



TUGAS AKHIR - KM184801

**ESTIMASI HARGA OBLIGASI BENCANA ALAM DENGAN
TINGKAT SUKU BUNGA STOKASTIK MENGGUNAKAN
METODE MONTE CARLO**

**FATIMAH AZZAHRA ARHAM
06111640000111**

Dosen Pembimbing
Endah R.M. Putri, S.Si, M.T, Ph.D
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



TUGAS AKHIR - KM184801

**ESTIMASI HARGA OBLIGASI BENCANA ALAM
DENGAN TINGKAT SUKU BUNGA STOKASTIK
MENGUNAKAN METODE MONTE CARLO**

FATIMAH AZZAHRA ARHAM
NRP. 06111640000111

Dosen Pembimbing:
Endah R.M. Putri, S.Si, M.T, Ph.D
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



FINAL PROJECT - KM184801

**ESTIMATION OF CATASTROPHIC BOND PRICE WITH
STOCHASTIC INTEREST USING MONTE CARLO METHOD**

FATIMAH AZZAHRA ARHAM
NRP. 06111640000111

Supervisors:

Endah R.M. Putri, S.Si, M.T, Ph.D
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

ESTIMASI HARGA OBLIGASI BENCANA ALAM DENGAN TINGKAT SUKU BUNGA STOKASTIK MENGUNAKAN METODE MONTE CARLO

ESTIMATION OF CATASTROPHIC BOND PRICE WITH STOCHASTIC INTEREST USING MONTE CARLO

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

Fatimah Azzahra Arham
NRP. 0611164000111

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Dr. Chairul Imron, M.I.Komp
NIP. 19611115 198703 1 003

Dosen Pembimbing I,



Endang R.M. Putri, S.Si, M.T., Ph. D
NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS



Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, 19 Agustus 2020

**ESTIMASI HARGA OBLIGASI BENCANA ALAM DENGAN TINGKAT
SUKU BUNGA STOKASTIK MENGGUNAKAN METODE MONTE
CARLO**

Nama : Fatimah Azzahra Arham
NRP : 06111640000111
Departemen : Matematika FSAD ITS
Dosen Pembimbing : Endah R.M. Putri, S.Si, M.T, Ph.D
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

Abstrak

Catastrophe bond (CAT bond) merupakan salah satu instrumen sekuritas keuangan terkait asuransi yang bertujuan untuk mentransfer serangkaian risiko tertentu (umumnya resiko bencana alam) dari penerbit kepada investor melalui pasar modal. Penentuan harga *zero-coupon CAT bond* memperhatikan faktor suku bunga yang bergerak secara stokastik dan distribusi dari kerugian yang diakibatkan oleh bencana alam. Pada penelitian ini, estimasi harga *zero-coupon CAT bond* dilakukan dengan memodelkan pergerakan suku bunga yang bergerak secara stokastik dengan model Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Parameter model CIR diestimasi menggunakan algoritma *Grid search*. Selanjutnya dilakukan pendekatan Monte Carlo untuk mendapatkan nilai yang konvergen dari tingkat suku bunga pada model CIR. Distribusi data kerugian bencana digunakan untuk mencari nilai *aggregate loss*. Model *aggregate loss* dikonstruksi menggunakan distribusi frekuensi dan severitas. Perhitungan *aggregate loss* secara *exact* sulit untuk dilakukan, sehingga dilakukan aproksimasi dengan pendekatan campuran. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, nilai suku bunga, batas atas kerugian dan waktu jatuh tempo dapat mempengaruhi penentuan harga *zero-coupon CAT bond*. Harga *zero-coupon CAT bond* perbulan mengikuti pergerakan tingkat suku bunga CIR. Nilai suku bunga yang kecil menghasilkan harga obligasi bencana yang tinggi begitupun sebaliknya. Batas atas kerugian (D) yang di tetapkan pihak

issuer juga dapat mempengaruhi harga *zero-coupon CAT bond*. Semakin besar batas atas kerugian (D) membuat harga *zero-coupon CAT bond* menjadi mahal. Faktor terakhir yang dapat mempengaruhi harga *zero-coupon CAT bond* adalah waktu jatuh tempo. Semakin lama waktu jatuh tempo, maka harga *zero-coupon CAT bond* semakin murah.

Kata Kunci : *Zero-Coupon CAT bond, Aggregate Loss, Pendekatan Campuran, Cox-Ingersoll-Ross, Monte Carlo.*

ESTIMATION OF CATASTROPHIC BOND PRICE WITH STOCHASTIC INTEREST USING MONTE CARLO METHOD

Name : Fatimah Azzhra Arham
NRP : 0611164000111
Department : Mathematics FSDA-ITS
Supervisor : Endah R.M. Putri, S.Si, M.T, Ph.D
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

Abstract

Catastrophe bond (CAT Bond) is one of the financial instruments related to insurance that aims to transfer a certain set of risks (generally natural disaster risk) from the issuer to investors through the capital market. Pricing zero-coupon CAT bond considers the interest rates that move stochastically and the distribution of losses caused by natural disasters. In this final project research, Pricing zero-coupon CAT bond is done by modeling the stochastic interest rate movement using the Cox-Ingers-Ross (CIR) model. CIR model parameters are estimated using the Grid search algorithm. Next, a Monte Carlo approach is used to obtain convergent values of the interest rates in the CIR model. Disaster loss data distribution is used to find the aggregate loss value. The construction aggregate loss model uses frequency distribution and severity. The exact calculation of aggregate loss is difficult to do, so the approximation is done using a mixed method. Based on the simulations that have been carried out, the interest rate, the upper limit of the loss and the due date can influence the determination of the zero-coupon CAT bond price. The CAT zero-coupon bond price per month follows the CIR interest rate. The small interest rate results in a high zero-coupon CAT bond price and vice versa. The upper limit of loss (D) set by the issuer can also affect the zero-coupon price of CAT bonds. The greater the upper limit of loss (D) makes the zero-coupon CAT bond expensive. The final factor that can affect the zero-coupon price of a CAT bond is the maturity date. The longer the maturity period,

the cheaper the CAT bond zero-coupon price will be.

Key Words : *Zero-Coupon CAT bond, Aggregate Loss, Mixed Approach Method, Cox-Ingersoll-Ross, Monte Carlo.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur dipanjatkan kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penyusunan Tugas Akhir yang berjudul :

ESTIMASI HARGA OBLIGASI BENCANA ALAM DENGAN TINGKAT SUKU BUNGA STOKASTIK MENGGUNAKAN METODE MONTE CARLO

dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu sebagai salah satu syarat kelulusan dalam menempuh program studi S1 departemen Matematika FSAD ITS Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu berkat dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal tersebut, penulis bermaksud menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Kedua orang tua tercinta, Bapak Irham dan Ibu Titik Atikah, atas segala doa, kasih sayang, perhatian, bimbingan, dan dukungan (baik materi maupun non materi) yang tiada henti.
2. Bapak Subchan, Ph.D, selaku kepala Departemen Matematika FMKSD ITS yang telah memberikan motivasi dan dukungan kepada penulis.
3. Ibu Endah Rokhmati Merdika Putri, S.Si, M.T, Ph.D dan Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp, selaku dosen pembimbing I dan II, atas bimbingan, saran, kritik, motivasi, dan pengalaman yang tak terlupakan selama proses pengerjaan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
4. Ibu Alvida Mustika Rukmi, S.Si, M.Si., selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FSAD ITS.
5. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

6. Adik-adik saya, Sarah Dzakhirah, Muhammad Rizalludin dan Muhammad Faqihuddin atas dukungan dan semangat yang diberikan.
7. Pembimbing tambahan, Mas Venansius Ryan dan Hengky kurniawan yang telah menjadi teman berdiskusi serta memberikan ilmu, motivasi, saran, kritik dan pengalaman yang tak terlupakan selama proses pengerjaan Tugas Akhir ini.
8. Meylawati Marfu'atin dan teman-teman HEHEHE (Jinandya Mentari, Annisa Rahmienda, Aufa Anastasia, Erlin Dhebora, Hasna Khalishfi Y, Kirana Putri S. C, Kirana Damayanti P. H, Maslahatul Ummah, Vivien Maulidya, Nadhira Azane) telah menjadi teman berbagi cerita, memberi motivasi, berbagi canda tawa dan menjadi teman seperjuangan selama di ITS ini.
9. Teman-teman seperjuangan *Actuarial Club* terutama, Mas Venansius Ryan, mbak Vira Diana, Mbak Marina Nadya, Hengky Kurniawan, Erlin Dhebora, Islachtul Ummah yang sudah memberikan dukungan juga motivasi yang luar biasa.
10. Teman-teman Dwiwarna Surabaya, Nadya Safitri, Inas Bachtiar, Safitri Wulansari, Ananta Nafis, Rendy yang telah meluangkan waktu untuk berbagi cerita dan menyemangati satu sama lain dalam mengerjakan Tugas Akhir ini.
11. Seluruh teman-teman mahasiswa Departemen Matematika ITS angkatan 2016 (LEMNISCATE), atas kebersamaan, canda tawa, suka duka, dan pengalaman lainnya yang tak terlupakan oleh penulis.

Penulis juga mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak untuk perbaikan isi Tugas Akhir ini. Segala kritik dan saran akan penulis terima dan akan disambut dengan senang hati.

Bekasi, 04 Agustus 2020

Fatimah Azzahra Arham

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR TABEL	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
1 BAB I	
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
2 BAB II	
TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 <i>Catastrophe Bonds (CAT Bonds)</i>	6
2.3 Proses Stokastik	8
2.3.1 Model Cox-Ingersoll-Ross (CIR)	8

2.3.2	Metode Euler	9
2.4	Aljabar Himpunan	10
2.4.1	Filtrasi	10
2.4.2	Martingale	11
2.5	Estimasi Parameter	11
2.5.1	<i>Algoritma Grid Search</i>	12
2.6	Pendekatan Monte Carlo	12
2.7	<i>Mean Absolute Presentage Error</i> (MAPE)	13
2.8	Model <i>Aggregate Loss</i>	14
2.8.1	Proses Kedatangan Bencana	14
2.8.2	Distribusi Severitas	15
2.8.3	Model Compound	16
2.9	Pendekatan Campuran	18
2.10	Model penetapan harga <i>Zero - Coupon CAT bond</i>	19

3 BAB III
METODE PENELITIAN **21**

4 BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN **25**

4.1	Tingkat Suku Bunga Model CIR (Cox Ingersoll Ross)	25
4.2	Implementasi Model CIR untuk Mengaproksimasi Tingkat Suku Bunga	26
4.2.1	Estimasi Parameter dengan <i>Algoritma Grid Search</i>	27
4.2.2	Validasi Parameter Model CIR	31
4.2.3	Simulasi Model CIR dengan Pendekatan Monte Carlo	32
4.3	Konstruksi Model <i>Aggregate Loss</i>	36
4.3.1	Proses Kedatangan Bencana	37
4.3.2	Distribusi Severitas	37
4.4	Moment dari Compound Distribution	43
4.5	Aproksimasi <i>Aggregate Loss</i>	44
4.5.1	Aproksimasi Gamma	44

4.5.2	Aproksimasi Invers Gaussian	45
4.5.3	Pendekatan Campuran (Gamma- Invers Gaussian)	46
4.5.4	Perbandingan Nilai Aproksimasi <i>Aggregate Loss</i>	48
4.6	Model <i>Zero-Coupon CAT Bond</i>	50
4.7	Simulasi Penentuan Harga <i>Zero-Coupon CAT Bond</i>	53
5	BAB V	
	PENUTUP	61
5.1	Kesimpulan	61
5.2	Saran	62
	DAFTAR PUSTAKA	63
	LAMPIRAN	L-1

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Struktur Obligasi Bencana (<i>CAT bond</i>)	7
3.1 <i>Flowchart</i> Proses Pengerjaan Tugas Akhir	21
4.1 Plot Data Suku Bunga Amerika Serikat	27
4.2 Simulasi Model CIR dengan Parameter Grid Search	30
4.3 Simulasi Data <i>Testing</i> dengan Parameter Grid Search	31
4.4 Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Monte Carlo dengan 25 iterasi	32
4.5 Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Monte Carlo dengan 100 iterasi	33
4.6 Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Monte Carlo dengan 1000 iterasi	33
4.7 Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan 1000 Iterasi	35
4.8 Grafik Histogram Kerugian Bencana	38
4.9 Nilai <i>Aggregate Loss</i> dengan Pendekatan Campuran	47
4.10 Perbandingan Hasil Aproksimasi	49
4.11 <i>Cashflow</i> untuk <i>Zero-Coupon Bond</i>	50
4.12 Harga <i>Zero-Coupon CAT Bond</i> Berdasarkan Nilai Suku Bunga	55
4.13 <i>Harga zero-coupon CAT Bond</i> Berdasarkan Nilai <i>D</i>	56
4.14 <i>Harga Zero-Coupon CAT Bond</i> Berdasarkan Waktu Jatuh Tempo	58

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1	Skala MAPE 13
4.1	Hasil Estimasi Parameter dengan Algoritma GS Berdasarkan Banyak Iterasi 29
4.2	Hasil Estimasi Parameter dengan Algoritma GS 29
4.3	Estimasi Parameter Data Kerugian 39
4.4	Hasil Uji Kolmogorov Smirnov 40
4.5	Moment distribusi Lognormal ($\hat{\mu} = 5.4395, \hat{\sigma} = 0.9569$) 42
4.6	Nilai Kumulan <i>Aggregate Loss</i> 45
4.7	Perbandingan Nilai MAPE Aproksimasi <i>Aggregate Loss</i> 49
4.8	Hasil Pendekatan Campuran 53
4.9	Hasil Pendekatan Campuran (Lanjutan) 54

DAFTAR SIMBOL

$r(t)$	Tingkat suku bunga pada saat ke- t
μ	Rata-rata suku bunga jangka panjang
σ	Volatilitas pergerakan tingkat suku bunga
k	Kecepatan penyesuan $r(t)$ terhadap μ
$W(t)$	Proses Wiener
L_t	<i>Aggregate loss</i>
k_{3L}	<i>Skewness aggregate loss</i>
k_{4L}	<i>Kurtosis aggregate loss</i>
P_{CAT}	Pembayaran akhir
Z	<i>Redemption value</i>
D	Nilai <i>Threshold</i>
p	Nilai fraksi pokok
CAT	<i>Catastrophe Bond</i>
V_t	Harga <i>zero-coupon CAT bond</i>
MAPE	<i>Mean Percentage Absolute Error</i>
CIR	Cox Ingersoll Ross

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan ini, dipaparkan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat penulisan dari Tugas Akhir.

1.1 Latar Belakang Masalah

Bencana adalah peristiwa atau rangkaian peristiwa yang mengancam dan mengganggu kehidupan dan penghidupan masyarakat yang disebabkan, baik oleh faktor alam dan/atau faktor non alam maupun faktor manusia sehingga mengakibatkan timbulnya korban jiwa manusia, kerusakan lingkungan, kerugian harta benda, dan dampak psikologis[1]. Bencana yang diakibatkan oleh peristiwa atau serangkaian peristiwa yang disebabkan oleh alam antara lain berupa gempa bumi, tsunami, gunung meletus, banjir, kekeringan, badai, topan, dan tanah longsor disebut dengan bencana alam. Kerugian yang ditimbulkan oleh bencana alam sangat besar sehingga dapat berpengaruh besar terhadap kondisi suatu negara.

Pada tahun 2017, Amerika Serikat (AS) mengalami kerugian yang sangat besar akibat bencana badai Irma, Maria, serta kebakaran hutan, sehingga menyebabkan kerugian mencapai \$ 306 miliar atau setara dengan Rp 4.108 triliun. Tahun tersebut merupakan tahun termahal bagi Amerika Serikat dalam menghadapi bencana alam[2]. Beralih ke negara di Asia, negara yang memiliki potensi besar terhadap terjadinya bencana adalah Indonesia. Merujuk pada Emergency Events Database, Indonesia menempati posisi keempat tertinggi di dunia dalam hal jumlah bencana alam. Bahkan, ditinjau dari sisi kerugian ekonomi, Indonesia menempati tempat pertama di dunia menurut United Nations International Strategy for Disaster Reduction dengan rata-rata nilai yang mencapai sekitar Rp20 triliun per tahun[3]. Dengan kondisi yang demikian, beban pemerintah untuk meminimalkan risiko maupun kerusakan dari bencana alam tentu menjadi sungguh berat.

Dengan kondisi iklim yang tidak menentu dan letak geografis yang rawan terjadi bencana, Maka potensi kerugian yang terjadi akibat bencana alam semakin besar. Biasanya, saat bencana terjadi pemerintah dan lembaga sosial akan bekerjasama memberikan bantuan untuk menggantikan ganti rugi akibat bencana tersebut. Akan tetapi, pemberian ganti rugi biasanya hanya menutupi sebagian kecil kerugian yang didapatkan akibat bencana alam. Oleh karena itu, harus ada metode lain untuk membantu menutupi kerugian akibat bencana alam tersebut, salah satunya adalah mengasuransikan resiko atau kerugian yang dialami akibat bencana. Asuransi adalah pemindahan risiko dari tertanggung (pihak yang terkena kerugian) kepada penanggung (pihak yang menanggung kerugian tertanggung) dimana penanggung menerima premi dan tertanggung menerima kompensasi tertentu akibat kerugian, kerusakan atau kehilangan keuntungan yang timbul dari suatu peristiwa yang tidak pasti atau pihak penanggung memberikan suatu pembayaran yang didasarkan atas meninggal atau hidupnya seseorang yang dipertanggungkan[4].

Pada umumnya perusahaan asuransi memindahkan risiko bencana kepada perusahaan reasuransi atau koasuransi. Namun pada beberapa kasus, kapasitas dari perusahaan reasuransi tidak juga mencukupi ketika harus berhadapan dengan risiko bencana. Maka, ditemukan gagasan untuk menghubungkan asuransi dengan instrumen keuangan, seperti opsi, obligasi, *swap*, *future* dan sebagainya. Ilmuwan berlomba-lomba dalam mengembangkan teorinya sampai pada akhirnya ditemukan bahwa resiko yang ditimbulkan dari bencana alam banyak diminati konsumen jika dihubungkan dengan obligasi. Inilah yang dikenal sebagai (*CAT*) *bond*[5].

Seperti sulitnya memprediksi bencana alam, valuasi terhadap *CAT bond* juga sulit untuk dilakukan. Oleh karena itu, telah dilakukan beberapa penelitian tentang penentuan harga *CAT bond*. Tahun 2003, Burnecky dan Kukla memvaluasi harga *CAT bond* dengan solusi numerik menggunakan metode Monte Carlo. Selain menggunakan solusi numerik, penetapan harga juga bisa dilakukan secara analitik dengan menggunakan pendekatan campuran seperti

yang dilakukan oleh Zong-Ma dan Chao-Ma (2012). Penentuan secara analitik memperhatikan dua faktor penting yaitu, nilai suku bunga dan nilai *aggregate loss*. Pada penelitian ini akan dilakukan penentuan harga *CAT bond* dengan memperhatikan distribusi kerugian bencana yang dimodelkan sebagai nilai *aggregate loss* dengan bantuan pendekatan campuran serta nilai suku bunga yang dimodelkan dengan Cox-Ingersoll-Ross (CIR) yang diestimasi dengan pendekatan Monte Carlo.

1.2 Rumusan Masalah

Berjalan dari latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya penulis dapat merumuskan beberapa permasalahan yang menjadi kajian dalam penelitian ini, yaitu:

1. Bagaimana mendapatkan estimasi parameter dan nilai suku bunga dengan simulasi Monte Carlo pada model Cox-Ingersoll-Ross (CIR).
2. Bagaimana mendapatkan model *aggregate loss* dari model kejadian dan kerugian dengan bantuan pendekatan campuran (Gamma dan Invers Gaussian).
3. Bagaimana mendapatkan model perhitungan harga obligasi bencana tanpa kupon dari beberapa data pendukung dan mengimplementasikannya.

