$$k_{3,\lambda_4} = r_4\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{2,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= 0$$

$$k_{3,\lambda_5} = r_5\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{2,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -\left(1 + \left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}h\right)\left(-\frac{173\beta l}{N}u_2\right) + \left(\lambda_{2_n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}h\right)\left(\frac{173\beta l}{N}u_2\right) - \left(\lambda_{5_n} - \frac{k_{2,\lambda_5}}{2}h\right)(\gamma_r u_1) + \left(\lambda_{6_n} - \frac{k_{2,\lambda_6}}{2}h\right)(\gamma_r u_1)\right)$$

$$k_{3,\lambda_6} = r_6\left(\lambda_{1_n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}h, \lambda_{2_n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}h, \dots, \lambda_{6_n} - \frac{k_{2,\lambda_6}}{2}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -1$$

h. Mencari $k_{4,\lambda_1}, k_{4,\lambda_2}, k_{4,\lambda_3}, k_{4,\lambda_4}, k_{4,\lambda_5}, k_{4,\lambda_6}$

$$k_{4,\lambda_1} = r_1\left(\lambda_{1_n} - k_{3,\lambda_1}h, \lambda_{2_n} - k_{3,\lambda_2}h, \dots, \lambda_{6_n} - k_{3,\lambda_6}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -\left(\left(\lambda_{1_n} - k_{3,\lambda_1}h\right)\left(\left(\frac{-11\beta-48\beta l}{N}\right)u_2\right) + \left(\lambda_{2_n} - k_{3,\lambda_2}h\right)\left(\left(\frac{11\beta+48\beta l}{N}\right)u_2\right)\right)$$

$$k_{4,\lambda_2} = r_2\left(\lambda_{1_n} - k_{3,\lambda_1}h, \lambda_{2_n} - k_{3,\lambda_2}h, \dots, \lambda_{6_n} - k_{3,\lambda_6}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -\left(-\left(\lambda_{2_n} - k_{3,\lambda_2}h\right)(ku_2) + \left(\lambda_{3_n} - k_{3,\lambda_3}h\right)(k\rho) + \left(\lambda_{4_n} - k_{3,\lambda_4}h\right)(ku_2 - k\rho)\right)$$

$$k_{4,\lambda_3} = r_3\left(\lambda_{1_n} - k_{3,\lambda_1}h, \lambda_{2_n} - k_{3,\lambda_2}h, \dots, \lambda_{6_n} - k_{3,\lambda_6}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -\left(1 + \left(\lambda_{1_n} - k_{3,\lambda_1}h\right)\left(-\frac{173\beta}{N}u_1\right) + \left(\lambda_{2_n} - k_{3,\lambda_2}h\right)\left(\frac{173\beta}{N}u_1\right) - \left(\lambda_{3_n} - k_{3,\lambda_3}h\right)(\gamma_a + \gamma_I)u_1 + \left(\lambda_{5_n} - k_{3,\lambda_5}h\right)(\gamma_a u_1) + \left(\lambda_{6_n} - k_{3,\lambda_6}h\right)(\gamma_I u_1)\right)$$

$$k_{4,\lambda_4} = r_4\left(\lambda_{1_n} - k_{3,\lambda_1}h, \lambda_{2_n} - k_{3,\lambda_2}h, \dots, \lambda_{6_n} - k_{3,\lambda_6}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= 0$$

$$k_{4,\lambda_5} = r_5\left(\lambda_{1_n} - k_{3,\lambda_1}h, \lambda_{2_n} - k_{3,\lambda_2}h, \dots, \lambda_{6_n} - k_{3,\lambda_6}h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -\left(1 + \left(\lambda_{1_n} - k_{3,\lambda_1} h\right)\left(-\frac{173\beta l}{N} u_2\right) + \left(\lambda_{2_n} - k_{3,\lambda_2} h\right)\left(\frac{173\beta l}{N} u_2\right) - \left(\lambda_{5_n} - k_{3,\lambda_5} h\right)(\gamma_r u_1) + \left(\lambda_{6_n} - k_{3,\lambda_6} h\right)(\gamma_r u_1)\right)$$

$$k_{4,\lambda_6} = r_6\left(\lambda_{1_n} - k_{3,\lambda_1} h, \lambda_{2_n} - k_{3,\lambda_2} h, \dots, \lambda_{6_n} - k_{3,\lambda_6} h, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$= -1$$