1.3 Batasan Masalah

Dalam penulisan ini, pembatasan masalah sangat diperlukan untuk menjamin keabsahan dan kesimpulan yang diperoleh. Dalam penelitian ini akan difokuskan pada beberapa bagian, antara lain:

1. Kejadian bencana diasumsikan dengan proses Poisson homogen dengan parameter λ .

2. Estimasi parameter untuk data kerugian menggunakan Maximum Likelihood Estimation (MLE) dan *fitting* distribusi menggunakan asumsi statistik.
3. Untuk model *aggregate loss* difokuskan menggunakan pendekatan campuran (Gamma dan Invers Gaussian).
4. Data kerugian tanpa memandang jenis bencana.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan pada Tugas Akhir adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan estimasi parameter dan nilai suku bunga dengan simulasi Monte Carlo pada model Cox-Ingersoll-Ross (CIR).
2. Mendapatkan model *aggregate loss* dari model kejadian dan kerugian dengan bantuan pendekatan campuran (Gamma dan Invers Gaussian).
3. Mendapatkan model perhitungan harga obligasi bencana tanpa kupon dari beberapa data pendukung dan mengimplementasikannya.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat pada Tugas Akhir adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai cara konstruksi model penentuan harga obligasi bencana menggunakan pendekatan campuran untuk mencari nilai *aggregate loss* dan menggunakan metode Monte Carlo untuk mencari nilai dari suku bunga.
2. Sebagai referensi perusahaan atau pemerintah dalam penetapan harga obligasi bencana tanpa kupon.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terdahulu

Obligasi bencana (*CAT bond*) merupakan salah satu asuransi yang berkaitan dengan keamanan finansial. Kerugian yang terjadi diakibatkan bencana akan menyebabkan kerugian pada investor pasar modal. Akan tetapi, jika tidak terjadi bencana, maka investor akan mendapatkan keuntungan. Obligasi bencana yang pertama berhasil adalah yang dikeluarkan oleh Hanover Re dengan harga \$85[6]. Meskipun obligasi bencana sukses dikeluarkan, pada bidang akademik, Cox dan Perseden (2000) mengevaluasi penentuan harga obligasi bencana berdasarkan pertimbangan keseimbangan harga[5]. Model yang digunakan menggunakan proses stokastik dengan waktu diskrit.

Selanjutnya, ada beberapa model tingkat lanjut dengan waktu yang *continue*. Lee dan Yu (2002) mengembangkan kemungkinan model klaim dengan menggabungkan tingkat bunga stokastik dan kerugian yang terjadi dengan beberapa faktor seperti *moral hazard*, *basis risk* dan *default risk*[7]. Pada penelitian Baryhinkov, Mayo dan Taylor(1998) perhitungan harga *arbitrage free* obligasi bencana tanpa kupon dan dengan kupon menggunakan model stokastik majemuk berganda Poisson[8]. Dilanjutkan oleh Burnecky dan Kukla (2003) dengan menggunakan data kerugian (PCS) didapatkan distribusi kerugian dari kerugian sehingga dapat mencari nilai harga obligasi yang tepat dengan menggunakan simulasi Monte Carlo[9]. Siyamah(2019), menentukan harga obligasi menggunakan pendekatan Monte Carlo dan Kuasi Monte Carlo[10].

Seiring dengan berkembangnya waktu, Zong-Ma dan Chao-Ma (2012) mengembangkan penentuan harga obligasi bencana dengan pendekatan campuran. Penentuan harga dilakukan oleh beberapa faktor seperti distribusi *loss severity*, frekuensi claim, dan suku bunga. Dalam penentuan harga menggunakan suku bunga stokastik dan proses kerugian mengikuti *compound nonhomoge-*

nious process[12]. Kemudian, Dian Aggraini(2015) membuat penentuan harga obligasi menggunakan pendekatan Gamma untuk mendapatkan model *aggregate loss* kejadian bencana[13]. Pada tahun 2016, Dian Anggraini dan Yasir Wijaya melakukan perhitungan nilai *aggregate loss* dengan pendekatan campuran (Gamma dan Invers Gaussian) untuk menentukan harga obligasi bencana alam[14].

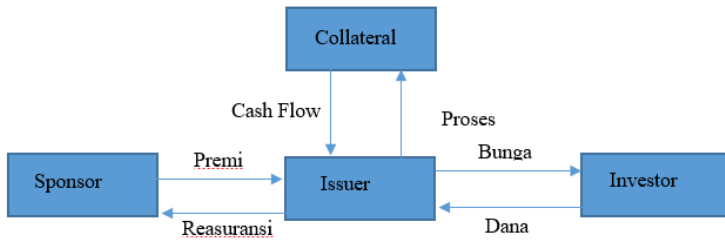
Pada penelitian sebelumnya, nilai suku bunga yang digunakan dalam penentuan harga obligasi bencana adalah konstan atau diasumsikan pada suatu nilai. Oleh karena itu, Pada penelitian ini, penentuan harga *zero-coupon CAT bond* menggunakan nilai suku bunga stokastik yang diestimasi menggunakan pendekatan Monte Carlo. Simulasi Monte Carlo merupakan bentuk simulasi probabilistik dimana solusi dari suatu permasalahan diberikan berdasarkan proses random (acak). Monte Carlo dapat menyelesaikan masalah yang bersifat stokastik untuk mendapatkan nilai ekspektasinya atau suatu nilai yang konvergen. Selanjutnya, perhitungan nilai *aggregate loss* pada penelitian kali ini akan menggunakan pendekatan campuran (Gamma- Invers Gaussian).

2.2 Catastrophe Bonds (CAT Bonds)

Perantara keuangan (*financial intermediary*), perusahaan reasuransi atau bank investasi, menerbitkan obligasi bencana (*CAT Bonds*) untuk peristiwa bencana tertentu yang dapat diasuransikan seperti gempa bumi[9]. *Catastrophe bond (CAT bond)* merupakan salah satu instrumen sekuritas keuangan terkait asuransi yang bertujuan untuk mentransfer serangkaian risiko tertentu (umumnya resiko bencana alam) dari penerbit kepada investor melalui pasar modal. Dengan cara ini investor mengambil risiko dari bencana atau peristiwa tertentu yang terjadi sebagai imbalan atas tingkat investasi yang menarik. Jika terjadi bencana atau peristiwa yang memenuhi syarat, investor akan kehilangan modal yang mereka investasikan dan penerbit (se-ringkali perusahaan asuransi atau reasuransi) akan

menerima uang itu untuk menutupi kerugian mereka, tetapi jika tidak terjadi bencana maka investor akan dibayar dengan kupon yang sesuai dengan kontrak.

Struktur obligasi bencana dapat diringkasi sebagai berikut (Hardle & Carbrera, 2007) [16].



Gambar 2.1. Struktur Obligasi Bencana (*CAT bond*)

Struktur obligasi bencana pada Gambar 2.1 melibatkan pihak sponsor atau perusahaan *ceding* (perwakilan pemerintah, perusahaan asuransi atau reasuransi) dan investor pasar modal. Pihak sponsor menetapkan pihak *issuer* sebagai penerbit obligasi dan sumber perlindungan reasuransi. pihak *issuer* menjual obligasi kepada investor pasar modal yang hasilnya disimpan dalam akun jaminan (*colleteral account*) yang menjadi tempat pendapatan dari aset yang dikumpulkan dan menjadi sumber bunga mengambang (*floating rate*) yang dibayarkan kepada pihak *issuer*. Pihak sponsor menetapkan tujuan penerbitan obligasi dan perlindungan reasuransi serta berkewajiban membayar premi atas kontrak reasuransi kepada pihak *issuer*. Pihak *issuer* biasanya memberikan pembayaran bunga atau kupon triwulan kepada investor. Premi dan hasil investasi dari obligasi yang pihak *issuer* terima dari pemberi jaminan adalah sumber bunga atau *coupon* yang dibayarkan kepada investor. Jika tidak ada peristiwa pemicu selama umur obligasi, pihak *issuer* memberikan kembali pokok obligasi kepada investor dengan kupon terakhir atau bunga yang besar. Selain itu, pihak *issuer* juga bisa membayar pihak sponsor sesuai dengan ketentuan

kontrak reasuransi dan kadang tidak membayar apa pun atau membayar hanya sebagian pokok dan bunga kepada para investor. Pada kasus ini, pihak sponsor akan mendapatkan perlindungan reasuransi ketika terjadi kerugian yang sangat besar dan pihak investor akan mendapat keuntungan jika tidak terjadi bencana selama waktu jatuh tempo yang di tetapkan.

2.3 Proses Stokastik

Pada subbab ini membahas mengenai proses stokastik. Pembahasan ini diperlukan karena dalam model CIR, pergerakan tingkat suku bunga dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial stokastik. Suatu variabel mengikuti proses stokastik jika variabel tersebut nilainya berubah seiring berjalannya waktu dengan cara tidak pasti, Maka dari itu, hanya diketahui distribusi dari nilai- nilai yang terjadi dari proses dari setiap titik waktu. Proses stokastik didefinisikan sebagai berikut .

Definisi 2.1 (Proses Stokastik)

Proses stokastik adalah model peluang yang mendeskripsikan perubahan suatu sistem secara acak terhadap waktu. Proses stokastik disimbolkan dengan notasi $\{X_t, t \in N\}$ bila t diskrit dan $\{X(t), t \geq 0 \in N\}$ bila t kontinu[17].

2.3.1 Model Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Model Cox-Ingersoll-Ross, yang diperkenalkan Cox & Ross, (1985) digunakan untuk meningkatkan model Vasicek yang memungkinkan tingkat suku bunga bernilai negatif sehingga pada model CIR ini dapat menjamin tingkat suku bunga bernilai positif karena memiliki sifat *mean reversion* atau mempunyai kecendrungan kembali menuju rata - rata. Bentuk dari model CIR adalah:

$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad (2.1)$$

dengan

- $r(t)$: tingkat suku bunga pada saat ke- t
- k : kecepatan penyesuaian $r(t)$ terhadap μ
- μ : rata-rata tingkat suku bunga jangka panjang
- σ : volatilitas yang menggambarkan pergerakan dari tingkat suku bunga

$W(t)$: proses Wiener

dengan syarat parameter $k > 0$, $\mu > 0$, $\sigma > 0$ dan W_t adalah proses Wiener. Jika semua parameter proses, yaitu, σ , k dan μ , positif dan $2k\mu \geq \sigma^2$ (kondisi Feller), maka proses CIR terdefinisi dengan baik.

Dengan menggunakan Persamaan (2.1) model CIR dapat dinyatakan dalam bentuk integral sebagai berikut[5]:

$$r(t) = r(0) + \int_0^t k(\mu - r(u))du + \sigma \int_0^t \sqrt{r(u)}dW(u). \quad (2.2)$$

Berdasarkan bentuk integral diatas, dapat diperoleh nilai rata-rata dan varians. Sifat *mean reversion* dari model CIR dapat dicari dengan menghitung ekspektasinya.

$$E[r(t)] = \mu + e^{-kt}(r(0) - \mu), \quad (2.3)$$

sedangkan nilai varian dapat diperoleh dengan menghitung $E[r^2(t)]$ dan $E[r(t)]^2$ dari model CIR

$$Var(r(t)) = \frac{r(0)\sigma^2}{k}(e^{-kt} - e^{-2kt}) + \frac{\mu\sigma^2}{2k}(1 - e^{-kt})^2. \quad (2.4)$$

2.3.2 Metode Euler

Penentuan tingkat suku bunga model CIR dilakukan dengan simulasi menggunakan metode Euler. Metode Euler salah satu metode paling simple untuk aproksimasi model CIR secara numerik

dari persamaan differensial stokastik. Skema dari metode Euler sebagai berikut[18].

$$\hat{r}(t_{i+1}) = \hat{r}(t_i) + k(\mu - \hat{r}(t_i))\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\hat{r}(t_i)\Delta t} \quad (2.5)$$

dimana, $r(\hat{0}) = r(0)$ dan $\epsilon \sim N(0, 1)$. Dengan menggunakan Persamaan (2.5) proses diskrit untuk $\hat{r}(t_i)$ dapat bernilai negatif sehingga perhitungan $\sqrt{\hat{r}(t_i)}$ tidak mungkin dan skema Euler akan gagal. Oleh karena itu, skema Euler yang dimodifikasi berikut ini memberikan solusi sederhana untuk masalah ini:

$$\hat{r}(t_{i+1}) = \hat{r}(t_i) + k(\mu - \hat{r}(t_i))\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\max(\hat{r}(t_i), 0)\Delta t}. \quad (2.6)$$

2.4 Aljabar Himpunan

Konsep σ -aljabar sangat diperlukan dalam teori peluang mengenai informasi tentang percobaan bilangan acak. Berikut akan dijelaskan mengenai σ - aljabar dan filtrasi.

Definisi 2.2 (σ - Aljabar)

Misalkan Ω adalah sebuah himpunan dan \mathcal{F} adalah koleksi subhimpunan dari Ω . Koleksi himpunan \mathcal{F} disebut σ - aljabar pada Ω bila memiliki tiga sifat berikut :

1. $\phi, \Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

2.4.1 Filtrasi

Sebuah σ -aljabar yang paling sederhana bisa dibangun pada Ω adalah \mathcal{F} yaitu

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \phi\},$$

sedangkan σ -aljabar yang paling kompleks yang bisa dibangun oleh \mathcal{F} yaitu keluarga seluruh subhimpunan dari Ω atau yang disebut himpunan kuasa dari Ω (Syamsuddin, 2008).

Definisi 2.3 (Filtrasi) (Seydel, 1990)

Bila $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_i, \dots$ adalah keluarga dari sub- σ -aljabar dari \mathcal{F} dengan sifat $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ maka keluarga dari sub- σ -aljabar disebut filtrasi.

2.4.2 Martingale

Pada teori probabilitas, martingale merupakan urutan dari variabel acak (proses stokastik) yang terjadi pada waktu tertentu. Pada teori martingale, ekspektasi bersyarat nilai nilai berikutnya, mengingat nilai sebelumnya, nilainya sama dengan nilai sekarang.

Definisi 2.4 (Martingale) (Williams 1991)

Misalkan $X = \{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ adalah proses stokastik yang terdefinisi pada ruang peluang (Ω, \mathcal{F}, P) dan $\{\mathcal{F} : n \in \mathbb{N}\}$ adalah filtrasi dari \mathcal{F} . Proses stokastik X disebut proses martingale jika berlaku:

1. X teradaptasi oleh filtrasi $\{\mathcal{F} : n \in \mathbb{N}\}$
2. $E[|X|] < \infty$
3. $E[X_{k+1} | \mathcal{F}_n] = X_k$ dimana $n \in \mathbb{N}$.

2.5 Estimasi Parameter

Pada model CIR terdapat tiga parameter yang tidak diketahui, yaitu k , μ dan σ dimana masing-masing menyatakan kecepatan penyesuaian $r(t)$ terhadap μ , rata-rata tingkat suku bunga jangka panjang dan volatilitas yang menggambarkan pergerakan dari tingkat suku bunga. Untuk mengetahui parameter yang tidak diketahui tersebut akan dilakukan estimasi parameter menggunakan algoritma *Grid Search*.

2.5.1 Algoritma Grid Search

Grid Search merupakan teknik untuk mendapatkan parameter yang tepat untuk mencapai akurasi yang tinggi. Pada teknik *Grid Search*, algoritma tersebut akan mencoba setiap kombinasi dari daftar nilai-nilai yang sudah ditentukan dari hyperparameter dan mengevaluasi model untuk setiap kombinasinya. Pola yang diikuti di sini mirip dengan kisi, Secara umum, algoritma ini akan menggunakan sebuah matriks d -dimensi (d menyatakan banyaknya parameter) yang dijadikan *pair* (x_1, x_2, \dots, x_d) . Setiap set parameter dipertimbangkan dan akurasi dicatat. Setelah semua kombinasi dievaluasi, model dengan set parameter yang memberikan akurasi tertinggi dianggap yang terbaik. Karena algoritma ini bersifat umum, maka akan digunakan algoritma *Grid Search* untuk mengestimasi k , μ dan σ pada model CIR.

2.6 Pendekatan Monte Carlo

Prediksi nilai suku bunga yang bergerak secara stokastik dapat menggunakan pendekatan Monte Carlo. Monte Carlo digunakan dengan istilah sampling statistik. Salah satu keuntungan dari algoritma Monte Carlo sendiri adalah kita tidak memerlukan solusi analitik dari suatu permasalahan sebab solusi yang dihasilkan adalah solusi optimum global[15].

Monte Carlo atau yang biasa di sebut Crude Monte Carlo berasal dari kata crude yang berarti rata-rata. Pendekatan ini merata-rata N kemungkinan percobaan yang dibangkitkan secara acak sehingga ketika dirata-rata akan mendekati jawaban aslinya. Secara matematis, bisa dituliskan sebagai :

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (2.7)$$

untuk $N \rightarrow \infty$ dan $x_i \sim U(0, 1)$.

2.7 Mean Absolute Presentage Error (MAPE)

Dalam melakukan *forecasting* dengan menggunakan data *time series* yang kuantitatif sering terdapat error/ kesalahan dalam melakukan teknik *forecasting*. Oleh karena itu, diperlukan metode untuk mengukur seberapa besar error yang dapat dihasilkan dengan menggunakan model-model *forecasting* untuk mempertimbangkan suatu keputusan.

Salah satu cara metode untuk menghitung nilai error adalah *Mean Absolute Presentage Error*. MAPE dihitung dengan cara mencari error/kesalahan absolut di setiap periode yang dimana dibagi dengan nilai observasi yang aktual pada periode itu, dan dibuat rata-rata dari *absolute percentage error* tersebut.

Rumus yang digunakan dalam menghitung MAPE sebagai berikut (Reddy,2016):

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{G_t - \hat{G}_t}{G_t} \quad (2.8)$$

dengan

G_t : Nilai aktual

\hat{G}_t : Hasil perhitungan

N : Banyak data

Skala akurasi MAPE dapat dilihat pada Tabel 2.1

Tabel 2.1. Skala MAPE

Nilai MAPE	Keterangan
< 10%	Akurasi tinggi
11% – 20%	Akurasi baik
21% – 50%	Akurasi sedang
> 51%	Akurasi buruk

2.8 Model Aggregate Loss

Aggregate loss merupakan total kerugian yang harus dibayarkan pada periode tertentu oleh perusahaan asuransi. Distribusi *aggregate loss* terdiri dari frekuensi dan severitas sehingga distribusi ini disebut dengan *compound distribution*. *Aggregate loss* dapat dinyatakan dengan suatu peubah acak L_t . Frekuensi merupakan banyaknya klaim yang terjadi pada periode waktu tertentu yang dapat dinyatakan dengan peubah acak N sedangkan severitas merupakan besar masing-masing klaim yang dapat dinyatakan dalam peubah acak X_1, X_2, \dots, X_N . Dengan demikian diperoleh model *Collective Risk* sebagai berikut:[20]

$$L_t = \sum_{j=1}^N X_j \quad (2.9)$$

dengan $L_t = 0$ jika $N = 0$.

Definisi 2.2 Asumsi-asumsi yang harus diperhatikan pada *aggregate loss* untuk model *collective risk* yaitu :

1. Diberikan $N = n$, peubah acak $X_1, X_2..X_N$ merupakan peubah acak yang berdistribusi identik dan saling bebas.
2. Diberikan $N = n$, distribusi bersama dari peubah acak $X_1, X_2..X_N$ tidak bergantung pada nilai n .
3. Distribusi dari peubah acak N tidak bergantung kepada nilai-nilai dari peubah acak $X_1, X_2..X_N$.

2.8.1 Proses Kedatangan Bencana

Pada kejadian bencana alam terdapat waktu transisi dan satu kejadian ke kejadian yang lain. Dimana waktu tunggu dari masing masing kejadian saling bebas dan semua kejadian berdistribusi

eksponensial. Kondisi ini dinamakan proses Poisson[17]. Proses Poisson menyatakan peluang jumlah peristiwa yang terjadi pada waktu tertentu. Pada penelitian ini intensitas kejadian per waktu adalah konstan atau yang disebut dengan proses Poisson Homogen.

Definisi 2.3 (Proses Poisson Homogen) (S.Osaki,1992)

Proses menghitung $\{N(t), t \leq 0\}$ dapat dikatakan sebagai Proses Poisson Homogen dengan laju λ , $\lambda > 0$ jika:

1. $N(0) = 0$
2. Proses memiliki kenaikan bebas
3. Banyaknya kejadian pada sebuah interval sepanjang t berdistribusi poisson dengan rata-rata λt . Sehingga untuk semua $s, t \leq 0$

$$P\{N(t + s) - N(s)\} = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad (2.10)$$

dengan

n : jumlah kejadian suatu peristiwa

λ : merupakan rata-rata jumlah kejadian per waktu.

2.8.2 Distribusi Severitas

Distribusi severitas merupakan distribusi besar kerugian yang terjadi akibat bencana alam. Pada umumnya distribusi severitas memiliki pola distribusi *heavy tail*. Distribusi *heavy tail* terjadi ketika terdapat satu atau dua data yang memiliki nilai sangat besar diantara data lainnya. Penentuan pola distribusi *heavy tail* dapat dilakukan dengan menghitung nilai *skewness* data. Jika nilai *skewness* lebih dari 0, maka data tidak simetris atau ekor lebih memanjang ke kanan. Penentuan distribusi severitas dengan memperitmbangkan distribusi *heavy tail* yaitu yaitu IG, Gamma, Pareto, Lognormal dan Weibull.

Pengujian kesesuaian distribusi dilakukan untuk memeriksa adanya kesesuaian distribusi yang diamati. Pengujian secara formal dapat dilakukan dengan menggunakan Uji Kolomorov-Smirnov.

Langkah-langkah melakukan uji Kolmogorov-Smirnov sebagai berikut:

1. Menentukan hipotesis uji kesesuaian distribusi.

H_0 : $F_n(x) = F_0(x)$, yang berarti data mengikuti distribusi teoritis $F_n(x)$.

H_1 : $F_n(x) \neq F_0(x)$, yang berarti data tidak mengikuti distribusi teoritis $F_n(x)$.

F_n adalah distribusi frekuensi kumulatif di bawah distribusi teoritis dan F_0 adalah distribusi frekuensi kumulatif dari data.

2. Menetapkan taraf signifikan sebesar α .
3. Menetapkan statistik uji. Statistik uji dilakukan dengan cara membandingkan nilai D_n dengan D_α . Nilai D_n dapat dihitung sebagai berikut:

$$D_n = \max |F_n(x) - F_0(x)| \quad (2.11)$$

Sedangkan nilai D_α dapat diketahui dalam tabel Kolmogorov Smirnov.

4. Daerah penolakan untuk pengujian Kolmogorov-Smirnov adalah H_0 ditolak jika $D_n > D_\alpha$ dengan taraf signifikan sebesar α .

2.8.3 Model Compound

Misalkan L_t menyatakan *aggregate loss* dengan model persamaan (6) dan memenuhi asumsi-asumsi di atas. Peubah acak L_t

memiliki fungsi distribusi:

$$\begin{aligned}
 F_l(l) &= P(L_t \leq l) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n)P(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{N_t} \leq l) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n)F_X^{*n}(l)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

dengan $F_l(l) = P(L_t \leq l)$ adalah *common distribution function* dari X dan $P(N_t = n)$. $F_X^{*n}(l)$ adalah konvolusi kelipatan ke- n dari fungsi distribusi X . Dalam perhitungan $F_X^{*n}(l)$ bukan merupakan sesuatu hal yang mudah dikarenakan harus menggunakan konvolusi orde yang tinggi. Tetapi terdapat banyak metode estimasi untuk menghitung nilai eksak dari $F(x, t)$, seperti Fast Fourier Transform, metode invers, metode rekursif, Monte Carlo dan metode aproksimasi lainnya.

Preposisi 2.1 (Moment Compound Distribution) Empat moment pertama dari variabel acak majemuk $L_t = X_1 + \dots + X_N$, dimana $X_1 + \dots + X_N$ *iid* dan independen terhadap N sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 E[L_t] &= E[N]E[X] \\
 Var[L_t] &= E[N]Var[X] + Var[N](E[X])^2 \\
 E[(L_t - E[L_t])^3] &= E[N]E[(X - E[X])^3] + 3Var[N]Var[X] \\
 &\quad E[X] + E[(N - E[N])^3](E[X])^3 \\
 E[(L_t - E[L_t])^4] &= E[N]E[(X - E[X])^4] + 4Var[N] \\
 &\quad E[(X - E[X])^3]E[X] + 3(Var[N] + E[N] \\
 &\quad (E[N] - 1))(Var[x])^2 + 6(E[(N - E[N])^3]) \\
 &\quad + E[N]Var[N](E[X])^2Var[X]E[(N - E[N])^4] \\
 &\quad (E[X])^4,
 \end{aligned}$$

formula ini dapat digunakan, jika moment dari distribusi severitas dan distribusi frekuensi ada.

2.9 Pendekatan Campuran

Perhitungan $F_X^{*n}(l)$ sulit dilakukan karena terdapat konvolusi kelipatan ke- n , Chaubey (1998), mengusulkan menggunakan estimasi dengan pendekatan campuran (Gamma dan Invers-gaussian) dalam penentuan nilai dari *aggregate loss*. Selain itu, Reijinen *et al* (2005) telah membandingkan lima estimasi ($N - P_2$, ekspansi Adgeworth, Gamma, IG, dan IG- Gamma). Dari penelitian yang telah dilakukan, aproksimasi dengan pendekatan campuran lebih baik dalam mendapatkan nilai *aggregate loss*.

Sebelum melakukan aproksimasi pendekatan campuran, distribusi dari kerugian bencana harus diketahui terlebih dahulu dengan uji distribusi. Lalu, dicari nilai dari mean, varian, skewness dan kuartosis untuk mendapatkan nilai *aggregate loss*.

1. Aproksimasi Gamma

Aproksimasi ini merupakan aproksimasi yang biasa digunakan dalam menentukan distribusi loss model, dengan CDF

$$F(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\alpha+z\sqrt{\alpha}} e^{-y} y^{\alpha-1} dy, \quad (2.13)$$

dengan Γ merupakan fungsi gamma, $z = \frac{(x-\mu_L)}{\sigma_L}$ dan $\alpha = \frac{4}{k_{3L}}$.

2. Aproksimasi Invers Gaussian

Aproksimasi ini cukup baru, dan dikenalkan oleh Chaubey *et al.*(1998) dengan CDF:

$$F(x, t) = \phi[\sqrt{bx}(x - m)] + e^{\left(\frac{2m}{b}\right)} \phi[-\sqrt{bx}(x + m)] \quad x > 0, \quad (2.14)$$

dengan $x = x - x_0$ dan parameter lainnya diberikan sebagai berikut:

$$m = \frac{c_{2L}^2}{c_{3L}}, \quad b = \frac{c_{3L}}{c_{2L}}, \quad x_0 = c_{1L} - m,$$

c_{1L}, c_{2L}, c_{3L} merupakan kumulasi dari *compound distribution*.

Menurut hasil penelitian Chaubey et al.(1998), jika nilai $k_{3x} \in (5, 15)$ atau $k_{4L} \in (1.5, 50)$ dimana k_{3x} dan k_{4L} menyatakan *skewness* dari distribusi kerugian dan kurtosis dari *aggregate loss*, maka aproksimasi dengan Invers-Gaussian memiliki keakuratan yang lebih baik diantara yang lain.

3. Aproksimasi Campuran

Merupakan suatu kombinasi dari aproksimasi IG dan Gamma (Chaubey et all, 1998) dengan pdf yang diberikan :

$$F(x, t) = \omega F_1(x) + (1 - \omega) F_2(x), \quad (2.15)$$

dengan $\omega = \frac{(k_L - k_{F_2})}{(k_{F_1} - k_{F_2})}$ dan k sebagai nilai kurtosis.

Menurut hasil penelitian Chaubey et al.(1998), pendekatan campuran baik digunakan ketika nilai $k_{3x} \in [0, 5]$ dan $k_{4L} \in [1.5, 50]$, dimana k_{3x} dan k_{4L} menyatakan *skewness* dari distribusi kerugian dan kurtosis dari *aggregate loss*.

2.10 Model penetapan harga Zero - Coupon CAT bond

Zero-coupon dengan payoffs $P_{CAT}(T)$ dengan jumlah $PV = Z$ pada waktu jatuh tempo T . Struktur *payoffs* adalah :

$$P_{CAT}(T) \begin{cases} Z, & \text{untuk } L_T \leq D \\ pZ, & \text{untuk } L_T > D \end{cases} \quad (2.16)$$

dengan D pemberian nilai ambang batas kerugian, L_T adalah *aggregate loss* pada waktu jatuh tempo ke t , p menunjukkan fraksi pokok yang didapatkan investor ketika *aggregate loss* berada di atas pemicu pada waktu ke $-t$. Nilai p berada dengan interval 0 sampai 1 dalam persen.

Penentuan harga *Zero coupon CAT bond* pada waktu ke $-t$ dengan threshold D , N_t sebagai *catastrophic flow*, $F(x)$ merupakan distribusi kerugian, dengan membayar pokok Z pada waktu jatuh tempo ke $-t$ di bawah risiko penetapan harga yang dinetralkan Q , adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} V_t &= E^Q(Ze^{-\int_s^T r_s ds} P_{CAT}(T)|F_t) \\ &= B_{CIR}(t, T)Z[p + (1 - p) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \frac{\lambda(T-t)^n}{n!} F^{*n}(D)]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

dengan,

$$F^{*n}(D) = P(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{N_t}) \leq D) \quad (2.18)$$

$$B_{CIR} = A(t, T)e^{-B(t, T)r}$$

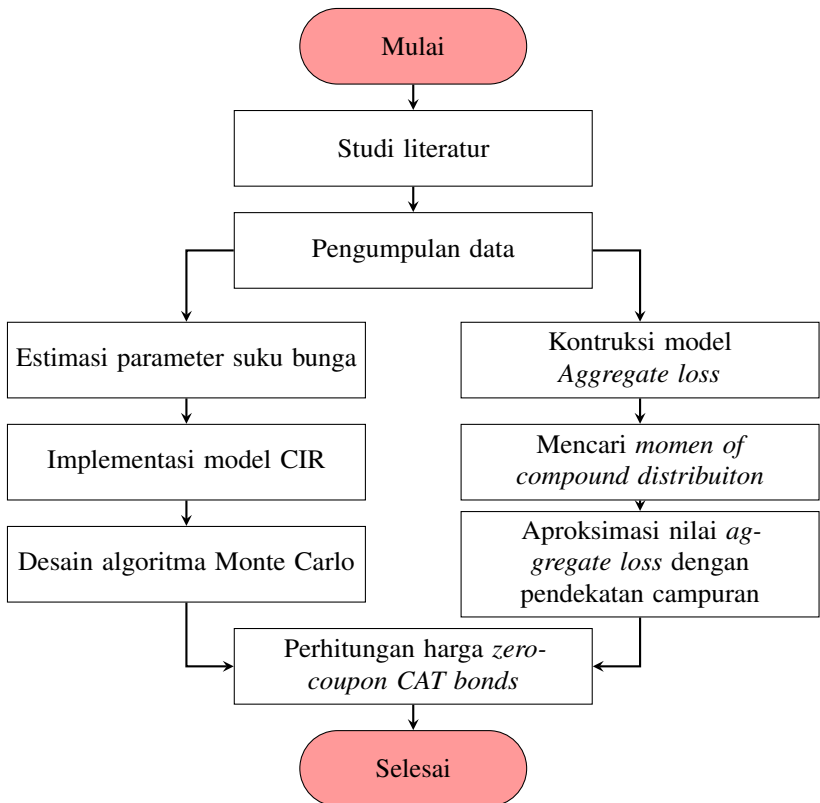
$$A(t, T) = \left[\frac{\gamma^{(k^* + \gamma)(T-t)/2}}{(k^* + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2k^*\mu^*}{\sigma^2}} \quad (2.19)$$

$$B(t, T) = \left[\frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(k^* + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]$$

$$\gamma = \sqrt{(k^*)^2 + 2\sigma^2}$$

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bagian ini dijelaskan mengenai langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah Tugas Akhir ini. Adapun langkah-langkah sistematis berupa *flowchart*.



Gambar 3.1. *Flowchart* Proses Pengerjaan Tugas Akhir

Adapun penjelasan dari masing-masing tahapan dari *flowchart* diatas adalah sebagai berikut.

1. **Studi literatur**

Dilakukan studi literatur untuk mendukung pengerjaan penelitian ini dan pemahaman yang lebih mendalam mengenai *CAT bond* dan model matematika untuk menentukan harga obligasi *CAT bond* serta metode Monte Carlo. Literatur yang dipelajari dapat bersumber dari jurnal, buku, internet, maupun bimbingan dengan dosen pembimbing.

2. **Pengumpulan Data**

Data yang digunakan dalam studi kasus ini adalah data riil kejadian bencana alam di Amerika terdiri dari data banyak kejadian dan kerugian akibat bencana diambil dari RMIIA (*Rocky Mountain Insurance Information Association*) dan data bulanan suku bunga dari Federal Reserve Bank.

3. **Estimasi Parameter Suku Bunga dengan Grid Search**

Pada tahap ini dilakukan estimasi parameter suku bunga menggunakan model Cox-Ingersoll-Ross (CIR) dengan *Grid Search*. Untuk mendapatkan parameter yang terbaik akan dicari nilai *MAPE* terkecil.

4. **Desain Algoritma Monte Carlo**

Selanjutnya, dari nilai parameter yang telah didapatkan akan dicari nilai suku bunga dengan menggunakan pendekatan Monte Carlo. Nilai ini akan digunakan untuk penentuan harga *CAT bond*.

5. **Kontruksi Model *Aggregate Loss***

Selanjutnya menkontruksi model *aggregate loss* yang terdiri dari frekuensi dan severitas akan dilakukan beberapa tahapan yaitu :

- (a) Mencari distribusi dari kerugian bencana

Dari data kerugian yang dimiliki, akan dicari parame-

ter frekuensi terjadinya bencana dengan menggunakan distribusi poisson. Untuk nilai severitas akan dicari distribusi yang tepat dengan estimasi parameter menggunakan MLE. Selanjutnya, dilakukan uji distribusi menggunakan test kolmogorof-Smirnov.

- (b) Mendapatkan nilai *aggregate loss* menggunakan pendekatan campuran

Dari distribusi yang didapatkan sebelumnya, Akan dicari nilai dari *skewness*, *kurtosis*, *mean* dan *varian* dari *aggregate loss* menggunakan nilai momen dari distribusi compound. Parameter tersebut digunakan untuk mendapatkan nilai *aggregate loss* dengan bantuan pendekatan campuran (Gamma dan Invers Gaussian).

6. Penghitungan Harga *CAT bond*

Melakukan perhitungan harga *CAT bond* dengan menggunakan hasil yang telah didapatkan pada tahap sebelumnya, untuk dimasukkan kedalam formula penetapan harga *CAT bond zero coupon*.

7. Kesimpulan dan saran

Untuk tahap terakhir, dipaparkan kesimpulan dari hasil simulasi serta beberapa saran dan rencana peneitian untuk periode selanjutnya.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada Tugas Akhir ini. Pembahasan dimulai dengan penjelasan mengenai model CIR, estimasi parameter menggunakan algoritma *Grid Search* serta estimasi nilai tingkat suku bunga dengan menggunakan pendekatan Monte Carlo. Kemudian dilanjutkan dengan menghitung nilai *aggregate loss* dengan pendekatan campuran (Gamma dan Invers Gussian). Pada hasil akhir pembahasan dilakukan simulasi penetapan harga *zero coupon CAT bond* dan analisis hasil implementasi yang telah dilakukan.

4.1 Tingkat Suku Bunga Model CIR (Cox Ingersoll Ross)

Model CIR digunakan untuk mendefinisikan pergerakan dari tingkat suku bunga dalam penentuan harga obligasi. Dengan adanya volatilitas pada nilai suku bunga, maka perubahan tingkat suku bunga pada saat ke- t , yang dinotasikan dengan $r(t)$ dapat dinyatakan dengan persamaan diferensial stokastik, atau bisa disebut dengan model CIR sebagai berikut,

$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t).$$

Aproksimasi tingkat suku bunga dengan model CIR dapat dilakukakan secara numerik. Salah satu metode numerik yang paling sederhana adalah metode Euler, atau biasa disebut dengan aproksimasi Euler-Mauyama yang tertera pada Persamaan 2.5,

$$\hat{r}(t_{i+1}) = \hat{r}(t_i) + k(\mu - \hat{r}(t_i))\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\hat{r}(t_i)\Delta t},$$

dengan, $r(\hat{0}) = r(0)$ dan $\epsilon \sim N(0, 1)$ merupakan variabel acak dari distribusi Normal. Salah satu masalah pada metode Euler di atas adalah bahwa proses diskrit untuk $\hat{r}(t_i)$ dapat bernilai negatif. Nilai negatif akan membuat perhitungan $\sqrt{\hat{r}(t_i)}$ tidak mungkin dan

metode Euler akan gagal. Oleh karena itu, metode Euler dimodifikasi dengan menggunakan Persamaan 2.6.

$$\hat{r}(t_{i+1}) = \hat{r}(t_i) + k(\mu - \hat{r}(t_i))\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\max(\hat{r}(t_i), 0)\Delta t}.$$

Berikut ini *script* MATLAB untuk melakukan aproksimasi tingkat suku bunga dengan model CIR menggunakan metode Euler.

Input

```

1 % Parameter
2 k;
3 Mu;
4 Sigma;
5 % Parameter Simulasi
6 Nilai awal suku bunga, X(1);
7 Jangka waktu peramalan, nstep;
8 Banyak lintasan simulasi, nsimul;
9 dt=1/nstep;
10 Xall← []
11

```

Proses

```

1 for j = 1 to nsimul do
2   X ← zeros(nstep+1,1); X(1)=Xt;
3   for i = 1 to nstep
4     X(i+1) ← X(i)+k(mu-X(i)) dt+sigma*sqrt
5       (max(X(i),0) dt) normrnd(0,1);
6   end
7   Xall←[ Xall ,X];
8 end
9

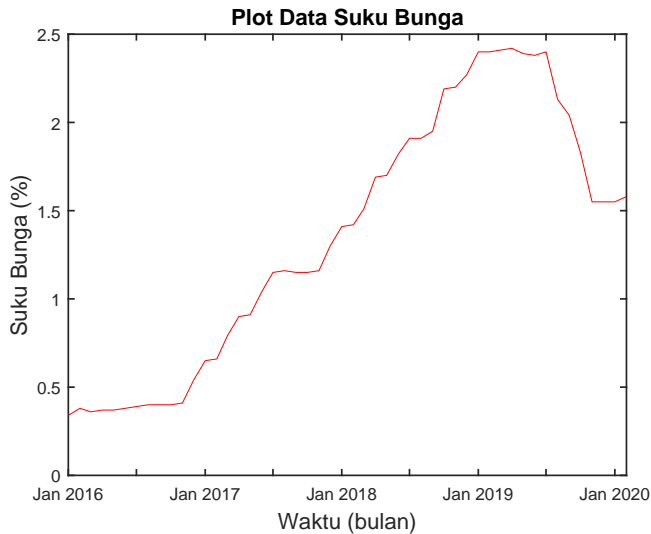
```

Pada model CIR terdapat 3 parameter yang harus dicari untuk mencocokkan pergerakan tingkat suku bunga. Nilai parameter parameter model CIR adalah k , μ dan σ . Parameter tersebut diestimasi menggunakan metode *Grid Search*.