i. Mencari $k_{1,S1}$, $k_{1,E1}$, …., $k_{1,R1}$

$$k_{1,S1} = g_1(S1_n, E1_n, I1_n, A1_n, H1_n, R1_n)$$
$$k_{1,E1} = g_2(S1_n, E1_n, I1_n, A1_n, H1_n, R1_n)$$
$$k_{1,I1} = g_3(S1_n, E1_n, I1_n, A1_n, H1_n, R1_n)$$
$$k_{1,A1} = g_4(S1_n, E1_n, I1_n, A1_n, H1_n, R1_n)$$
$$k_{1,H1} = g_5(S1_n, E1_n, I1_n, A1_n, H1_n, R1_n)$$
$$k_{1,R1} = g_6(S1_n, E1_n, I1_n, A1_n, H1_n, R1_n)$$

j. Mencari $k_{2,S1}$, $k_{2,E1}$, …., $k_{2,R1}$

$$k_{2,S1} = g_1(S1_n + \frac{k_{1,S1}}{2} h, E1_n + \frac{k_{1,E1}}{2} h, \dots, R1_n + \frac{k_{1,R1}}{2} h)$$
$$k_{2,E1} = g_2(S1_n + \frac{k_{1,S1}}{2} h, E1_n + \frac{k_{1,E1}}{2} h, \dots, R1_n + \frac{k_{1,R1}}{2} h)$$
$$k_{2,I1} = g_3(S1_n + \frac{k_{1,S1}}{2} h, E1_n + \frac{k_{1,E1}}{2} h, \dots, R1_n + \frac{k_{1,R1}}{2} h)$$
$$k_{2,A1} = g_4(S1_n + \frac{k_{1,S1}}{2} h, E1_n + \frac{k_{1,E1}}{2} h, \dots, R1_n + \frac{k_{1,R1}}{2} h)$$
$$k_{2,H1} = g_5(S1_n + \frac{k_{1,S1}}{2} h, E1_n + \frac{k_{1,E1}}{2} h, \dots, R1_n + \frac{k_{1,R1}}{2} h)$$
$$k_{2,R1} = g_6(S1_n + \frac{k_{1,S1}}{2} h, E1_n + \frac{k_{1,E1}}{2} h, \dots, R1_n + \frac{k_{1,R1}}{2} h)$$

k. Mencari $k_{3,S1}$, $k_{3,E1}$, …., $k_{3,R1}$

$$k_{3,S1} = g_1(S1_n + \frac{k_{2,S1}}{2} h, E1_n + \frac{k_{2,E1}}{2} h, \dots, R1_n + \frac{k_{2,R1}}{2} h)$$
$$k_{3,E1} = g_2(S1_n + \frac{k_{2,S1}}{2} h, E1_n + \frac{k_{2,E1}}{2} h, \dots, R1_n + \frac{k_{2,R1}}{2} h)$$
$$k_{3,I1} = g_3(S1_n + \frac{k_{2,S1}}{2} h, E1_n + \frac{k_{2,E1}}{2} h, \dots, R1_n + \frac{k_{2,R1}}{2} h)$$

$$k_{3,A1} = g_4(S1_n + \frac{k_{2,S1}}{2}h, E1_n + \frac{k_{2,E1}}{2}h, \dots, R1_n + \frac{k_{2,R1}}{2}h)$$
$$k_{3,H1} = g_5(S1_n + \frac{k_{2,S1}}{2}h, E1_n + \frac{k_{2,E1}}{2}h, \dots, R1_n + \frac{k_{2,R1}}{2}h)$$
$$k_{3,R1} = g_6(S1_n + \frac{k_{2,S1}}{2}h, E1_n + \frac{k_{2,E1}}{2}h, \dots, R_n + \frac{k_{2,R1}}{2}h)$$

l. Mencari $k_{4,S1}$, $k_{4,E1}$, …., $k_{4,R1}$

$$k_{4,S1} = g_1(S1_n + k_{3,S1}h, E1_n + k_{3,E1}h, \dots, R1_n + k_{3,R1}h)$$
$$k_{4,E1} = g_2(S1_n + k_{3,S1}h, E1_n + k_{3,E1}h, \dots, R1_n + k_{3,R1}h)$$
$$k_{4,I1} = g_3(S1_n + k_{3,S1}h, E_n + k_{3,E1}h, \dots, R1_n + k_{3,R1}h)$$
$$k_{4,A1} = g_4(S1_n + k_{3,S1}h, E1_n + k_{3,E1}h, \dots, R1_n + k_{3,R1}h)$$
$$k_{4,H1} = g_5(S1_n + k_{3,S1}h, E1_n + k_{3,E1}h, \dots, R1_n + k_{3,R1}h)$$
$$k_{4,R1} = g_6(S1_n + k_{3,S1}h, E1_n + k_{3,E1}h, \dots, R1_n + k_{3,R1}h)$$