4.2 Implementasi Model CIR untuk Mengaproksimasi Tingkat Suku Bunga

Sub-bab ini menjelaskan implementasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga. Langkah awal yang dibu-

tuhkan adalah mengumpulkan data tingkat suku bunga dengan kurs USD yang diperoleh dari *website* Federal Reserve yang merupakan *website* resmi Amerika Serikat. Data yang digunakan merupakan data suku bunga bulanan pada periode 1 Januari 2016 sampai dengan 1 Februari 2020. Pergerakan tingkat suku bunga dapat dilihat pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Plot Data Suku Bunga Amerika Serikat

Setelah memperoleh data, dilakukan estimasi parameter model CIR yaitu k , μ dan σ dengan menggunakan algoritma *Grid Search*.

4.2.1 Estimasi Parameter dengan Algoritma *Grid Search*

Algoritma *Grid Search* merupakan algoritma penentuan parameter dengan cara mencoba setiap kombinasi dari rentang nilai parameter yang telah ditentukan dan mengevaluasi model untuk setiap kombinasinya. Penentuan parameter yang tepat pada model CIR didapatkan dari parameter yang memiliki nilai MAPE terkecil. Algoritma ini merupakan salah satu algoritma dari *mechine learning*.

Maka dari itu, pada proses implementasi algoritma terdiri dari dua tahap yaitu, tahap latih (*training*) dan uji (*testing*). Tahap *training* digunakan untuk mendapatkan parameter yang sesuai dan optimal, sedangkan tahap *testing* untuk melihat keberhasilan dari parameter yang telah didapatkan selama penelitian. Berikut ini adalah *pseudo-code* untuk melakukan estimasi parameter k , μ dan σ pada model CIR.

Input

```
1 Data suku bunga, data_training;
2 vektor k = 0.01:0.01:1;
3 vektor mu = 0.5:0.1:3;
4 vektor sigma = 0.1:0.1:2;
```

Proses

```
1 X(1) ← data_training[1];
2 nstep ← length(data_training);
3 nsimul ← 100;
4 dt ← 1/nstep;
5 idxR ← 1;
6 Xall ← [];
7
8 for idxa = 1 to length(a) do
9   for idxk = 1 to length(k) do
10    for idxs = 1 to length(sigma)
11      if 2*a(idxa)*k(idxk) >= (sigma(idxs))^2
12        tampungR(idxR,:) = CIReulerMape(k(idxk), a(idxa),
13          sigma(idxs), dt, data(1), nstep, nsimul);
14        parameter(idxR,:) ← [k(idxk), a(idxa),
15          sigma(idxs)]
16        idxR ← idxR + 1;
17      end
18    end
19  end
20 end
21
22 MP ← [];
23 ukuranMP ← size(tampungR);
24 for i ← 1:ukuranMP(1)
25 MP(i) ← MAPE(data, tampungR(i, :));
26 end
27 IndexMAPEYangTerkecil ← find(MP==min(MP));
28 PARAMETER ← parameter(IndexMAPEYangTerkecil, :);
29 return PARAMETER
```

Pada simulasi ini, data yang digunakan adalah data tahap *training* dengan menggunakan sebanyak 70% data pergerakan suku bunga USD dari serangkaian data pada tanggal 1 Januari 2016 sampai dengan 1 Februari 2020. Estimasi parameter menggunakan nilai suku bunga awal pada bulan Januari 2016 yaitu sebesar 0.34%, didapatkan hasil estimasi parameter menggunakan data *training* dengan beberapa iterasi sebagai berikut.

Tabel 4.1. Hasil Estimasi Parameter dengan Algoritma GS Berdasarkan Banyak Iterasi

ITERASI	PARAMETER			MAPE (%)
	\hat{k}	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	
1	0.51	1.5	0.5	10
10	0.81	2.6	0.6	8.72
100	0.21	2.1	0.9	7.38
1000	0.71	1.8	0.7	6.47
5000	0.81	2.7	0.5	5.19
10000	0.91	2.4	0.5	4.82

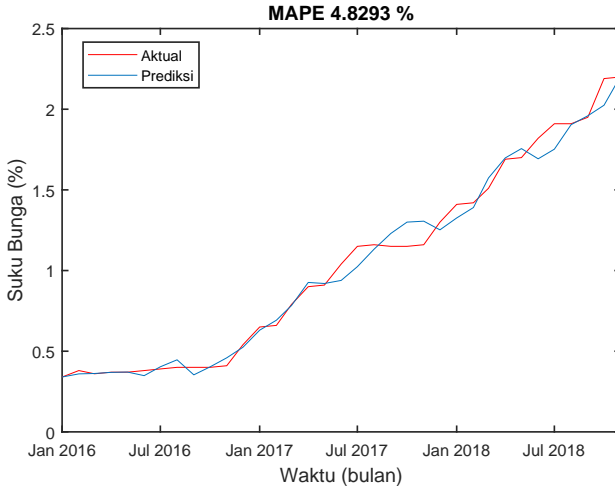
Tabel 4.1 memberikan informasi mengenai banyaknya iterasi, parameter model CIR dengan algoritma *grid search*, dan persentase MAPE. Berdasarkan tabel diatas dapat disimpulkan bahwa estimasi parameter model CIR dengan iterasi yang besar cenderung lebih baik (MAPE lebih kecil) dibandingkan dengan iterasi yang lebih kecil. Dari hasil estimasi parameter tersebut dipilih parameter terbaik dengan banyak iterasi sebesar 10.000 dan nilai MAPE 4.8%.

Tabel 4.2. Hasil Estimasi Parameter dengan Algoritma GS

\hat{k}	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
0.91	2.4	0.5

Simulasi model CIR dengan menggunakan parameter pada Tabel 4.2 menghasilkan nilai MAPE sebesar 4.82%. Nilai MAPE ini sudah kurang dari 10% sehingga termasuk dalam katagori akurasi

yang tinggi. Berikut ini adalah pola pergerakan tingkat suku bunga menggunakan parameter hasil algoritma *Grid Search* dengan iterasi sebanyak 10.000 kali.

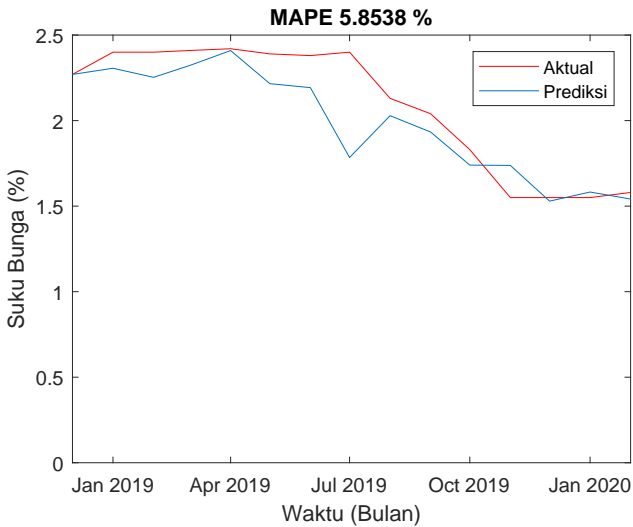


Gambar 4.2. Simulasi Model CIR dengan Parameter Grid Search

Pada Gambar 4.2, grafik yang ditampilkan memuat dua jenis garis pada legend yaitu, garis merah menyatakan data asli dan garis biru yang menyatakan gerak model CIR dengan parameter *grid search*. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pola pergerakan tingkat suku bunga yang diaproksimasi dengan model CIR sudah cukup baik mengikuti pola data sebenarnya. Berdasarkan nilai MAPE dan pola pergerakan suku bunga dapat disimpulkan bahwa model CIR dengan parameter yang didapatkan menggunakan algoritma *Grid Search* cukup baik dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga pada data *training*.

4.2.2 Validasi Parameter Model CIR

Pada tahap ini, dilakukan validasi parameter yang didapatkan pada tahap sebelumnya. Parameter pada tahap *training* digunakan untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga yang dibandingkan dengan data *testing*. Data *testing* yang digunakan adalah data urutan terakhir yang besarnya 30% dari data pergerakan suku bunga USD pada tanggal 1 Januari 2016 sampai dengan 1 Februari 2020. Adapun hasil simulasi model CIR pada pergerakan tingkat suku bunga yang dibandingkan dengan data *testing* sebagai berikut :



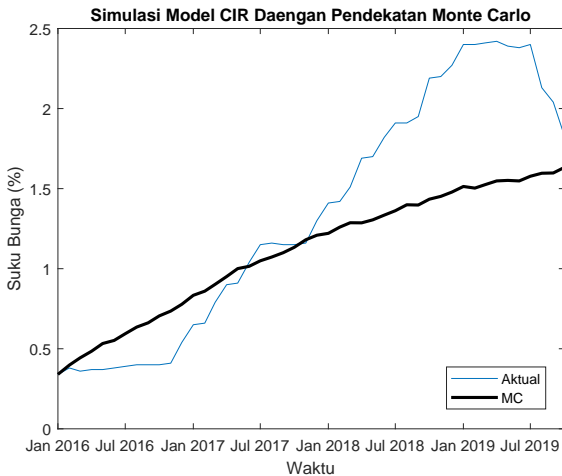
Gambar 4.3. Simulasi Data *Testing* dengan Parameter Grid Search

Pada hasil simulasi diatas didapatkan nilai MAPE sebesar 5.8538% dimana nilai ini sudah sangat baik dalam memvalidasi parameter yang digunakan. Pada Gambar 4.3 pola pergerakan tingkat suku bunga hasil aproksimasi dengan model CIR sudah mengikuti pola data *testing*. Berdasarkan nilai MAPE dan pola pergerakan suku bunga dapat disimpulkan bahwa model CIR dengan parameter

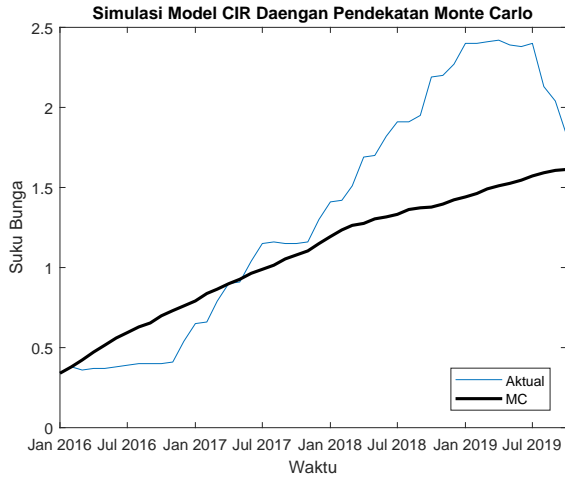
yang didapatkan memiliki akurasi yang baik dalam mengaproksimasi tingkat suku bunga.

4.2.3 Simulasi Model CIR dengan Pendekatan Monte Carlo

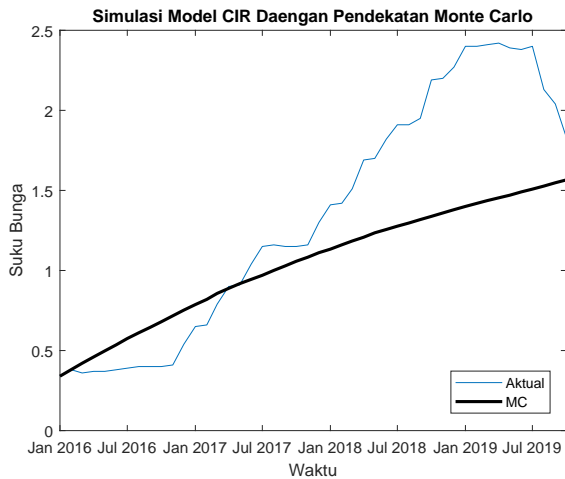
Setelah melakukan validasi parameter pada data tingkat suku bunga, selanjutnya dilakukan simulasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga untuk 3 tahun berikutnya menggunakan pendekatan Monte Carlo. Sebelumnya, kita akan menguji simulasi pendekatan Monte Carlo dengan data tahun 2016-2019 terlebih dahulu.



Gambar 4.4. Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Monte Carlo dengan 25 iterasi



Gambar 4.5. Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Monte Carlo dengan 100 iterasi



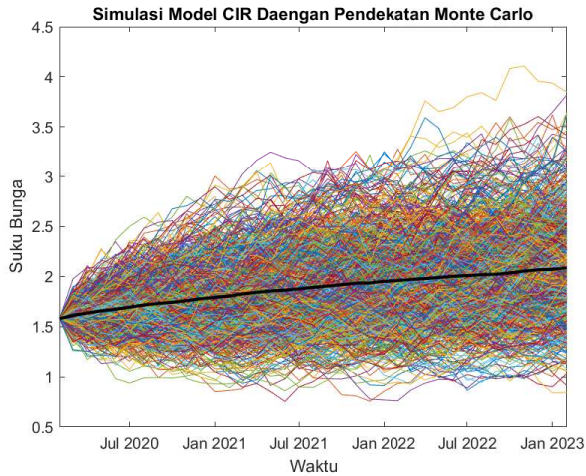
Gambar 4.6. Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Monte Carlo dengan 1000 iterasi

Simulasi pendekatan Monte Carlo dapat dilakukan dengan mensubstitusikan parameter model CIR yang telah diperoleh ke persamaan metode Euler 2.6. Pada tahap ini, terdapat mekanisme pembangkitan bilangan acak sehingga pergerakan simulasi yang dilakukan sebanyak N kali tidak memiliki lintasan yang konvergen. Oleh karena itu, dibutuhkan pendekatan Monte Carlo untuk mendapatkan satu lintasan yang konvergen untuk mendapatkan nilai tingkat suku bunga. Nilai ini digunakan pada perhitungan *zero-coupon CAT bond*.

Gambar 4.4 menunjukkan hasil simulasi pendekan Monte Carlo pada tahun 2016-2019. Pada hasil simulasi yang telah dilakukan dengan menggunakan 25 iterasi dengan beberapa kali *running* program didapatkan nilai MAPE yang berubah-ubah secara fluktuatif antara 26%-30%. Selanjutnya, pada Gambar 4.5 menunjukkan hasil simulasi Monte Carlo dengan 100 iterasi dengan beberapa kali *running* program didapatkan MAPE sekitar 27%-29%. dan yang terakhir pada Gambar 4.6 merupakan hasil dari simulasi Monte Carlo dengan 1000 iterasi dengan beberapa kali *running* program didapatkan MAPE yang cenderung konstan sebesar 28%.

Maka didapatkan kesimpulan bahwa, semakin banyak iterasi pada pendekatan Monte Carlo, hasil prediksi yang didapatkan akan cenderung memiliki nilai MAPE yang konstan dengan data aktual sebesar 28%. Nilai aproksimasi ini masuk dalam katagori akurasi sedang mengikuti pergerakan data aktual. Oleh karena itu, pada penelitian ini digunakan iterasi sebanyak 1000 untuk mendapatkan nilai suku bunga 3 tahun kedepan.

Selanjutnya dilakukan simulasi dengan pendekatan Monte Carlo untuk 3 tahun kedepan menggunakan 1000 iterasi.



Gambar 4.7. Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan 1000 Iterasi

Pada Gambar 4.7 terdapat hasil simulasi metode CIR yang dilakukan sebanyak 1000 iterasi dengan tingkat suku bunga awal menggunakan tingkat suku bunga terakhir pada data suku bunga Amerika Serikat yaitu $r(0) = 1.58\%$. Hasil simulasi pada Gambar 4.7 membentuk 1000 lintasan warna-warni yang merupakan nilai suku bunga hasil dari model CIR. Dari banyak lintasan yang dibentuk oleh parameter model CIR dibentuk satu lintasan dengan menggunakan pendekatan Monte Carlo yang ditandai dengan garis tebal berwarna hitam. Tampak bahwa hasil simulasi tingkat suku bunga berada pada rentang nilai 1.58 sampai 2.04. Nilai pendekatan ini yang akan digunakan sebagai tingkat suku bunga pada penentuan harga obligasi bencana.

Untuk simulasi model CIR dengan metode Monte Carlo dapat dilakukan dengan menggunakan *pseudocode* berikut:

Input

- 1 % Parameter Grid Search
- 2 $k = 0.51;$
- 3 $\mu = 1.9;$

```

4 Sigma = 0.5;
5 % Parameter Simulasi
6 Nilai awal suku bunga, X(t)←1.55
7 Jangka waktu peramalan, nstep=36;
8 Banyak lintasan simulasi, nsimul=100;
9 dt=1/nstep;
10 Xall←[]
11

```

Proses

```

1 for j = 1 to nsimul do
2     X ← zeros(nstep+1,1); X(1)=Xt;
3     for i = 1 to nstep
4         X(i+1) ← X(i)+ k*(mu-X(i))*dt+sigma *sqrt(X
5         (i)*dt)*randn;
6     end
7     Xall←[ Xall ,X];
8 end
9 % Monte Carlo
10 mc ← mean(Xall ,2)
11 return mc

```

4.3 Konstruksi Model *Aggregate Loss*

Penentuan harga obligasi bencana membutuhkan nilai dari probabilitas *aggregate loss*. Distribusi *aggregate loss* terdiri dari frekuensi dan severitas yang biasa disebut dengan *compound distribution*. Persamaan model *aggregate loss* dapat dilihat pada persamaan 2.9.

N adalah banyaknya klaim yang terjadi pada periode tertentu dan $X_1, X_2 \dots X_N$ merupakan besar masing masing klaim yang terjadi. Secara umum, *compound distribution* tidak dapat ditemukan dalam bentuk *closed-form*. Namun, nilai momen *compound distribution* dapat dicari melalui nilai momen distribusi frekuensi dan severitas.

Pada penentuan nilai *aggregate loss* dibutuhkan data besar kerugian bencana pada rentang waktu tertentu. Data kerugian yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah kerugian di wilayah pegunungan Rocky Amerika Serikat yang diperoleh dari RMIIA (Rocky

Mountain Insurance Information Association). Dari data kerugian yang tersedia dicari nilai parameter dari distribusi frekuensi dan severitas untuk mendapatkan nilai *aggregate loss* menggunakan pendekatan campuran.

4.3.1 Proses Kedatangan Bencana

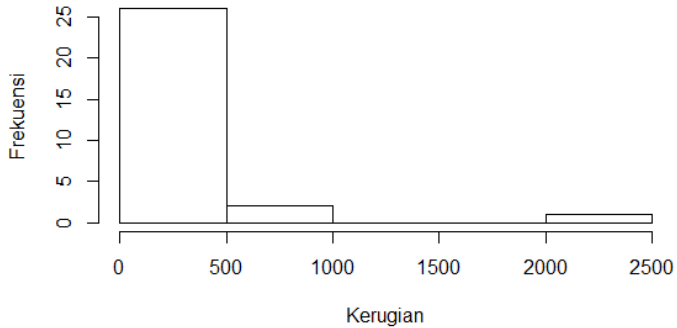
Pada penelitian ini, data banyaknya jumlah klaim pada kejadian bencana tidak ada, sehingga pada perhitungan parameter distribusi frekuensi dapat menggunakan laju kejadian bencana (λ).

Proses terjadinya kedatangan bencana alam dapat dibawa ke arah proses Poisson. Proses Poisson menyatakan peluang jumlah peristiwa yang terjadi pada waktu tertentu. Pada Tugas Akhir ini diasumsikan laju kejadian (λ) per waktu adalah konstan atau yang disebut dengan proses Poisson Homogen. Dengan menggunakan fungsi kepadatan peluang untuk distribusi Poisson yang terdapat pada persamaan (2.6), dicari nilai parameter λ . Dari data kerugian yang dimiliki diperoleh nilai intensitas kejadian bencana λ per bulan adalah 0.0677.

4.3.2 Distribusi Severitas

Penentuan jenis distribusi severitas atau biasa disebut dengan besar kerugian pada masing masing klaim digunakan untuk mendapatkan nilai dari *aggeregate loss*. Distribusi severitas memiliki pola distribusi *heavy tail*. Distribusi *heavy tail* terjadi ketika terdapat satu atau dua data yang memiliki nilai sangat besar diantara data lainnya. Identifikasi data pola *heavy tail* dapat dilakukan dengan menghitung nilai *skewness* atau kecondongan kurva. Dengan menggunakan aplikasi R nilai *skewness* dari data kerugian adalah 1.5491 yang berarti bahwa data kerugian turun secara melambat atau ekor lebih memanjang ke kanan (*Right Skewed*). Grafik histrogram dari hasil visualisasi data kerugian bencana dengan menggunakan aplikasi R tertera pada Gambar 4.8.

Grafik Histogram Kejadian bencana



Gambar 4.8. Grafik Histogram Kerugian Bencana

Pada grafik histogram data kerugian bencana dapat dilihat bahwa frekuensi kerugian bencana kurang dari \$500 sangat besar sedangkan frekuensi kerugian bencana dengan nominal yang sangat besar memiliki frekuensi yang sangat kecil. Dari nilai *skewness* dan grafik histogram data kerugian bencana dapat disimpulkan bahwa data mengikuti pola *heavy tail*.

Selanjutnya, dilakukan proses pengujian distribusi untuk mengetahui distribusi data. Pengujian distribusi dilakukan dengan Uji Kolmogorov-Smirnov menggunakan aplikasi EasyFit 5.0. Pada Tugas akhir ini mempertimbangkan beberapa distribusi *heavy tail* yaitu IG, Gamma, Pareto, Lognormal dan Weibull untuk distribusi severitas.

Tabel 4.3. Estimasi Parameter Data Kerugian

Distribusi	Parameter
Inv.Gaussian	$\hat{\mu} = 371.09$ $\hat{\lambda} = 231.07$
Gamma	$\hat{\alpha} = 0.6226$ $\hat{\beta} = 595.96$
Pareto	$\hat{\alpha} = 0.46871$ $\hat{\beta} = 27.4$
Lognormal	$\hat{\sigma} = 0.95694$ $\hat{\mu} = 5.4395$
Weibull	$\hat{\alpha} = 1.2591$ $\hat{\beta} = 323.842$

Uji kesesuaian distribusi menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menetapkan hipotesis.
 H_0 = Data mengikuti distribusi yang ditentukan.
 H_1 = Data tidak mengikuti distribusi yang ditentukan .
2. Menetapkan nilai taraf signifikan $\alpha = 0.05$.
3. Mencari nilai D_n .
4. Dapatkan nilai *critical value* D_α .
5. Daerah penolakan atau daerah kritis untuk pengujian Kolmogorov -Smirnov adalah H_0 ditolak jika nilai $D_n > D_\alpha$.

Hasil uji Kolmogorov-Smirnov data kerugian yang diamati disajikan pada Tabel 4.4

Tabel 4.4. Hasil Uji Kolmogorov Smirnov

Distribusi	D_n	$D_\alpha(\alpha = 0.05)$	Keputusan
Inv. Gaussian	0.145	0.24571	Terima H_0
Gamma	0.22016	0.24571	Terima H_0
Pareto	0.34011	0.24571	Tolak H_0
Lognormal	0.10389	0.24571	Terima H_0
Weibull	0.1079	0.24571	Terima H_0

Tabel 4.4 menunjukkan bahwa distribusi Pareto memiliki D_n yang lebih besar dibandingkan D_α sehingga H_0 ditolak dengan kesimpulan bahwa data kerugian tidak mengikuti distribusi Pareto. Berbanding terbalik dengan distribusi lainnya yang memiliki nilai D_n lebih kecil dibandingkan D_α sehingga asumsi H_0 diterima dengan kesimpulan data kerugian sudah mengikuti distribusi yang ditentukan. Dari uji kesesuaian distribusi menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov dengan selang kepercayaan 0.05 didapatkan beberapa distribusi yang cocok dengan data kerugian yaitu Inv. Gaussian, Gamma, Lognormal dan Weibull. Dari hasil uji Kolmogorov-Smirnov yang telah dilakukan, distribusi severitas yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah distribusi Lognormal.

Selanjutnya dilakukan estimasi parameter pada distribusi Lognormal dengan metode Maximum likelihood estimation (MLE). Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n , adalah sampel acak dari suatu populasi yang berdistribusi normal dengan parameter μ dan σ^2 . Fungsi kepadatan peluang untuk distribusi lognormal tersebut adalah sebagai berikut.

$$f(x_i|\mu\sigma) = \frac{1}{x_i\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.1)$$

dari Persamaan 4.1 dapat dibentuk fungsi likelihood distribusi Lognormal sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L(x_i|\mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^n f(x_i|\mu\sigma) \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
 &= (2\pi\sigma^2 x_i^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

dilanjutkan dengan mentransformasi Persamaan 4.2 dalam bentuk $\ln(L(x_i|\mu, \sigma))$.

$$\ln(L(x_i|\mu, \sigma)) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2 x_i^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2. \quad (4.3)$$

Untuk mendapatkan parameter $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}$ hal yang perlu dilakukan adalah memaksimumkan fungsi log-likelihood pada Persamaan 4.3 dengan cara membuat turunan parsial terhadap parameter μ dan σ^2 dan menyamakannya dengan nol.

1. Untuk $\hat{\mu}$

Solusi μ yang memaksimumkan fungsi log-likelihood diperoleh dengan menyelesaikan $\frac{\partial}{\partial \mu}(\ln(L(x_i|\mu, \sigma))) = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu) &= 0 \\
 \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu) &= 0 \\
 \hat{\mu} &= \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n}. \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

2. Untuk $\hat{\sigma}^2$

Solusi σ^2 yang memaksimumkan fungsi log-likelihood diperoleh dengan menyelesaikan $\frac{\partial}{\partial \sigma^2}(\ln(L(x_i|\mu, \sigma))) = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2 &= 0 \\
 \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2 &= \frac{n}{2\sigma^2} \\
 \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2}{n} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

dengan bantuan *software* Matlab, didapatkan nilai parameter $\hat{\mu}$ adalah 5.4395 dan $\hat{\sigma}^2$ adalah 0.9157. Nilai parameter dari MLE ini digunakan untuk mendapatkan nilai moment distribusi severitas.

Perhitungan nilai momen distribusi Lognormal dapat didapatkan menggunakan persamaan dibawah ini.

$$E[X^n] = \exp\left(n\mu + \frac{n^2\sigma^2}{2}\right) \quad (4.6)$$

dari Persamaan 4.6 dicari nilai momen ke-satu sampai ke-empat untuk distribusi Lognormal.

Tabel 4.5. Moment distribusi Lognormal ($\hat{\mu} = 5.4395, \hat{\sigma} = 0.9569$)

Moment	Nilai
$E[X^1]$	364.0637
$E[X^2]$	3.3115×10^5
$E[X^3]$	7.5254×10^8
$E[X^4]$	4.2727×10^{12}

Nilai momen ke-satu sampai ke-empat dari distribusi Lognormal digunakan untuk perhitungan nilai *aggregate loss*.

4.4 Moment dari Compound Distribution

Jika L_t menyatakan *aggregate loss* dengan persamaan (4.4), peubah acak L_t memenuhi fungsi distribusi sebagai berikut :

$$F_l(l) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} F^{*n}(l), \quad x > 0. \quad (4.7)$$

$F^{*n}(l)$ merupakan fungsi konvolusi ke- n yang sulit untuk dihitung, sehingga dilakukan alternatif lain untuk menghitung fungsi distribusi kumulatif $F_l(l)$. Pada Tugas Akhir ini, perhitungan nilai $F_l(l)$ didapatkan menggunakan metode aproksimasi.

Perhitungan $F_l(l)$ menggunakan metode aproksimasi membutuhkan nilai parameter dari *aggregate loss*. Untuk mencari nilai parameter *aggregate loss* dapat menggunakan empat moment pertama dari *compound distribution* dengan variabel *aggregate loss* $L_t = X_1, X_2, \dots, X_N$ dimana X_1, X_2, \dots, X_N merupakan distribusi identik yang saling bebas .

Nilai parameter *aggregate loss* yang dicari berupa mean, varian, *skewness* (k_{3l}) dan *kurtosis* (k_{4l}). Nilai ini dihitung dengan menggunakan Preposisi (2.1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E[L_t] &= \lambda E[X^1] \\ \text{Var}[L_t] &= \lambda E[X^2] \\ E[(L_t - E[L_t])^3] &= \lambda E[X^3] \\ E[(L_t - E[L_t])^4] &= \lambda E[X^4] + 3\lambda^2 (E[X^2])^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Karena *aggregate loss* merupakan *compound distribution* sehingga terdiri dari gabungan distribusi frekuensi dan distribusi severitas yang telah didapatkan di pembahasan sebelumnya. Nilai λ merupakan parameter dari proses Poisson atau distribusi frekuensi sedangkan nilai $E[X^n]$ merupakan momen dari distribusi severitas. Perhitungan nilai parameter *aggregate loss* dapat dilakukan dengan menggunakan Persamaan 4.8 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mu_L &= \lambda E[X^1] = 24.6653 \\
\sigma_L^2 &= \lambda E[X^2] = 22435.156 \\
k_3 L &= \frac{E[(L_t - E[L_t])^3]}{\sigma_L^3} = 15.1720 \\
k_4 L &= \frac{E[(L_t - E[L_t])^4]}{\sigma_L^4} = 575.1100 \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Nilai parameter pada Persamaan 4.9 digunakan dalam mengaproksimasi nilai *aggregate loss* menggunakan pendekatan campuran.

4.5 Aproksimasi *Aggregate Loss*

Metode Aproksimasi merupakan salah satu alternatif untuk mendapatkan nilai fungsi distribusi kumulatif *aggregate loss* apabila data frekuensi dan data severitas tidak tersedia secara lengkap. Pada penelitian Chaubey (1998), ia telah membandingkan beberapa metode aproksimasi yaitu Normal, Normal Power, Gamma, Invers-Gaussian dan distribusi campuran. Dari penelitian tersebut dipilih pendekatan campuran (Gamma-Inv. Gaussian) aproksimasi yang paling dekat dengan nilai eksak *aggregate loss*. Berikut hasil aproksimasi nilai *aggregate loss* menggunakan pendekatan campuran (Gamma- Inv. Gaussian).

4.5.1 Aproksimasi Gamma

Aproksimasi ini merupakan aproksimasi yang biasa digunakan dalam menentukan distribusi loss model, dengan CDF

$$F(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\alpha+z\sqrt{\alpha}} e^{-y} y^{\alpha-1} dy$$

dengan Γ merupakan fungsi gamma, $z = \frac{(x-\mu_L)}{\sigma_L}$ dan $\alpha = \frac{4}{k_{3L}}$.

Parameter dari *aggregate loss* yaitu μ_L, σ_L, k_{3L} telah didapatkan pada tahap sebelumnya. Dari parameter tersebut dicari nilai aproksimasi *aggregate loss* dari fungsi distribusi kumulatif Gamma dengan menggunakan Persamaan 2.13.

4.5.2 Aproksimasi Invers Gaussian

Persamaan dari fungsi CDF ini, akan digunakan pada estimasi nilai *aggregate loss* dengan aproksimasi Invers Gaussian.

$$F(x, t) = \phi[\sqrt{bx}(x - m)] + e^{\left(\frac{2m}{b}\right)}\phi[-\sqrt{bx}(x + m)], \quad x > 0$$

dengan $x = x - x_0$ dan parameter lainnya diberikan sebagai berikut:

$$m = \frac{c_{2L}^2}{c_{3L}}, \quad b = \frac{c_{3L}}{c_{2L}}, \quad x_0 = c_{1L} - m,$$

c_{1L}, c_{2L}, c_{3L} merupakan kumulan dari *compound distribution*. Kumulan dari distribusi probabilitas merupakan alternatif dari momen distribusi. Kumulan pertama memiliki makna sama dengan mean, kumulan kedua sama dengan varians dan kumulan ketiga sama dengan central momen. Berikut formula kumulan dari *aggregate loss* jika distribusi frekuensinya merupakan distribusi Poisson :

$$c_{rs} = \lambda E[X^n] \quad (4.10)$$

Tabel 4.6. Nilai Kumulan *Aggregate Loss*

Kumulan	Hasil
c_{1L}	24.6653
c_{2L}	2.2435×10^4
c_{3L}	5.0984×10^7

dengan menggunakan parameter λ dari distribusi Poisson dan nilai

momen dari distribusi severitas sehingga didapatkan nilai kumulatif *aggregate loss* pada Tabel 4.5.

Berdasarkan parameter yang telah didapatkan menggunakan kumulatif, selanjutnya dicari nilai distribusi kumulatif *aggregate loss* menggunakan aproksimasi Invers Gaussian pada Persamaan 2.14.

4.5.3 Pendekatan Campuran (Gamma- Invers Gaussian)

Diketahui $F_1(x)$ dan $F_2(x)$ merupakan dua aproksimasi berbeda yang digunakan untuk mendapatkan nilai *aggregate loss* menggunakan pendekatan campuran. Dua aproksimasi berbeda yang digunakan adalah Gamma dan Invers Gaussian.

$$F(x, t) = \omega F_1(x) + (1 - \omega) F_2(x), \quad (4.11)$$

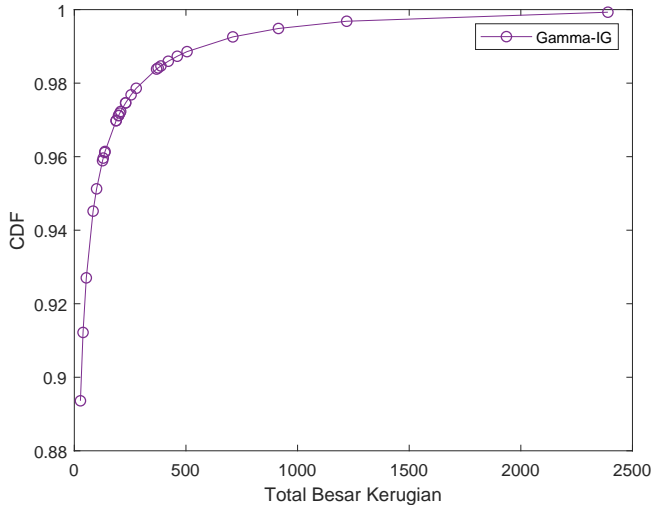
dengan $\omega = \frac{(k_L - k_{F_2})}{(k_{F_1} - k_{F_2})}$ dan k sebagai nilai kurtosis.

Menurut hasil penelitian Chaubey et al.(1998), pendekatan campuran baik digunakan ketika nilai $k_{3x} \in [0, 5]$ dan $k_{4L} \in [1.5, 50]$, dimana k_{3x} dan k_{4L} menyatakan *skewness* dari distribusi kerugian dan kurtosis dari *aggregate loss*.

Pada penelitian ini, nilai *skewness* data kerugian adalah 5.822. nilai ini tidak masuk pada syarat aproksimasi nilai *aggregate loss* dengan menggunakan pendekatan campuran. Oleh karena itu, pada perhitungan nilai *aggregate loss* dengan menggunakan campuran, dilakukan beberapa transformasi pada nilai ω . Nilai ω ini didapatkan dari nilai masing- masing kurtosis. Nilai ω seharusnya memiliki rentang nilai antara 0 – 1 untuk mendapatkan nilai *aggregate loss* yang mendekati nilai aktualnya. Akan tetapi, pada penelitian ini, nilai ω yang didapatkan adalah -4.9905 , maka dari itu dilakukan beberapa transformasi nilai ω dengan cara memutlakkan dan mengubah penyebut menjadi pembilang sehingga nilai ω yang didapatkan nilai sebesar 0.2004.

Setelah mendapatkan nilai parameter ω , dilanjutkan dengan mencari nilai *aggregate loss* dengan pendekatan campuran. Nilai *ag-*

gregate loss yang didapatkan menggunakan pendekatan campuran dapat dilihat pada Gambar 4.9.



Gambar 4.9. Nilai *Aggregate Loss* dengan Pendekatan Campuran

Berdasarkan Gambar 4.9, terlihat untuk aproksimasi menggunakan pendekatan campuran menghasilkan pergerakan nilai *aggregate loss* pada rentang 0.89 sampai ke 1. Nilai ini merupakan nilai dari fungsi distribusi kumulatif $F_l(l)$. Untuk mengetahui berapa kerugian aggregate yang digunakan dalam perhitungan obligasi dapat dilakukan dengan langkah berikut, jika diambil nilai batas kerugian pada waktu ke- t adalah \$99.8 billion, maka nilai *aggregate loss* yang digunakan untuk perhitungan obligasi yaitu $F(99.8) = 0.9513$. Nilai *aggregate loss* dengan menggunakan pendekatan campuran dapat dilihat pada Lampiran (N-3).

4.5.4 Perbandingan Nilai Aproksimasi *Aggregate Loss*

Pada tahap ini dilakukan perbandingan beberapa metode aproksimasi yaitu Normal, Normal Power, Gamma, Invers-Gaussian dan pendekatan campuran dengan nilai *exact aggregate loss* yang dihitung menggunakan metode konvolusi. Perhitungan nilai *exact* dengan metode konvolusi dapat dilakukan menggunakan persamaan berikut.

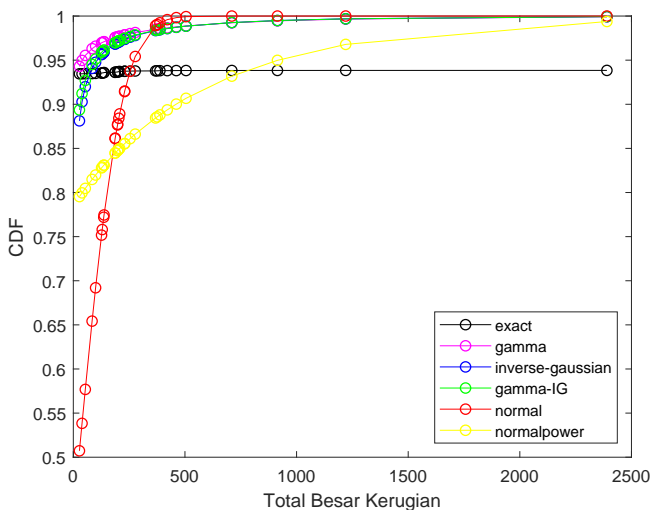
$$F_X^{*n}(x) = \sum_{k=0}^x F_X^{*(k-1)}(x-y) f_x(y) \quad (4.12)$$

dengan syarat:

$$F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x < 0 \\ 1, & \text{untuk } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Perhitungan nilai *aggregate loss* menggunakan metode konvolusi memerlukan data frekuensi dan severitas yang lengkap. Maka dari itu, untuk mendapatkan nilai distribusi frekuensi digunakan nilai parameter dari proses poisson (λ). Selanjutnya, dilakukan perhitungan nilai *aggregate loss* dengan metode konvolusi. Nilai ini digunakan untuk membandingkan Aproksimasi yang baik pada nilai *aggregate loss*.

Pada Gambar 4.10 terdapat hasil beberapa metode aproksimasi *aggregate loss* yang dibandingkan dengan nilai eksaknya yang didapatkan menggunakan *software R*. Dari hasil tersebut didapatkan urutan metode aproksimasi terbaik dalam mendekati nilai *exact-nya* yaitu Invers-Gaussian, Gamma, pendekatan campuran, Normal Power dan Normal. Kesimpulan ini didapatkan dari nilai MAPE yang dihasilkan pada tiap-tiap aproksimasi. Nilai MAPE dapat dilihat pada Tabel 4.7.