"*Halaman ini sengaja dikosongkan*"

Lampiran 3. Source Code Matlab

```
options=odeset('RelTol',1e-3,'AbsTol',[1e-3 1e-
3]);
[T1,Y1] = ode45(@(t,y) TA_Novia(t, y, 0.0835,
22, 1/(6.6), 0.585, 0.6403, 0.2, 1/7, 0, 0),[0
30],[400; 150; 100; 50; 180; 120]);
[T2,Y2] = ode45(@(t,y) TA_Novia(t, y, 0.0835,
22, 1/(6.6), 0.585, 0.6403, 0.2, 1/7, 1, 1),[0
30],[400; 150; 100; 50; 180; 120]);

figure(1)
plot(T1,Y1(:,1),'-
b',T2,Y2(:,1),'m','LineWidth',2);
title('Populasi Rentan (S)');
legend('Tanpa Kontrol','Dengan Kontrol');
axis([0 30 0 1000]);
grid on;
xlabel('Waktu(Hari)', 'FontSize',16);
ylabel('Jumlah (Orang)', 'FontSize',16);
hold on

figure(2)
plot(T1,Y1(:,2),'-
b',T2,Y2(:,2),'m','LineWidth',2);
title('Populasi Terpapar (E)');
legend('Tanpa Kontrol','Dengan Kontrol');
axis([0 30 0 1000]);
grid on;
xlabel('Waktu(Hari)', 'FontSize',16);
ylabel('Jumlah (Orang)', 'FontSize',16);
hold on

figure(3)
plot(T1,Y1(:,3),'-
b',T2,Y2(:,3),'m','LineWidth',2);
title('Populasi Terinfeksi Bergejala (I)');
legend('Tanpa Kontrol','Dengan Kontrol');
axis([0 30 0 1000]);
grid on;
```

```
xlabel('Waktu(Hari)', 'FontSize',16);
ylabel('Jumlah (Orang)', 'FontSize',16);
hold on

figure(4)
plot(T1,Y1(:,4),'-
b',T2,Y2(:,4),'m','LineWidth',2);
title('Populasi Terinfeksi Tanpa Gejala (A)');
legend('Tanpa Kontrol','Dengan Kontrol');
axis([0 30 0 1000]);
grid on;
xlabel('Waktu(Hari)', 'FontSize',16);
ylabel('Jumlah (Orang)', 'FontSize',16);
hold on

figure(5)
plot(T1,Y1(:,5),'-
b',T2,Y2(:,5),'m','LineWidth',2);
title('Populasi Rawat Inap (H)');
legend('Tanpa Kontrol','Dengan Kontrol');
axis([0 30 0 1000]);
grid on;
xlabel('Waktu(Hari)', 'FontSize',16);
ylabel('Jumlah (Orang)', 'FontSize',16);
hold on

figure(6)
plot(T1,Y1(:,6),'-
b',T2,Y2(:,6),'m','LineWidth',2);
title('Populasi Sembuh (R)');
legend('Tanpa Kontrol','Dengan Kontrol');
axis([0 30 0 1000]);
grid on;
xlabel('Waktu(Hari)', 'FontSize',16);
ylabel('Jumlah (Orang)', 'FontSize',16);
hold on
```

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama lengkap Novia Hadiatni Rohmi dan biasa dipanggil Novia, lahir di Selong 1 November 1997. Penulis merupakan anak tunggal yang menempuh pendidikan mulai dari TK Aisyiyah Bustanul Athfal (2002-2004), SD Negeri 5 Mataram (2004-2010), SMP Negeri 2 Mataram (2010-2013), SMA Negeri 1 Mataram (2013-2016). Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang S1 di Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) pada tahun 2016-sekarang melalui jalur SNMPTN dengan NRP 06111640000022.

Penulis pernah mengikuti kegiatan organisasi mahasiswa yaitu Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) ITS sebagai Second Treasurer Himatika ITS (2017-2018) dan First Treasurer Himatika ITS (2018-2011). Penulis juga pernah mengikuti kepanitiaan OMITS 2018 HIMATIKA ITS sebagai penanggung jawab Regional Mataram. Di departemen Matematika ITS, penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan yang terdiri atas pemodelan Matematika serta Riset Operasi dan Pengolahan Data. Penulis juga mengikuti Kerja Praktik di Kantor Ororitas Jasa Keuangan Regional IV Jawa Timur selama satu bulan dan ditempatkan di divisi Sumber Daya Manusia.

Apabila ingin memberikan kritik, saran, dan informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat menghubungi email noviahadiatni01@gmail.com. Terimakasih dan semoga bermanfaat.