Gambar 4.10. Perbandingan Hasil Aproksimasi

Tabel 4.7. Perbandingan Nilai MAPE Aproksimasi *Aggregate Loss*

Aproksimasi	$MAPE(\%)$
Gmma	4.3015
Invers-Gaussian	3.9406
pendekatan campuran	3.9474
Normal	12.5547
Normal Power	8.4131

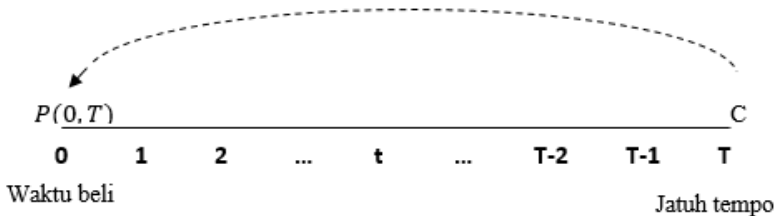
Dari nilai hasil simulasi perbandingan nilai MAPE pada aproksimasi *aggregate loss* didapatkan bahwa aproksimasi Invers-Gaussian memiliki nilai MAPE paling rendah dibandingkan nilai yang lain. Hal ini dikarenakan distribusi data kerugian memiliki nilai *skewness* sebesar 5.822. Menurut hasil penelitian Chaubey et

al.(1998), jika nilai $k_{3x} \in (5, 15)$ atau $k_{4L} \in (1.5, 50)$ dimana k_{3x} dan k_{4L} menyatakan *skewness* dari distribusi kerugian dan kurtosis dari *aggregate loss*, maka aproksimasi dengan Invers-Gaussian lebih akurat. Sedangkan, jika nilai $k_{3x} \in [0, 5]$ dan $k_{4L} \in [1.5, 50]$, maka aproksimasi terbaik dalam mendapatkan nilai *aggregate loss* adalah aproksimasi campuran.

4.6 Model Zero-Coupon CAT Bond

Obligasi bencana alam adalah kesepakatan antara dua pihak yang akan membayar sejumlah uang apabila terjadi suatu bencana. Pembayaran sejumlah uang telah ditentukan di awal kontrak dan akan dibayarkan diakhir kontrak. Struktur *payoff zero-coupon CAT Bond* di akhir kontrak terdapat pada Persamaan 4.13.

Z merupakan sejumlah uang yang akan didapatkan oleh investor jika tidak terjadi bencana atau terjadi bencana yang kerugiannya tidak mencapai batas atas (D). Apabila kerugian bencana melebihi batas atas, maka nilai sejumlah uang yang akan di dapat dikalikan dengan persentase yang telah ditentukan jika terjadi bencana (p).



Gambar 4.11. *Cashflow* untuk Zero-Coupon Bond

Pada model *zero-coupon bond* investor hanya mendapatkan *redemption value* (C) yang telah disepakati pada waktu jatuh tempo yang telah ditentukan. Harga obligasi $P(0, T)$ adalah nilai obligasi yang digunakan untuk penentuan harga awal kontrak obligasi yang biasa dilambangkan dengan $B_{CIR}(0, T)$. Model obligasi bencana

yang digunakan pada Tugas Akhir ini menggunakan suku bunga yang bergerak secara stokastik. Salah satu model yang cocok digunakan adalah Cox -Ingersoll-Ross (CIR). Model obligasi yang dikenalkan oleh (Cox, Ingersoll, Ross, 1998) terdapat pada pada Persamaan 2.19.

$$B_{CIR} = A(t, T)e^{-B(t, T)r}$$

$$A(t, T) = \left[\frac{\gamma^{(k^* + \gamma)(T-t)/2}}{(k^* + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{k^* \mu^*}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \left[\frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(k^* + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]$$

$$\gamma = \sqrt{(k^*)^2 + 2\sigma^2}.$$

Nilai parameter k^* , μ^* dan σ^* didapatkan dari estimasi parameter model Cox -Ingersoll-Ross (CIR) menggunakan penetapan harga berbasis *risk-neutralized*, yang dapat ditulis seperti berikut :

$$dr(t) = k^*(\mu^* - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad (4.14)$$

dimana k^* , μ^* dan σ^* didefinisikan sebagai

$$k^* = k + \lambda_r$$

$$\mu^* = \frac{k\mu}{k + \lambda_r}$$

$$dW(t)^* = dW(t) + \frac{\lambda_r \sqrt{r(t)}}{\sigma} dt. \quad (4.15)$$

Pada Tugas Akhir ini, diasumsikan nilai harga pasar pada tingkat suku bunga (λ_r) adalah 0 dan Nilai parameter k , μ dan σ didapatkan dari estimasi parameter model Cox -Ingersoll-Ross

(CIR) menggunakan algoritma *Grid Search*. Dengan parameter tersebut didapatkan nilai $B_{CIR}(t, T)$ dengan mengimplementasikan Persamaan 2.19. Nilai $B_{CIR}(t, T)$ ini, selain digunakan untuk penentuan harga obligasi nilai ini nantinya juga digunakan untuk perhitungan harga *zero-coupon CAT bond*.

Penentuan harga *zero-coupon CAT bond* pada saat awal kontrak, dapat menggunakan faktor diskonto berikut:

$$D(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}. \quad (4.16)$$

Harga *zero-coupon CAT bond* memenuhi sifat *martingale* poin 3 yang tertera pada BAB II, bahwa $E[X_{k+1}|\mathcal{F}_n] = X_k$ untuk $n \in \mathbb{N}$ yang memiliki arti bahwa nilai harapan kejadian di masa depan hanya bergantung pada kejadian di masa sekarang. Nilai dari *payoff* yang didapatkan di akhir kontrak dikalikan dengan faktor diskonto menghasilkan valuasi terhadap *zero-coupon CAT bond* dengan asumsi *risk neutralized pricing (Q)* sebagai berikut :

$$\begin{aligned} V_t &= E^Q(Ze^{-\int_s^T r_s ds} P_{CAT}(T)|\mathcal{F}_t) \\ &= E^Q(e^{-\int_s^T r_s ds}|\mathcal{F}_t)E^Q(ZP_{CAT}(T)|\mathcal{F}_t) \\ &= B_{CIR}(t, T)E^P(ZP_{CAT}|\mathcal{F}_t) \\ &= B_{CIR}(t, T)E^P(Z1\{L_T, D\} + pZ1\{L_T > D\}|\mathcal{F}_t) \\ &= B_{CIR}(t, T)(ZP(L_T \leq D) + pZP(L_T > D)) \\ &= B_{CIR}(t, T)Z(F(D) + p(1 - F(D))) \\ &= B_{CIR}(t, T)Z[p + (1 - p) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \frac{\lambda(T-t)^n}{n!} F^{*n}(D)]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Persamaan ini yang digunakan dalam perhitungan harga *zero-coupon CAT bond*.

4.7 Simulasi Penentuan Harga *Zero-Coupon CAT Bond*

Pada bagian ini, disajikan simulasi penentuan harga *zero-coupon CAT bond* dengan suku bunga stokastik menggunakan pendekatan Monte Carlo. Selain itu, diberikan juga analisis terhadap pengaruh batas atas kerugian (D) dan pengaruh waktu jatuh tempo (T) terhadap penentuan harga *zero-coupon CAT bond*. Simulasi untuk menganalisis beberapa faktor diatas, dilakukan dengan menggunakan parameter yang didapat dari algoritma *Grid Search*. Nilai parameter yang didapat adalah $k = 0.91$, $\mu = 2.4$ dan $\sigma = 0.5$. Nilai parameter ini digunakan untuk membentuk lintasan aproksimasi tingkat suku bunga bulanan selama 3 tahun kedepan. Dari banyak lintasan yang dibentuk oleh parameter model CIR dibentuk satu lintasan tingkat suku bunga menggunakan pendekatan Monte Carlo seperti yang terdapat pada Gambar 4.7. Nilai pendekatan ini yang digunakan sebagai nilai suku bunga pada penentuan harga *zero-coupon CAT bond*.

Setelah mendapatkan nilai tingkat suku bunga, hal yang perlu diperhatikan pada penetapan harga *zero-coupon CAT bond* adalah nilai *aggregate loss*. penetapan nilai *aggregate loss* diestimasi menggunakan pendekatan campuran (Gamma-Invers Gaussian) seperti yang telah dibahas pada Sub-Bab 4.5. Berikut hasil dari nilai *aggregate loss* yang diestimasi menggunakan pendekatan campuran.

Tabel 4.8. Hasil Pendekatan Campuran

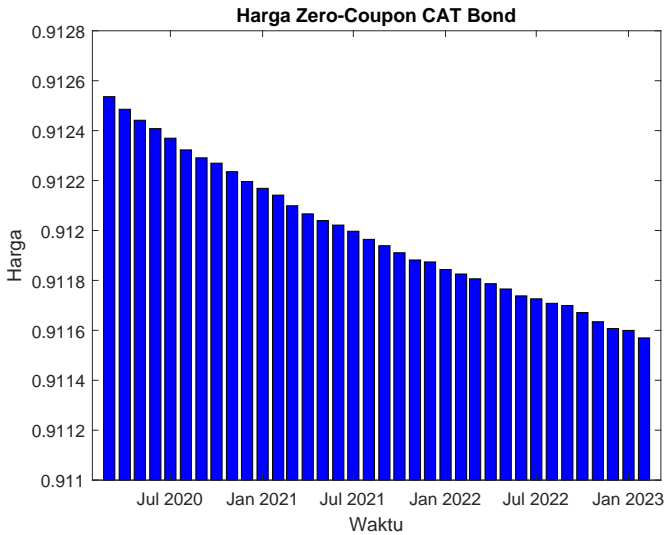
l	$F(l)$	l	$F(l)$
27.4	0.8936	229.6	0.9746
39.1	0.9122	230.2	0.9747
53.7	0.927	254.3	0.9768
84.1	0.9452	277.3	0.9786
99.8	0.9513	368.5	0.9838

Tabel 4.9. Hasil Pendekatan Campuran (Lanjutan)

l	$F(l)$	l	$F(l)$
126.5	0.9589	375.6	0.9841
129.5	0.9596	387.9	0.9847
136.3	0.9611	420.8	0.986
137.6	0.9614	461.2	0.9873
187.2	0.9698	504.9	0.9886
187.6	0.9698	709.9	0.9926
198.1	0.9712	914.3	0.9949
198.7	0.9712	1220	0.9968
203.8	0.9718	2390	0.9993
207.7	0.9723		

Pada Tabel 4.8 ditampilkan nilai *aggregate loss* dengan menggunakan pendekatan campuran. Nilai *aggregate loss* yang digunakan pada perhitungan harga *zero-coupon CAT bond* bergantung pada nilai batas atas (D) kontrak obligasi.

Setelah tahapan pada Sub-Bab 4.1 sampai 4.6 dilakukan, dilanjutkan dengan mensimulasikan perhitungan harga *zero-coupon CAT bond* dengan mengasumsikan nilai beberapa variabel yang dibutuhkan pada Persamaan 2.17. Untuk melakukan simulasi harga *zero coupon CAT bond* perbulan selama 3 tahun diasumsikan nilai *redemption value* (Z) sebesar \$1 dengan jumlah nilai yang harus dibayarkan investor kepada pihak *issuer* ketika terjadinya bencana adalah 50% dari nilai pokok. Jika pada awal kontrak *zero-coupon CAT bond* tertera bahwa nilai batas atas kerugian *aggregate loss* (D) adalah \$99.8 dan nilai suku bunga yang digunakan adalah hasil pendekatan model CIR menggunakan Monte Carlo, maka hasil simulasi harga *zero-coupon CAT bond* perbulan selama 3 tahun tertera pada Gambar 4.12.

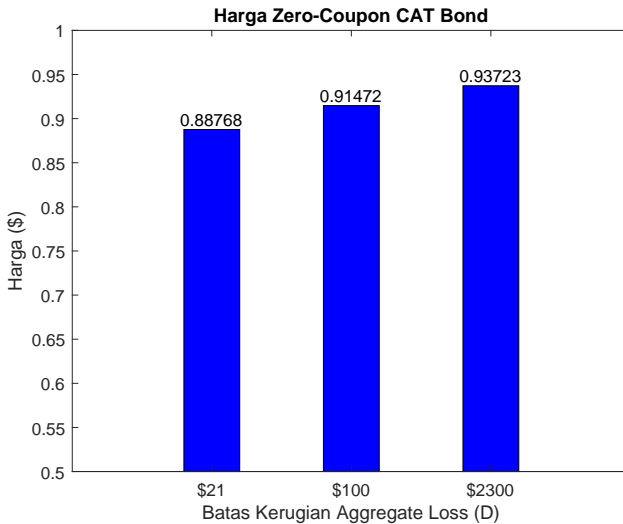


Gambar 4.12. Harga *Zero-Coupon CAT Bond* Berdasarkan Nilai Suku Bunga

Berdasarkan Gambar 4.12, terdapat grafik nilai harga *zero-coupon CAT bond* perbulan selama tiga tahun yang dimulai pada bulan Maret 2020 sampai dengan Januari 2023. Perbedaan harga pada grafik ini dipengaruhi oleh nilai tingkat suku bunga perbulan model CIR. Apabila grafik ini dibandingkan dengan grafik tingkat suku bunga hasil pendekatan Monte Carlo pada Gambar 4.7, dapat dilihat bahwa nilai suku bunga yang kecil menghasilkan harga obligasi yang tinggi dan begitupun sebaliknya. Harga *zero-coupon CAT bond* perbulan berbanding terbalik dengan pergerakan nilai tingkat suku bunga CIR hasil pendekatan Monte Carlo. Prediksi harga *zero-coupon CAT bond* pada kasus ini memiliki rentang harga 0.9116-0.9125. Faktor lain yang sangat mempengaruhi pada penentuan harga *zero-coupon CAT bond* adalah batas kerugian *aggregate loss* atau yang dilambangkan dengan (D) dan waktu jatuh tempo (T).

Pada tahap ini, dilakukan analisis terhadap pengaruh batas

kerugian yang ditetapkan di awal kontrak (D) terhadap penentuan harga *zero-coupon CAT bond*. Misalkan, kasus yang digunakan sama seperti pada pembahasan sebelumnya dengan suku bunga yang digunakan pada tanggal 1 Mei 2020 sebesar 1.686%. Adapun nilai batas kerugian (D) yang digunakan sebesar \$27.4 untuk kontrak pertama, sebesar \$99.8 untuk kontak kedua dan sebesar \$2390 untuk kontrak terakhir.



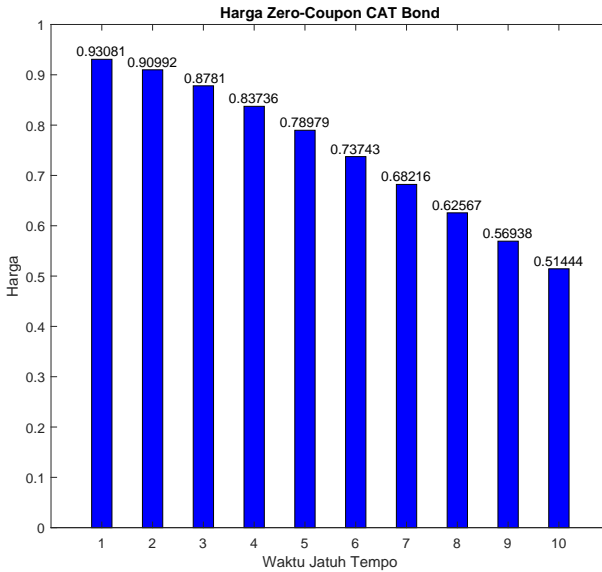
Gambar 4.13. Harga *zero-coupon CAT Bond* Berdasarkan Nilai D

Dari Gambar 4.13 terdapat grafik perbandingan harga *zero-coupon CAT bond* terhadap batas atas kerugian *aggregate loss* (D). Berdasarkan grafik diatas terlihat bahwa semakin besar batas keugian *aggregate loss* (D) pada kontrak, semakin mahal pula harga *zero-coupon CAT bond* dan begitupun sebaliknya. Pada kasus ini, batas keugian *aggregate loss* (D) sangat berpengaruh pada jumlah uang yang didapat investor pada waktu jatuh tempo, seperti yang tertera pada Persamaan 4.13. Apabila pada suatu kontrak *zero-coupon CAT bond* memiliki batas keugian *aggregate loss*

(D) dengan nominal yang kecil seperti \$27.4, kemungkinan terjadi bencana dengan kerugian diatas \$27.4 besar. Berdasarkan Persamaan 4.13, jika kerugian yang diakibatkan bencana lebih besar dari batas treshold (D), maka uang yang didapatkan di akhir lebih kecil dari \$1 atau sebesar \$0.5. Oleh karena itu, harga *zero-coupon CAT bond* yang dikeluarkan pihak *issuer* lebih kecil dibandingkan harga yang lainnya, yaitu sebesar \$0.8877. Sebaliknya, jika batas kerugian *aggregate loss* adalah \$2390, maka kemungkinan terjadi bencana dengan kerugian diatas \$2390 sangat kecil sehingga kemungkinan jumlah uang yang didapatkan pada waktu jatuh tempo sebesar \$1, lebih besar. Oleh karena itu, sangat wajar apabila harga *zero-coupon CAT bond* yang dikeluarkan pihak *issuer* lebih besar yaitu sebesar \$0.9372.

Faktor terakhir yang dibahas pada penetapan harga *zero-coupon CAT bond* adalah waktu jatuh tempo (T). Simulasi menggunakan kasus yang sama pada pembahasan sebelumnya, dipilih nilai pokok obligasi bencana sebesar \$1. Kontrak perjanjian yang disepakati diawal memiliki nilai batas kerugian *aggregate loss* adalah \$99.8 dengan jumlah nilai yang harus dibayarkan investor ketika terjadinya bencana adalah 50%. Jika tingkat suku bunga yang digunakan pada tanggal 1 Mei 2020 yaitu sebesar 1.686%, maka didapatkan hasil simulasi harga *zero-coupon CAT bond* berdasarkan dengan waktu jatuh tempo (T) yang terdapat pada Gambar 4.14

Grafik pada Gambar 4.14 merupakan hasil simulasi penetapan harga *zero-coupon CAT bond* pada tanggal 1 Mei 2020 dengan perbedaan waktu jatuh tempo. Dari hasil simulasi harga *zero-coupon CAT bond* mengalami penurunan seiring bertambahnya waktu jatuh tempo. Semakin besar waktu jatuh temponya, maka harga *zero-coupon CAT bond* semakin kecil dan begitupun sebaliknya.



Gambar 4.14. Harga *Zero-Coupon CAT Bond* Berdasarkan Waktu Jatuh Tempo

Penetapan harga *zero-coupon CAT bond* dalam kehidupan sehari-hari dapat diilustrasikan seperti berikut. Misalkan pada 1 Mei 2020 suatu perusahaan menerbitkan *zero-coupon CAT bond* dengan masa jatuh tempo sebesar 5 tahun untuk mendapatkan uang sebesar \$100 pada akhir jatuh tempo. Jika pada awal kontrak *zero-coupon CAT bond* tertera bahwa nilai batas atas kerugian *aggregate loss* adalah \$70 dengan jumlah nilai yang didapatkan investor ketika terjadinya bencana adalah 75% dari nilai pokok, maka investor harus membeli *zero-coupon CAT bond* seharga \$ $0.825774 \times \$100$ yaitu sebesar \$82.5774. Penerbit *zero-coupon CAT bond* akan membayar kepada investor sebesar \$100 jika tidak terjadi bencana yang mencapai kerugian lebih besar sama dengan \$70. Sehingga investor mendapat keuntungan sebesar \$17.4226.

Akan tetapi, jika terjadi bencana yang mencapai kerugian lebih besar sama dengan \$70 sesuai dengan perjanjian pada kontrak, maka investor akan mendapatkan uang sebesar \$75 pada waktu jatuh tempo.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan berdasarkan hasil pembahasan pada bab IV. Selain itu, juga diberikan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil studi, simulasi, dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa beberapa hal terkait penetapan harga *zero-coupon CAT bond* sebagai berikut.

1. Estimasi parameter suku bunga pada model CIR menggunakan metode *Grid Search* menghasilkan nilai parameter $k = 0.91$, $\mu = 2.4$, $\sigma = 0.5$ dan didapatkan nilai MAPE sebesar 4.82%. Nilai MAPE yang kecil ini, menunjukkan bahwa pola pergerakan hampir sama antara tingkat suku bunga hasil pendekatan dengan tingkat suku bunga pada pasar. Nilai suku bunga didapatkan dengan mencari nilai yang konvergen dari tingkat suku bunga pada model CIR menggunakan metode Monte Carlo.
2. Model *aggregate loss* didapatkan dengan mencari nilai parameter dari distribusi frekuensi dan distribusi severitas, dari parameter tersebut dihitung nilai *moment of compound distribution* yang akan digunakan untuk mendapatkan nilai *aggregate loss* dengan menggunakan pendekatan campuran (Gamma-Inv. Gaussian).
3. Hasil analisis dari simulasi penetapan harga *zero-coupon CAT bond* sebagai berikut.
 - (a) Harga *zero-coupon CAT bond* perbulan mengikuti pergerakan tingkat suku bunga CIR yang bergerak secara fluktuatif. Nilai suku bunga yang kecil menghasilkan

harga obligasi bencana yang tinggi dan begitu juga sebaliknya.

- (b) Batas atas nilai kerugian (D) yang di tetapkan pihak *issuer* mempengaruhi harga *zero-coupon CAT bond*. Semakin besar batas atas kerugian (D) membuat harga obligasi bencana semakin mahal.
- (c) Jika waktu jatuh tempo *zero-coupon CAT bond* semakin lama, maka harga *zero-coupon CAT bond* semakin murah.

5.2 Saran

Berdasarkan dari kesimpulan dan penyelesaian masalah dari Tugas Akhir ini, disarankan beberapa hal untuk penelitian selanjutnya sebagai berikut.

1. Perlu disajikan metode lain dalam mengesimasi parameter model CIR agar dapat meminimumkan waktu proses dan meminimumkan eror.
2. Perlu adanya pembahasan menggunakan model lain seperti Proses Poisson non homogen dalam dalam menyatakan peluang jumlah terjadinya bencana pada waktu tertentu.
3. Perlu ada penelitian lebih lanjut mengenai penetapan harga obligasi bencana dengan kupon.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] BNPB. (2017) <https://www.bnpb.go.id/home/definisi>. Diakses pada 2 Maret 2020 pukul 13.00
- [2] News. (2018) <https://www.noaa.gov/news/2017-was-3rd-warmest-year-on-record-for-us>. Diakses pada 20 Januari 2020 pukul 16.00
- [3] E-paper.(2020)<http://www.neraca.co.id/article/106996/obligasi-bencana-alternatif-keterbatasan-anggaran>. Diakses pada 20 Januari 2020 pukul 17.00
- [4] Pemerintah Indonesia(1992). Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 2 Tahun 1992 Tentang Usaha Perasuransian . Lembaran Negara RI Tahun 1992, No. 13. Sekretariat Negara. Jakarta Definisi Asuransi UUD NO 2 Tahun 1992
- [5] Cox, S. H., & Pedersen, H. W. (2000). Catastrophe risk bonds. *North American Actuarial Journal*, 4(4), 5682.
- [6] Laster, David, dan Mayank R (2001). *Capital Market Innovation in the Insurance Industry*. Sigma no. 3/2001, Swiss re, Zurich.
- [7] Lee, J. P., & Yu, M. T. (2002). Pricing default-risky CAT bonds with moral hazard and basis risk. *Journal of Risk and Insurance*, 69(1), 2544.
- [8] Baryshnikov, Y., Mayo, a, & Taylor, D. (2001). Pricing of CAT bonds. Preprint, 1992, 117.
- [9] Burnecki, K., & Kukla, G. (2003). Pricing of zero-coupon and coupon cat bonds. *Applicationes Mathematicae*, 30(3), 315324.
- [10] Siyamah, I., Imron, C., & Putri, E. R. M.(2019). CAT Bond Valuation Using Monte Carlo Method.

- [11] Burnecki K, Kukla (2005). Pricing Cathastrophe Bonds in a Compound Non-Homogenous poisson model with left truncated loss distribution. Presentation, Wroclaw University of Technology.
- [12] Ma, Z. G., & Ma, C. Q. (2013). Pricing catastrophe risk bonds: A mixed approximation method. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(2), 243-254.
- [13] Aggraini, D (2015). Penentuan harga obligasi bencana alam dengan metode Gamma. Tugas Akhir. Fakultas Matematika dan Ilmu Alam. Universitas Gajah Mada
- [14] Anggraini, D., & Wijaya, Y. (2016). Obligasi Bencana Alam dengan Suku Bunga Stokastik dan Pendekatan Campuran. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(1), 496-2.
- [15] Boyle, P. P. (1977). Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4(3), 323-338.
- [16] Arham, A. & Firmansyah, A. (2019). Catastrophe bond sebagai instrumen pembiayaan pemerintah dalam penanggulangan bencana alam di Indonesia. *Indonesian Treasury Review: Jurnal Perbendaharaan, Keuangan Negara dan Kebijakan Publik*, 4(4), 339-349.
- [17] Kulkarni, Vg (1999). *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic System*, London: Springer.
- [18] Ballotta, L & Fusai, G (2018). *Tools from Stochastic Analysis for Mathematical Finance: A Gentle Introduction*. City, University of London Institutional Repository.
- [19] Au. Kelly T (2016). An Intuitive Explanation of Brownian Motion as a limit of random Walk. *Journal of Financial Education*, 23(1) (Spring 1997), 91-94

- [20] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer & Gordon E. Willmot(2012). Loss Models: From Data to Decisions. 4th Edition
- [21] Chaubey, Y. P., & Trudeau, S. (1998) .On the computation of aggregate claims distributions:some new approximations. Insurance: Mathematics and Economics. 23,215-230

Lampiran A ***Dataset Suku Bunga***

Tabel A-1. Dataset Suku Bunga USD

Waktu	Suku Bunga	Waktu	Suku Bunga
2016-01-01	0.34	2018-02-01	1.42
2016-02-01	0.38	2018-03-01	1.51
2016-03-01	0.36	2018-04-01	1.69
2016-04-01	0.37	2018-05-01	1.70
2016-05-01	0.37	2018-06-01	1.82
2016-06-01	0.38	2018-07-01	1.91
2016-07-01	0.39	2018-08-01	1.91
2016-08-01	0.40	2018-09-01	1.95
2016-09-01	0.40	2018-10-01	2.19
2016-10-01	0.40	2018-11-01	2.20
2016-11-01	0.41	2018-12-01	2.27
2016-12-01	0.54	2019-01-01	2.40
2017-01-01	0.65	2019-02-01	2.40
2017-02-01	0.66	2019-03-01	2.41
2017-03-01	0.79	2019-04-01	2.42
2017-04-01	0.90	2019-05-01	2.39
2017-05-01	0.91	2019-06-01	2.38
2017-06-01	1.04	2019-07-01	2.40
2017-07-01	1.15	2019-08-01	2.13
2017-08-01	1.16	2019-09-01	2.04
2017-09-01	1.15	2019-10-01	1.83
2017-10-01	1.15	2019-11-01	1.55
2017-11-01	1.16	2019-12-01	1.55
2017-12-01	1.30	2020-01-01	1.55
2018-01-01	1.41	2020-02-01	1.58

Lampiran B

Dataset Kerugian Bencana

Tabel B-1. Dataset Kerugian Bencana

Tahun	Bencana	Kerugian Bencana	2019 Dollars
Jun-84	Hail - Colorado	\$276.7	\$709.9
Jun-90	Tornado - Limon, Colorado	\$20.0	\$39.1
Jul-90	Hail - Colorado	\$625.0	\$1.22 Billion
Jun-91	Hail - Colorado	\$100.0	\$187.6
Oct-94	Hail - Colorado	\$225.0	\$387.9
May-96	Hail - Colorado	\$122.0	\$198.7
Aug-97	Hail - Colorado	\$128.0	\$203.8
Oct-98	Hail - Colorado	\$87.8	\$137.6
May-June 2000	Los Alamos Fire - New Mexico	\$140.0	\$207.7
Summer 2002	Wildfires - Colorado	\$70.3	\$99.8
Mar-03	Winter storm - Colorado	\$93.3	\$129.5
Jun-04	Hail - Colorado	\$146.5	\$198.1
Aug-04	Hail - Colorado	\$62.2	\$84.1
Oct-04	Hail - Albuquerque, New Mexico	\$39.7	\$53.7
May-05	Hail - Hobbs, New Mexico	\$21.0	\$27.4
May-08	Tornado and hail - Windsor, Colorado	\$193.5	\$229.6
June 6-15, 2009	Tornado and hail - Denver Metro	\$353.3	\$420.8
July 20, 2009	Hail and wind - Denver Metro	\$767.6	\$914.3
July 29, 2009	Hail - Pueblo, Colorado	\$232.8	\$277.3
Sep-10	Wildfire - Boulder, Colorado	\$217.0	\$254.3
July 11, 2011	Hail - Cheyenne, Wyoming	\$120.0	\$136.3
July 13, 2011	Hail - Colorado Front Range	\$164.8	\$187.2
June 6-7, 2012	Hail - Colorado Front Range	\$321.1	\$368.5
Jun-12	Wildfire - near Ft. Collins, Colorado	\$113.7	\$126.5
Jun-12	Wildfire - Colorado Springs, Colorado	\$453.7	\$504.9
Jun-13	Wildfire - Black Forest, Colorado	\$420.5	\$461.2
September 29, 2014	Hail - Colorado	\$213.3	\$230.2
July 28, 2016	Hail - Colorado Springs	\$352.8	\$375.6
May 8, 2017	Hail - Metro Denver	\$2.3 Billion	\$2.39 Billion

Lampiran C

Detail Hasil Uji Distribusi pada Data Kerugian Bencana

Inv. Gaussian [#26]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	29				
Statistic	0.145				
P-Value	0.52835				
Rank	20				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.19348	0.22117	0.24571	0.27471	0.29466
Reject?	No	No	No	No	No

Gambar C-1. Distribusi Inv. Gaussian

Gamma [#17]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	29				
Statistic	0.22016				
P-Value	0.10273				
Rank	34				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.19348	0.22117	0.24571	0.27471	0.29466
Reject?	Yes	No	No	No	No

Gambar C-2. Distribusi Gamma

Pareto [#41]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	29				
Statistic	0.34011				
P-Value	0.0017				
Rank	50				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.19348	0.22117	0.24571	0.27471	0.29466
Reject?	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes

Gambar C-3. Distribusi Pareto

Detail Hasil Uji Distribusi pada Data Kerugian Bencana (Lanjutan)

Lognormal [#38]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	29				
Statistic	0.10389				
P-Value	0.88125				
Rank	7				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.19348	0.22117	0.24571	0.27471	0.29466
Reject?	No	No	No	No	No

Gambar C-4. Distribusi Lognormal

Weibull [#56]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	29				
Statistic	0.1079				
P-Value	0.85277				
Rank	11				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.19348	0.22117	0.24571	0.27471	0.29466
Reject?	No	No	No	No	No

Gambar C-5. Distribusi Weibull

Lampiran D

Function MATLAB

1. Implementasi model CIR

```
1 function [hasil] = CIReulerMape(k, a, sigma, dt, X0, nstep,  
   nsimul)  
2 %% membaca File  
3 data = xlsread('E:\AA MY ALL DOCUMENT\AA MATEMATIKA\AA  
   .TA\DATA\datatraining.csv');  
4 Xall = [];  
5  
6 %%implementasi model CIR  
7 for j=1:nsimul  
8     X=zeros(nstep,1); X(1)=X0;  
9     for i=1:(nstep-1)  
10        X(i+1)=X(i)+ k*(a-X(i))*dt+sigma *sqrt  
        (X(i)*dt)*randn;  
11        end  
12        Xall=[Xall, X];  
13 end  
14  
15 %%Evaluasi nilai parameter terbaik bedasarkan MAPE  
16 MP = [];  
17 for i = 1:nsimul  
18     MP(i) = MAPE(data, Xall(:,i));  
19 end  
20 IndexMAPEYangTerkecil = find(MP==min(MP));  
21 hasil=Xall(:, IndexMAPEYangTerkecil)  
22 end  
23  
24
```

Lampiran E

Script Algoritma Grid Search pada MATLAB

```
1 clc; clear; cla; tic;
2 format longg;
3
4 %%read data
5 data = xlsread('E:\AA MY ALL DOCUMENT\AA MATEMATIKA\AA.TA\
  DATA\datatraining.csv');
6
7 %%Menentukan parameter model
8 k = 0.01:0.1:1
9 a = 0.1:0.1:3 ;
10 sigma = 0.1:0.1:2;
11 tampunganR = [];
12 parameter = [];
13
14 %%Menentukan parameter simulasi
15 nstep = length(data); horizon=1; nsimul=25000;
16 dt=horizon/nstep;
17 idxR = 1;
18
19 %%implementasi algoritma grid search
20 for idxa = 1:length(a)
21     Xall = [];
22     X(1) = data(1);
23     for idxk = 1:length(k)
24         for idxs = 1:length(sigma)
25             if 2*a(idxa)*k(idxk) >= (sigma(idxs))^2
26                 tampunganR(idxR,:) = CIReulerMape
27                     (k(idxk), a(idxa), sigma(idxs), dt, data(1),
28                     nstep, nsimul);
29                 parameter(idxR,:) =
30                     [k(idxk), a(idxa), sigma(idxs)]
31                 idxR = idxR + 1;
32             end
33         end
34     end
35 end
36
37 %%Evaluasi nilai parameter terbaik menggunakan MAPE
38 MP = []; ukuranMP = size(tampunganR);
39 for i = 1:ukuranMP(1)
40     MP(i) = MAPE(data, tampunganR(i, :));
41 end
42 IndexMAPEYangTerkecil = find(MP==min(MP));
43 PARAMETER = parameter(IndexMAPEYangTerkecil, :)
```

```

44 %%Visualisasi model CIR
45 t = datetime(2016,1,1) + calmonths(0:34)
46 waktu=[t']
47 plot(waktu,data,'r-'); hold on; grid on
48 plot(waktu,tampungR(IndexMAPEYangTerkecil,:));
49 xlim([waktu(1),waktu(end)])
50 legend('Asli','Prediksi','Location','Southeast');
51 title(strjoin({'MAPE',num2str(min(MP)),'%'}));
52 xlabel('Waktu')
53 ylabel('Suku Bunga')
54 toc;

```

Lampiran F

Script MATLAB untuk simulasi model CIR

```
1 clc; clear; cla; tic;
2 format longg;
3
4 %%read data
5 data = xlsread('E:\AA MY ALL DOCUMENT\AA MATEMATIKA\AA.TA\
  DATA\datatesting.csv');
6
7 %%Masukan parameter model
8 k= 0.91; sigma= 0.5; Xt=2.27; mu=2.4;
9
10 %%Masukan parameter simulasi
11 nstep=14; horizon=1;nsimul=1000;
12 dt=horizon/nstep;
13 Xall=[];
14
15 %%implementasi model CIR
16 for j=1:nsimul
17     X=zeros(nstep+1,1); X(1)=Xt;
18     for i=1:nstep
19         X(i+1)=X(i)+ k*(mu-X(i))*dt+sigma *sqrt(max(X(i),0)*
20             dt)*normrnd(0,1);
21     end
22     Xall=[Xall,X]
23 end
24 %%Evaluasi nilai parameter terbaik menggunakan MAPE
25 MP = [];
26 for i = 1:nsimul
27     MP(i) = MAPE(data,Xall(:,i));
28 end
29 IndexMAPEYangTerkecil = find(MP==min(MP));
30
31 %%Visualisasi model CIR
32 t = datetime(2018,12,1) + calmonths(0:14)
33 waktu=[t']
34 plot(waktu,data,'r-'); hold on; grid on
35 plot(waktu,tampungR(IndexMAPEYangTerkecil,:));
36 xlim([waktu(1),waktu(end)])
37 legend('Asli','Prediksi');
38 xlabel('Waktu')
39 ylabel('Suku Bunga');
40 title(strjoin({'MAPE', num2str(min(MP)), '%'}));
```

Lampiran G

Script MATLAB untuk simulasi model CIR menggunakan pendekatan Monte Carlo

```
1 clear all; clc; cla
2
3
4 %%Read data
5 data = xlsread('E:\AA MY ALL DOCUMENT\AA MATEMATIKA\AA.TA\
  DATA\2016.csv');
6
7 %%Masukan parameter model
8 k= 0.51; sigma= 0.5; Xt=1.55; mu=1.9;
9
10 %%Masukan parameter simulasi
11 nstep=36; horizon=1;nsimul=25;
12 dt=horizon/nstep;
13 Xall=[]; %%variable to store simulated values
14
15 %%Simulasi model CIR
16 for j=1:nsimul
17     X=zeros(nstep+1,1); X(1)=Xt;
18     for i=1:nstep
19         X(i+1)=X(i) + k*(mu-X(i))*dt+sigma *sqrt(X(i)*dt)*
  randn;
20     end
21 Xall=[Xall,X];
22 end
23
24 %% MonteCarlo
25 mc=mean(Xall,2)
26
27 %%Visualisa model CIR menggunakan Pendekatan MonteCarlo
28 t = datetime(2018,12,1) + calmonths(0:36)
29 waktu=[t']
30 plot(waktu,mc,'r-','b-','linewidth',2);hold on; grid on;
31 plot(waktu,Xall,'k-','linewidth',2);
32 xlim([waktu(1),waktu(end)])
33 title('Simulating CIR model using Monte Carlo')
34 xlabel('Time');
35 ylabel('Interest Rate');
```

Lampiran H

Script MATLAB untuk simulasi nilai *aggregate loss*

1. Aproksimasi Gamma

```
1 %%Read data
2 data = xlsread('E:\AA MY ALL DOCUMENT\AA MATEMATIKA\AA
    .TA\DATA\rockyloss3.csv');
3
4 %%Menghitung moment compound distribusi
5 musev=5.135;
6 momensatu=exp(musev+(sigmasev^2)/2)
7 momendua=exp(2*musev+(2^2)*(sigmasev^2)/2)
8 momentiga=exp(3*musev+(3^2)*(sigmasev^2)/2)
9 momenempat=exp(4*musev+(4^2)*(sigmasev^2)/2)
10 empat=lamdapoi*momenempat+3*(lamdapoi^2)*(momendua^2)
11 tiga=lamdapoi*momentiga
12 varian=lamdapoi*momendua
13
14
15 %%Menghitung momen aggregate loss
16 mean=lamdapoi*momensatu
17 stdr=(lamdapoi*momendua)^(1/2)
18 skewness=tiga/((lamdapoi*momendua)^(3/2))
19 kuartosis=(empat/(stdr^4))-3
20
21
22 %APPROKSIMASI GAMMA2
23 alpha=4/(skewness)^2
24 hasil=[];
25 for i=2:length(data)+1
26     z=(data(i-1,:)-mean)/stdr;
27     data(i-1,:);
28     h(i-1)=gamcdf(alpha+sqrt(alpha)*z,alpha);
29 end
30 hasil=[hasil,h]
31
32 %%Visualisasi Aproksimasi Gamma
33 plot(data,hasil,'m-o','DisplayName','gamma');hold on;
    grid on;
```

2. Aproksimasi Invers Gaussian

```
1 %%Read data
2 data = xlsread('E:\AA MY ALL DOCUMENT\AA MATEMATIKA\AA
    .TA\DATA\rockyloss3.csv');
3
4 %%Menghitung moment compound distribusi
```

```

5 musev=5.135;
6 momensatu=exp(musev+(sigmasev^2)/2)
7 momendua=exp(2*musev+(2^2)*(sigmasev^2)/2)
8 momentiga=exp(3*musev+(3^2)*(sigmasev^2)/2)
9 momenempat=exp(4*musev+(4^2)*(sigmasev^2)/2)
10 empat=lamdapoi*momenempat+3*(lamdapoi^2)*(momendua^2)
11 tiga=lamdapoi*momentiga
12 varian=lamdapoi*momendua
13
14 %%APPROKSIMASI INVERS GAUSSIAN
15 kumultan1=lamdapoi*momensatu
16 kumultan2=lamdapoi*momendua
17 kumultan3=lamdapoi*momentiga
18 m=3*(kumultan2^2)/kumultan3
19 b=kumultan3/(3*kumultan2)
20 xo=kumultan1-m
21
22 hasil1=[];
23 for i=2:length(data)+1
24 x=data(i-1,:)-xo;
25 data(i-1,:);
26 h1(i-1)=normcdf((b*x)^(-1/2))*(x-m))+exp((2*m)/b)*
    normcdf((-b*x)^(-1/2))*(x+m));
27 end
28 hasil1=[hasil1,h1]
29
30 %%Visualisasi Aproksimasi InversGaussian
31 plot(data,hasil1,'b-o','DisplayName','inverse-gaussian
    ');hold on; grid on;

```

3. pendekatan campuran

```

1 %%Read data
2 data = xlsread('E:\AA MY ALL DOCUMENT\AA MATEMATIKA\AA
    .TA\DATA\rockyloss3.csv');
3
4 %%Menghitung moment compound distribusi
5 musev=5.135;
6 momensatu=exp(musev+(sigmasev^2)/2)
7 momendua=exp(2*musev+(2^2)*(sigmasev^2)/2)
8 momentiga=exp(3*musev+(3^2)*(sigmasev^2)/2)
9 momenempat=exp(4*musev+(4^2)*(sigmasev^2)/2)
10 empat=lamdapoi*momenempat+3*(lamdapoi^2)*(momendua^2)
11 tiga=lamdapoi*momentiga
12 varian=lamdapoi*momendua
13
14 %%Menghitung momen aggregate loss
15 mean=lamdapoi*momensatu

```

```

16 stdr=(lamdapoi*momendua)^(1/2)
17 skewness=tiga/((lamdapoi*momendua)^(3/2))
18 kuartosis=(empat/(stdr^4))-3
19
20 %%kumulan
21 kumultan1=lamdapoi*momensatu
22 kumultan2=lamdapoi*momendua
23 kumultan3=lamdapoi*momentiga
24
25 %Parameter Gamma
26 alpha=4/(skewness)^2
27
28 %Parameter Invers Gaussian
29 m=3*(kumultan2^2)/kumultan3
30 b=kumultan3/(3*kumultan2)
31 xo=kumultan1-m
32
33 % APPROKSIMASI GAMMA- INVERS GAUSSIAN
34 ks=kuartosis
35 kf1=(6/alpha)%gamma
36 kf2=(5*kumultan3^2)/(3*kumultan2^3)%ig
37 omega2=(ks- kf2)/(kf1- kf2)
38 hasil2=[];
39
40 for i=2:length(data)+1
41     z=(data(i-1,:)-mean)/stdr;
42     x=data(i-1,:)-xo;
43     data(i-1,:);
44     h4(i-1)=gamcdf(alpha+sqrt(alpha)*z,alpha);
45     h5(i-1)=normcdf((b*x)^(-1/2)*(x-m))+exp((2*m)/b)
46     *normcdf((-b*x)^(-1/2)*(x+m));
47     h3(i-1)=(omega2)*h4(i-1)+(1-omega2)*h5(i-1);
48 end
49 hasil2=[hasil2,h3]
50
51 %%Visualisasi pendekatan campuran
52 plot(data,hasil2,'g-o','DisplayName','gamma-IG');hold
53 on; grid on;

```


Lampiran I

Script MATLAB untuk simulasi Harga Zero-Coupon bond

```

1 clear all; clc; cla
2
3
4 %%Read data
5 r=xlsread('E:\AA MY ALL DOCUMENT\AA MATEMATIKA\AA.TA\DATA\
    hasilinterest2.csv');
6
7 %%Masukan parameter model
8 k= 0.91; sigma= 0.5; Xt=0.0168; mu=2.4;
9
10 %%Masukan parameter estimasi
11 T=3;
12 z=1;
13 p=0.5;
14 F=0.880;
15 result=[];
16 waktu=[];
17
18 %%Estimasi harga obligasi bencana
19 for i=2:length(r)
20     gama= (k^2+2*sigma^2)^(1/2);
21     A=((2*gama*exp((k+gama)*(T/12)/2))/((k+gama)*(exp(gama*(
    T/12))-1)+2*gama))^(2*k*mu/sigma^2);
22     B=(2*(exp(gama*(T/12))-1))/((gama+k)*(exp(gama*(T/12))
    -1)+2*gama);
23     Bhasil(i-1)=A*exp(-B*r(i-1,2));
24     time(i-1)=i-1;
25     harga(i-1)=Bhasil(i-1)*z*(p+(1-p)*F);
26 end
27
28
29 %Visualisasi
30 t = datetime(2020,2,1) + calmonths(0:36);
31 price=[harga']
32 waktu=[t']
33 bar(waktu,price,'b')
34 ylim([0.8790 0.8809])
35 title('Harga Zero-Coupon CAT Bond')
36 xlabel('Waktu')
37 ylabel('Harga')

```

Lampiran J

Script MATLAB untuk simulasi *Harga Zero-Coupon bond* berdasarkan batas atas kerugian bencana (*D*)

```

1 clear all; clc; cla
2
3
4 %%Read data
5 data=xlsread('E:\AA MY ALL DOCUMENT\AA MATEMATIKA\AA.TA\DATA
   \excampuran.csv');
6
7 %%Masukan parameter model
8 k= 0.91; sigma= 0.5; Xt=0.0168; mu=2.4;
9
10 %%Masukan parameter estimasi
11 z=1
12 p=0.5
13 F=0.880
14 T=3;
15 price=[];
16 result=[];
17 waktu=[];
18
19
20 %%Estimasi harga obligasi bencana
21 for i=1:length(data)
22     gama= (k^2+2*sigma^2)^(1/2);
23     A= ((2*gama*exp((k+gama)*(T/12)/2))/((k+gama)*(exp(gama*(
   T/12))-1)+2*gama))^(2*k*mu/sigma^2);
24     B= (2*(exp(gama*(T/12))-1))/((gama+k)*(exp(gama*(T/12))
   -1)+2*gama);
25     Bhasil=A*exp(-B*r);
26     time(i)=data(i);
27     harga(i)=Bhasil*z*(p+(1-p)*data(i,2));
28 end
29
30
31 %%Visualisasi
32 result=[Bhasil'];
33 waktu=[time'];
34 price=[harga']
35 tampung=[waktu,price]
36 bar(tampung(:,2),0.4)
37 set(gca, 'XTickLabel',{' $21', '$100', '$2300'})
38 title('Harga Zero-Coupon CAT Bond')
39 xlabel('Batas Kerugian Aggregate Loss')
40 ylabel('Harga')

```

Lampiran K
Script MATLAB untuk simulasi Harga Zero-Coupon bond
berdasarkan waktu jatuh tempo

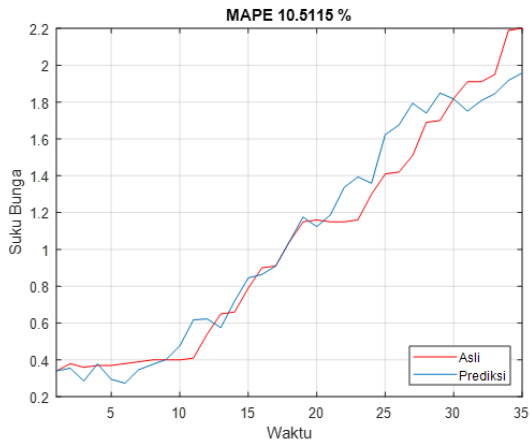
```

1 clear all; clc; cla
2
3 %%Masukan parameter model
4 k= 0.91; sigma= 0.5; Xt=0.0168; mu=2.4;
5
6 %%Masukan parameter estimasi
7 z=1
8 p=0.5
9 F=0.87797
10 C=0.3
11 price=[];
12 result=[];
13 waktu=[];
14
15 %%Estimasi harga obligasi bencana
16 for T=1:10
17     gama= (k^2+2*sigma^2)^(1/2);
18     A=((2*gama*exp((k+gama)*(T/12)/2))/((k+gama)*(exp(gama*(T/12))-1)+2*gama))^(2*k*mu/sigma^2);
19     B=(2*(exp(gama*(T/12))-1))/((gama+k)*(exp(gama*(T/12))-1)+2*gama);
20     Bhasil(T)=A*exp(-B*r);
21     time(T)=T;
22     harga(T)=Bhasil(T)*z*(p+(1-p)*F);
23 end
24
25 %Visualisasi
26 result=[Bhasil'];
27 waktu=[time'];
28 price=[harga']
29 tampung=[waktu,price]
30 bar(tampung(:,2),0.4,'b')
31 text(1:length(price),price,num2str(harga'),'vert','bottom','horiz','center');
32 xlim([0 11])
33 title('Harga Zero-Coupon CAT Bond')
34 et(gcf,'Position',[100 100 700 600])
35 xlabel('Waktu Jatuh Tempo')
36 ylabel('Harga')

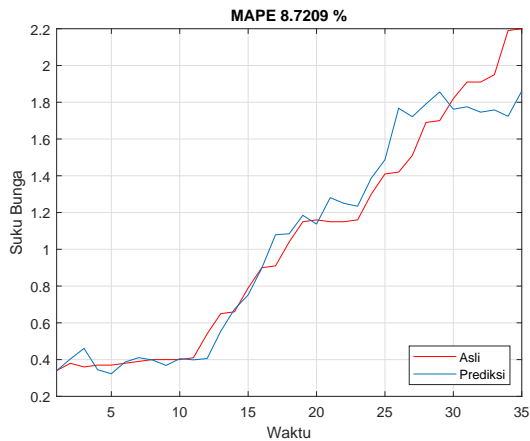
```

Lampiran L

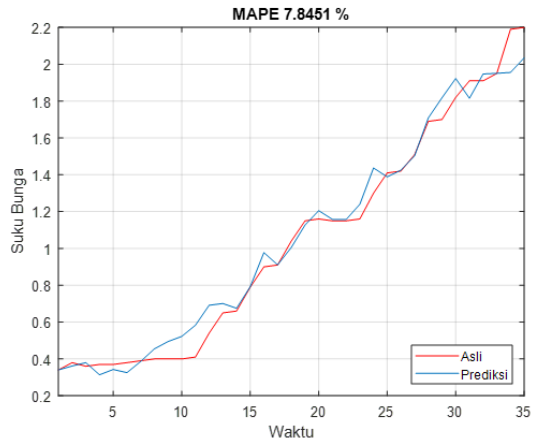
Simulasi model CIR dengan parameter *Grid Search*



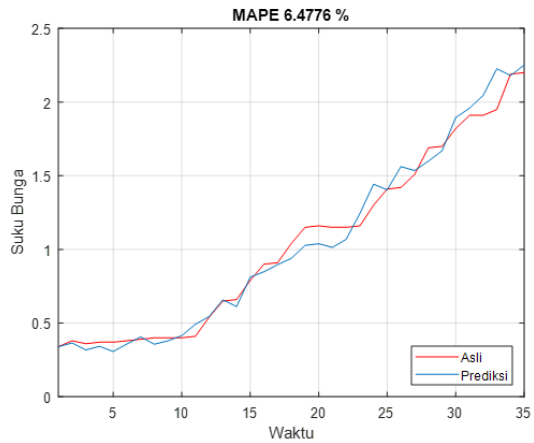
Gambar L-1. Estimasi Paramter Model CIR (1 Iterasi)



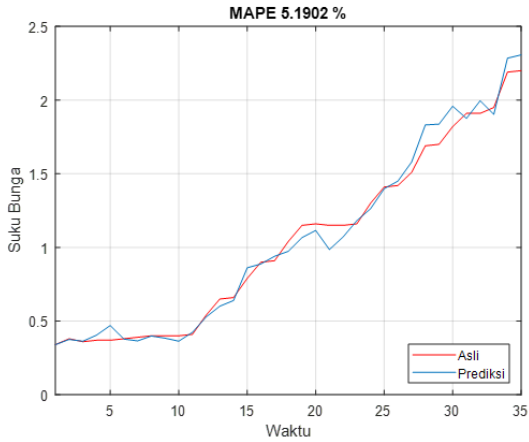
Gambar L-2. Estimasi Paramter Model CIR (10 Iterasi)



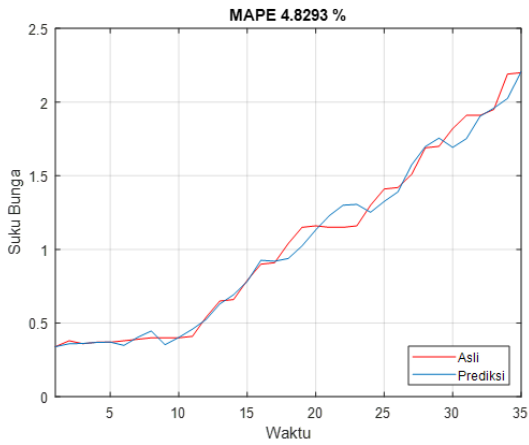
Gambar L-3. Estimasi Paramter Model CIR (100 Iterasi)



Gambar L-4. Estimasi Paramter Model CIR (1000 Iterasi)



Gambar L-5. Estimasi Paramter Model CIR (5000 Iterasi)



Gambar L-6. Estimasi Paramter Model CIR (10000 Iterasi)

Lampiran M
Hasil aproksimasi tingkat suku bunga dengan pendekatan
Monte Carlo

Tabel M-1. Hasil Aproksimasi Tingkat Suku Bunga

Waktu	Suku Bunga
1-Feb-20	1.58
1-Mar-20	1.613742389
1-Apr-20	1.642206004
1-May-20	1.68626173
1-Jun-20	1.702457009
1-Jul-20	1.734943807
1-Aug-20	1.745340177
1-Sep-20	1.747685401
1-Oct-20	1.761158728
1-Nov-20	1.755300745
1-Dec-20	1.758682986
1-Jan-21	1.76028472
1-Feb-21	1.810104011
1-Mar-21	1.830921984
1-Apr-21	1.831065911
1-May-21	1.830199895
1-Jun-21	1.82426886
1-Jul-21	1.816291847
1-Aug-21	1.834399117
1-Sep-21	1.882837801
1-Oct-21	1.912774665
1-Nov-21	1.94142188
1-Dec-21	1.975640141
1-Jan-22	1.971061176
1-Feb-22	1.963408265
1-Mar-22	1.984819449
1-Apr-22	1.964619398
1-May-22	1.977724662
1-Jun-22	1.998874888
1-Jul-22	1.998298367
1-Aug-22	1.985668473
1-Sep-22	1.988584094
1-Oct-22	2.010989118
1-Nov-22	2.056380414
1-Dec-22	2.052879611
1-Jan-23	2.036463711
2-Jan-23	2.043956686

Lampiran N
Nilai *aggregate loss*

Tabel N-1. Nilai *aggregate loss* dengan aproksimasi Gamma

S	$F(S)$
27.4	0.943
39.1	0.9497
53.7	0.9554
84.1	0.963
99.8	0.9658
126.5	0.9696
129.5	0.97
136.3	0.9708
137.6	0.971
187.2	0.9756
187.6	0.9757
198.1	0.9765
198.7	0.9765
203.8	0.9769
207.7	0.9772
229.6	0.9786
230.2	0.9787
254.3	0.9801
277.3	0.9813
368.5	0.985
375.6	0.9853
387.9	0.9857
420.8	0.9867
461.2	0.9878
504.9	0.9888
709.9	0.9923
914.3	0.9945
1220	0.9965
2390	0.9992

Tabel N-2. Nilai *aggregate loss* dengan aproksimasi Invers Gaussian

S	$F(S)$
27.4	0.8812
39.1	0.9028
53.7	0.9199
84.1	0.9407
99.8	0.9476
126.5	0.9562
129.5	0.957
136.3	0.9587
137.6	0.959
187.2	0.9683
187.6	0.9684
198.1	0.9698
198.7	0.9699
203.8	0.9706
207.7	0.9711
229.6	0.9736
230.2	0.9737
254.3	0.976
277.3	0.9779
368.5	0.9835
375.6	0.9839
387.9	0.9844
420.8	0.9858
461.2	0.9872
504.9	0.9885
709.9	0.9926
914.3	0.995
1220	0.9969
2390	0.9993

Tabel N-3. Nilai *aggregate loss* dengan pendekatan campuran

S	$F(S)$
27.4	0.8936
39.1	0.9122
53.7	0.927
84.1	0.9452
99.8	0.9513
126.5	0.9589
129.5	0.9596
136.3	0.9611
137.6	0.9614
187.2	0.9698
187.6	0.9698
198.1	0.9712
198.7	0.9712
203.8	0.9718
207.7	0.9723
229.6	0.9746
230.2	0.9747
254.3	0.9768
277.3	0.9786
368.5	0.9838
375.6	0.9841
387.9	0.9847
420.8	0.986
461.2	0.9873
504.9	0.9886
709.9	0.9926
914.3	0.9949
1220	0.9968
2390	0.9993

Lampiran O
Harga *zero-coupon CAT bond* berdasarkan tingkat suku bunga

Tabel O-1. Harga *zero-coupon CAT bond*

Waktu	Harga
1-Mar-20	0.9125
1-Apr-20	0.9125
1-May-20	0.9124
1-Jun-20	0.9124
1-Jul-20	0.9124
1-Aug-20	0.9123
1-Sep-20	0.9123
1-Oct-20	0.9123
1-Nov-20	0.9122
1-Dec-20	0.9122
1-Jan-21	0.9122
1-Feb-21	0.9121
1-Mar-21	0.9121
1-Apr-21	0.9121
1-May-21	0.912
1-Jun-21	0.912
1-Jul-21	0.912
1-Aug-21	0.912
1-Sep-21	0.9119
1-Oct-21	0.9119
1-Nov-21	0.9119
1-Dec-21	0.9119
1-Jan-22	0.9118
1-Feb-22	0.9118
1-Mar-22	0.9118
1-Apr-22	0.9118
1-May-22	0.9118
1-Jun-22	0.9117
1-Jul-22	0.9117
1-Aug-22	0.9117
1-Sep-22	0.9117
1-Oct-22	0.9117
1-Nov-22	0.9116
1-Dec-22	0.9116
1-Jan-23	0.9116
2-Jan-23	0.9116

BIODATA PENULIS

Fatimah Azzahra Arham yang akrab dipanggil Bunga lahir di Bandung, 03 Desember 1997 dan bertempat Tinggal di Bekasi. Anak sulung dari empat bersaudara. Penulis pernah menempuh Pendidikan di SDI Al-Amanah, Bandung, SMPIT As-syifa Boarding School Subang, SMA Dwiwarna, Parung Bogor dan saat ini sedang menempuh pendidikan S1 di Departement Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember



(ITS), mengambil bidang peminatan Matematika Terapan yaitu Riset Operasi dan Pengolahan Data (ROPD). Selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika ITS, penulis aktif dalam beberapa organisasi dan kegiatan. Organisasi yang diikuti diantaranya Himnunan Mahasiswa Matematika ITS (HIMATIKA ITS) sebagai staff External Affair, Badan Eksekutif Mahasiswa ITS sebagai Staff Kebijakan Publik serta aktif di beberapa Event kampus seperti ILITS (Ini Lho ITS)Sebagai Staff public Relation , ITS EXPO Sebagai Staff public Relation serta OMITS (Olimpiade Matematika ITS) sebagai Steering Comite of Sponsorship. Apabila ada pertanyaan dan saran yang berhubungan dengan Tugas Akhir ini, bisa menghubungi penulis via email bungaaazzahra@gmail.com atau LINE @bungaaazzahra.